

Habilitation à diriger des recherches :
Sur la commande de systèmes $(\max, +)$ linéaires

Laurent Hardouin

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés - CNRS FRE 2656
ISTIA - Université d'Angers

16 Juin 2004

Activités d'Encadrement et de Recherche 1994 - 2004

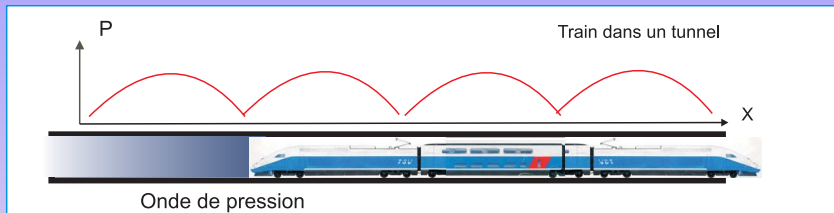
- **1994 - 1998** : Sur le contrôle acoustique actif, en collaboration avec le LEA de Poitiers
- 1994 - .. : Sur la commande de systèmes $(\max,+)$ linéaires

Activités d'Encadrement et de Recherche 1994 - 2004

- **1994 - 1998** : Sur le contrôle acoustique actif, en collaboration avec le LEA de Poitiers
- **1994 - ..** : Sur la commande de systèmes $(\max,+)$ linéaires

Contrôle des ondes de pressions dans les voitures TGV

Y. Gervais, G. Mariaux, 1994, Contrat LEA/ GEC-Alsthom



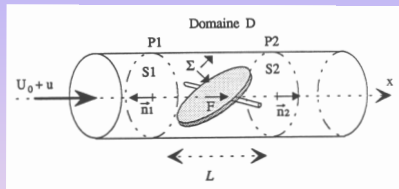
Objectif : limiter les variations de pression lors de la traversée de tunnel

Moyens : Contrôle d'une vanne mobile dans les conduits de renouvellement d'air. Minimisation en temps réel d'un critère quadratique tenant compte de la dérivée de la pression dans la voiture et de la fermeture de la vanne.

Contrôle d'une vanne oscillante en écoulement

J. Laumonier, P. Micheau, P. Jean, Acustica 96, IEEE CST 96

Objectif : Réalisation d'un terminaison anéchoïque active

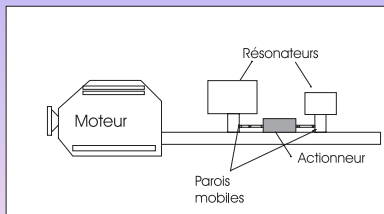


Moyens : Une vanne oscillant en écoulement \Leftrightarrow transducteur acoustique non linéaire. Contrôle du mouvement pour adapter l'impédance en amont de la vanne.

Contrôle semi-actif des ondes de pression à l'aide de résonateurs d'Helmoltz

X. Chiron (94), Y. Piaugeard (96), E. Tuloup (97), J. laumonier

Objectif : Atténuation des ondes de pression à l'échappement



Moyens : Contrôle des caractéristiques géométriques d'un résonateur d'Helmoltz pour atténuer les ondes. Acquisition synchrone, décomposition en séries de Fourier.

Sur la commande de systèmes $(\max,+)$ linéaires

La petite histoire

- 1990** Création du LISA par J.L Ferrier, Systèmes à Événements Discrets.
- 1992 Jean-Louis Boimond débute la thématique $(\max,+)$.
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

Sur la commande de systèmes $(\max,+)$ linéaires

La petite histoire

- 1990 Création du LISA par J.L Ferrier, Systèmes à Événements Discrets.
- 1992 Jean-Louis Boimond débute la thématique $(\max,+)$.
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

Sur la commande de systèmes $(\max,+)$ linéaires

La petite histoire

- 1990 Création du LISA par J.L Ferrier, Systèmes à Événements Discrets.
- 1992 Jean-Louis Boimond débute la thématique $(\max,+)$.
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

la petite histoire (bis)

La petite histoire

- 1990 Création du LISA par J.L Ferrier, Systèmes à Événements Discrets.
- 1992 Jean-Louis Boimond débute la thématique $(\max,+)$.
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

1981 Naissance de l'équipe $(\max,+)$ de l'INRIA Rocquencourt.

1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".

1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.

1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".

1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.

1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

la petite histoire (bis)

La petite histoire

- 1990 Création du LISA par J.L Ferrier, Systèmes à Événements Discrets.
- 1992 Jean-Louis Boimond débute la thématique (max,+).
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

1981 Naissance de l'équipe (max,+) de l'INRIA Rocquencourt.

1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".

1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.

1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".

1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.

1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

la petite histoire (bis)

La petite histoire

- 1990 Création du LISA par J.L Ferrier, Systèmes à Événements Discrets.
- 1992 Jean-Louis Boimond débute la thématique $(\max,+)$.
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

1981 Naissance de l'équipe $(\max,+)$ de l'INRIA Rocquencourt.

1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".

1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.

1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioides".

1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.

