11èmes Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle, Paris, France, 16–17 mars 2016.

Ressources quantiques et traitement numérique des images

François CHAPEAU-BLONDEAU
Étienne BELIN
Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),
Université d'Angers, France.

L'imagerie et le quantique

• Au niveau physique, pour la formation de l'image,
$\longrightarrow$ optique quantique, imagerie quantique,
souvent avec des états quantiques à très grands nombres de photons,
des systèmes quantiques de dimension infinie.

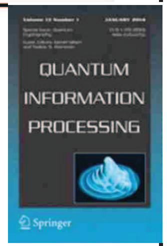
• Au niveau computationnel, pour le traitement de l'image,
$\longrightarrow$ traitement numérique des images,
avec des systèmes quantiques de dimension réduite,
comme des qubits ou des octets de qubits.

Analogue quantique du traitement numérique des images.

Motivé par miniaturisation des technologies,
et pour accéder à des moyens de traitement inexistants en classique.

Quantum Inf Process (2015) 14:1535–1537
DOI 10.1007/s11128-015-1001-5

CrossMark



Introductory words: Special issue on quantum image processing published by Quantum Information Processing

Salvador Elías Venegas-Andraca[1]

Published online: 30 April 2015

Quantum computation and quantum information are transitioning from emerging branches of science into mature research fields in science and engineering. In addition

Deux ressources quantiques essentielles :
exploitables pour le traitement d'image quantique.
• Le parallèlisme quantique
illustré ici (brièvement) via l'algorithme de Deutsch-Jozsa.
• L'intrication quantique
illustrée (plus spécifiquement) comme sujet principal de cet exposé.

Une notion clé de l'information quantique : Le qubit

Système quantique (photon, électron, atome), défini par un vecteur d'état

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |0\rangle + \alpha_1 |1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

dans base orthonormale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}_2$ sur $\mathbb{C}$ de dim. 2,
avec les coordonnées complexes $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{C}$ telles que
$|\alpha_0|^2 + |\alpha_1|^2 = \langle\psi|\psi\rangle = \|\psi\|^2 = 1$, avec $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger = [\alpha_0^*, \quad \alpha_1^*]$.

Quand le qubit dans l'état $|\psi\rangle$ est mesuré dans la base orthonormale $\{|0\rangle, |1\rangle\}$
$\Longrightarrow$ uniquement deux résultats possibles (règle de Born) :
état $|0\rangle$ avec probabilité $|\alpha_0|^2 = |\langle 0|\psi\rangle|^2$, ou
état $|1\rangle$ avec probabilité $|\alpha_1|^2 = |\langle 1|\psi\rangle|^2$.

(1) $\Longrightarrow$ qubit dans superposition quelconque de $|0\rangle$, $|1\rangle$ $\longrightarrow$ parallèlisme.

Algorithme de Deutsch-Jozsa : Test parallèle d’une fonction

D. Deutsch, R. Jozsa ; “Rapid solution of problems by quantum computation”; *Proceedings of the Royal Society of London A*, 439 (1993) 553–558.

Une fonction binaire classique $f(\cdot) \left| \begin{array}{ccc} \{0,1\}^N & \longrightarrow & \{0,1\} \\ 2^N \text{ valeurs} & \longrightarrow & 2 \text{ valeurs}, \end{array} \right.$

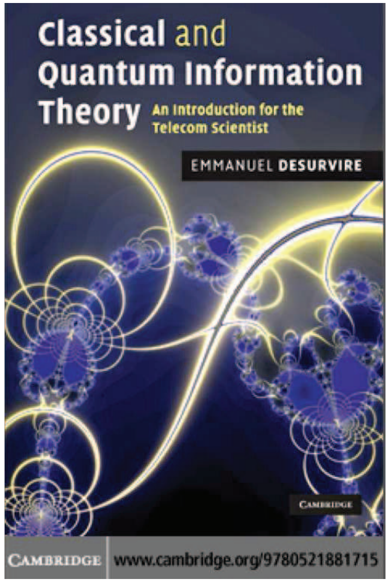
peut être *constante* (tout vers 0 ou 1) ou *équilibrée* (nombres égaux de 0, 1 en sortie).

Classiquement : Entre 2 et $\dfrac{2^N}{2}+1$ évaluations de $f(\cdot)$ pour décider.

Quantiquement : Une seule évaluation de $f(\cdot)$ suffit,
sur une superposition de l’ensemble des 2^N entrées possibles simultanément,
puis traitement de sortie en superposition pour extraire rép. binaire selon algo. DJ.

