

La résonance stochastique

François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), Université d'Angers,
62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 ANGERS, FRANCE.
web : <http://www.istia.univ-angers.fr/~chapeau/>

Résumé. Le phénomène de résonance stochastique est un effet non linéaire dans lequel le bruit est capable de favoriser la transmission d'un signal utile. Cet effet peut revêtir diverses formes, selon les types considérés pour le bruit, le signal utile, le système non linéaire de transmission, et la mesure de performance qui se voit améliorée par ajout de bruit. Ces éléments sont passés en revue ici. On étudie par exemple des systèmes où le rapport signal sur bruit en sortie peut être augmenté en augmentant le bruit en entrée, ou encore des systèmes dont la capacité informationnelle entrée-sortie augmente lorsque le niveau de bruit croît. On donne aussi une perspective historique sur l'évolution de la résonance stochastique, depuis son introduction il y a une quinzaine d'années jusqu'aux extensions récentes. Des illustrations sont mentionnées dans des circuits électroniques ou des dispositifs optiques, et spécialement dans une classe de systèmes naturels particulièrement intéressants où opère la résonance stochastique : les systèmes neuronaux.

Table des matières

1	Introduction	2
2	La résonance stochastique périodique	3
2.1	Dans les systèmes dynamiques non linéaires bistables	3
2.2	Un schéma théorique général pour la RS périodique	5
2.3	Analyse théorique dans les systèmes dynamiques bistables	7
2.3.1	Équation de Fokker-Planck	8
2.3.2	Approximation à deux états	9
2.4	Théorie de la réponse linéaire	10
2.5	Dans les systèmes dynamiques à non-linéarité statique	11
2.5.1	Une théorie générale pour non-linéarité statique	11
2.5.2	Applications	14
2.5.3	Gain entrée-sortie pour le rapport signal sur bruit	16
2.6	Conclusion sur la RS périodique	16
3	La résonance stochastique apériodique	17
3.1	Un canal discret de transmission d'information	18
3.2	Cas de signaux bidimensionnels	21
4	La résonance stochastique chez les neurones	24
4.1	Résonance stochastique chez les neurones périphériques	24
4.2	Résonance stochastique chez les neurones centraux	26
5	Conclusion	28
	Références	29

1 Introduction

Signal, non-linéaire, et bruit, sont les trois ingrédients de base à l'œuvre dans la résonance stochastique. En termes généraux, il est possible de définir la résonance stochastique (RS) comme un phénomène par lequel la transmission d'un signal utile par certains systèmes non linéaires, peut se voir améliorée au moyen d'un ajout de bruit [61, 81, 8].

Cet effet non linéaire paradoxal a originellement été introduit, il y a environ une quinzaine d'années, dans le contexte de la dynamique des climats [4, 3, 63], afin d'expliquer la récurrence régulière des ères glaciaires. La survenue des ères glaciaires résulte d'une interaction non linéaire entre une cause périodique due aux mouvements planétaires (signal utile ou cohérent) et une cause aléatoire due aux perturbations atmosphériques et climatiques (bruit), et pour lesquelles il apparaît que l'influence, sur le résultat, de la cause cohérente périodique peut être renforcée en augmentant la cause aléatoire.

Depuis ce point de départ, l'étude de la RS s'est largement développée [60, 29]. Aujourd'hui, il est possible de synthétiser les différentes formes observées pour la RS au moyen du schéma de la Fig. 1.

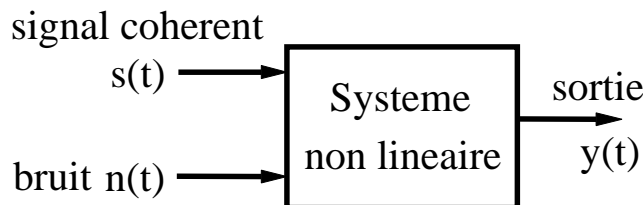


Figure 1: Un schéma général pour la résonance stochastique, laquelle consiste en la possibilité d'augmenter la "ressemblance" entre l'entrée cohérente $s(t)$ et la sortie $y(t)$ en augmentant le niveau du bruit $\eta(t)$.

Dans le phénomène de RS illustré par la Fig. 1 interviennent quatre éléments essentiels :

- (i) un signal de bruit $\eta(t)$, dont les propriétés statistiques peuvent être très variées (gaussien ou non, blanc ou coloré, ...) ;
- (ii) un signal utile ou cohérent $s(t)$: il peut s'agir d'un signal déterministe périodique ou non, d'un signal aléatoire, c'est le signal qui porte l'"information" utile que l'on souhaite dégager du bruit ;
- (iii) un système de transmission, qui en général est non linéaire, recevant en entrée $s(t)$ et $\eta(t)$ sous l'influence desquelles entrées il produit le signal de sortie $y(t)$;
- (iv) une mesure de performance, ou d'efficacité de la transmission, qui quantifie une "ressemblance" entre la sortie $y(t)$ et l'entrée cohérente $s(t)$ (il pourra s'agir d'un rapport signal sur bruit, d'un coefficient de corrélation, d'une information mutuelle de Shannon, ...).

On parlera alors de RS chaque fois qu'il est possible d'augmenter la mesure de performance au moyen d'une augmentation du niveau du bruit $\eta(t)$. Historiquement, les développements de la RS ont progressé via des variations et extensions sur ces quatre éléments de base.

À l'origine, et pendant relativement longtemps, la RS et ses approfondissements se sont concentrés sur un signal cohérent *périodique* transmis par des systèmes *dynamiques* non linéaires *bistables* [30, 57]. Compte tenu de l'importance historique et conceptuelle de cette forme de RS dite périodique, et de la grande proportion des résultats s'y rapportant, nous y consacrons la section suivante.

2 La résonance stochastique périodique

2.1 Dans les systèmes dynamiques non linéaires bistables

Cette forme de RS s'appuie sur l'équation d'évolution

$$\tau_a \dot{x}(t) = -\frac{dU(x)}{dx} + s(t) + \eta(t). \quad (1)$$

Une telle équation représente un système dynamique forcé par l'entrée $s(t) + \eta(t)$, dont la relaxation libre $\tau_a \dot{x} = -dU/dx$ est gouvernée par un potentiel $U(x)$ qui en général est un potentiel à double puits. Une forme fréquemment retenue est le potentiel "quartique"

$$U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4X_b^2} \quad (2)$$

avec le paramètre $X_b > 0$, dont l'allure apparaît sur la Fig. 2.

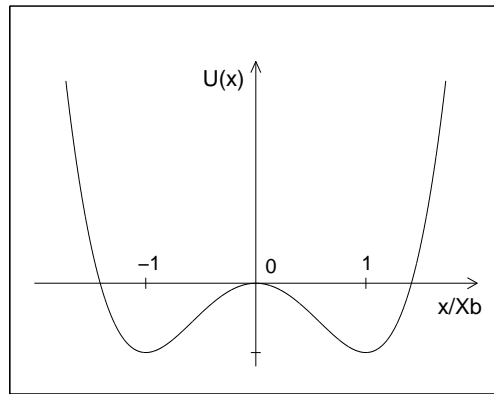


Figure 2: Potentiel à double puits $U(x)$ de l'Éq. (2).

À cause de son potentiel à double puits $U(x)$, le système de l'Éq. (1) possède deux états stationnaires stables ($x = \pm X_b$ dans le cas de l'Éq. (2)) correspondant aux deux minima du potentiel ($U(x = \pm X_b) = -X_b^2/4$ dans le cas de l'Éq. (2)), et séparés par une barrière de potentiel (de hauteur $U_0 = X_b^2/4$ dans le cas de l'Éq. (2)).

Une interprétation mécanique de ce système va permettre de voir apparaître le phénomène de RS. Dans cette interprétation, l'Éq. (1) décrit le mouvement en régime suramorti (l'inertie \ddot{x} est négligée par rapport au frottement visqueux \dot{x}), d'une particule dans un potentiel $U(x)$ soumise à la force extérieure $s(t) + \eta(t)$. Si une excitation périodique $s(t) = A \cos(2\pi t/T_s)$ est appliquée seule et avec une amplitude A trop faible, la particule ne peut pas franchir la barrière de potentiel entre les deux puits ; elle reste confinée dans l'un des deux puits autour des minima du potentiel, sans transitions entre puits. Si l'on ajoute un faible bruit $\eta(t)$, un effet coopératif entre le signal $s(t)$ et le bruit devient possible, qui permet occasionnellement à la particule de franchir la barrière de potentiel. Ceci se traduit par des transitions entre puits qui sont corrélées avec l'excitation périodique $s(t)$ car produites par l'action conjointe du signal $s(t)$ et du bruit. En augmentant l'amplitude du bruit on va d'abord augmenter la probabilité de survenue de telles transitions, ce qui renforce la corrélation du signal de sortie (par exemple un signal $y(t)$ binaire indiquant dans quel puits se trouve la particule) avec l'entrée périodique.

Pour un bruit encore plus fort, les transitions produites par la seule action du bruit deviennent de plus en plus nombreuses, ce qui progressivement diminue la corrélation du signal de sortie avec l'entrée périodique. On a donc une action non monotone du niveau de bruit en entrée, qui d'abord favorise la part de corrélation de la sortie avec l'entrée périodique, jusqu'à un optimum, suivi d'une décroissance de cette part de corrélation.

On peut donc considérer un signal de sortie $y(t)$ qui est une quantification binaire de l'état $x(t)$ indiquant dans quel puits se trouve la particule. Le signal $y(t)$ est un signal aléatoire (à cause de l'influence du bruit $\eta(t)$ en entrée) qui contient néanmoins une part de corrélation avec l'entrée périodique $s(t)$. Il est possible de quantifier cette part de corrélation en calculant d'abord la fonction d'autocorrélation de $y(t)$, puis par transformée de Fourier, sa densité spectrale de puissance [61, 81]. Dans la densité spectrale de puissance de la sortie, la part de l'influence de l'entrée périodique se manifeste par des raies spectrales (pics de Dirac) aux multiples entiers de la fréquence cohérente $1/T_s$. Ces raies émergent d'un fond de bruit continu large-bande provenant des transitions incohérentes. Cette constitution typique de la densité spectrale de puissance de sortie est représentée Fig. 3. La RS se manifeste par des raies cohérentes qui parviennent à émerger plus largement du fond de bruit grâce à une augmentation du bruit en entrée. On peut définir un rapport signal sur bruit (RSB) en sortie, comme la puissance contenue dans la raie spectrale en $1/T_s$ divisée par la puissance du fond de bruit autour de $1/T_s$. On observe alors une évolution non monotone du RSB avec le niveau du bruit en entrée, avec un RSB culminant à un maximum pour un niveau optimal du bruit, d'où le terme résonance.

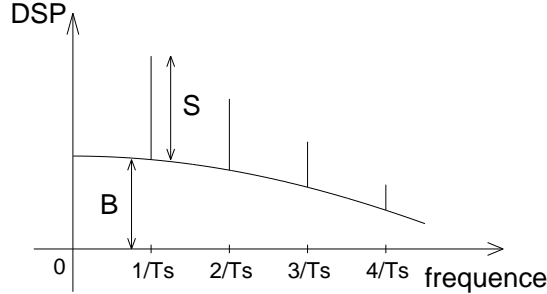


Figure 3: Densité spectrale de puissance en sortie permettant de définir le rapport signal sur bruit $\mathcal{R}_{\text{out}} = S/B$ offrant une mesure de la résonance stochastique.

C'est sous cette forme, associée à un système dynamique non linéaire bistable du type de l'Éq. (1) excité par un signal sinusoïdal bruité, qu'a originellement été introduit le phénomène de RS [4]. C'est sous cette forme aussi qu'il a reçu pendant longtemps l'attention la plus soutenue [29].