1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

la petite histoire (bis)

La petite histoire

- 1990 Création du LISA par J.L Ferrier, Systèmes à Événements Discrets.
- 1992 Jean-Louis Boimond débute la thématique $(\max,+)$.
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

- 1981 Naissance de l'équipe $(\max,+)$ de l'INRIA Rocquencourt.
- 1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".
- 1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.
- 1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".
- 1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.
- 1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

la petite histoire (bis)

La petite histoire

- 1990 Création du LISA par J.L Ferrier, Systèmes à Événements Discrets.
- 1992 Jean-Louis Boimond débute la thématique $(\max,+)$.
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

- 1981 Naissance de l'équipe $(\max,+)$ de l'INRIA Rocquencourt.
- 1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".
- 1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.
- 1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".
- 1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.
- 1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

la petite histoire (bis)

La petite histoire

1990 Création du LISA par J.L Ferrier, Systèmes à Événements Discrets.

1992 Jean-Louis Boimond débute la thématique $(\max,+)$.

1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

1981 Naissance de l'équipe $(\max,+)$ de l'INRIA Rocquencourt.

1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".

1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.

1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".

1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.

1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (ter)

1940 Birkhoff, Lattice Theory

1953 Dubreil-Jacotin, Lesieur, Croiset, leçons sur les treillis et structures algébriques ordonnées...

1956 Croiset, Applications Résiduées

1972 Blyth, Janowitz, Residuation Theory

1979 Cuningham-Green, Minimax Algebra

1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (bis)

1981 Naissance de l'équipe (max,+) de l'INRIA Rocquencourt.

1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".

1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.

1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".

1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.

1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

1980 Création de l'ISA par J.L. Fourier, Systèmes à Événements Discrets.

1992 Jean Louis Bézout débute la thématique (max,+)

1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (ter)

- 1940 Birkhoff, Lattice Theory
- 1953 Dubreil-Jacotin, Lesieur, Croiset, leçons sur les treillis et structures algébriques ordonnées...
- 1956 Croiset, Applications Résiduées
- 1972 Blyth, Janowitz, Residuation Theory
- 1979 Cuningham-Green, Minimax Algebra
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (bis)

- 1981 Naissance de l'équipe (max,+) de l'INRIA Rocquencourt.
- 1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".
- 1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.
- 1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".
- 1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.
- 1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire

- 1980 Création de LISA par J.L. Fourier, Systèmes à Endossements Discrètes.
- 1982 Jean Louis Raymond débute la thématique (max,+)
- 1984 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'84, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (ter)

1940 Birkhoff, Lattice Theory

1953 Dubreil-Jacotin, Lesieur, Croisot, leçons sur les treillis et structures algébriques ordonnées...

1956 Croisot, Applications Résiduées

1972 Blyth, Janowitz, Residuation Theory

1979 Cuningham-Green, Minimax Algebra

1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (bis)

1981 Naissance de l'équipe (max,+) de l'INRIA Rocquencourt.

1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".

1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.

1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".

1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.

1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

1980 Création de LISA par J.L. Fourier, Systèmes à Événements Discrets.

1982 Jean Louis Bézout débute la thématique (max,+)

1984 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'84, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (ter)

- 1940 Birkhoff, Lattice Theory
- 1953 Dubreil-Jacotin, Lesieur, Croiset, leçons sur les treillis et structures algébriques ordonnées...
- 1956 Croiset, Applications Résiduées
- 1972 Blyth, Janowitz, Residuation Theory
- 1979 Cuningham-Green, Minimax Algebra
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (bis)

- 1981 Naissance de l'équipe (max,+) de l'INRIA Rocquencourt.
- 1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".
- 1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.
- 1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".
- 1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.
- 1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

1980 Création de LISA par J.L. Fourier, Systèmes à Evénements Discrets.

1982 Jean Louis Roussier débute la thématique (max,+)

1984 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'84, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (ter)

- 1940 Birkhoff, Lattice Theory
- 1953 Dubreil-Jacotin, Lesieur, Croisot, leçons sur les treillis et structures algébriques ordonnées...
- 1956 Croisot, Applications Résiduées
- 1972 Blyth, Janowitz, Residuation Theory
- 1979 Cuningham-Green, Minimax Algebra
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (bis)

- 1981 Naissance de l'équipe (max,+) de l'INRIA Rocquencourt.
- 1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".
- 1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.
- 1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".
- 1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.
- 1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

1980 Création de LISA par J.L. Fourier, Systèmes à Evénements Discrets.

1992 Jean Louis Bézout débute la thématique (max,+)

1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (ter)

- 1940 Birkhoff, Lattice Theory
- 1953 Dubreil-Jacotin, Lesieur, Croisot, leçons sur les treillis et structures algébriques ordonnées...
- 1956 Croisot, Applications Résiduées
- 1972 Blyth, Janowitz, Residuation Theory
- 1979 Cuningham-Green, Minimax Algebra
- 1994 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'94, Sophia-Antipolis.

La petite histoire (bis)

- 1981 Naissance de l'équipe (max,+) de l'INRIA Rocquencourt.
- 1988 Thèse de P. Moller, "Théorie algébrique des SED".
- 1992 "Synchronization and Linearity", Baccelli, Cohen, Olsder, Quadrat.
- 1992 Thèse de S. Gaubert, "Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes".
- 1993 Thèse de H. Braker, "Algorithms and Applications in Timed DES", Delft university.
- 1994 WODES'94, Sophia-Antipolis.

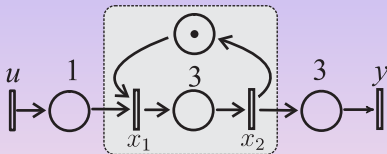
La petite histoire

- 1980 Création de LISA par J.L. Fourier, Systèmes à Entassement Discrets.
- 1982 Jean Louis Raymond débute la thématique (max,+)
- 1984 Workshop on Discrete Event Dynamic Systems WODES'84, Sophia-Antipolis.