Parallèlisme a priori très pertinent en traitement d’images,
où typiquement on a à traiter de grandes quantités de données (qqs Moctets),
pour extraire (intelligemment) une petite quantité d’information (qqs bits).
(À explorer . . .)

Deutsch-Jozsa algorithm
(Desurvire 2009,
Cambridge Univ. Press)



382 Quantum database search algorithms

we obtain[1]

$$\begin{aligned} |\psi_2\rangle &= H^{\otimes n} H_2 |\psi_1\rangle \\ &= H^{\otimes n}|0\rangle^{\otimes n} \otimes H|1\rangle \\ &= |+\rangle^{\otimes n}|-\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}(|0\rangle+|1\rangle)^{\otimes n}\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left[\sum_{x_i\in\{0,1\}}|x_1x_2\ldots x_n\rangle\right]\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left[\sum_{x=0}^{2^n-1}|x\rangle\right]\frac{|0\rangle-|1\rangle}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \tag{19.7}$$

We call $|x\rangle$ the *query register*, similarly to the “register” in the classical von Neumann architecture (Chapter 15) the difference being that it is made of *qubits*. At ③, we obtain[2]

$$\begin{aligned} |\psi_3\rangle &= U_f|\psi_2\rangle \\ &= \sum_x \frac{|x\rangle}{\sqrt{2^n}}\frac{|0\oplus f(x)\rangle-|1\oplus f(x)\rangle}{\sqrt{2}} \\ &\equiv \sum_x \frac{(-1)^{f(x)}|x\rangle}{\sqrt{2^n}}|-\rangle. \end{aligned} \tag{19.8}$$

And at ④, after passing the top n-qubit through the parallel gate $H^{\otimes n}$, we obtain:

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= H^{\otimes n}|\psi_3\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2^n}}\left[\sum_x (-1)^{f(x)}H^{\otimes n}|x\rangle\right]|-\rangle. \end{aligned} \tag{19.9}$$

To develop the right-hand side in Eq. (19.9), we must calculate $H^{\otimes n}|x\rangle = H^{\otimes n}|x_1x_2\ldots x_n\rangle$. It is an easy exercise to establish that:

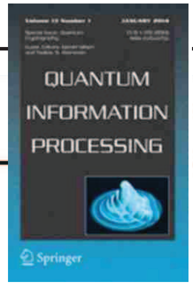
$$H^{\otimes n}|x\rangle = \sum_z (-1)^{x\cdot z}|z\rangle, \tag{19.10}$$

where $x\cdot z = x_1z_1+x_2z_2+\cdots+x_nz_n$ is a scalar product modulo 2. Combining Eqs. (19.9) and (19.10), we then obtain:

$$\begin{aligned} |\psi_4\rangle &= \frac{1}{2^n}\left[\sum_z\sum_x (-1)^{f(x)+x\cdot z}|z\rangle\right]|-\rangle \\ &\equiv |\Psi\rangle|-\rangle. \end{aligned} \tag{19.11}$$

Codage ou représentation quantique d’une image

Différentes approches envisageables,
selon propriétés visées,
encore largement en évolution.



Quantum Inf Process (2016) 15:1–35
DOI 10.1007/s11128-015-1195-6

A survey of quantum image representations

Fei Yan[1] · Abdullah M. Iliyasu[2] · Salvador E. Venegas-Andraca[3]

Received: 8 January 2015 / Accepted: 19 November 2015 / Published online: 11 December 2015

Abstract Quantum image processing (QIMP) is devoted to utilizing the quantum computing technologies to capture, manipulate, and recover quantum images in dif-

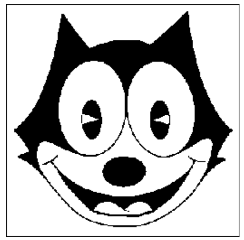
Ici, un codage invariant par changement de base et résistant au bruit.

Codage quantique d’une image

On dispose d’une image numérique classique.

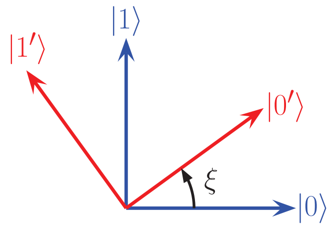
On envisage son codage quantique,
par exemple pour bénéficier en quantique de possibilités
• de haute densité de stockage ou de transmission,
• de traitement quantique.

Par exemple,
une image classique binaire
($\equiv$ un plan de bits d’une image 8-bits)
où chaque pixel a la valeur 0 ou 1.



En quantique,
chaque pixel serait représenté par les deux états $|0\rangle$, $|1\rangle$ d’un qubit.