Cette forme de RS a été mise progressivement en évidence de façon expérimentale dans différents processus répondant à la dynamique bistable de l'Éq. (1), et incluant des circuits électroniques [27], des lasers [80], la résonance paramagnétique électronique [31], des neurones [6], un pendule magnétique [75], des réactions chimiques [52, 22], des composants supraconducteurs [44]. Dans ces mises en œuvre expérimentales, le schéma de caractérisation de la RS exposé plus haut, qui passe par le calcul de la fonction d'autocorrélation en sortie puis de la

densité spectrale de puissance pour accéder au RSB dans le domaine fréquentiel, peut être réalisé de façon numérique sur les signaux mesurés.

En même temps, on a bien sûr chercher à développer des traitements analytiques permettant de calculer théoriquement le RSB afin de prédire son évolution non monotone avec le niveau de bruit d'entrée pour déceler la présence de RS.

2.2 Un schéma théorique général pour la RS périodique

Nous allons décrire dans cette section un cadre générique pour l'analyse théorique de la RS périodique. Ce cadre est générique dans le sens où il s'applique à n'importe quel système non linéaire (les systèmes dynamiques décrits par une équation comme (1), mais aussi d'autres types de systèmes que nous considérerons dans des sections suivantes). Certains éléments de ce cadre ont été mis en place à l'occasion d'études sur des systèmes spécifiques [50, 49], mais il est donné dans toute sa généralité, sans restriction à des systèmes non linéaires particuliers, dans [14].

Soit $s(t)$ un signal déterministe périodique de période T_s , et $\eta(t)$ un bruit stationnaire. Nous considérons un système non linéaire, invariant temporellement, qui reçoit $s(t)$ et $\eta(t)$ en entrée, et qui en réponse produit le signal de sortie $y(t)$. C'est le schéma de la Fig. 1 en présence d'un signal $s(t)$ périodique. Nous considérons que $y(t)$ est la réponse en régime établi, ou encore que $s(t)$ et $\eta(t)$ sont appliqués depuis $t \rightarrow -\infty$.

En général, à cause de l'influence de l'entrée de bruit $\eta(t)$, la sortie $y(t)$ sera un signal aléatoire. À cause de l'influence de l'entrée déterministe $s(t)$, la sortie $y(t)$ sera un signal aléatoire non stationnaire. Cependant, comme $s(t)$ est périodique, $y(t)$ en général sera un signal aléatoire cyclostationnaire de période T_s [65].

À tout instant t , nous exprimons le signal aléatoire de sortie $y(t)$ comme la somme de son espérance instationnaire $E[y(t)]$ plus les fluctuations statistiques $\tilde{y}(t)$ autour de l'espérance :

$$y(t) = \tilde{y}(t) + E[y(t)] . \quad (3)$$

À cause de la cyclostationnarité de $y(t)$, l'espérance instationnaire $E[y(t)]$ est une fonction déterministe du temps t de période T_s , pour laquelle nous introduisons les coefficients de Fourier

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} E[y(t)] \exp\left(-i2\pi \frac{n}{T_s} t\right) dt . \quad (4)$$

Afin de calculer une fonction d'autocorrélation statistique pour le signal de sortie $y(t)$, nous considérons maintenant pour t et τ fixés l'espérance

$$E[y(t)y(t+\tau)] = E[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t+\tau)] + E[y(t)] E[y(t+\tau)] . \quad (5)$$

L'espérance $E[y(t)y(t+\tau)]$ de l'Éq. (5) est une fonction déterministe des deux variables t et τ , périodique en t de période T_s . Il est possible de construire une fonction d'autocorrélation $R_{yy}(\tau)$ stationnarisée (indépendante de t) pour $y(t)$ via un moyennage temporel de $E[y(t)y(t+\tau)]$ sur un intervalle T_s , lorsque t (ou t modulo T_s) couvre uniformément $[0, T_s[$, comme

$$R_{yy}(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} E[y(t)y(t+\tau)] dt . \quad (6)$$

D'après l'Éq. (5) nous avons aussi

$$R_{yy}(\tau) = C_{yy}(\tau) + \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} E[y(t)] E[y(t+\tau)] dt , \quad (7)$$

avec la fonction d'autocovariance stationnarisée de $y(t)$ définie par

$$C_{yy}(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} E[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t+\tau)]dt . \quad (8)$$

Nous définissons maintenant la densité spectrale de puissance $P_{yy}(\nu)$ de $y(t)$ comme la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $R_{yy}(\tau)$:

$$P_{yy}(\nu) = \text{TF}[R_{yy}(\tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yy}(\tau) \exp(-i2\pi\nu\tau)d\tau . \quad (9)$$

La transformation de Fourier de l'Éq. (7) conduit alors à

$$P_{yy}(\nu) = \text{TF}[C_{yy}(\tau)] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{Y}_n \overline{Y}_n^* \delta\left(\nu - \frac{n}{T_s}\right) . \quad (10)$$

La densité spectrale de puissance de l'Éq. (10) possède la forme typique généralement rencontrée avec des systèmes présentant de la RS périodique (voir Fig. 3). Elle est constituée par des raies spectrales d'amplitude $|\overline{Y}_n|^2$ aux multiples entiers de la fréquence cohérente $1/T_s$, superposées à un fond de bruit continu large-bande représenté par $\text{TF}[C_{yy}(\tau)]$.

L'autocovariance $E[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t+\tau)]$ est escomptée tendre vers zéro quand $|\tau| \rightarrow +\infty$, et de même pour sa moyenne temporelle $C_{yy}(\tau)$. L'espérance $E[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t)] = \text{var}[y(t)]$ représente la variance instationnaire de $y(t)$, qui après moyennage temporel sur une période T_s selon l'Éq. (8), donne $C_{yy}(0) = \overline{\text{var}[y(t)]}$, la variance stationnarisée de $y(t)$. La fonction déterministe $C_{yy}(\tau)$ peut ainsi être écrite comme

$$C_{yy}(\tau) = \overline{\text{var}[y(t)]} h(\tau) , \quad (11)$$

où $h(\tau)$ est une fonction déterministe paire décrivant la forme normalisée de l'autocovariance stationnarisée ; elle vérifie $h(0) = 1$ et $h(\tau) \rightarrow 0$ quand $|\tau| \rightarrow +\infty$, et possède une transformée de Fourier $\text{TF}[h(\tau)] = H(\nu)$.

La densité spectrale de puissance de l'Éq. (10) peut ainsi s'exprimer par

$$P_{yy}(\nu) = \overline{\text{var}[y(t)]} H(\nu) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\overline{Y}_n|^2 \delta\left(\nu - \frac{n}{T_s}\right) . \quad (12)$$

Une définition classique du RSB à la fréquence n/T_s , est donnée par le rapport de la puissance contenue dans la raie spectrale seule divisée par la puissance contenue dans le fond de bruit dans une petite bande de fréquence ΔB autour de n/T_s . L'expression correspondante du RSB en sortie se déduit alors comme

$$\mathcal{R}_{\text{out}}\left(\frac{n}{T_s}\right) = \frac{|\overline{Y}_n|^2}{\overline{\text{var}[y(t)]} H(n/T_s) \Delta B} . \quad (13)$$

L'équation (13) fournit une expression exacte pour le RSB en sortie, dont l'évaluation explicite nécessite la connaissance de l'espérance instationnaire de sortie $E[y(t)]$ et de la fonction d'autocovariance stationnarisée de sortie $C_{yy}(\tau)$.

Notons qu'une autre mesure de la RS périodique est parfois constituée par la simple amplitude de la (d'une) raie cohérente de sortie [57, 50, 61], qui est donnée par $|\overline{Y}_n|$ d'après l'Éq. (4). Au contraire du RSB, cette mesure ne nécessite l'évaluation que de propriétés statistiques du premier ordre sur la sortie $y(t)$ (le moment d'ordre 1 de degré 1, c'est-à-dire $E[y(t)]$). C'est

une forme de RS de constater que l’amplitude de la composante cohérente en sortie peut être augmentée en augmentant le bruit en entrée. Toutefois, cela n’est pas forcément la mesure de performance la plus intéressante, car si l’amplitude cohérente croît en sortie avec le bruit d’entrée, le bruit de sortie peut croître en même temps et même plus fortement et ainsi dégrader le RSB en sortie. Ainsi chercher à faire croître le RSB en sortie, en augmentant le bruit en entrée, constitue souvent une performance plus intéressante de la RS.

Dans le même ordre d’idée, on pourra préférer parfois, non pas faire croître pour le maximiser le RSB de sortie \mathcal{R}_{out} en augmentant le bruit d’entrée, mais faire croître le gain entrée–sortie du RSB, c’est-à-dire le rapport $\mathcal{R}_{\text{out}}/\mathcal{R}_{\text{in}}$, avec le RSB d’entrée défini comme

$$\mathcal{R}_{\text{in}}\left(\frac{n}{T_s}\right) = \frac{|S_n|^2}{P_{\eta\eta}(n/T_s)\Delta B}, \quad (14)$$

où S_n est le coefficient de Fourier d’ordre n du signal d’entrée $s(t)$, et $P_{\eta\eta}(\nu) = \text{TF}\{\text{E}[\eta(t)\eta(t+\tau)]\}$ la densité spectrale de puissance du bruit d’entrée $\eta(t)$. Ce n’est que récemment qu’a été établie la possibilité d’augmenter le gain $\mathcal{R}_{\text{out}}/\mathcal{R}_{\text{in}}$ en augmentant le bruit d’entrée dans la RS [11]. Nous reviendrons sur cette propriété importante dans la suite.

Une autre mesure de performance peut être constituée grâce à une fonction d’intercorrélation entre l’entrée cohérente $s(t)$ et la sortie $y(t)$, moyennée temporellement sur une période,

$$R_{sy}(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} s(t) \text{E}[y(t+\tau)] dt, \quad (15)$$

cette dernière quantité pouvant être normalisée à l’aide des puissances de $s(t)$ et $y(t)$, et son maximum recherché en une valeur de τ afin d’extraire un coefficient de corrélation entrée–sortie que l’on cherchera à faire résonner en augmentant le bruit. Nous reviendrons dans une section suivante sur une telle mesure de corrélation, notamment car elle peut se transposer de façon significative pour la RS avec un signal cohérent aperiodique [17].

Une autre mesure de performance parfois employée pour la RS périodique, applicable dans les systèmes bistables [55, 59], est, à partir de l’histogramme des durées inter-transitions entre les deux états de sortie, le nombre de ces durées synchronisées avec la période de forçage cohérente.

Une autre mesure proposée pour la RS périodique [1], est une mesure destinée à quantifier le caractère cyclostationnaire du signal de sortie, qui utilise en lieu et place de la densité spectrale de puissance, la corrélation spectrale de sortie, laquelle s’obtient par transformée de Fourier bidimensionnelle de l’espérance instationnaire de l’Éq. (5). Puisque l’excitation d’entrée est cyclostationnaire à cause du signal périodique mélangé au bruit stationnaire, maximiser le caractère cyclostationnaire du signal aléatoire de sortie est une façon de maximiser sa “ressemblance” avec l’entrée périodique.

L’approche “moderne” de la RS est donc de considérer une mesure de performance, particulière, qui possède une signification en fonction du contexte ou de l’utilité recherchée, et d’examiner les conditions où cette mesure peut être augmentée par ajout de bruit. Historiquement, c’est toutefois le RSB de sortie, défini par l’Éq. (13), qui a été la mesure la plus fréquemment retenue pour quantifier la RS périodique.

