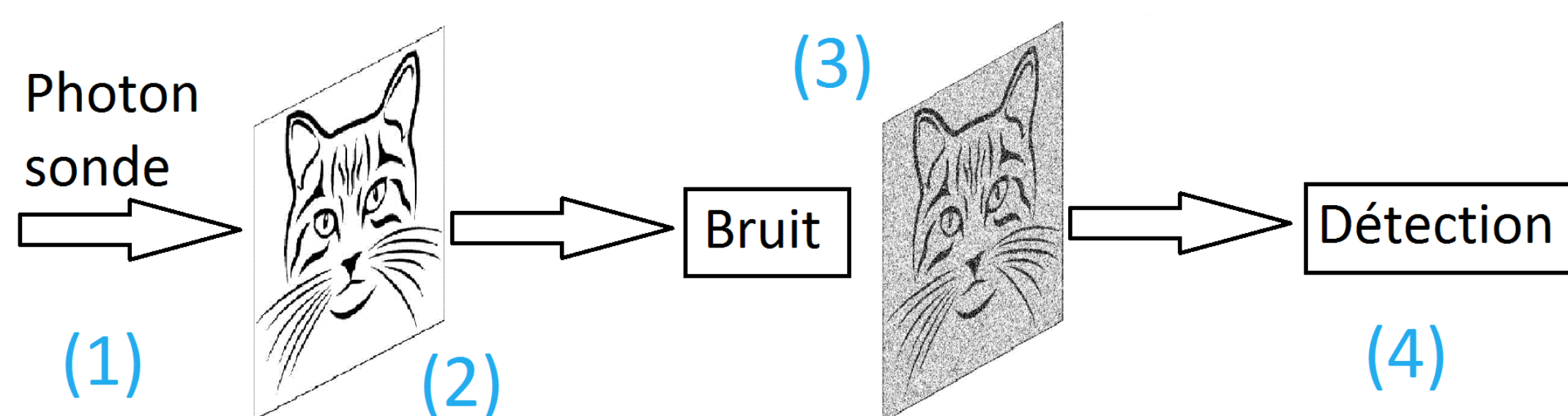


Introduction

-Les technologies de l'information ont tendance à la **miniaturisation** menant à des **problématiques quantiques du traitement du signal et des images**.

-De plus le quantique apporte de **nouvelles ressources** pour le traitement du signal et des images, comme l'**intrication quantique** exploitée ici.

1 Formation de l'image



Protocole d'imagerie quantique binaire avec 1 photon unique par pixel.

2 Préparation des photons : (1)

L'état d'un bit quantique (photon) est caractérisé par un vecteur. On choisit de préparer chaque photon dans l'état suivant :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

3 Formation de l'image : (2)

Interaction d'un photon en chaque pixel de la scène à imager :

Sur le fond le photon ne change pas d'état :

$$|\psi_0\rangle \longrightarrow |\psi_1\rangle = |\psi_0\rangle = |+\rangle,$$

Sur l'objet le photon change d'état :

$$|\psi_0\rangle \longrightarrow |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle.$$

4 Bruit quantique : (3)

Un bruit commun en quantique : le bruit dépolarisant.

Applique un des 3 opérateurs de Pauli σ_j avec une probabilité p :

$$\rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| \longrightarrow \rho_2 = (1-p)\rho_1 + \frac{p}{3} \sum_j \sigma_j \rho_1 \sigma_j^\dagger.$$

5 Détection : (4)

On réalise une **mesure quantique** par projection dans la base $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

⇒ Probabilités de trouver le photon dans chacun des **2 résultats de mesure** :

$$\begin{aligned} \langle + | \rho_2 | + \rangle &= 1 - \frac{2}{3}p \\ \langle - | \rho_2 | - \rangle &= \frac{2}{3}p \end{aligned}$$

Pixel du fond

$$\begin{aligned} \langle + | \rho_2 | + \rangle &= \frac{2}{3}p \\ \langle - | \rho_2 | - \rangle &= 1 - \frac{2}{3}p \end{aligned}$$