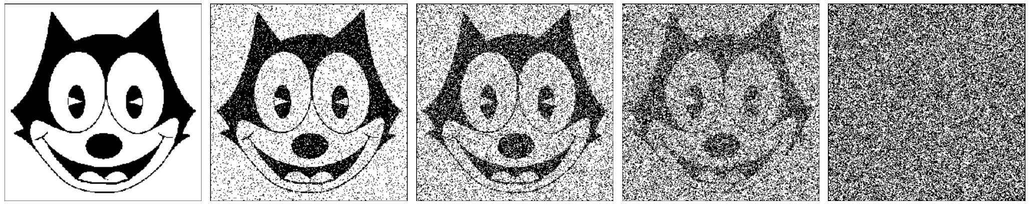
Mesure du qubit dans base $\{|0'\rangle, |1'\rangle\}$ tournée de ξ.



$$\begin{cases} |0'\rangle &= +\cos(\xi)\,|0\rangle + \sin(\xi)\,|1\rangle \;, \\ |1'\rangle &= -\sin(\xi)\,|0\rangle + \cos(\xi)\,|1\rangle \;, \end{cases}$$

Pixel à 0 $\longrightarrow$ codé par $|0\rangle$ $\longrightarrow$ mesuré dans base $\{|0'\rangle, |1'\rangle\}$ $\longrightarrow$
décodé 0 avec la probabilité $|\langle 0'|0\rangle|^2 = \cos^2(\xi)$.

Pixel à 1 $\longrightarrow$ codé par $|1\rangle$ $\longrightarrow$ mesuré dans base $\{|0'\rangle, |1'\rangle\}$ $\longrightarrow$
décodé 1 avec la probabilité $|\langle 1'|1\rangle|^2 = \cos^2(\xi)$.



$\xi = 0$ $\quad$ $\xi = 0.1\pi$ $\quad$ $\xi = 0.15\pi$ $\quad$ $\xi = 0.2\pi$ $\quad$ $\xi = 0.25\pi$

Mesure dans base tournée de ξ équivalent à bruit quantique bit-flip sur le qubit, avec la probabilité d'inversion (de flip) $p = \sin^2(\xi)$.

$$|0\rangle \xrightarrow{\;p\;} |1\rangle \;, \qquad |1\rangle \xrightarrow{\;p\;} |0\rangle \;,$$
$$\xrightarrow{\;1-p\;} |0\rangle \;. \qquad \xrightarrow{\;1-p\;} |1\rangle \;.$$

L'état du qubit est représentable par l'opérateur densité $|\psi\rangle\langle\psi|$,
avec $|\psi\rangle = |0\rangle$ pour un pixel à 0, ou $|\psi\rangle = |1\rangle$ pour un pixel à 1,
qui devient par l'effet du bruit de bit-flip, l'opérateur densité ρ d'un qubit bruité :

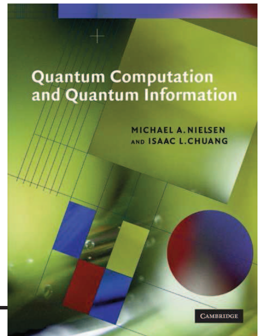
$$|\psi\rangle\langle\psi| \xrightarrow{\;\mathcal{N}\;} \rho = \mathcal{N}\big(|\psi\rangle\langle\psi|\big) = (1-p)\,|\psi\rangle\langle\psi| + p\,\sigma_x\,|\psi\rangle\langle\psi|\,\sigma_x^\dagger \;,$$

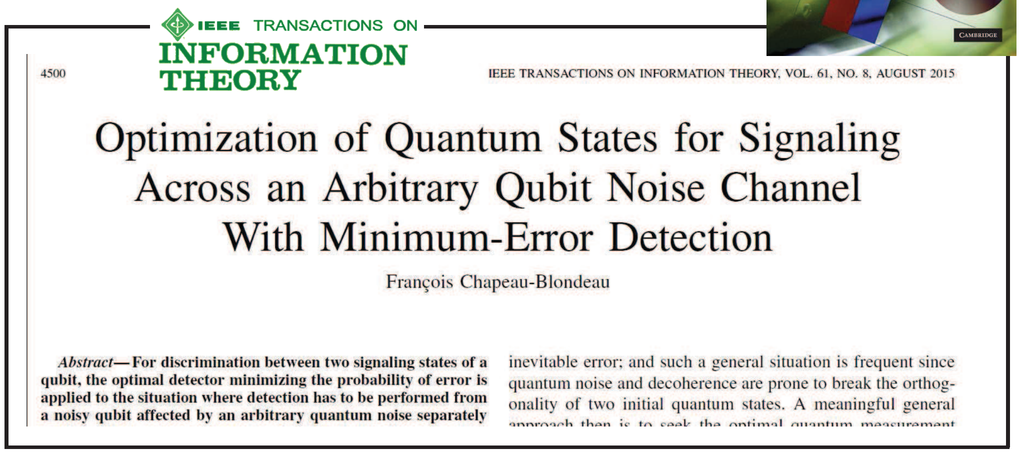
avec l'opérateur de Pauli $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ d'inversion.