2.3 Analyse théorique dans les systèmes dynamiques bistables

L’analyse théorique de la RS périodique dans les systèmes dynamiques bistables du type de l’Éq. (1) a donc consisté classiquement à tenter de calculer explicitement la fonction d’autocorrélation de sortie comme elle apparaît dans l’Éq. (7), puis en déduire la densité spectrale de

puissance de sortie comme dans l'Éq. (10) dont la constitution permet d'accéder au RSB de l'Éq. (13). Ce calcul explicite est en général difficile pour les systèmes décrits par l'Éq. (1) car on se trouve dans un contexte à la fois non linéaire et non stationnaire.

2.3.1 Équation de Fokker-Planck

Une approche possible commence par réécrire l'Éq. (1) sous forme d'une équation de Langevin

$$\tau_a \dot{x}(t) = -\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} + \eta(t), \quad (16)$$

où l'on a absorbé l'excitation cohérente $s(t)$ dans un nouveau potentiel instationnaire cette fois

$$U(x,t) = U(x) - x.s(t). \quad (17)$$

Dans le cas markovien, c'est-à-dire lorsque $\eta(t)$ est un bruit blanc d'autocorrélation $E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = 2D\delta(\tau)$, est associée à l'équation différentielle stochastique (16) l'équation de Fokker-Planck [32, 69, 58]

$$\tau_a \frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} p(x,t) \right] + \frac{D}{\tau_a} \frac{\partial^2 p(x,t)}{\partial x^2} \quad (18)$$

où $p(x,t)$ est la densité de probabilité de présence en x à l'instant t .

La résolution de l'Éq. (18), avec la condition initiale que $x(t)$ est en x_0 à l'instant t_0 , donne une densité de probabilité de l'état $x(t)$ sachant l'état à l'instant $t_0 \leq t$. On accède donc par la résolution de l'Éq. (18) à ce qui constitue une densité de probabilité conditionnelle (conditionnée par la condition initiale de l'Éq. (18)) qui, avec un léger abus de notation, peut se représenter comme $p[x(t_2)|x(t_1)]$, pour $t_2 \geq t_1$. À t_2 fixé, à la limite $t_1 \rightarrow -\infty$, la densité conditionnelle tend vers une fonction de t_2 seul, qui représente la densité marginale $p[x(t_2)]$. Notons qu'ici, dans le contexte de la RS périodique, comme $U(x,t)$ est périodique en t de période T_s , la densité marginale est aussi T_s -périodique en temps. Une fois en possession de la densité marginale, on dispose de la densité conjointe de $x(t)$ à deux temps $p[x(t_1), x(t_2)] = p[x(t_2)|x(t_1)]p[x(t_1)]$. Cette densité conjointe est tout ce qu'il faut pour calculer la fonction d'autocorrélation du signal $x(t)$ puis sa densité spectrale de puissance qui donne accès au RSB selon le schéma général de la Section 2.2.

Malheureusement, en présence des potentiels bistables modulés périodiquement en temps que l'on rencontre avec la RS périodique, on ne sait pas écrire analytiquement la solution de l'équation de Fokker-Planck (18). Le mieux que l'on sache faire est d'accéder au comportement asymptotique de la solution qui donne accès à la densité marginale $p[x(t)]$. Ceci permet néanmoins de calculer l'amplitude des raies cohérentes (voir Fig. 3) dans la densité spectrale de puissance de sortie (écrite $|\bar{Y}_n|$ dans l'Éq. (12)) [50, 29]. On dispose là d'une mesure qui peut servir à quantifier une forme de RS périodique. Au delà, pour accéder au RSB de sortie, il manque l'évaluation de l'amplitude du fond de bruit (voir Fig. 3), qui représente le dénominateur de l'Éq. (13).

Il est possible d'avancer plus loin en supposant que l'amplitude du fond de bruit est peu affectée par la présence de la modulation périodique $s(t)$ responsable des raies cohérentes. On remplace alors l'amplitude du fond continu de bruit dans la densité spectrale de puissance de sortie en présence de $s(t)$, par cette amplitude en l'absence de $s(t)$, cette dernière pouvant recevoir une expression analytique explicite [30, 69, 32] à partir de l'équation de Fokker-Planck (18) où le potentiel $U(x,t)$ est réduit au potentiel stationnaire $U(x)$ quand $s(t) \equiv 0$. Cette approximation est certainement raisonnable lorsque le signal cohérent $s(t)$ est à la fois petit et lent [30],

mais la réf. [14] montre des situations où elle n'est plus valide lors de RS périodique où $s(t)$ n'est pas "petit". Dans le cadre de cette approximation, on peut ainsi accéder à une expression approchée du RSB de sortie de l'Éq. (13), et constater qu'il existe des régimes où on peut l'augmenter en augmentant le niveau du bruit d'entrée, révélant ainsi la RS, que l'on peut en même temps vérifier par simulation numérique ou analogique du système de l'Éq. (16). C'est ce que l'on peut constater dans [30, 40].

2.3.2 Approximation à deux états

Pour mettre en évidence l'effet de RS, il est possible de simplifier la dynamique de l'Éq. (16) en réalisant une quantification binaire du signal $x(t)$, au moyen par exemple d'un signal $y(t) = \pm 1$ suivant le puits dans lequel se trouve l'état $x(t)$. On s'intéresse alors seulement au signal de sortie $y(t)$ qui décrit les transitions entre les deux puits, et dans lequel on va chercher à quantifier la marque de l'entrée périodique $s(t)$, via le programme de la Section 2.2 qui passe par le calcul de la fonction d'autocorrélation de $y(t)$.

La méthode, établie dans [57], consiste à introduire les probabilités d'occupation de chacun des deux puits, soit $p_+(t) = \Pr\{y(t) = +1\}$ et $p_-(t) = \Pr\{y(t) = -1\}$, ainsi que l'équation maîtresse qui gouverne leur évolution

$$\frac{dp_+(t)}{dt} = -\frac{dp_-(t)}{dt} = W_-(t)p_-(t) - W_+(t)p_+(t), \quad (19)$$

où $W_-(t)$ est de taux d'échappement du puits $-$ vers le puits $+$, et inversement pour $W_+(t)$.

Comme $p_+ = 1 - p_-$ pour tout t , l'Éq. (19) donne

$$\frac{dp_+(t)}{dt} = W_-(t) - [W_-(t) + W_+(t)]p_+(t). \quad (20)$$

Pour trouver p_+ en résolvant l'Éq. (20), une expression explicite des taux de transition W_- et W_+ est nécessaire en fonction des caractéristiques des entrées $s(t)$ et $\eta(t)$ et du système non linéaire. Alors, avec une condition initiale précisant l'état de la sortie y à l'instant t_0 , on trouve la solution de l'Éq. (20) qui donne la probabilité de la sortie $y(t) = +1$ sachant l'état de la sortie en $t_0 \leq t$. Ce type de probabilité, comme dans le cas de l'équation de Fokker-Planck, permet de calculer l'autocorrélation de la sortie $y(t)$ puis le RSB selon le programme de la Section 2.2.

Pour exprimer W_- et W_+ , la théorie de [57] utilise un taux de Kramers modifié valable seulement dans le cadre d'approximations. Le taux de Kramers désigne le taux d'échappement hors d'un puits de potentiel d'une particule soumise aux fluctuations stationnaires gouvernées par

$$\tau_a \dot{x}(t) = -\frac{dU(x)}{dx} + \eta(t), \quad (21)$$

sous l'influence d'un bruit $\eta(t)$ gaussien et blanc d'autocorrélation $E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = 2D\delta(\tau)$.

Dans le cas d'une barrière de potentiel de hauteur U_0 , séparant son sommet situé en $x = x_s$ d'un fond de puits situé en $x = x_f$, on a l'expression du taux de Kramers [59]

$$W_0 = \frac{\sqrt{|U''(x_s)|U''(x_f)}}{2\pi\tau_a} \exp\left(-\frac{U_0}{D/\tau_a}\right) \quad (22)$$

où $U''(x)$ est la dérivée seconde du potentiel.

On passe alors au potentiel modulé temporellement de l'Éq. (17) qui gouverne l'équation d'évolution (16). En considérant $s(t)$ comme une perturbation lente, on peut admettre que le taux de Kramers de l'Éq. (22) reste valable avec une dépendance temporelle apportée par $U(x, t)$, ce que l'on appelle l'approximation adiabatique [57, 61]. Le taux de Kramers ainsi modifié fournit des expressions pour $W_-(t)$ et $W_+(t)$. Dans le cas d'une modulation sinusoïdale $s(t) = A \cos(2\pi t/T_s)$, et avec le potentiel quartique de l'Éq. (2), en supposant de plus que l'amplitude cohérente A est faible, la théorie de [57] aboutit à une expression du RSB de sortie sous la forme :

$$\mathcal{R}_{\text{out}} = \sqrt{2} \frac{A^2 X_b^2}{4(D/\tau_a)^2} \exp\left(-\frac{U_0}{D/\tau_a}\right) \quad (23)$$

L'évolution non monotone du RSB de l'Éq. (23) avec la densité de puissance D du bruit est la signature de la RS, qui est aussi vérifiée en simulation [57]. Cette théorie de [57] est applicable pour n'importe quel potentiel bistable $U(x)$, mais avec une modulation sinusoïdale $s(t)$ lente et de faible amplitude et avec l'hypothèse d'un bruit blanc et gaussien en entrée. Cette approche a par exemple été utilisée avec un potentiel à double puits différent du potentiel quartique, et qui décrit certains régimes de fonctionnement de neurones dans un réseau [6, 7]. La théorie de [57] a été abondamment employée pour modéliser la RS survenant dans de nombreuses réalisations physiques de la dynamique bistable de l'Éq. (1) comme par exemple des circuits électroniques ou des dispositifs optiques (voir [59, 29] pour une synthèse).

2.4 Théorie de la réponse linéaire

Une autre méthode proposée pour modéliser la RS périodique est la théorie de la réponse linéaire [26, 25, 23, 21, 24]. Cette théorie est une méthode de perturbation basée sur la linéarisation de la réponse d'un système non linéaire pour une petite entrée périodique ajoutée au bruit. En principe, elle peut être appliquée à tout système non linéaire, non nécessairement dynamique bistable comme dans la Section 2.3.2 ; une application est faite, par exemple, dans [77] montrant de la RS périodique dans un système dynamique non linéaire monostable.

De façon générale, si l'on considère un système non linéaire invariant temporellement et excité en entrée par un bruit stationnaire $\eta(t)$, la réponse produite en sortie en régime permanent (entrée appliquée depuis $t \rightarrow -\infty$) sera un signal aléatoire stationnaire $y(t)$, muni donc d'une espérance $E[y(t)] = y_0$ constante. La théorie de la réponse linéaire consiste à considérer que l'ajout à l'entrée de bruit $\eta(t)$ d'une petite perturbation sinusoïdale $s(t) = A \cos(\omega t)$ conduit à ajouter à l'espérance de sortie une petite perturbation qui est proportionnelle à l'entrée $s(t)$, pour devenir $E[y(t)] = y_0 + H(\omega) \times A \cos(\omega t)$ (plus un éventuel déphasage que nous n'écrivons pas). Le coefficient de proportionnalité, qui dépend de la pulsation ω , définit une transmittance $H(\omega)$ pour le système linéarisé. Cette transmittance $H(\omega)$ dépend du point de fonctionnement imposé par le bruit au système non linéaire et autour duquel s'effectue sa linéarisation.