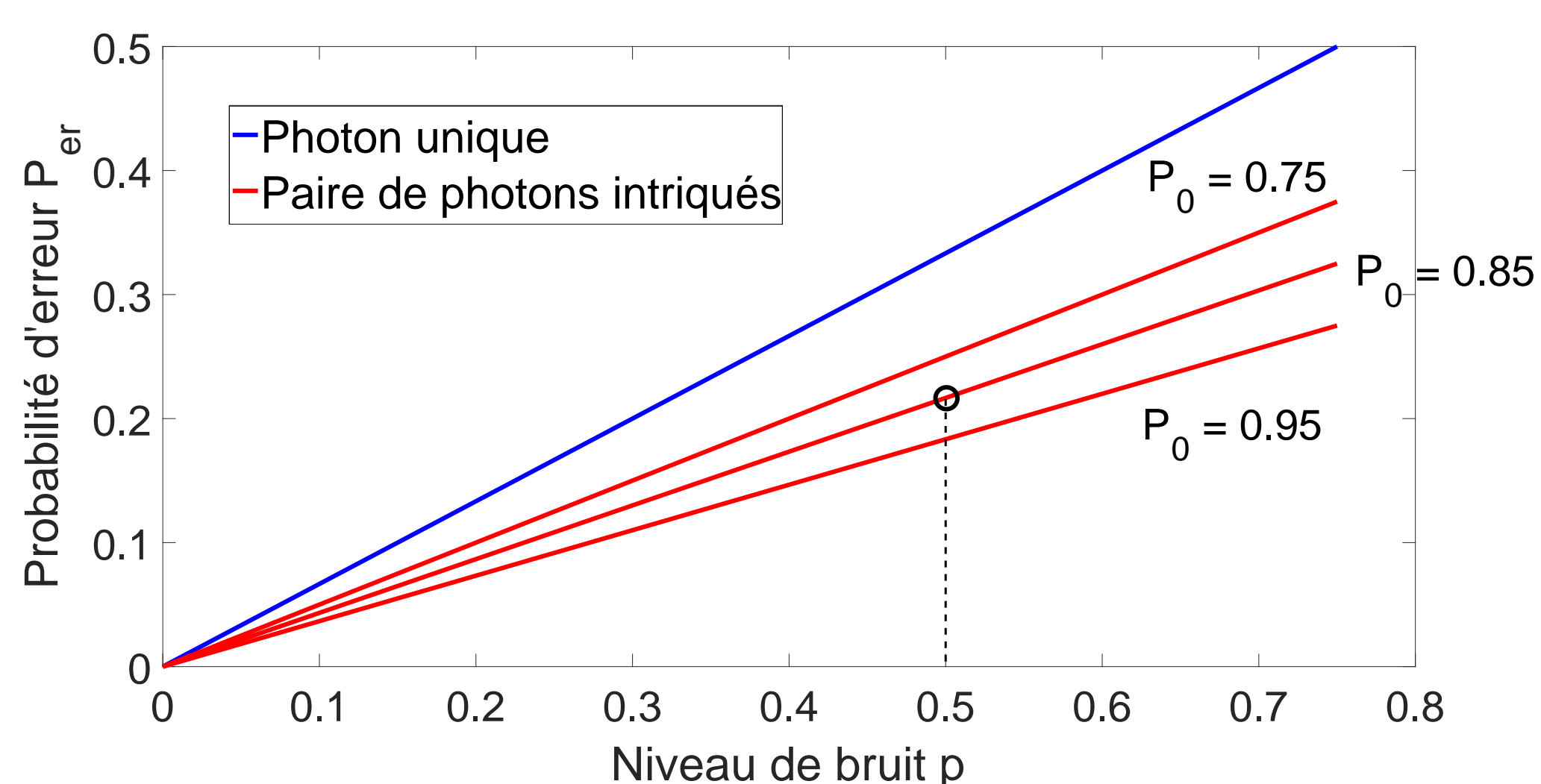
Pixel de l'objet

À partir du résultat de la mesure quantique on prend une **décision binaire**. La détection du photon dans les états $|+\rangle$ ou $|-\rangle$ est décodé comme un pixel du fond ou un pixel de l'objet.