Ainsi le qubit (non bruité) dans l'état (pur) $|\psi\rangle = |0\rangle$ ou $|1\rangle$
mesuré dans la base $\{|0'\rangle, |1'\rangle\}$ tournée de l'angle ξ, est équivalent au
qubit bruité dans l'état (mélangé) ρ mesuré dans la base non tournée $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Davantage sur le bruit quantique,
les opérateurs densité, le qubit bruité.

Nielsen & Chuang, 2000.





IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY

4500 IEEE TRANSACTIONS ON INFORMATION THEORY, VOL. 61, NO. 8, AUGUST 2015

Optimization of Quantum States for Signaling Across an Arbitrary Qubit Noise Channel With Minimum-Error Detection

François Chapeau-Blondeau

Abstract—For discrimination between two signaling states of a qubit, the optimal detector minimizing the probability of error is applied to the situation where detection has to be performed from a noisy qubit affected by an arbitrary quantum noise separately

inevitable error; and such a general situation is frequent since quantum noise and decoherence are prone to break the orthogonality of two initial quantum states. A meaningful general

Pour l'image binaire codée avec les deux états quantiques $|0\rangle$, $|1\rangle$,
comment lors du décodage par une mesure dans une base décalée $\{|0'\rangle, |1'\rangle\}$,
lutter contre l'effet néfaste d'un décalage angulaire $\xi \neq 0$,
équivalent à un bruit de probabilité de flip $p = \sin^2(\xi)$?

• **Approche classique :**

Par exemple, un code à répétition : un pixel est codé par 3 qubits :

valeur 0 du pixel $\longrightarrow$ codée par $|0\rangle\,|0\rangle\,|0\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle = |000\rangle$,
valeur 1 du pixel $\longrightarrow$ codée par $|1\rangle\,|1\rangle\,|1\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle \otimes |1\rangle = |111\rangle$,

ce qui réduit à $p^3 + 3(1-p)p^2$ la probabilité d'une erreur de décodage.

• **Approche quantique :**

Offre la possibilité d'un décodage exact, sans erreur, pour tout décalage ξ,
en exploitant l'intrication quantique.
$\longrightarrow$ Chaque pixel sera codé par une paire de qubits intriqués.

Qu'est-ce qu'une paire de qubits intriqués :

Il s'agit de deux qubits A et B préparés de façon conjointe,
dans un état $|AB\rangle$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$ de dimension $2 \times 2 = 4$.

L'espace $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_2^{\otimes 2}$ a pour base orthonormale

$$\Big\{ |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\,, \quad |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\,, \quad |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle\,, \quad |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle \Big\}.$$

Tout état de $\mathcal{H}_2^{\otimes 2}$ (état à 2 qubits) s'écrit

$$|\psi\rangle = \alpha_{00}\,|00\rangle + \alpha_{01}\,|01\rangle + \alpha_{10}\,|10\rangle + \alpha_{11}\,|11\rangle\,, \qquad (\text{avec } |\alpha_{00}|^2+|\alpha_{01}|^2+|\alpha_{10}|^2+|\alpha_{11}|^2=1).$$

Dans $\mathcal{H}_2^{\otimes 2}$ il existe un sous-ensemble d'états, dits séparables (factorisables), s'écrivant

$$|\phi\rangle = \big(\alpha_1\,|0\rangle + \beta_1\,|1\rangle\big) \otimes \big(\alpha_2\,|0\rangle + \beta_2\,|1\rangle\big)$$
$$= \alpha_1\alpha_2\,|00\rangle + \alpha_1\beta_2\,|01\rangle + \beta_1\alpha_2\,|10\rangle + \beta_1\beta_2\,|11\rangle\,.$$