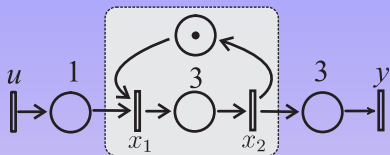
Systemes (max,+) Linéaires

Définition

Systemes caractérisés par des phénomènes de retard et de synchronisation.



Modélisation de GET dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$



Dateur [Cohen et al., IEEE TAC, 85]

Un dateur $x_i(k)$: date à laquelle se produit le $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition i (numérotés à partir de 0).

Sous la condition de fonctionnement "au plus tôt":

$$x_1(k) = \max(1 + u_1(k), x_2(k - 1))$$

$$x_2(k) = 3 + x_1(k)$$

$$y_1(k) = 3 + x_2(k)$$

Dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$

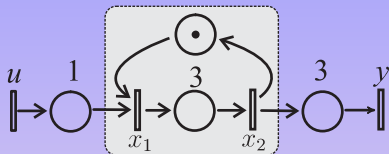
► $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$:

$$x_1(k) = 1 \otimes u_1(k) \oplus x_2(k - 1)$$

$$x_2(k) = 3 \otimes x_1(k)$$

$$y_1(k) = 3 \otimes x_2(k)$$

Modélisation de GET dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$



Dateur [Cohen et al., IEEE TAC, 85]

Un dateur $x_i(k)$: date à laquelle se produit le $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition i (numérotés à partir de 0).

Généralisation

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k)$$

$$y(k) = Cx(k)$$

La transformée en γ [Cohen et al, *Algebraic tools...*, 1989]

La transformée en γ d'un dateur $x(k)$ correspond à la série formelle $x(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \gamma^k x(k)$.

Soit pour le système précédent, dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$:

$$x_1(\gamma) = 1u_1(\gamma) \oplus \gamma x_2(\gamma)$$

$$x_2(\gamma) = 3x_1(\gamma)$$

$$y_1(\gamma) = 3x_2(\gamma)$$

Représentation d'état - Transfert

► + d'infos :

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \end{cases} \Rightarrow y = CA^*Bu = Hu$$

Pourquoi la commande ?

La commande optimale

[Cohen et al.], Algebraic Tools for the Performance Evaluation of DES, IEEE TAC 89



Objectif :

► Résiduation

Calculer la plus grande commande u telle que $y \preceq z$, où z est la sortie désirée :

$$CA^*Bu \preceq z.$$

Commande Optimale :

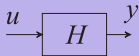
Si z est connue *a priori* alors la plus grande commande est

$$u_{opt} = (CA^*B) \backslash z.$$

Synthèse d'un précompensateur

[Gruet 1995, Libeaut 1996, Cottenceau 1999, Maia 2003]

Principe :



système
nominal

Objectif :

Trouver le plus grand P tel que :

$$HP \preceq G_{ref}$$

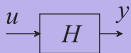
Expression du précompensateur optimal

$$P_{opt} = H \setminus G_{ref}$$

Synthèse d'un précompensateur

[Gruet 1995, Libeaut 1996, Cottenceau 1999, Maia 2003]

Principe :



système
nominal



système
de
référence

Objectif :

Trouver le plus grand P tel que :

$$HP \preceq G_{ref}$$

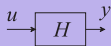
Expression du précompensateur optimal

$$P_{opt} = H \setminus G_{ref}$$

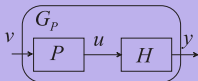
Synthèse d'un précompensateur

[Gruet 1995, Libeaut 1996, Cottenceau 1999, Maia 2003]

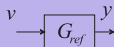
Principe :



système
nominal



système
précompensé



système
de
référence

Objectif :

Trouver le plus grand P tel que :

$$HP \preceq G_{ref}$$

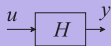
Expression du précompensateur optimal

$$P_{opt} = H \setminus G_{ref}$$

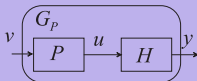
Synthèse d'un précompensateur

[Gruet 1995, Libeaut 1996, Cottenceau 1999, Maia 2003]

Principe :



système
nominal



système
précompensé



système
de
référence

Objectif :

Trouver le plus grand P tel que :

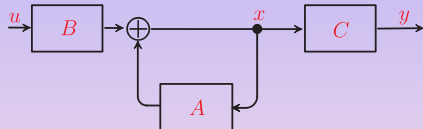
$$HP \preceq G_{ref}$$

Expression du précompensateur optimal

$$P_{opt} = H \setminus G_{ref}$$

Synthèse d'un correcteur de type retour d'état

[Cottenceau 1999, Maia 2003, Lhommeau 2003]



Equations du système :

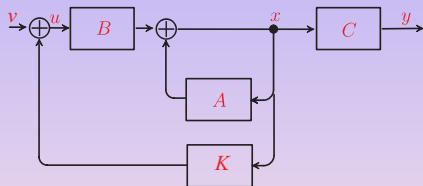
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \oplus Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Transfert

$$y = CA^*Bu$$

Synthèse d'un correcteur de type retour d'état

[Cottenceau 1999, Maia 2003, Lhommeau 2003]



Système corrigé :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \oplus B(v \oplus Kx) \\ y = Cx \end{cases}$$