6 Évaluation de la performance

La performance est évaluée par la probabilité d'erreur de détection P_{er} :

$$P_{er}^{(1)} = \frac{2}{3}p. \quad (1)$$



Probabilité d'erreur $P_{er}^{(1)}$ et $P_{er}^{(2)}$ des Eq.(1) et (2) en fonction du niveau de bruit représenté par la probabilité p du bruit, où P_0 est la proportion de pixels blancs.

De façon naturelle, l'augmentation du niveau de bruit p entraîne une augmentation de la **probabilité d'erreur de détection** P_{er} .

Nous allons maintenant montrer que l'exploitation d'un phénomène d'intrication permet d'améliorer la résistance au bruit de notre protocole d'imagerie.

[1] F. Chapeau-Blondeau, "Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection", *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500-4510, 2015.

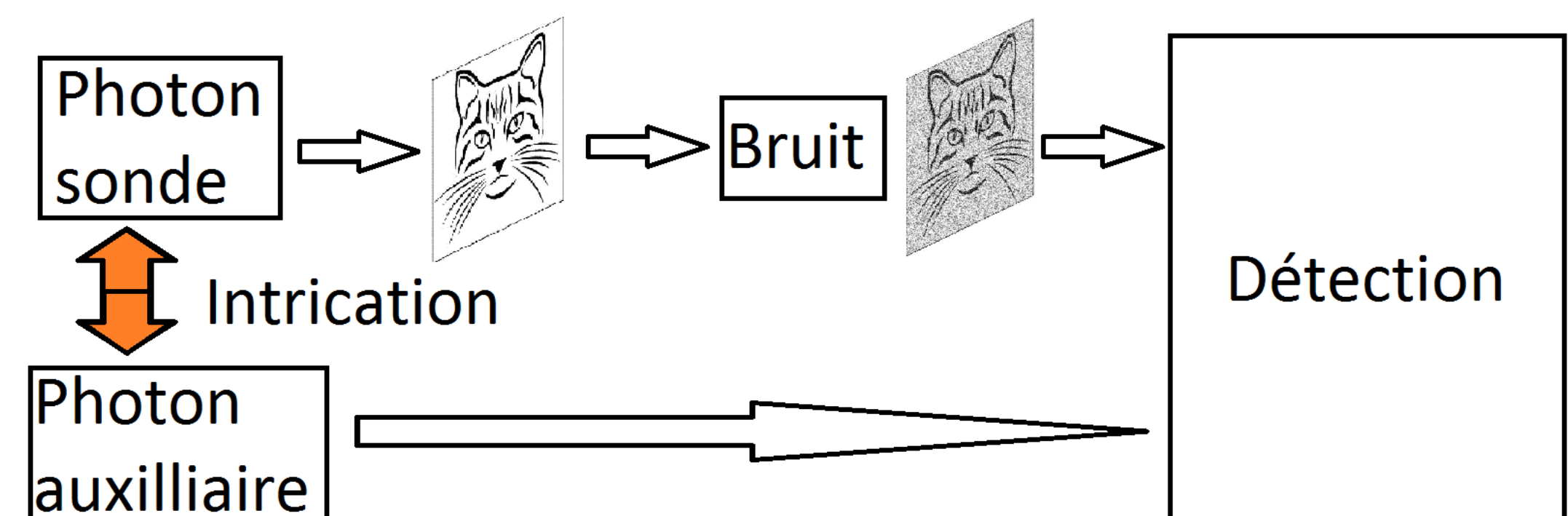
[2] F. Chapeau-Blondeau, E. Belin, "Quantum image coding with a reference-frame-independent scheme", *Quantum Information Processing*, vol. 15, pp. 2685-2700, 2016.

7 Intrication quantique

Deux photons intriqués sont liés, une action sur l'un affecte aussi le second.

On choisit de préparer chaque **paire de photons** dans l'état intriqué suivant :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) = |\beta_{00}\rangle.$$



Protocole d'imagerie quantique binaire avec une **paire de photons intriqués par pixel**.

En chaque pixel, la détection se fait via une **mesure quantique** de chaque paire de photons par projection dans la base $\{|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle, |\beta_{11}\rangle\}$.