Dans ces conditions, la puissance dans la raie cohérente qui intervient au numérateur dans le RSB de sortie (voir Fig. 3) est proportionnel à $|H(\omega)|^2$. On dispose déjà là avec $|H(\omega)|^2$ d'une mesure possible pour la RS. Pour accéder au RSB de sortie, il faut évaluer également l'amplitude du fond de bruit, dénominateur du RSB. Puisque l'on est en présence d'un signal cohérent $s(t)$ petit, on peut reconduire une approximation déjà évoquée qui consiste à confondre le fond de bruit en présence de $s(t)$ à ce qu'il est en l'absence de $s(t)$. Dans ces conditions on est confronté à l'analyse d'un système non linéaire soumis à un seul bruit stationnaire, généralement plus facile à traiter que le système complet excité par surcroît par la modulation périodique ; on peut souvent atteindre ainsi une expression explicite approchée pour l'amplitude du fond de bruit, puis donc du RSB.

Un passage clé de l’application de la théorie de la réponse linéaire est donc d’être capable d’exprimer la transmittance $H(\omega)$, pour un système non linéaire donné dans des conditions d’excitation de bruit données. Ce problème peut se résoudre, pour certaines classes de processus, au moyen du théorème de fluctuation-dissipation et de ses extensions [24, 68, 29], ce qui là aussi a permis de modéliser la RS périodique survenant dans de nombreuses réalisations physiques (voir [24, 29] pour une synthèse).

La théorie de la réponse linéaire, en tant que théorie perturbative de la RS, possède, en principe, un large champ d’application. Elle permet notamment de s’affranchir de l’hypothèse adiabatique ($s(t)$ lent), mais doit maintenir $s(t)$ petit. Néanmoins, comme ce sera visible dans la suite, la RS peut aussi survenir hors des conditions perturbatives, là où la RS se présente non plus comme un phénomène perturbatif (un petit signal est assisté par un bruit) mais comme un phénomène coopératif (un signal et un bruit d’importance comparable coopèrent) [14].

2.5 Dans les systèmes dynamiques à non-linéarité statique

2.5.1 Une théorie générale pour non-linéarité statique

La RS périodique, historiquement, a été observée et étudiée d’abord dans des systèmes dynamiques non linéaires du type de l’Éq. (1). Dans ces systèmes on peut dire que le caractère dynamique et le caractère non linéaire sont “mêlés”. Pour ces systèmes, la réalisation effective du programme de caractérisation de la Section 2.2 est ainsi rendue difficile et réclame la plupart du temps des approximations, comme nous l’avons vu.

Plus récemment, une classe différente de systèmes dynamiques non linéaires a été introduite, pour laquelle le programme de la Section 2.2 peut être réalisé explicitement de façon quasiment exacte [10, 14]. Dans cette classe, les caractères dynamique et non linéaire sont découplés ; elle est constituée des systèmes dynamiques non linéaires formés par l’association d’une non-linéarité statique (ou sans mémoire) suivie d’un système dynamique linéaire quelconque, conformément au schéma de la Fig. 4.

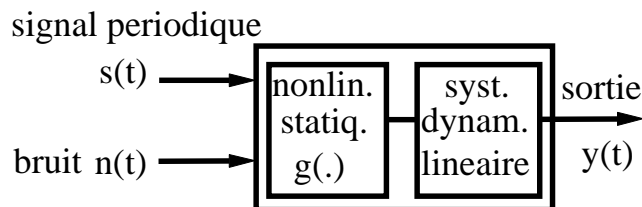


Figure 4: Une classe générale de systèmes dynamiques non linéaires montrant de la RS périodique.

La RS est un effet essentiellement non linéaire, et il a été montré [14] que pour ces systèmes elle a son origine, et il est suffisant de la caractériser, dans la transmission de la non-linéarité statique. Nous allons présenter ici le cas de la RS périodique en présence d’un bruit blanc. Le cas du bruit coloré est discuté dans [14].

Considérons $s(t)$ un signal cohérent périodique de période T_s , et $\eta(t)$ un bruit blanc stationnaire de densité de probabilité $f_\eta(u)$, et de fonction de répartition $F_\eta(u) = \int_{-\infty}^u f_\eta(u') du'$. Ces deux signaux sont appliqués à l’entrée d’un système non linéaire statique délivrant la sortie

$$y(t) = g[s(t) + \eta(t)] , \quad (24)$$

où g est une fonction opérant sur les nombres réels.

La fonction d'autocorrélation du bruit blanc est $R_{\eta\eta}(\tau) = E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = 2D\delta(\tau)$, et comme conséquence le bruit blanc possède une puissance infinie $E[\eta^2(t)] = R_{\eta\eta}(0) = +\infty$. Cette pathologie est due au caractère idéalisé du bruit blanc. En pratique on a accès seulement à des approximations du bruit blanc idéal, qui possèdent une durée de corrélation τ_c brève mais non nulle, en même temps qu'une puissance $E[\eta^2(t)]$ grande mais finie, et vérifiant $E[\eta^2(t)] \times \tau_c \sim 2D$. C'est ce type de concrétisation d'un bruit blanc "réel" que nous allons adopter, afin, en présence de non-linéarités statiques, d'éviter des difficultés artificielles apportées par le bruit blanc "idéal". De plus, afin de disposer de la possibilité d'une évaluation numérique directe de chaque quantité pertinente de la modélisation, spécialement en vue de comparaisons avec des simulations numériques ou des réalisations expérimentales, nous allons adopter maintenant un traitement à temps discret. L'échelle des temps est donc discrétisée au pas $\Delta t \ll T_s$, tel que $T_s = N\Delta t$. En pratique maintenant, le bruit blanc $\eta(t)$ doit seulement être un bruit de durée de corrélation τ_c plus courte que Δt , et d'une puissance finie $E(\eta^2) = \sigma_\eta^2$. Un tel bruit, échantillonné tous les Δt , constitue un bruit blanc à temps discret $\eta(t = j\Delta t)$ doté d'une fonction d'autocorrélation $R_{\eta\eta}(k\Delta t) = E[\eta(j\Delta t)\eta(j\Delta t + k\Delta t)] = \sigma_\eta^2 \Delta t \hat{\delta}(k\Delta t)$, avec l'impulsion de Dirac à temps discret définie comme

$$\hat{\delta}(k\Delta t) = \begin{cases} 1/\Delta t & \text{pour } k = 0 \\ 0 & \text{pour } k \neq 0. \end{cases} \quad (25)$$

Avec cette constitution du bruit blanc, la densité spectrale de puissance est donnée par

$$2D = \sigma_\eta^2 \Delta t. \quad (26)$$

Maintenant, dans ce cadre à temps discret, nous allons montrer comment on peut réaliser de façon exacte, pour des non-linéarités statiques, le programme de caractérisation de la Section 2.2.

L'élément clé est que, avec un bruit *blanc* $\eta(t)$ et une non-linéarité *statique* $g(u)$, pour tout t et tout $\tau \neq 0$, $y(t)$ et $y(t+\tau)$ sont statistiquement décorrélés, comme le sont $\eta(t)$ et $\eta(t+\tau)$. En conséquence, les espérances de sortie en temps discret vérifient

$$E[y(j\Delta t)y(j\Delta t + k\Delta t)] = E[y(j\Delta t)] E[y(j\Delta t + k\Delta t)], \quad (27)$$

pour tout entier j , et tout entier $k \neq 0$. Et seulement dans le cas $\tau = k\Delta t = 0$ avons nous

$$E[y(j\Delta t)y(j\Delta t)] = E[\tilde{y}^2(j\Delta t)] + E^2[y(j\Delta t)] \neq E^2[y(j\Delta t)]. \quad (28)$$

À tout instant $t = j\Delta t$ fixé, comme $\eta(t)$ est distribué selon $f_\eta(u)$, alors $s(t) + \eta(t)$ est distribué selon $f_\eta[u - s(t)]$. Il résulte alors de la dépendance fonctionnelle (24) que l'espérance instationnaire de sortie peut se calculer explicitement comme

$$E[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) f_\eta[u - s(t)] du, \quad (29)$$

et le moment instationnaire de degré deux comme

$$E[y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u) f_\eta[u - s(t)] du. \quad (30)$$

Une expression est alors accessible pour la variance instationnaire de sortie $E[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t)] = \text{var}[y(t)]$, comme

$$\text{var}[y(t)] = E[y^2(t)] - E^2[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u) f_\eta[u - s(t)] du - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u) f_\eta[u - s(t)] du \right)^2. \quad (31)$$

Les équations (27) et (28) peuvent être combinées en une unique expression, dans laquelle chaque terme est maintenant connu d'après les Éqs. (29) et (31) :

$$E[y(j\Delta t)y(j\Delta t + k\Delta t)] = \overline{\text{var}(y)} \Delta t \hat{\delta}(k\Delta t) + E[y(j\Delta t)] E[y(j\Delta t + k\Delta t)] , \quad (32)$$

pour tous entiers j et k , et $\hat{\delta}(k\Delta t)$ défini par l'Éq. (25).

Via un moyennage temporel, nous définissons alors la fonction d'autocorrélation de sortie en temps discret, correspondant à l'Éq. (6), comme

$$R_{yy}(k\Delta t) = \overline{\text{var}(y)} \Delta t \hat{\delta}(k\Delta t) + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} E[y(j\Delta t)] E[y(j\Delta t + k\Delta t)] , \quad (33)$$

avec la variance de sortie stationnarisée

$$\overline{\text{var}(y)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \text{var}[y(j\Delta t)] \quad (34)$$

qui est calculable explicitement par l'Éq. (31).

La fonction d'autocovariance stationnarisée de sortie de l'Éq. (11) est alors simplement

$$C_{yy}(k\Delta t) = \overline{\text{var}(y)} \Delta t \hat{\delta}(k\Delta t) = \overline{\text{var}(y)} h(k\Delta t) . \quad (35)$$

Pour procéder dans le domaine fréquentiel, les coefficients de Fourier du signal déterministe T_s -périodique $E[y(j\Delta t)]$ sont introduit comme

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} E[y(j\Delta t)] \exp\left(-i2\pi \frac{jn}{N}\right) . \quad (36)$$

La transformée de Fourier discrète de R_{yy} , sur un intervalle de temps d'un nombre entiers $2M$ de périodes T_s , est définie comme

$$\text{TFD}[R_{yy}(k\Delta t)] = P_{yy}(\ell\Delta\nu) = \sum_{k=-MN}^{MN-1} R_{yy}(k\Delta t) \exp\left(-i2\pi \frac{k\ell}{2MN}\right) \Delta t , \quad (37)$$

avec la résolution fréquentielle $\Delta\nu = 1/(2MN\Delta t)$.

La fonction d'autocorrélation de l'Éq. (33) est formée d'une impulsion à l'origine d'amplitude $\overline{\text{var}(y)}\Delta t$, superposée à une composante périodique de période T_s (le second terme du membre de droite de l'Éq. (33)). La transformée de Fourier de R_{yy} définit la densité spectrale de puissance de sortie P_{yy} , qui sera alors formée d'un fond constant d'amplitude $\overline{\text{var}(y)}\Delta t$, superposé à une série de raies spectrales aux multiples entiers de $1/T_s$. On retrouve la forme classique de la densité spectrale de puissance de sortie, annoncée Fig. 3, pour un système présentant de la RS périodique. L'application de l'Éq. (37) conduit ainsi à la densité spectrale de puissance

$$P_{yy}(\ell\Delta\nu) = \overline{\text{var}(y)} \Delta t + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |\bar{Y}_n|^2 \frac{\Delta t}{\Delta\nu} \hat{\delta}(\ell - 2Mn) , \quad (38)$$

qui, aux fréquences n/T_s multiples entiers de la fréquence cohérente donne

$$P_{yy}\left(\frac{n}{T_s}\right) = \overline{\text{var}(y)} \Delta t + |\bar{Y}_n|^2 \frac{1}{\Delta\nu} . \quad (39)$$

À cause de la condition (26), la quantité $\overline{\text{var}(y)}\Delta t$ est escomptée rester finie. Comme la fonction $h(\tau)$ est ici simplement $\Delta t \hat{\delta}(k\Delta t)$, sa transformée de Fourier est $H(\nu) = \Delta t, \forall \nu$. Le RSB de l'Éq. (13) se déduit donc comme

$$\mathcal{R}_{\text{out}}\left(\frac{n}{T_s}\right) = \frac{|\bar{Y}_n|^2}{\text{var}(y)\Delta t\Delta B}. \quad (40)$$

Le RSB de sortie de l'Éq. (40) est ainsi complètement calculable, grâce aux Éqs. (29), (36) et Éqs. (31), (34), pour n'importe quelles distribution du bruit $f_\eta(u)$ et entrée périodique $s(t)$ transmises par une non-linéarité quelconque $g(u)$. On peut ainsi explicitement examiner l'influence du niveau et des propriétés du bruit d'entrée, et mettre en évidence les conditions conduisant à de la RS.