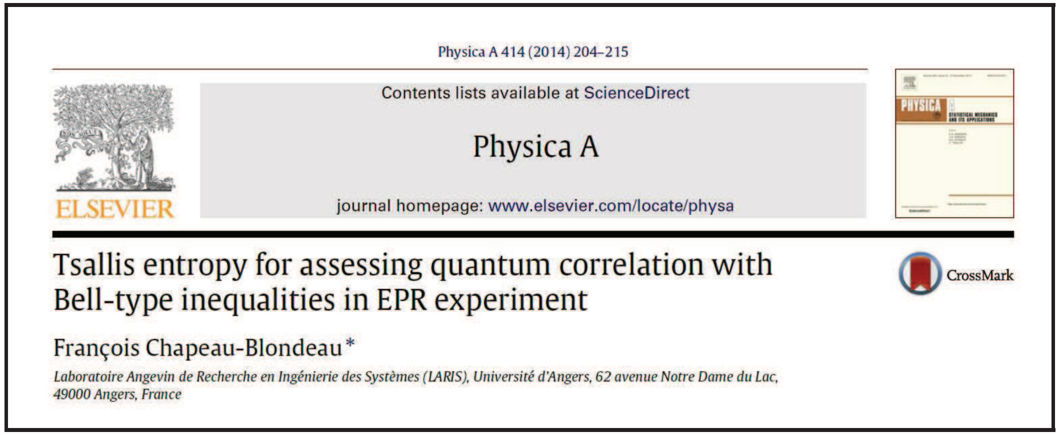
Tout état non séparable est intriqué. Par exemple $|AB\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big)$.

Les qubits A et B d'une paire intriquée n'ont séparément pas d'état individuel défini, mais ils réagissent conjointement comme un tout.

Paradoxe EPR (Einstein-Podolski-Rosen) :
A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen ; "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ?"; *Physical Review*, 47 (1935) 777–780.

Inégalités de Bell :
J. S. Bell ; "On the Einstein–Podolsky–Rosen paradox"; *Physics*, 1 (1964) 195–200.

Expériences d'Aspect :
A. Aspect, P. Grangier, G. Roger ; "Experimental test of realistic theories via Bell's theorem"; *Physical Review Letters*, 47 (1981) 460–463.



Physica A 414 (2014) 204–215

Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa

ELSEVIER

Tsallis entropy for assessing quantum correlation with Bell-type inequalities in EPR experiment

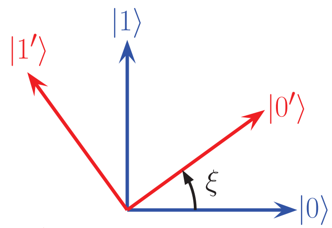
François Chapeau-Blondeau*

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS), Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France

Chaque pixel est codé par une paire de qubits intriqués :

pixel à 0 $\longrightarrow$ codée par $|\beta_{00}\rangle = \dfrac{|00\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}}$,

pixel à 1 $\longrightarrow$ codée par $|\beta_{11}\rangle = \dfrac{|01\rangle - |10\rangle}{\sqrt{2}}$.



Comment sont vus les deux états de codage $\big(|\beta_{00}\rangle\,, |\beta_{11}\rangle\big)$
depuis la base tournée $\{|0'\rangle\,, |1'\rangle\}$ du décodage ? Ils sont invariants.

Passage entre bases de codage $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$ et de décodage $\{|0'\rangle\,, |1'\rangle\}$:

$$\begin{cases} |0'\rangle = +\cos(\xi)\,|0\rangle + \sin(\xi)\,|1\rangle \\ |1'\rangle = -\sin(\xi)\,|0\rangle + \cos(\xi)\,|1\rangle \end{cases} \iff \begin{cases} |0\rangle = \cos(\xi)\,|0'\rangle - \sin(\xi)\,|1'\rangle \\ |1\rangle = \sin(\xi)\,|0'\rangle + \cos(\xi)\,|1'\rangle \end{cases} .$$

On a

$$\begin{aligned} |00\rangle &= \big(\cos(\xi)\,|0'\rangle - \sin(\xi)\,|1'\rangle\big) \otimes \big(\cos(\xi)\,|0'\rangle - \sin(\xi)\,|1'\rangle\big)\,, \\ &= \cos^2(\xi)\,|0'0'\rangle + \sin^2(\xi)\,|1'1'\rangle - \cos(\xi)\sin(\xi)\big(|0'1'\rangle + |1'0'\rangle\big)\,, \end{aligned}$$

et aussi,

$$\begin{aligned} |11\rangle &= \big(\sin(\xi)\,|0'\rangle + \cos(\xi)\,|1'\rangle\big) \otimes \big(\sin(\xi)\,|0'\rangle + \cos(\xi)\,|1'\rangle\big)\,, \\ &= \sin^2(\xi)\,|0'0'\rangle + \cos^2(\xi)\,|1'1'\rangle + \cos(\xi)\sin(\xi)\big(|0'1'\rangle + |1'0'\rangle\big)\,. \end{aligned}$$

d'où

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{\cos^2(\xi) + \sin^2(\xi)}{\sqrt{2}}\big(|0'0'\rangle + |1'1'\rangle\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0'0'\rangle + |1'1'\rangle\big) = |\beta'_{00}\rangle\,.$$

$\Longrightarrow$ L'état $|\beta_{00}\rangle \equiv |\beta'_{00}\rangle$ est invariant
vu de la base de codage $\{|0\rangle\,, |1\rangle\}$ ou de décodage $\{|0'\rangle\,, |1'\rangle\}$.