Transfert corrigé :

$$y = C(A \oplus BK)^* Bv$$

Objectif :

Trouver le plus grand K tel que :

$$C(A \oplus BK)^* B \preceq G_{ref}$$

Synthèse d'un correcteur de type retour d'état

Demarche :

- L'objectif :

$$C(A \oplus BK)^* B \preceq G_{ref} \Leftrightarrow (A \oplus BK)^* B \preceq A^* B ((CA^* B) \setminus G_{ref})$$

- $\hat{\mathcal{G}} = A^* B ((CA^* B) \setminus G_{ref})$ est le plus grand transfert entre u et x qui respecte la contrainte et qui appartient à $\text{Im} A^* B$.
- Cet élément génère l'idéal principal

$$\mathcal{G} = \{x | x \preceq \hat{\mathcal{G}}\}$$

Synthèse d'un correcteur de type retour d'état

Demarche :

- L'objectif :

$$C(A \oplus BK)^* B \preceq G_{ref} \Leftrightarrow (A \oplus BK)^* B \preceq A^* B((CA^* B) \setminus G_{ref})$$

- $\hat{\mathcal{G}} = A^* B((CA^* B) \setminus G_{ref})$ est le plus grand transfert entre u et x qui respecte la contrainte et qui appartient à $\text{Im}A^* B$.
- Cet élément génère l'idéal principal

$$\mathcal{G} = \{x \mid x \preceq \hat{\mathcal{G}}\}$$

Synthèse d'un correcteur de type retour d'état

Demarche :

- L'objectif :

$$C(A \oplus BK)^* B \preceq G_{ref} \Leftrightarrow (A \oplus BK)^* B \preceq A^* B((CA^* B) \oslash G_{ref})$$

- $\hat{\mathcal{G}} = A^* B((CA^* B) \oslash G_{ref})$ est le plus grand transfert entre u et x qui respecte la contrainte et qui appartient à $\text{Im}A^* B$.
- Cet élément génère l'idéal principal

$$\mathcal{G} = \{x | x \preceq \hat{\mathcal{G}}\}$$

Synthèse d'un correcteur de type retour d'état

Proposition :

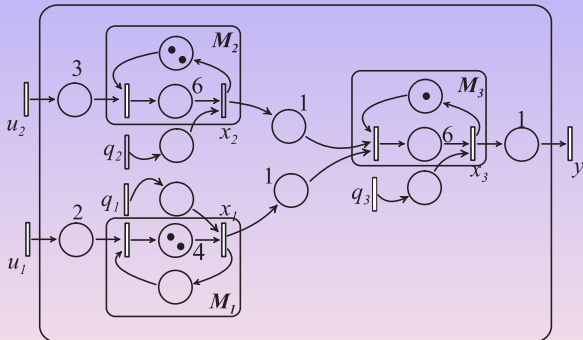
Si $G_{ref} \succeq CA^*B = H$ alors le plus grand correcteur K qui assure $(A \oplus BK)\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$ est donné par :

$$\hat{K} = B \setminus \hat{\mathcal{G}} / \hat{\mathcal{G}}$$

Application : Commande en présence de perturbation

Lagrange 2002, Lhommeau 2003

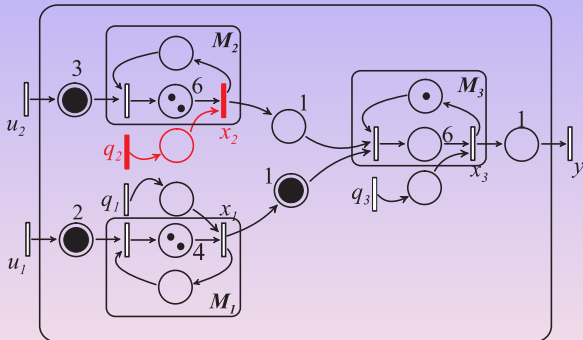
Présentation du problème :



Application : Commande en présence de perturbation

Lagrange 2002, Lhommeau 2003

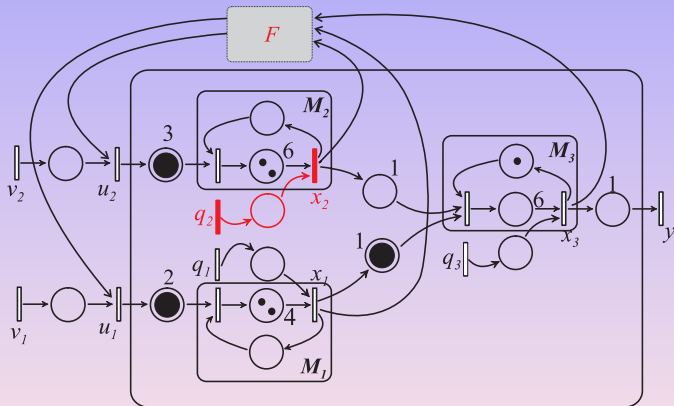
Présentation du problème :



Application : Commande en présence de perturbation

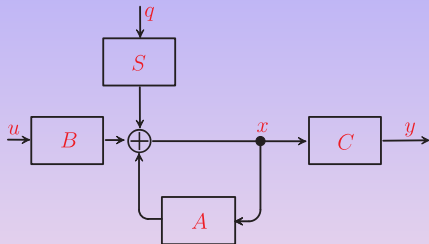
Lagrange 2002, Lhommeau 2003

Présentation du problème :