Notons que lorsqu'un système dynamique linéaire quelconque est cascadié en aval de la non-linéarité statique de l'Éq. (24), comme sur la Fig. 4, alors la densité spectrale de puissance en sortie de la non-linéarité statique se trouvera simplement multipliée par le module carré de la transmittance du système linéaire. Le RSB \mathcal{R}_{out} sera en particulier inchangé et la RS se produira de façon identique en sortie de la non-linéarité statique et en sortie du système dynamique linéaire plus en aval.

2.5.2 Applications

Pour illustrer la théorie générale de la Section 2.5.1, nous considérons le circuit électronique [37] représenté sur la Fig. 5.

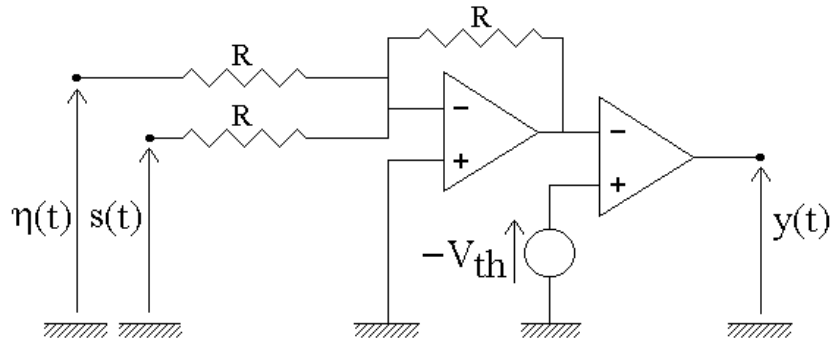


Figure 5: Circuit électronique d'un comparateur à seuil V_{th} réalisant la non-linéarité de l'Éq. (41).

Il s'agit d'un comparateur à seuil V_{th} à deux états de sortie $\pm V_{\text{sat}}$ qui réalise la non-linéarité :

$$g(u) = \begin{cases} -V_{\text{sat}} & \text{si } u < V_{\text{th}} \\ +V_{\text{sat}} & \text{si } u > V_{\text{th}} . \end{cases} \quad (41)$$

Le circuit est attaqué par un signal cohérent sinusoïdal $s(t) = V_M \sin(2\pi t/T_s)$ ajouté au bruit blanc $\eta(t)$ gaussien centré d'amplitude efficace σ_η . La figure 6 montre une évolution du RSB en sortie, à différents harmoniques de la fréquence cohérente $1/T_s$, lorsque $V_M = 1.9$ volts et $V_{\text{th}} = 2.2$ volts. On constate sur la Fig. 6 une excellente adéquation entre la théorie (exacte) et l'expérience.

Dans les conditions de la Fig. 6, le signal cohérent $s(t)$ est subliminal, c'est-à-dire qu'à lui seul il est incapable d'induire des transitions en sortie car son amplitude V_M est inférieure

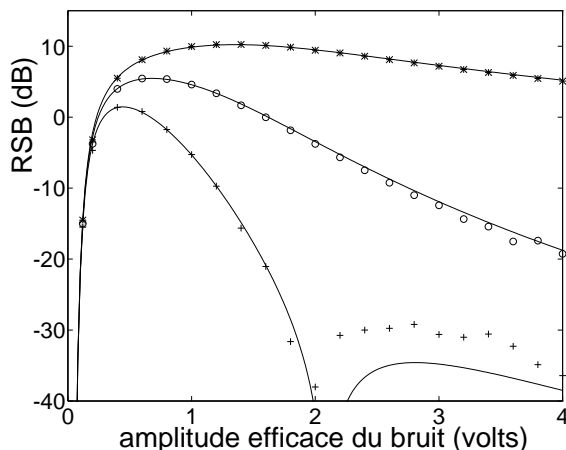


Figure 6: Rapport signal sur bruit de sortie \mathcal{R}_{out} , en fonction de l’amplitude efficace σ_η du bruit d’entrée, pour la non-linéarité de l’Éq. (41). En traits pleins est l’expression théorique de l’Éq. (40), les jeux de valeurs discrètes sont les évaluations expérimentales, (*) à $1/T_s$, (o) à $2/T_s$ et (+) à $3/T_s$.

au seuil V_{th} . Le RSB en sortie est alors strictement nul en l’absence du bruit. Dès que l’on commence à ajouter un peu de bruit gaussien, le signal cohérent devient visible en sortie, car le bruit et le signal coopèrent pour vaincre le seuil. Dans une première phase, plus on augmente le bruit en entrée et plus le signal cohérent est visible en sortie. Le RSB croît alors avec l’amplitude efficace σ_η du bruit, et ce jusqu’à un niveau de bruit optimal où le RSB passe par un maximum. Au delà, le bruit domine dans la sortie et fait décroître le RSB. On voit là un exemple typique d’une forme de RS.

La référence [39] montre un autre exemple de RS périodique dans un circuit électronique encore plus simple, autour d’une diode à jonction, apparaissant comme un système physique “minimal” rassemblant les ingrédients de la RS.

La référence [14] rapporte d’autres applications de la théorie de la Section 2.5.1, montrant la RS dans d’autres situations, par exemple avec des non-linéarités statiques sans seuil, lisses non monotones comme $g(u) = \exp[-(u - \theta)^2/\lambda^2]$ là où le signal cohérent n’est plus subliminal (voir aussi [77, 5]).

La référence [14] discute aussi la situation de la RS dans des non-linéarités à seuil par rapport à la technique du “dithering”. Cette technique [73, 78, 41] se rencontre lors de la conversion analogique-numérique d’un signal stationnaire de moyenne constante ; elle consiste à ajouter un bruit (uniforme sur le pas de quantification) au signal analogique avant quantification, afin d’obtenir un signal quantifié dont la moyenne reproduit exactement la moyenne du signal analogique. Le “dithering” peut s’interpréter comme *une forme particulière* de RS [28, 14], se produisant à la fréquence zéro, en présence de non-linéarités à seuil, et où la mesure de performance est la qualité de récupération du premier moment, qui est maximisée pour un bruit optimal uniforme sur le pas de quantification.

La technique du “dithering” est connue de longue date en traitement du signal [73] ; elle représente une forme précoce et particulière de RS montrant l’effet où un certain bruit produit un certain type d’amélioration sur le signal dans un certain type de systèmes. Aujourd’hui la RS peut être considérée comme un paradigme général, regroupant l’ensemble des extensions, généralisations, élaborations, sur cet effet de signal favorisé par le bruit, qui peut survenir, c’est

ce qui est apparu au cours du temps, sous des formes très variées avec des signaux et systèmes non linéaires très variés.

2.5.3 Gain entrée–sortie pour le rapport signal sur bruit

Nous venons donc de voir des situations où il est possible d’augmenter le RSB \mathcal{R}_{out} en sortie d’un système en accroissant le bruit d’entrée. Une autre question importante est d’examiner la possibilité d’obtenir, en présence de RS, un RSB de sortie \mathcal{R}_{out} supérieur au RSB d’entrée \mathcal{R}_{in} , et si de plus le gain $\mathcal{R}_{\text{out}}/\mathcal{R}_{\text{in}} > 1$ peut être augmenté en augmentant le bruit d’entrée.

La théorie de la Section 2.5.1 permet de répondre, par l’affirmative, à cette double question. En présence du bruit blanc $\eta(t)$ d’amplitude efficace σ_η en entrée d’une non-linéarité statique, la combinaison des Éqs. (14), (40) conduit au gain entrée–sortie du RSB à l’harmonique n/T_s du signal cohérent périodique :

$$G_{\text{RSB}}\left(\frac{n}{T_s}\right) = \frac{\mathcal{R}_{\text{out}}(n/T_s)}{\mathcal{R}_{\text{in}}(n/T_s)} = \frac{|\overline{Y_n}|^2 / \overline{\text{var}(y)}}{|S_n|^2 / \sigma_\eta^2}. \quad (42)$$

Pour illustration on peut considérer le cas où la non-linéarité statique est une fonction de Heaviside de seuil θ :

$$g(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u \leq \theta \\ 1 & \text{pour } u > \theta, \end{cases} \quad (43)$$

attaquée par un signal T_s -périodique constitué par une impulsion rectangulaire de durée T et d’amplitude A répétée tous les T_s , c’est-à-dire $s(t) = A$ pour $t \in [0, T < T_s[$ et $s(t) = 0$ ailleurs dans la période T_s . Dans ces conditions, la théorie de la Section 2.5.1 conduit à l’expression explicite du gain

$$G_{\text{RSB}}\left(\frac{n}{T_s}\right) = \frac{[F_\eta(\theta) - F_\eta(\theta - A)]^2 \sigma_\eta^2 / A^2}{\frac{T}{T_s} F_\eta(\theta - A)[1 - F_\eta(\theta - A)] + \left(1 - \frac{T}{T_s}\right) F_\eta(\theta)[1 - F_\eta(\theta)]}, \quad (44)$$

où nous rappelons que $F_\eta(u)$ est la fonction de répartition du bruit d’entrée $\eta(t)$. La figure 7 montre ce gain dans le cas d’un bruit $\eta(t)$ gaussien.

Les résultats de la Fig. 7 montrent clairement la possibilité d’obtenir un gain G_{RSB} supérieur à 1, et aussi la possibilité d’augmenter ce gain en augmentant le niveau du bruit. Ceci constitue une forme de RS périodique où la mesure de performance est le gain du RSB G_{RSB} . La référence [11] montre d’autres résultats sur l’amélioration des gains entrée–sortie dans la RS périodique, et la référence [38] montre une transposition de cette propriété à la RS aperiodique.

2.6 Conclusion sur la RS périodique

Nous avons vu dans cette section comment il peut être possible de favoriser la transmission d’un signal utile périodique en augmentant le bruit. Soulignons que le signal cohérent périodique peut en principe être considéré comme une porteuse haute-fréquence, qu’il serait possible de moduler au moyen d’un message basse-fréquence, le signal utile modulé pouvant alors profiter de la transmission assistée par le bruit comme elle est rendue possible par la RS périodique [2]. Notons aussi qu’un signal strictement périodique (sur une plage de stationnarité limitée), peut d’une certaine façon (de plage en plage de stationnarité) véhiculer de l’information. Cela peut être le cas chez les neurones sensoriels par exemple, qui codent un stimulus stationnaire de l’environnement par la période de décharge d’impulsions électriques (les potentiels d’action).