De façon similaire

$$|01\rangle = \Big(\cos(\xi)\,|0'\rangle - \sin(\xi)\,|1'\rangle\Big) \otimes \Big(\sin(\xi)\,|0'\rangle + \cos(\xi)\,|1'\rangle\Big)\,,$$
$$= \cos(\xi)\sin(\xi)\Big(|0'0'\rangle - |1'1'\rangle\Big) + \cos^2(\xi)\,|0'1'\rangle - \sin^2(\xi)\,|1'0'\rangle\ .$$

et aussi,

$$|10\rangle = \Big(\sin(\xi)\,|0'\rangle + \cos(\xi)\,|1'\rangle\Big) \otimes \Big(\cos(\xi)\,|0'\rangle - \sin(\xi)\,|1'\rangle\Big)\,,$$
$$= \cos(\xi)\sin(\xi)\Big(|0'0'\rangle - |1'1'\rangle\Big) - \sin^2(\xi)\,|0'1'\rangle + \cos^2(\xi)\,|1'0'\rangle\ .$$

d'où

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{\cos^2(\xi)+\sin^2(\xi)}{\sqrt{2}}\Big(|0'1'\rangle - |1'0'\rangle\Big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|0'1'\rangle - |1'0'\rangle\Big) = |\beta'_{11}\rangle\ .$$

$\Longrightarrow$ L'état $|\beta_{11}\rangle \equiv |\beta'_{11}\rangle$ est aussi invariant
vu de la base de codage $\{|0\rangle\,,|1\rangle\}$ ou de décodage $\{|0'\rangle\,,|1'\rangle\}$.

Interprétable comme résultant d'un comportement conjoint global de la paire intriquée.

Avec les deux états invariants $|\beta_{00}\rangle = \dfrac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}}$ et $|\beta_{11}\rangle = \dfrac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}$

il existe deux autres états $|\beta_{01}\rangle = \dfrac{|01\rangle+|10\rangle}{\sqrt{2}}$ et $|\beta_{10}\rangle = \dfrac{|00\rangle-|11\rangle}{\sqrt{2}}$

formant une base orthonormale $\big\{|\beta_{00}\rangle\,,|\beta_{01}\rangle\,,|\beta_{10}\rangle\,,|\beta_{11}\rangle\big\}$ de $\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_2$,

$|\beta_{01}\rangle$ et $|\beta_{10}\rangle$ n'étant pas invariants vus de la base $\big\{|0'\rangle\,,|1'\rangle\big\}$ tournée de ξ,

mais se transforment via :

$$|\beta_{01}\rangle = \cos(2\xi)\,|\beta'_{01}\rangle + \sin(2\xi)\,|\beta'_{10}\rangle$$
$$|\beta_{10}\rangle = \cos(2\xi)\,|\beta'_{10}\rangle - \sin(2\xi)\,|\beta'_{01}\rangle\ .$$

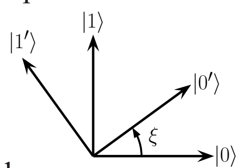
(pour la suite (diapo. 23))

Or $\big\{|\beta'_{00}\rangle, |\beta'_{01}\rangle, |\beta'_{10}\rangle, |\beta'_{11}\rangle\big\}$ forme aussi une base orthonormale de $\mathcal{H}_2\otimes\mathcal{H}_2$,
utilisable pour une mesure projective de la paire de qubits.

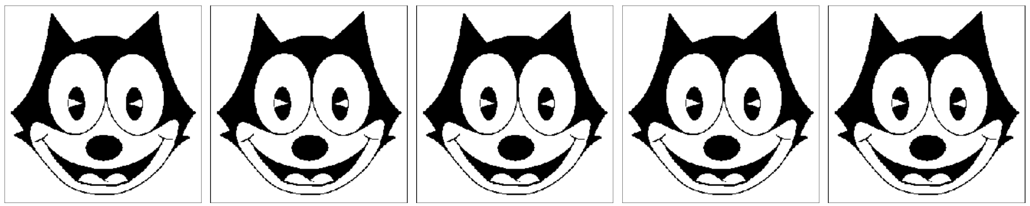
On obtient un codage/décodage invariant insensible au décalage angulaire ξ,
pour le prix d'une paire de qubits (intriqués) par pixel.