On obtient alors les probabilités de trouver chaque paire de photons dans chacun des **4 résultats de mesure** :

$$\begin{aligned} \langle \beta_{00} | \rho_2 | \beta_{00} \rangle &= 1 - p \\ \langle \beta_{11} | \rho_2 | \beta_{01} \rangle &= \frac{p}{3} \\ \langle \beta_{10} | \rho_2 | \beta_{10} \rangle &= \frac{p}{3} \\ \langle \beta_{01} | \rho_2 | \beta_{11} \rangle &= \frac{p}{3} \end{aligned}$$

Pixel du fond

$$\begin{aligned} \langle \beta_{00} | \rho_2 | \beta_{00} \rangle &= \frac{p}{3} \\ \langle \beta_{11} | \rho_2 | \beta_{01} \rangle &= 1 - p \\ \langle \beta_{10} | \rho_2 | \beta_{10} \rangle &= \frac{p}{3} \\ \langle \beta_{01} | \rho_2 | \beta_{11} \rangle &= \frac{p}{3} \end{aligned}$$

Pixel de l'objet

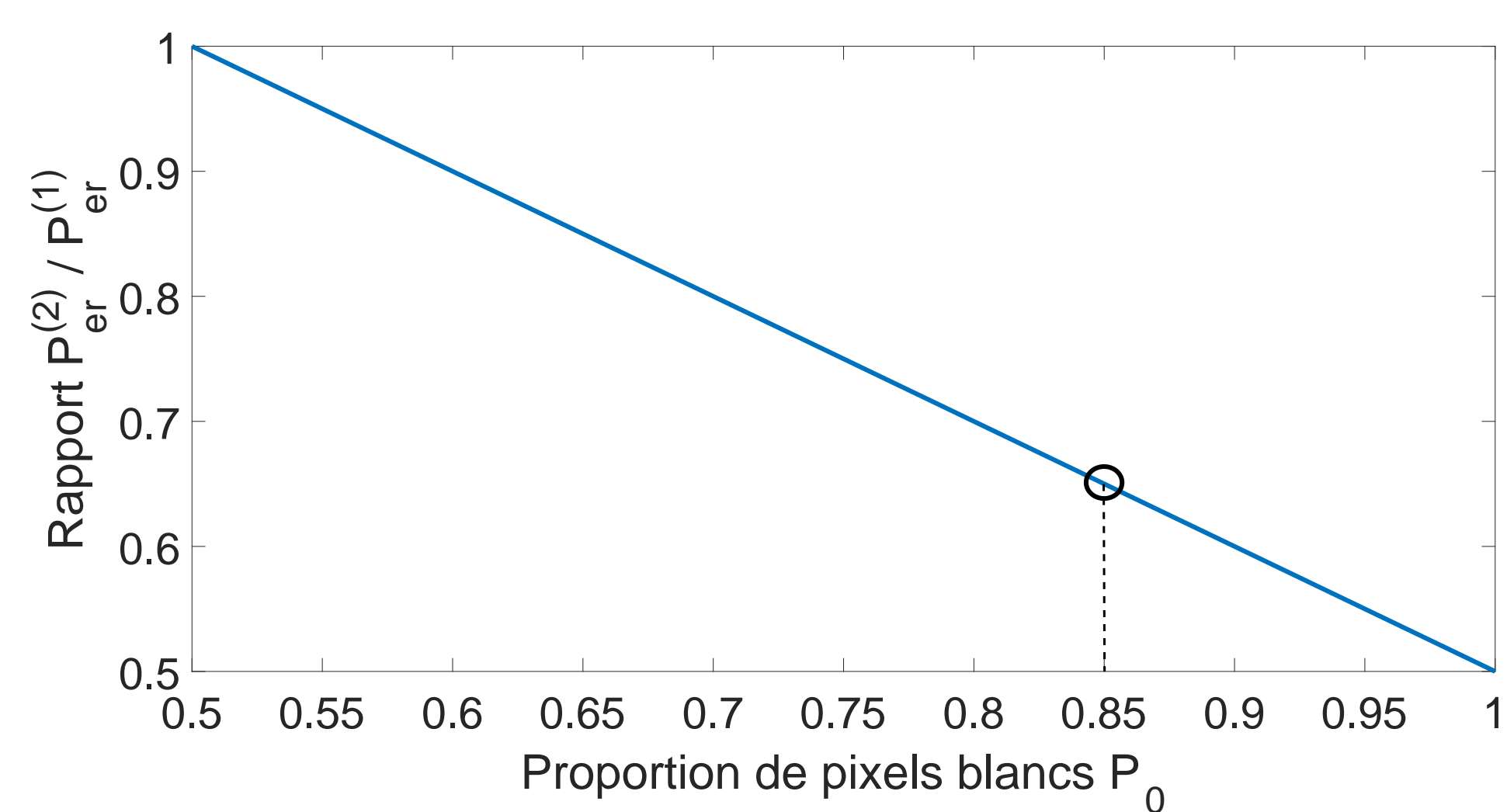
À partir du résultat de la mesure quantique on prend une **décision binaire**. Les 3 résultats $|\beta_{00}\rangle, |\beta_{01}\rangle, |\beta_{10}\rangle$ décodent un pixel à 1 constituant la population majoritaire (de $P_0 \geq 0.5$) dans l'image. Le résultat $|\beta_{01}\rangle$ décode un pixel à 0.