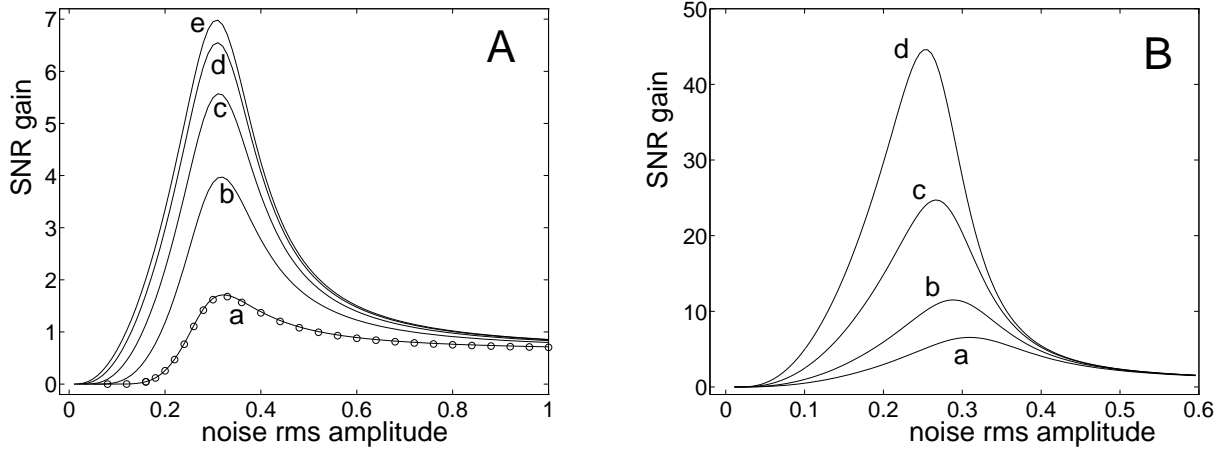


Figure 7: Gain entrée–sortie pour le RSB G_{RSB} de l'Éq. (44) en fonction de l'amplitude efficace σ_η du bruit blanc d'entrée $\eta(t)$ gaussien, avec $\theta = 1$. Au panneau A on a $T = 10^{-2}T_s$ et (a) $A = 0.6$, (b) $A = 0.8$, (c) $A = 0.9$, (d) $A = 0.95$ et (e) $A = 0.97$. Au panneau B on a $A = 0.95$ et (a) $T = 10^{-2}T_s$, (b) $T = 5 \times 10^{-3}T_s$, (c) $T = 2 \times 10^{-3}T_s$ et (d) $T = 10^{-3}T_s$. Pour le cas (a) du panneau A, le jeu de points discrets (cercles) provient d'une simulation numérique du système.

Le signal peut être considéré strictement périodique sur une certaine plage de stationnarité sur laquelle la période reste fixe et où les estimations des grandeurs qui profitent de la RS périodique devront être effectuées. Sur une autre plage de stationnarité, on sera de même confronté à la transmission d'un signal périodique d'une période différente qui pourra aussi profiter de la RS périodique.

La RS périodique est la forme de RS qui a reçu jusqu'à présent le plus d'attention. Depuis peu, néanmoins, la RS a été étendue aux signaux apériodiques large bande où un effet de transmission assistée par le bruit peut aussi être enregistré, également sous des modalités variées, et qui constitue ce qu'il est convenu d'appeler la RS apériodique.

3 La résonance stochastique apériodique

Dans la RS apériodique, le signal utile ou cohérent $s(t)$ (voir Fig. 1) apériodique ne possède plus de localisation fréquentielle précise, aussi les mesures de performance, comme le RSB de sortie, définies dans le domaine spectral ne sont pas directement transposables. On a alors introduit d'autres mesures de performance, bien adaptées à un signal cohérent apériodique, afin de montrer que ces mesures peuvent être augmentées par ajout de bruit [45, 16, 42, 12]. Selon les signaux et systèmes en présence, la RS a été quantifiée au moyen d'une probabilité de transmission correcte [45], d'un coefficient de corrélation entrée–sortie [17]. La référence [9] a montré la possibilité de RS apériodique dans un canal binaire d'information en présence de bruit gaussien avec une mesure qui est une information mutuelle entrée–sortie au sens de Shannon, et [12] en présence d'un bruit de distribution arbitraire avec une capacité informationnelle entrée–sortie.

Nous allons exposer ici deux exemples de RS apériodique.

3.1 Un canal discret de transmission d'information

Nous étudions ici un type de canal de transmission de l'information, différent de [9, 12], pour lequel nous évaluons la capacité informationnelle et montrons qu'elle peut être augmentée en augmentant le bruit.

Nous considérons la transmission d'information par un canal sans mémoire. L'entrée du canal est une variable aléatoire discrète S qui peut prendre la valeur 1 ou -1 avec les probabilités respectives p_1 et $p_{-1} = 1 - p_1$. La transmission sur le canal met en jeu deux effets. D'abord un bruit N est ajouté à l'entrée S pour fournir $S + N$. Ensuite, $S + N$ est comparé à un double seuil fixe $\theta > 0$ pour déterminer la sortie discrète Y du canal selon :

$$\begin{aligned} S + N < -\theta &\Rightarrow Y = -1, \\ -\theta \leq S + N \leq \theta &\Rightarrow Y = 0, \\ S + N > \theta &\Rightarrow Y = 1. \end{aligned} \tag{45}$$

Le bruit N est une variable aléatoire à valeurs continues ou discrètes, de fonction de répartition $F(u) = \Pr\{N \leq u\}$. Les réalisations successives de l'entrée aléatoire S sont indépendantes et identiquement distribuées, et de même pour le bruit N . L'entrée S et le bruit N sont statistiquement indépendants.

Le canal en présence peut être considéré comme un canal binaire bruité et avec effacement [19] où l'information binaire d'entrée $S = \pm 1$ peut être reçue par $Y = \pm 1$ de façon éventuellement éronnée, ou bien effacée quand $Y = 0$.

Pour les probabilités de transfert entrée-sortie de ce canal nous avons, par exemple, la probabilité $p_{11} = \Pr\{Y = 1 | S = 1\}$ qui est aussi $\Pr\{S + N > \theta | S = 1\}$ valant $\Pr\{N > \theta - 1\} = 1 - F(\theta - 1)$. Par des raisonnements similaires, on arrive à :

$$p_{11} = \Pr\{Y = 1 | S = 1\} = 1 - F(\theta - 1), \tag{46}$$

$$p_{-1,1} = \Pr\{Y = -1 | S = 1\} = F(-\theta - 1), \tag{47}$$

$$p_{1,-1} = \Pr\{Y = 1 | S = -1\} = 1 - F(\theta + 1), \tag{48}$$

$$p_{-1,-1} = \Pr\{Y = -1 | S = -1\} = F(-\theta + 1), \tag{49}$$

$$p_{01} = \Pr\{Y = 0 | S = 1\} = F(\theta - 1) - F(-\theta - 1), \tag{50}$$

$$p_{0,-1} = \Pr\{Y = 0 | S = -1\} = F(\theta + 1) - F(-\theta + 1). \tag{51}$$

Une fois connues les probabilités de transfert, l'information transmise $I(S; Y)$ par le canal peut s'évaluer à partir des entropies [19] comme :

$$I(S; Y) = H(Y) - H(Y | S). \tag{52}$$

Avec $h(u) = -u \log_2(u)$, l'entropie de sortie $H(Y) = \sum_Y h(\Pr\{Y\})$ vaut ici

$$H(Y) = h[p_{11}p_1 + p_{1,-1}(1 - p_1)] + h[p_{-1,1}p_1 + p_{-1,-1}(1 - p_1)] + h[p_{01}p_1 + p_{0,-1}(1 - p_1)], \tag{53}$$

et l'entropie conditionnelle entrée-sortie $H(Y|S) = p_1 \sum_Y h(\Pr\{Y|S=1\}) + (1 - p_1) \sum_Y h(\Pr\{Y|S=-1\})$ vaut

$$H(Y | S) = p_1[h(p_{11}) + h(p_{01}) + h(p_{-1,1})] + (1 - p_1)[h(p_{1,-1}) + h(p_{0,-1}) + h(p_{-1,-1})]. \tag{54}$$

Les équations (52), (53) et (54) fournissent une expression explicite de l'information transmise $I(S; Y)$ en fonction des probabilités de transfert et de la probabilité d'entrée p_1 . Dans le

cas où le bruit N est symétrique centré, c'est-à-dire de densité de probabilité paire, le processus de transmission d'information est symétrique, et l'information transmise est invariante dans l'échange des valeurs de p_1 et $p_{-1} = 1 - p_1$. Comme l'information transmise par un canal discret sans mémoire est toujours une fonction convexe de la distribution de probabilité d'entrée [19], nous déduisons que pour N symétrique centré, le maximum de $I(S; Y)$ qui définit la capacité informationnelle C du canal, est atteint pour $p_1 = 0.5 = p_{-1}$. Dans le cas d'un bruit symétrique centré, les équations (52), (53) et (54) avec $p_1 = 0.5$, permettent donc une évaluation explicite de la capacité C du canal de transmission. Nous allons nous intéresser maintenant à l'étude de la capacité informationnelle C en fonction des propriétés statistiques du bruit N .

Nous examinons d'abord, pour un type donné de la distribution du bruit (gaussienne, par exemple), la variation de la capacité informationnelle C en fonction de l'amplitude efficace $\sigma = \sqrt{E(N^2)}$ du bruit. La Fig. 8A représente cette variation, quand N est un bruit gaussien centré, et pour différentes valeurs du seuil θ . Les courbes de la Fig. 8A montrent clairement l'existence de deux régimes de fonctionnement distincts pour le canal. Quand $\theta < 1$, une entrée $S = 1$ (respectivement $S = -1$) est à elle seule suffisante pour déclencher une sortie $Y = 1$ (respectivement $Y = -1$). En l'absence du bruit, la capacité du canal est alors $C = 1$ bit. L'ajout du bruit N sera ici seulement ressenti comme une dégradation de la transmission, et ainsi la capacité C décroît à partir de la valeur $C = 1$ bit à mesure que l'amplitude efficace σ du bruit est augmentée à partir de zéro. Par contre, quand $\theta > 1$, une entrée $S = 1$ (respectivement $S = -1$) est, à elle seule, incapable de déclencher une sortie $Y = 1$ (respectivement $Y = -1$). En l'absence du bruit, la capacité du canal est alors $C = 0$, le canal est incapable de transmettre aucune information. C'est l'ajout de bruit qui va permettre de transmettre de l'information sur le canal. L'ajout du bruit N rend possible un effet coopératif, dans lequel le bruit et l'entrée S collaborent pour atteindre le seuil qui contrôle le déclenchement de la sortie. Ceci se traduit par l'obtention d'une capacité C non nulle pour le canal, avec un domaine où C peut être augmentée grâce à une augmentation de l'amplitude efficace σ du bruit. Comme le montre la Fig. 8A, il existe une valeur optimale de l'amplitude efficace σ du bruit pour laquelle la capacité C atteint un maximum, lequel dépend de la valeur de $\theta > 1$.