Le codage a lieu dans la base $\{|0\rangle\,,|1\rangle\}$ avec les deux états intriqués

$$\left(|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}},\quad |\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$ invariants.



Le décodage a lieu dans la base $\{|0'\rangle\,,|1'\rangle\}$ tournée d'un ξ quelconque,
par mesure de la paire de qubits se projetant sur $|\beta'_{00}\rangle$ ou $|\beta'_{11}\rangle$.



$\xi = 0$ $\quad\xi = 0.1\pi$ $\quad\xi = 0.15\pi$ $\quad\xi = 0.2\pi$ $\quad\xi = 0.25\pi$

Et pour le même prix (une paire de qubits (intriqués) par pixel)
on obtient une résistance accrue au bruit quantique.

L'image binaire codée avec les deux états intriqués orthogonaux

$$\left(|\beta_{00}\rangle = \frac{|00\rangle+|11\rangle}{\sqrt{2}},\quad |\beta_{11}\rangle = \frac{|01\rangle-|10\rangle}{\sqrt{2}}\right)$$

(ces deux états étant invariants par rotation de la base),

subit aussi un bruit de bit-flip de probabilité de flip p,
avant le décodage (la mesure) dans la base $\{|0'\rangle\,,|1'\rangle\}$ tournée de ξ.

Le bruit de bit-flip agit de façon indépendante sur chaque qubit de la paire.

Quelle est l'altération produite sur les deux états de codage $|\beta_{00}\rangle$ et $|\beta_{11}\rangle$?

Altération de $|\beta_{00}\rangle$ par le bruit quantique de bit-flip de probabilité p :

$$|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big) \xrightarrow{(1-p)^2} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle + |11\rangle\Big) = |\beta_{00}\rangle \ ,$$

$$\xrightarrow{p(1-p)} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|10\rangle + |01\rangle\Big) = |\beta_{01}\rangle \ ,$$

$$\xrightarrow{(1-p)p} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|01\rangle + |10\rangle\Big) = |\beta_{01}\rangle \ ,$$

$$\xrightarrow{p^2} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|11\rangle + |00\rangle\Big) = |\beta_{00}\rangle \ .$$

Donc par le bruit, $|\beta_{00}\rangle$ reste inchangé avec probabilité $(1-p)^2 + p^2$, et
$|\beta_{00}\rangle$ est transformé en $|\beta_{01}\rangle$ avec probabilité $2(1-p)p$.

Altération de $|\beta_{11}\rangle$ par le bruit quantique de bit-flip de probabilité p :

$$|\beta_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|01\rangle - |10\rangle\Big) \xrightarrow{(1-p)^2} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|01\rangle - |10\rangle\Big) = |\beta_{11}\rangle \ ,$$

$$\xrightarrow{p(1-p)} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|11\rangle - |00\rangle\Big) = -|\beta_{10}\rangle \equiv |\beta_{10}\rangle \ ,$$

$$\xrightarrow{(1-p)p} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|00\rangle - |11\rangle\Big) = |\beta_{10}\rangle \ ,$$

$$\xrightarrow{p^2} \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|10\rangle - |01\rangle\Big) = -|\beta_{11}\rangle \equiv |\beta_{11}\rangle \ .$$

Donc par le bruit, $|\beta_{11}\rangle$ reste inchangé avec probabilité $(1-p)^2 + p^2$, et
$|\beta_{11}\rangle$ est transformé en $|\beta_{10}\rangle$ avec probabilité $2(1-p)p$.

Le bruit laisse les deux états intriqués de codage $|\beta_{00}\rangle$ et $|\beta_{11}\rangle$,
dans deux sous-espaces disjoints de $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$.

Codage, puis bruit, puis décodage dans base tournée de ξ quelconque :

pixel à 0 : $|\beta_{00}\rangle \xrightarrow{\text{bruit}} |\beta_{00}\rangle \xrightarrow{\text{rotation}} |\beta'_{00}\rangle$
$|\beta_{00}\rangle \longrightarrow |\beta_{01}\rangle \longrightarrow |\beta'_{01}\rangle$
$|\beta_{01}\rangle \longrightarrow |\beta'_{10}\rangle$

Décodage exact de 0,

pixel à 1 : $|\beta_{11}\rangle \longrightarrow |\beta_{11}\rangle \longrightarrow |\beta'_{11}\rangle$

et de 1.