Application : Commande en présence de perturbation

Lagrange 2002, Lhommeau 2003



Représentation d'état :

$$x = Ax \oplus Bu \oplus Sq$$

$$y = Cx$$

Relation de transfert :

$$y = CA^*Bu \oplus CA^*Sq$$

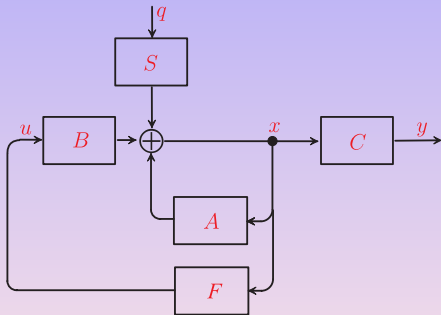
Objectif :

Déterminer la plus grande commande $u = Fx$ telle que

$$\begin{aligned} y &= C(A \oplus BF)^*Sq \\ &= CA^*Sq \end{aligned}$$

Application : Commande en présence de perturbation

Lagrange 2002, Lhommeau 2003



Représentation d'état :

$$x = Ax \oplus Bu \oplus Sq$$

$$y = Cx$$

Relation de transfert :

$$y = CA^*Bu \oplus CA^*Sq$$

Objectif :

Déterminer la plus grande commande $u = Fx$ telle que

$$y = C(A \oplus BF)^*Sq$$

$$= CA^*Sq$$

Application : Commande en présence de perturbation

Objectif :

► définition

$$(A \oplus BF)^* S \stackrel{\ker C}{\equiv} A^* S$$

Le plus grand élément de $[A^* S]_C$ [Cohen et al. 96] :

$$\Pi^C(A^* S) = C \setminus CA^* S$$

Le plus grand idéal principal A -invariant ($A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$) inclus dans $[A^* S]_C$:

$$\mathcal{G} = \{x \mid x \preceq \hat{\mathcal{G}} = A^* \setminus \Pi^C(A^* S)\}$$

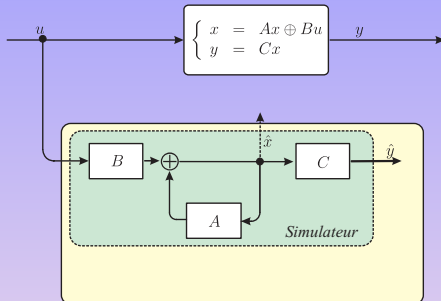
Le plus grand correcteur F tel que $(A \oplus BF)\mathcal{G} \subset \mathcal{G}$:

$$\hat{F} = B \setminus \hat{\mathcal{G}} \setminus \hat{\mathcal{G}}$$

Exemple :

Synthèse d'un observateur :

D. Rat 1998, C.A. Maia 2004



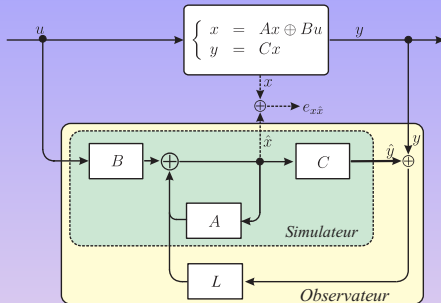
Objectif :

Obtenir le plus grand L (donc le plus grand \hat{x}) tel que $\hat{y} \preceq y$.

- le modèle nominal est supposé être le plus rapide.
- le plus grand L qui garantit $y = \hat{y}$ (le plus robuste).

Synthèse d'un observateur :

D. Rat 1998, C.A. Maia 2004



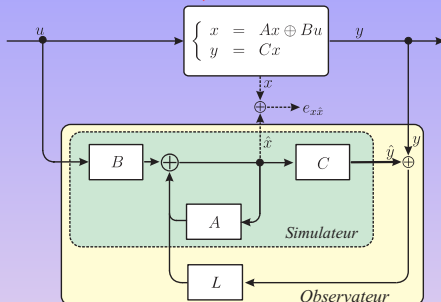
Objectif :

Obtenir le plus grand L (donc le plus grand \hat{x}) tel que $\hat{y} \preceq y$.

- le modèle nominal est supposé être le plus rapide.
- le plus grand L qui garantit $y = \hat{y}$ (le plus robuste).

Synthèse d'un observateur :

D. Rat 1998, C.A. Maia 2004



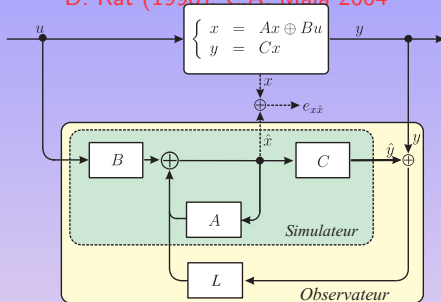
Objectif :

Obtenir le plus grand L (donc le plus grand \hat{x}) tel que $\hat{y} \preceq y$.

- le modèle nominal est supposé être le plus rapide.
- le plus grand L qui garantit $y = \hat{y}$ (le plus robuste).