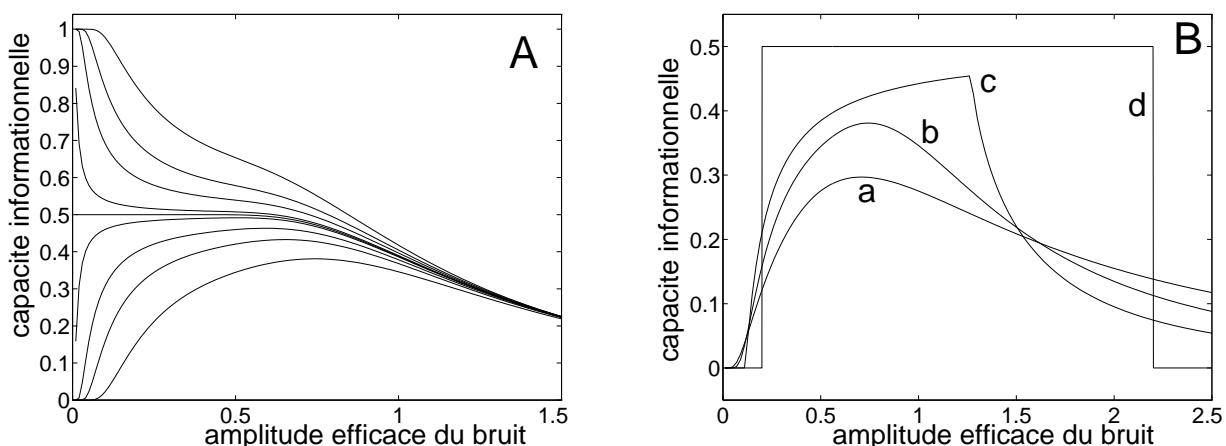


Figure 8: Capacité informationnelle C (en bits) en fonction de l'amplitude efficace σ du bruit N . Panneau A : N est gaussien centré ; les 9 courbes sont obtenues pour 9 valeurs du seuil θ , avec successivement de la courbe la plus haute à la plus basse : $\theta = 0.8, 0.9, 0.95, 0.99, 1, 1.01, 1.05, 1.1, 1.2$. Panneau B : $\theta = 1.2$ et N distribué selon (a) Éq. (55), (b) Éq. (56), (c) Éq. (57), (d) Éq. (58).

Dans le régime où $\theta > 1$, l'effet coopératif entre le signal utile et le bruit, qui conduit à la variation non monotone de C avec σ , peut s'analyser comme suit. En l'absence du bruit ($\sigma = 0$), la sortie Y reste bloquée à zéro, quelle que soit l'entrée S ; aucune information n'est alors transmise par le canal. En faisant croître σ au dessus de zéro, pour σ d'abord petit, une sortie $Y = 1$ (respectivement $Y = -1$) présentera une probabilité appréciable de survenir uniquement en présence de $S = 1$ (respectivement $S = -1$) ; de plus, ce type d'événement va d'abord se produire avec une probabilité croissante quand σ est augmentée. Cet effet est responsable de l'augmentation de la capacité C qui se produit d'abord, lorsque σ croît. Pour σ plus grand, la possibilité qu'une sortie $Y = 1$ (respectivement $Y = -1$) survienne en présence d'une entrée $S = -1$ (respectivement $S = 1$) va commencer à entrer en jeu, de façon de plus en plus probable à mesure que σ augmente plus, et à partir de là va entraîner la décroissance de C .

Notre modèle permet également de prédire une influence de la distribution du bruit N sur l'effet d'augmentation de capacité en présence d'un seuil fixé $\theta > 1$. Pour illustration, nous considérons quatre bruits symétriques centrés, qui ont en commun une même amplitude efficace σ , et qui diffèrent par leur densité de probabilité $f(u) = dF/du$:

(a) un bruit exponentiel avec

$$f(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \exp\left(-\sqrt{2}\frac{|u|}{\sigma}\right), \quad (55)$$

(b) un bruit gaussien avec

$$f(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right), \quad (56)$$

(c) un bruit uniforme avec

$$f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma} & \text{si } u \in [-\sqrt{3}\sigma, \sqrt{3}\sigma], \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (57)$$

(d) un bruit discret à deux niveaux avec

$$f(u) = 0.5[\delta(u + \sigma) + \delta(u - \sigma)]. \quad (58)$$

La Fig. 8B, avec $\theta = 1.2$, montre que l'effet d'augmentation de capacité par le bruit se produit dans chaque cas, mais d'une façon qui dépend de la distribution du bruit quand des amplitudes efficaces identiques du bruit sont appliquées.

Un intérêt de la présente section est d'illustrer le phénomène de RS aperiodique sur un modèle suffisamment simple pour être complètement calculable. D'un point de vue pratique, si l'on dispose d'un contrôle complet sur l'amplitude du signal utile ou sur le seuil θ du système de transmission, il est plus avantageux, comme le montre la Fig. 8A, de fonctionner avec une amplitude du signal utile supérieure au seuil θ . Néanmoins, il existe des systèmes où ce type de contrôle n'est pas disponible. C'est le cas par exemple pour une classe importante de systèmes naturels réalisant du traitement de l'information très performant : les neurones, qui doivent opérer sur des signaux d'amplitude pouvant être arbitrairement faible à leur limite de sensibilité, en présence d'un seuil neuronal fixe.

3.2 Cas de signaux bidimensionnels

Nous présentons maintenant une autre forme de RS aperiodique, quantifiée par une mesure d'intercorrélation entrée-sortie cette fois, et qui va permettre de montrer une extension de l'effet à des signaux bidimensionnels ou images. L'application du concept de RS à des images a été évoqué pour la première fois très récemment, dans une étude rapportant une expérience de psychophysique montrant que la perception visuelle peut être améliorée par ajout de bruit [74]. Un avantage de la théorie de la RS périodique dans les non-linéarités statiques développée à la Section 2.5.1 pour des signaux monodimensionnels (temporels), est qu'elle peut se transposer aisément au cas de la RS aperiodique pour des signaux bidimensionnels (images). De cette façon, nous allons pouvoir montrer un exemple très simple de RS aperiodique sur des images, dont l'analyse théorique peut être menée à bien de façon complète et exacte.

Soit $S(x, y)$ une image binaire, où (x, y) sont des entiers indexant les pixels avec $S(x, y) = 0$ ou 1. Un bruit $N(x, y)$ dégrade linéairement chaque pixel de l'image $S(x, y)$. Les valeurs du bruit sont indépendantes d'un pixel à l'autre, et sont identiquement distribués avec la fonction de répartition $F(u) = \Pr\{N(x, y) \leq u\}$. La somme $S(x, y) + N(x, y)$ est appliquée sur un système non linéaire produisant la sortie $Y(x, y)$ selon :

$$\begin{aligned} \text{Si } S(x, y) + N(x, y) > \theta \quad \text{alors } Y(x, y) &= 1 \\ \text{sinon } Y(x, y) &= 0 . \end{aligned} \quad (59)$$

On considère le régime où le seuil $\theta > 1$. Dans ces conditions et en l'absence du bruit $N(x, y)$, l'image d'entrée $S(x, y)$ seule est incapable de déclencher une réponse sur $Y(x, y)$ qui demeure une image noire (remplie de zéros), et l'image d'entrée $S(x, y)$ est entièrement perdue dans la sortie $Y(x, y)$. Si le bruit $N(x, y)$ est graduellement augmenté au dessus de zéro, il existera d'abord une possibilité de coopération où le bruit peut aider les pixels allumés $S(x, y) = 1$ à franchir le seuil pour déclencher une réponse $Y(x, y) = 1$ sur l'image de sortie. Ce résultat bénéfique, d'abord devient plus probable à mesure que le niveau du bruit croît, renforçant ainsi la similarité de l'image de sortie $Y(x, y)$ avec l'image d'entrée $S(x, y)$. Une fois passé un niveau optimum, quand le bruit est encore augmenté, sa seule action tend à dominer l'image de sortie $Y(x, y)$ qui évolue vers une apparence complètement aléatoire. Ainsi, si l'image d'entrée $S(x, y)$ contient une structure avec de la corrélation spatiale, cette structure sera transférée sur l'image de sortie avec l'aide du bruit, avec une efficacité maximum pour un niveau de bruit optimal. Le déroulement de l'effet est illustré sur la Fig. 9.

Pour quantifier l'effet visuel visible sur la Fig. 9, il est possible d'étendre aux images les mesures de corrélation introduites dans [17] pour la RS aperiodique sur des signaux temporels. Nous avons besoin d'une mesure de similarité entre l'image d'entrée $S(x, y)$ et l'image de sortie $Y(x, y)$, et chercher à montrer que cette mesure culmine à une valeur maximum pour un niveau de bruit optimal non nul. Une mesure possible est l'intercorrélation normalisée entre les images S et Y , définie par

$$R_{SY} = \frac{\langle SY \rangle}{\sqrt{\langle S^2 \rangle \langle Y^2 \rangle}} , \quad (60)$$

où $\langle . \rangle$ dénote une moyenne sur les images. Une forte similarité entre les images S and Y est indiquée par R_{SY} proche de un. R_{SY} quantifie la similarité contenue à la fois dans les moyennes des images et dans les fluctuations autour des moyennes. Il est aussi possible de mesurer la similarité contenue uniquement dans les fluctuations autour des moyennes, à l'aide

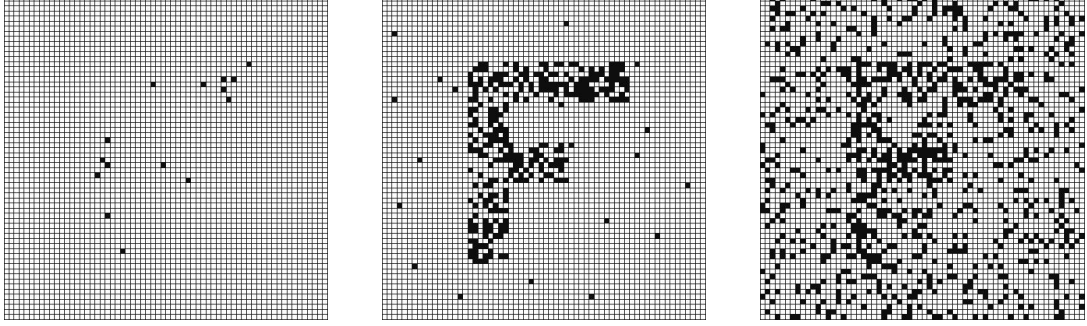


Figure 9: Image 64×64 de sortie $Y(x, y)$ après transmission selon l'Éq. (59) avec $\theta = 1.1$, quand l'image binaire d'entrée $S(x, y)$ représente un caractère F, et $N(x, y)$ est un bruit gaussien centré d'amplitude efficace 0.05 (gauche), 0.43 (centre), 1 (droite).

de l'intercovariance normalisée

$$C_{SY} = \frac{\langle (S - \langle S \rangle)(Y - \langle Y \rangle) \rangle}{\sqrt{\langle (S - \langle S \rangle)^2 \rangle \langle (Y - \langle Y \rangle)^2 \rangle}} . \quad (61)$$

C_{SY} est proche de un quand les images S et Y portent des structures fortement similaires, et proche de zéro quand les images sont sans relation.

Nous pouvons établir des expressions théoriques pour nos mesures de similarité R_{SY} et C_{SY} , en fonction des propriétés statistiques du bruit N , et montrer que toutes deux sont capables de vérifier la présence de RS.

Nous avons la moyenne $\langle S \rangle = 1 \times \Pr\{S = 1\} + 0 \times \Pr\{S = 0\}$, ainsi $\langle S \rangle$ est simplement $p_1 = \Pr\{S = 1\}$ la probabilité d'un pixel à 1 dans l'image $S(x, y)$, qui peut être estimée comme la fraction de pixels à 1 dans une grande image. De la même façon $\langle Y \rangle = \Pr\{Y = 1\} = q_1$, où cette nouvelle probabilité q_1 s'exprime comme

$$q_1 = p_{11} \times p_1 + p_{10} \times (1 - p_1) . \quad (62)$$

Nous avons introduit la probabilité conditionnelle $p_{11} = \Pr\{Y = 1 | S = 1\}$ qui est aussi $\Pr\{S + N > \theta | S = 1\}$ équivalant à $\Pr\{N > \theta - 1\} = 1 - F(\theta - 1)$. Avec des règles similaires on arrive à

$$p_{11} = \Pr\{Y = 1 | S = 1\} = 1 - F(\theta - 1) , \quad (63)$$

$$p_{10} = \Pr\{Y = 1 | S = 0\} = 1 - F(\theta) . \quad (64)$$

Aussi nous avons $\langle SY \rangle = 1 \times 1 \times \Pr\{Y = 1 ; S = 1\} = p_{11}p_1$.