Probabilité d'erreur de détection avec le protocole à **1 paire intriquée** :

$$P_{er}^{(2)} = \frac{2}{3}p \left(\frac{3}{2} - P_0 \right). \quad (2)$$

8 Bénéfice du phénomène d'intrication

Quand le niveau de bruit p augmente, **la performance de détection se dégrade moins vite** avec le protocole à 1 paire de photons **intriqués**. L'erreur est jusqu'à deux fois inférieure quand P_0 tend vers 1.



Rapport entre les probabilités d'erreur $P_{er}^{(2)}$ et $P_{er}^{(1)}$ des Eq.(2) et (1).

Ainsi, bien que le photon auxiliaire n'interagisse jamais avec la scène à imager, la proportion de pixels erronés P_{er} est inférieure avec le protocole à une paire de photons intriqués :

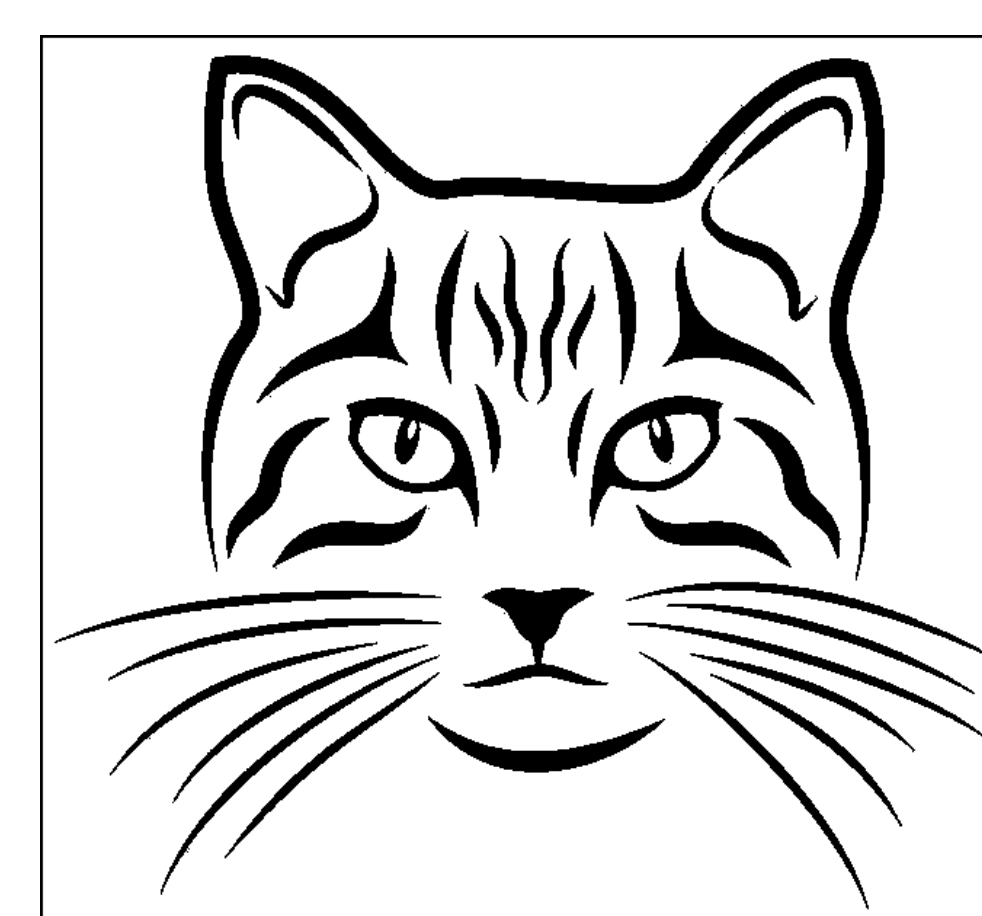
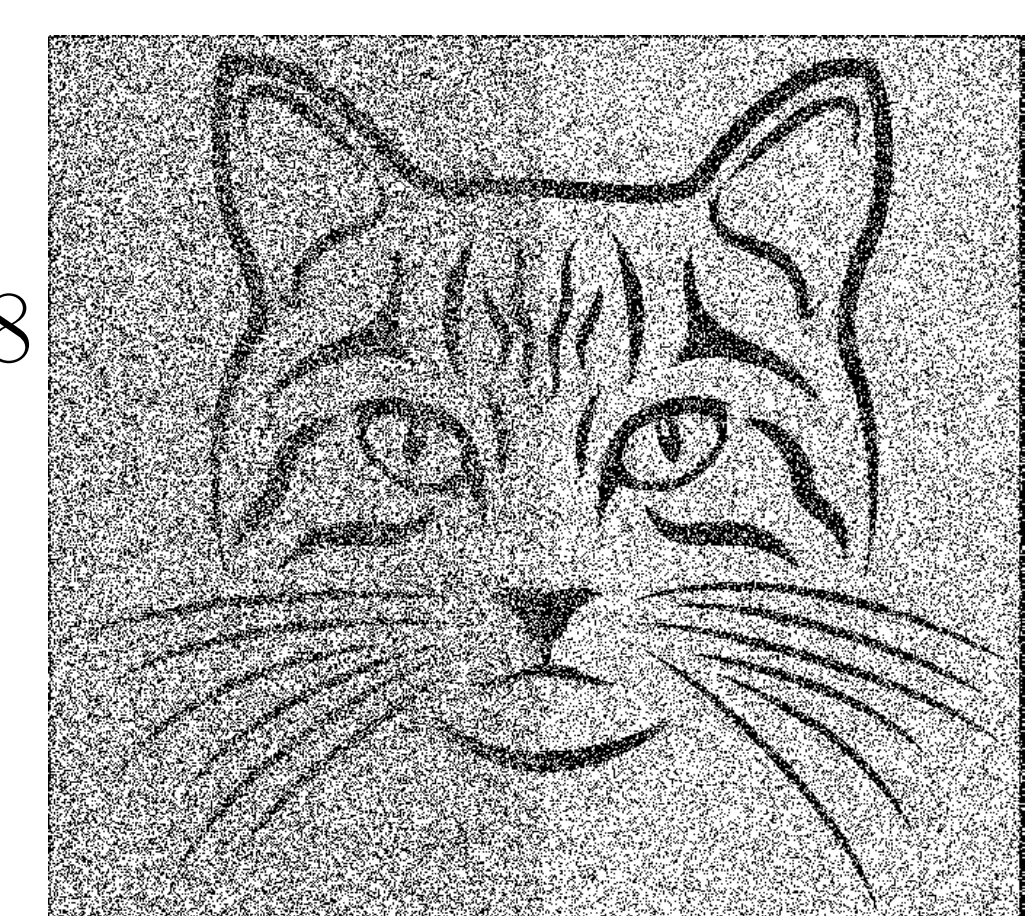


Image originale



1 photon simple | 1 paire intriquée

Conclusion

-Un phénomène d'**intrication** permet d'**améliorer** le processus d'**imagerie quantique binaire soumis au bruit** en gardant le même nombre de photons interagissant avec la scène.

-On a vérifié que l'**amélioration** s'étend **pour d'autres bruits quantiques communs** (certains bruits de Pauli, bruit thermique).