Synthèse d'un observateur :

D. Rat (1998) C.A. Maia 2004



Objectif :

Obtenir le plus grand \hat{x} tel que $\hat{y} = C\hat{x} \preceq y = Cx$

$$C\hat{x} \preceq Cx \Leftrightarrow C(\hat{x} \oplus x) = Cx$$

On note $e_{\hat{x}x} = \hat{x} \oplus x$

Synthèse d'un observateur :

Expressions de $e_{\hat{x}x}$:

$$\hat{x} \oplus x = A\hat{x} \oplus Bu \oplus LC(\hat{x} \oplus x) \oplus Ax \oplus Bu$$

$$e_{\hat{x}x} = (A \oplus LC)e_{\hat{x}x} \oplus Bu$$

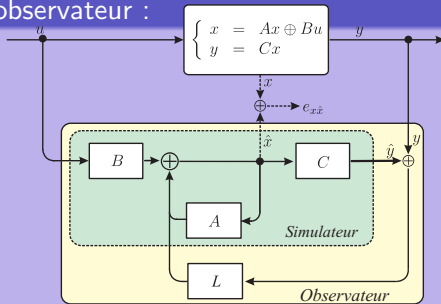
$$= (A \oplus LC)^* Bu.$$

Objectif : trouver le plus grand L tel que,

$$(A \oplus LC)^* B \stackrel{\ker C}{\equiv} A^* B.$$

Synthèse d'un observateur :

Structure de l'observateur :

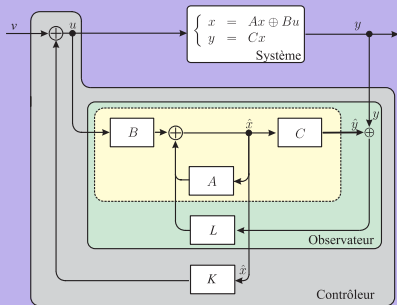


Expression de L_{opt} :

$$L_{opt} = CA^* \setminus CA^* B \setminus CA^* B.$$

Contrôle de type retour de sortie :

Principe :



Relations de transfert :

$$\begin{aligned} x &= A^*B(K(A \oplus LC)^*B)^*v \\ y &= CA^*B(K(A \oplus LC)^*B)^*v. \end{aligned}$$

Contrôle de type retour de sortie :

Objectif :

$$\begin{aligned} CA^*B(K(A \oplus LC)^*B)^* &\preceq G_{ref} \\ \Leftrightarrow A^*B(K(A \oplus LC)^*B)^* &\preceq A^*B((CA^*B) \setminus G_{ref}) = \hat{\mathcal{G}} \end{aligned}$$

On considère l'idéal principal : $\mathcal{G} = \{x | x \preceq \hat{\mathcal{G}}\}$

Correcteur \hat{K} :

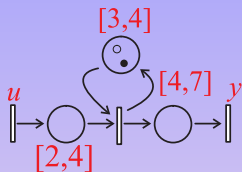
$$\hat{K} = B \setminus \hat{\mathcal{G}} \setminus \hat{\mathcal{G}} \setminus (A \oplus LC)^*$$

Propriété :

La stratégie de contrôle utilisant simultanément L_{opt} et \hat{K} est plus performante que celle utilisant un retour de sortie [Cottenceau et al. 99].

Modélisation de systèmes $(\max, +)$ -linéaires incertains :

[Lhommeau 2003]



Ce GET incertain admet un modèle dans $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])$

$$x(\gamma) = [3\gamma^2, 4\gamma]x(\gamma) \oplus [2, 4]u(\gamma)$$

$$y(\gamma) = [4, 7]x(\gamma)$$

Le transfert entrée sortie s'exprime :

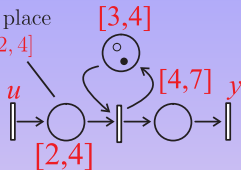
$$y(\gamma) = [6(3\gamma^2)^*, 11(4\gamma)^*]u(\gamma) = [\underline{H}, \overline{H}]u(\gamma) = \mathbf{H}u(\gamma)$$

L'intervalle $[\underline{H}, \overline{H}]$ contient l'ensemble des *transferts possibles* du GET.

Modélisation de systèmes $(\max, +)$ -linéaires incertains :

[Lhommeau 2003]

La temporisation associée à la place est comprise dans l'intervalle $[2, 4]$



Ce GET incertain admet un modèle dans $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])$

$$x(\gamma) = [3\gamma^2, 4\gamma]x(\gamma) \oplus [2, 4]u(\gamma)$$

$$y(\gamma) = [4, 7]x(\gamma)$$

Le transfert entrée sortie s'exprime :

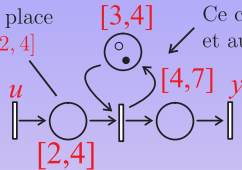
$$y(\gamma) = [6(3\gamma^2)^*, 11(4\gamma)^*]u(\gamma) = [\underline{H}, \overline{H}]u(\gamma) = \mathbf{H}u(\gamma)$$

L'intervalle $[\underline{H}, \overline{H}]$ contient l'ensemble des *transferts possibles* du GET.

Modélisation de systèmes $(\max, +)$ -linéaires incertains :

[Lhommeau 2003]

La temporisation associée à la place est comprise dans l'intervalle $[2, 4]$



Ce circuit contient au minimum 1 jeton et au maximum 2 jetons.