$|\beta_{11}\rangle \longrightarrow |\beta_{10}\rangle \longrightarrow |\beta'_{10}\rangle$
$|\beta_{10}\rangle \longrightarrow |\beta'_{01}\rangle$

1 mépris comme 0

(Depuis diapo. 18)

$\Longrightarrow$

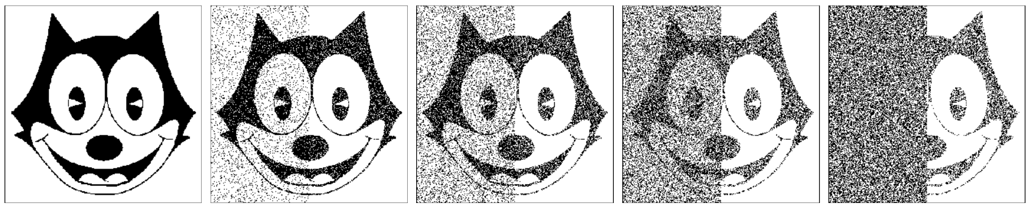
Bit 0 décodé sans erreur : immune au bruit.

Bit 1 décodé en erreur comme 0 avec probabilité $2(1-p)p$,
qui pondérée par prior $P_1 \leq 1/2$ donne $2(1-p)pP_1 \leq p$ du codage direct $\Big(|0\rangle, |1\rangle\Big)$.

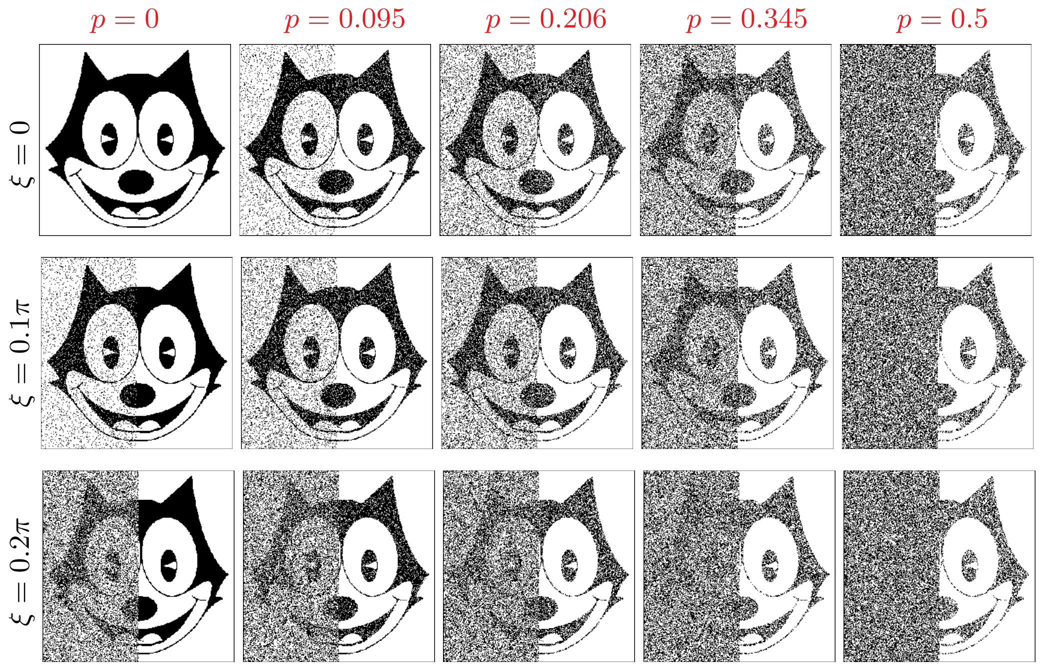
Deux codages/décodages quantiques d'une image binaire : Effet du bruit

Dans la moitié gauche des images, codage non-invariant par les deux états $(|0\rangle, |1\rangle)$,
puis altération par un bruit de bit-flip de probabilité p,
puis décodage par projection sur la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

Dans la moitié droite des images, codage invariant par les deux états $(|\beta_{00}\rangle, |\beta_{11}\rangle)$,
puis altération par un bruit de bit-flip de probabilité p,
puis décodage dans une base $\{|0'\rangle, |1'\rangle\}$ tournée de ξ quelconque
par projection sur $\Big(\text{span}(|\beta'_{00}\rangle, |\beta'_{01}\rangle, |\beta'_{10}\rangle), \quad \text{span}(|\beta'_{11}\rangle)\Big)$.



$p = 0$ $p = 0.095$ $p = 0.206$ $p = 0.345$ $p = 0.5$



Conclusion

• L'intrication quantique pour un codage d'image invariant avec la base et résistant au bruit.

• Des potentialités à explorer de l'information quantique (parallèlisme, intrication) pour le traitement numérique des images sous forme quantique.

Perspectives

• Plus largement, l'information quantique et le calcul quantique présentent de vastes potentialités pour le traitement du signal et des images . . .

Merci de votre attention.