Ce GET incertain admet un modèle dans $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])$

$$x(\gamma) = [3\gamma^2, 4\gamma]x(\gamma) \oplus [2, 4]u(\gamma)$$

$$y(\gamma) = [4, 7]x(\gamma)$$

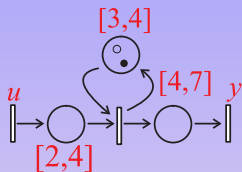
Le transfert entrée sortie s'exprime :

$$y(\gamma) = [6(3\gamma^2)^*, 11(4\gamma)^*]u(\gamma) = [\underline{H}, \overline{H}]u(\gamma) = \mathbf{H}u(\gamma)$$

L'intervalle $[\underline{H}, \overline{H}]$ contient l'ensemble des *transferts possibles* du GET.

Modélisation de systèmes $(\max, +)$ -linéaires incertains :

[Lhommeau 2003]



Ce GET incertain admet un modèle dans $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])$

$$x(\gamma) = [3\gamma^2, 4\gamma]x(\gamma) \oplus [2, 4]u(\gamma)$$

$$y(\gamma) = [4, 7]x(\gamma)$$

Le transfert entrée sortie s'exprime :

$$y(\gamma) = [6(3\gamma^2)^*, 11(4\gamma)^*]u(\gamma) = [\underline{H}, \overline{H}]u(\gamma) = \mathbf{H}u(\gamma)$$

L'intervalle $[\underline{H}, \overline{H}]$ contient l'ensemble des *transferts possibles* du GET.

La résiduation sur un dioïde d'intervalle

Relation d'ordre dans $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])$

$$\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}] \preceq_{I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])} \mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \underline{a} \preceq_{\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]} \underline{b} \text{ et } \overline{a} \preceq_{\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]} \overline{b}$$

Résiduation sur $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])$

L'application $\mathbf{L}_a : I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]) \rightarrow I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]), \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}$ est résiduable. L'application résiduée \mathbf{L}_a^\sharp est donnée par

$$\mathbf{L}_a^\sharp(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \backslash \mathbf{b} = [\underline{a} \backslash \underline{b} \wedge \overline{a} \backslash \overline{b}, \overline{a} \backslash \overline{b}].$$

Il s'agit du plus grand intervalle \mathbf{x} solution de :

$$\mathbf{a} \mathbf{x} \preceq_{I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])} \mathbf{b}$$

La résiduation sur un dioïde d'intervalle

Relation d'ordre dans $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])$

$$\mathbf{a} = [\underline{a}, \overline{a}] \preceq_{I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])} \mathbf{b} = [\underline{b}, \overline{b}] \Leftrightarrow \underline{a} \preceq_{\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]} \underline{b} \text{ et } \overline{a} \preceq_{\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]} \overline{b}$$

Résiduation sur $I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])$

L'application $\mathbf{L}_a : I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]) \rightarrow I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]), \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} \otimes \mathbf{x}$ est résiduable. L'application résiduée $\mathbf{L}_a^\#$ est donnée par

$$\mathbf{L}_a^\#(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \oslash \mathbf{b} = [\underline{a} \oslash \underline{b} \wedge \overline{a} \oslash \overline{b}, \overline{a} \oslash \overline{b}].$$

IL s'agit du plus grand intervalle \mathbf{x} solution de :

$$\mathbf{a} \mathbf{x} \preceq_{I(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])} \mathbf{b}$$

Synthèse de contrôleurs robustes



Objectif :

- Modifier le comportement du système pour que son transfert soit dans l'intervalle G_{ref} .

$$\mathcal{F} = \{F \mid G_F = (HF)^*H \subset G_{ref}\}$$

Synthèse de contrôleurs robustes

$$H \in [\underline{H}, \overline{H}] = \mathbf{H}$$



Objectif :

- Modifier le comportement du système pour que son transfert soit dans l'intervalle G_{ref} .

$$\mathcal{F} = \{F \mid G_F = (HF)^*H \subset G_{ref}\}$$

Synthèse de contrôleurs robustes

$$H \in [\underline{H}, \overline{H}] = \mathbf{H}$$

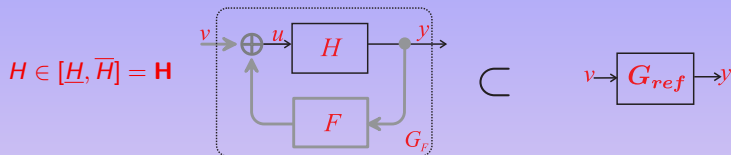


Objectif :

- Modifier le comportement du système pour que son transfert soit dans l'intervalle G_{ref} .

$$\mathcal{F} = \{F \mid G_F = (HF)^*H \subset G_{ref}\}$$

Synthèse de contrôleurs robustes



Objectif :

- Modifier le comportement du système pour que son transfert soit dans l'intervalle G_{ref} .

$$\mathcal{F} = \{F \mid \mathbf{G}_F = (\mathbf{H}F)^* \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_{ref}\}$$

Synthèse de contrôleurs robustes

Proposition: [Cottenceau 99, Lhommeau 03]

$\text{Im}M_{\mathbf{H}} | M_{\mathbf{H}} : \mathbb{I}(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]) \rightarrow \mathbb{I}(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma])$, $\mathbf{x} \mapsto (\mathbf{H}\mathbf{x})^* \mathbf{H}$ est résiduable, c'est-à-dire si $\mathbf{G}_{\text{ref}} \in \text{Im}M_{\mathbf{H}}$ alors $\hat{\mathbf{F}} = [\underline{\hat{\mathbf{F}}}, \overline{\hat{\mathbf{F}}}] = \mathbf{H} \overline{\mathbf{G}_{\text{ref}}} \overline{\mathbf{H}}$ satisfait $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{F}}\mathbf{H})^* = \mathbf{G}_{\text{ref}}$.

Propriétés ($\mathbf{G}_{\text{ref}} \in \text{Im}M_{\mathbf{H}}$)

- $\hat{\mathbf{F}} \subset \mathcal{F}$, où $\mathcal{F} = \{F \mid M_{\mathbf{H}}(F) = (\mathbf{H}F)^* \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_{\text{ref}}\}$;
- $\overline{\hat{\mathbf{F}}}$ correspond à la borne supérieure de \mathcal{F} .

Synthèse de contrôleurs robustes

Proposition: [Cottenceau 99, Lhommeau 03]

$\text{Im}M_{\mathbf{H}} | M_{\mathbf{H}} : \mathbb{I}(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]) \rightarrow \mathbb{I}(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]), \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{H}\mathbf{x})^* \mathbf{H}$ est résiduable, c'est-à-dire si $\mathbf{G}_{\text{ref}} \in \text{Im}M_{\mathbf{H}}$ alors $\hat{\mathbf{F}} = [\underline{\hat{\mathbf{F}}}, \overline{\hat{\mathbf{F}}}] = \mathbf{H} \overline{\mathbf{G}_{\text{ref}}} \mathbf{H}$ satisfait $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{F}}\mathbf{H})^* = \mathbf{G}_{\text{ref}}$.

Propriétés ($\mathbf{G}_{\text{ref}} \in \text{Im}M_{\mathbf{H}}$)

- $\hat{\mathbf{F}} \subset \mathcal{F}$, où $\mathcal{F} = \{F \mid M_{\mathbf{H}}(F) = (\mathbf{H}F)^* \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_{\text{ref}}\}$;
- $\overline{\hat{\mathbf{F}}}$ correspond à la borne supérieure de \mathcal{F} .

Synthèse de contrôleurs robustes

Proposition: [Cottenceau 99, Lhommeau 03]

$\text{Im}M_{\mathbf{H}} | M_{\mathbf{H}} : \mathbb{I}(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]) \rightarrow \mathbb{I}(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]), \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{H}\mathbf{x})^* \mathbf{H}$ est résiduable, c'est-à-dire si $\mathbf{G}_{\text{ref}} \in \text{Im}M_{\mathbf{H}}$ alors $\hat{\mathbf{F}} = [\underline{\hat{\mathbf{F}}}, \overline{\hat{\mathbf{F}}}] = \mathbf{H} \overline{\mathbf{G}_{\text{ref}}} \mathbf{H}$ satisfait $\mathbf{H}(\hat{\mathbf{F}}\mathbf{H})^* = \mathbf{G}_{\text{ref}}$.

Propriétés ($\mathbf{G}_{\text{ref}} \in \text{Im}M_{\mathbf{H}}$)

- $\hat{\mathbf{F}} \subset \mathcal{F}$, où $\mathcal{F} = \{F \mid M_{\mathbf{H}}(F) = (\mathbf{H}F)^* \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_{\text{ref}}\}$;
- $\overline{\hat{\mathbf{F}}}$ correspond à la borne supérieure de \mathcal{F} .

Exemple de correcteur robuste

Perspectives :

Perspectives :

- Transposer le problème du découplage. ▶ découplage
- Transposer les méthodes déterministes aux systèmes incertains. En particulier formaliser la mise en oeuvre de l'estimation d'état dans le dioïde d'intervalles.
- Valoriser les résultats. Mise en oeuvre sur des systèmes de production automatisés.
- Outils logiciels assistant les ingénieurs.
- Commande de systèmes (min,max,+).
- ...

Modélisation de GET dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$

$\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$

$\overline{\mathbb{Z}}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ est un demi-anneau idempotent (dioïde).

$$(\forall a \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}, a \oplus a = a)$$

◀ Retour

L'équation implicite

$$x = a \otimes x \oplus b \quad (1)$$

admet $x = a^* b = \left(\bigoplus_{k \geq 0} a^k \right) b$ comme plus petite solution.

La commande optimale

[Cohen et al.], Algebraic Tools for the Performance Evaluation of DES, IEEE TAC 89

Théorie de la résiduation [Croisot et al. 56, Blyth et al. 72, Cohen et al. 89]

◀ Retour

Les applications $L_a : x \mapsto a \otimes x$ et $R_a : x \mapsto x \otimes a$ définies sur un dioïde complet sont résiduables :

$ax \preceq b$ admet $L_a^\#(b) = a \setminus b$ comme plus grande solution,
 $xa \preceq b$ admet $R_a^\#(b) = b / a$ comme plus grande solution.

Application : Commande en présence de perturbation

Définition [Davey et al.,1990],[Cohen et al, 1996]

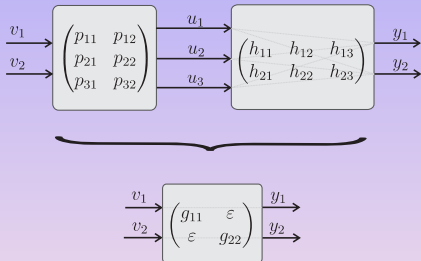
▶ retour

Le noyau d'une application $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, noté $\ker C$, est défini par la relation d'équivalence

$$x \stackrel{\ker C}{\equiv} x' \iff C(x) = C(x').$$

Perspectives :

En automatique classique, il s'agit de rendre une matrice de transfert diagonale.



← Retour