Le numérateur de l'Éq. (61) est exprimable comme $\langle SY \rangle - \langle S \rangle \langle Y \rangle$. Le dénominateur de l'Éq. (61) n'est rien d'autre que le produit des déviations standard $\text{sd}(S) \times \text{sd}(Y)$, avec $[\text{sd}(S)]^2 = \langle S^2 \rangle - \langle S \rangle^2$ et $\langle S^2 \rangle = 1^2 \times \Pr\{S = 1\} + 0^2 \times \Pr\{S = 0\} = p_1$. Aussi $[\text{sd}(Y)]^2 = \langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2$ avec $\langle Y^2 \rangle = q_1$. En rassemblant ces résultats, on obtient pour l'intercorrélacion de l'Éq. (60)

$$R_{SY} = \frac{p_{11}p_1}{\sqrt{p_1q_1}} , \quad (65)$$

et pour l'intercovariance de l'Éq. (61)

$$C_{SY} = \frac{p_{11}p_1 - p_1q_1}{\sqrt{(p_1 - p_1^2)(q_1 - q_1^2)}} . \quad (66)$$

Nos deux mesures de similarité R_{SY} and C_{SY} pour caractériser de la RS sont maintenant complètement calculables, via les Éqs. (62)–(64), pour une probabilité p_1 donnée, en fonction des propriétés du bruit véhiculées par $F(u)$.

La figure 10 montre les évolutions, avec l'amplitude efficace du bruit, de nos deux mesures de similarité R_{SY} et C_{SY} , dans les conditions de la Fig. 9, où la probabilité $p_1 = 0.148$. Les deux mesures présentent une évolution non monotone culminant en un maximum pour un niveau de bruit optimal non nul. Le niveau de bruit maximisant R_{SY} et C_{SY} correspond aussi au maximum de similarité visuelle que l'on peut éprouver en observant les images de la Fig. 9.

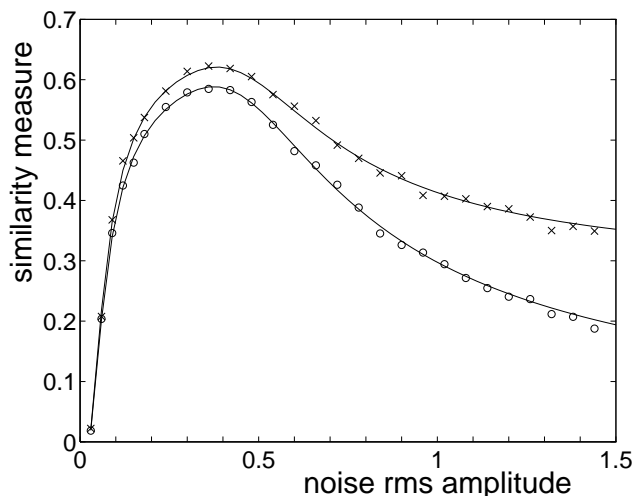


Figure 10: Mesures de similarité entre l'image d'entrée $S(x, y)$ et l'image de sortie $Y(x, y)$, en fonction de l'amplitude efficace du bruit, dans les conditions de la Fig. 9 où le probabilité $p_1 = 0.148$. En traits pleins sont les expressions théoriques de l'intercorrélacion R_{SY} de l'Éq. (65) (courbe du haut) et de l'intercovariance C_{SY} de l'Éq. (66) (courbe du bas), les deux jeux de points discrets sont des estimations expérimentales par comptage de pixels sur les images.

Le présent exemple démontre un effet de transfert d'information assisté par le bruit sur des signaux bidimensionnels, que l'on rattache au phénomène de RS aperiodique. Cet exemple possède des analogies avec certaines techniques de traitement d'image qui exploitent le bruit [70, 71], comme par exemple la méthode d'affichage à seuil aléatoire pour la visualisation d'images de niveaux de gris sur un dispositif d'affichage binaire (pixel allumé ou éteint). En tant qu'un type de transmission du signal assistée par le bruit, cet exemple constitue une forme du phénomène général de RS. Un intérêt particulier de cet exemple est d'introduire des mesures explicites pour quantifier une RS aperiodique sur des images, puis de montrer l'évolution de ces mesures dans un modèle simple où elles sont exactement calculables.

Ces mesures pour une RS aperiodique sur des images ont été employées dans des processus plus complexes de transfert d'images en optique non linéaire, dans des expériences de diffusion Raman stimulée [79]. Un faisceau laser incident peut être diffusé, avec changement de fréquence, par un milieu optiquement non linéaire se prêtant à l'effet Raman. Si l'intensité laser incidente est trop faible, elle ne parvient pas à vaincre les pertes par absorption dans le milieu, et le rayonnement diffusé est alors très faible. Par contre, si l'intensité incidente est suffisamment

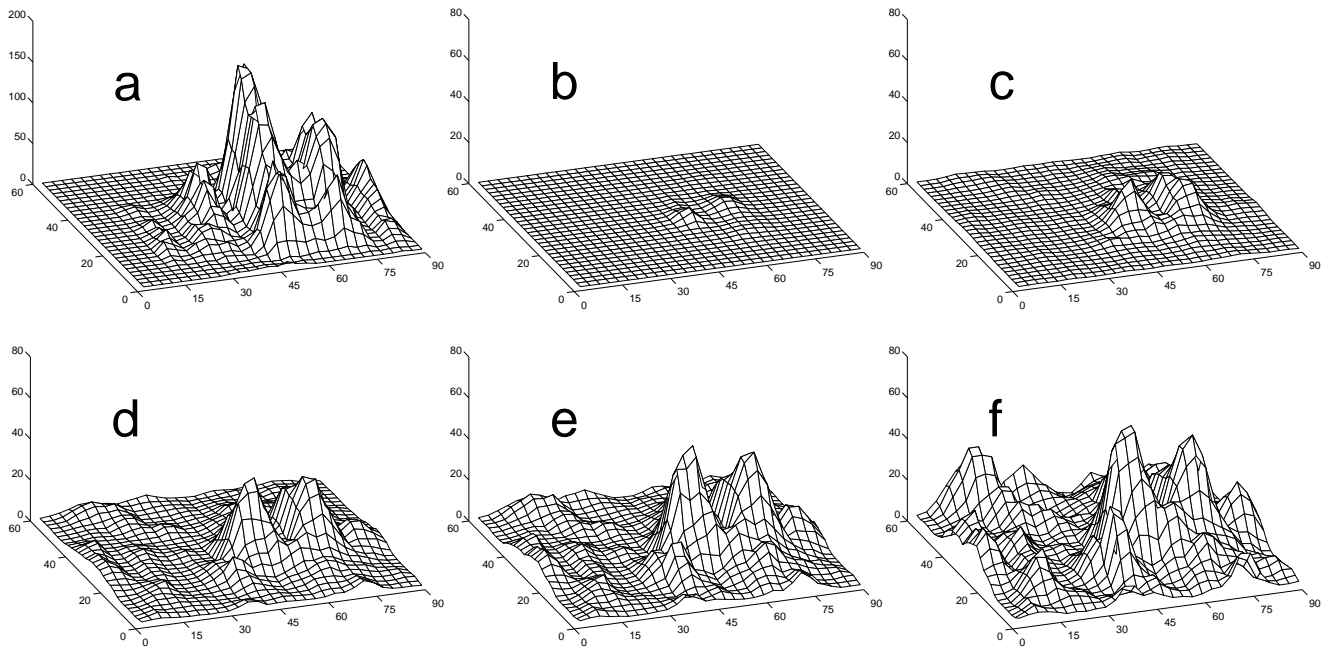


Figure 11: (a) Image d’entrée portée par le faisceau laser incident. (b–f) Image de sortie portée par le faisceau Raman diffusé, obtenue lorsque le faisceau incident est superposé à un faisceau de bruit (“speckle”) d’intensité croissante $I_N = 0.30$ (b), 0.36 (c), 0.39 (d), 0.41 (e), 0.43 GW/cm^2 (f). La mesure d’intercorrélacion entrée–sortie R_{SY} identifie la similarité maximale (voir Fig. 12) entre les images d’entrée et de sortie dans le cas (e).

forte, elle parvient à vaincre les pertes par absorption, et peut alors bénéficier d’un phénomène d’amplification exponentielle par avalanche qui conduit à un fort rayonnement diffusé. On a montré [79] que ce type de réponse non linéaire permet un effet de RS. Un faisceau laser incident de faible intensité porte une structure spatiale (une image) dans son profil transversal, et la superposition d’une image laser de bruit (un “speckle”) dans le milieu non linéaire permet de renforcer le transfert de l’image incidente vers le faisceau Raman diffusé en sortie (voir Fig. 11). Ce phénomène a été quantifié à l’aide des mesures de corrélation introduites plus haut (voir Fig. 12) et permet d’établir un effet de RS dans ce processus d’optique non linéaire.

4 La résonance stochastique chez les neurones

Les systèmes neuronaux naturels constituent des systèmes non linéaires atteignant de remarquables performances pour le traitement du signal et de l’information. À ce titre, d’une façon générale, leur étude et compréhension peuvent s’avérer fort instructives pour les problématiques du traitement du signal [43]. En particulier, parmi les propriétés significatives de ces systèmes non linéaires, il a été établi, à la fois sur des modèles théoriques et de façon expérimentale, que la RS opère dans la transmission des signaux par les neurones.

4.1 Résonance stochastique chez les neurones périphériques

La possibilité de RS chez les neurones a d’abord été mise en évidence dans des modèles théoriques. Ces modèles se référaient à des neurones périphériques sensoriels qui reçoivent des signaux analogiques continus constituant l’image directe d’une grandeur de l’environnement.

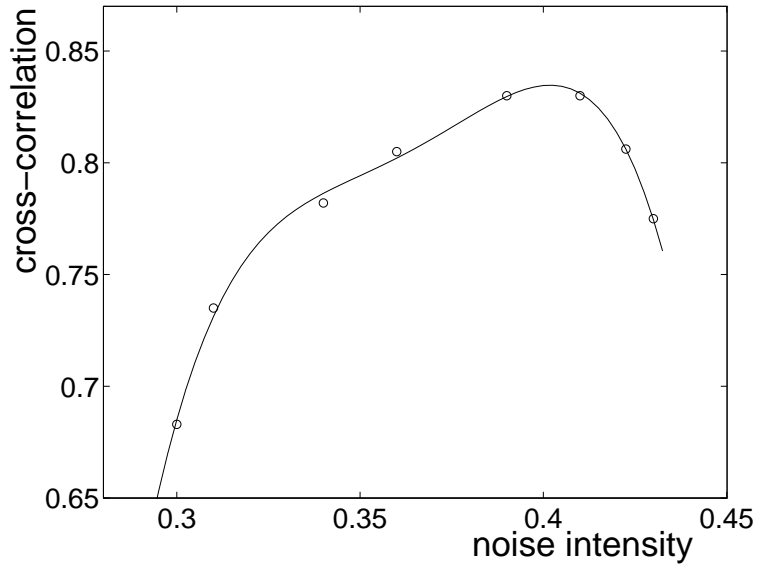


Figure 12: Mesure de similarité entre les images laser d’entrée et de sortie définie par l’intercorrélacion R_{SY} de l’Éq. (60), en fonction de l’intensité du bruit I_N en GW/cm^2 . Les cercles sont les données expérimentales et le trait plein une interpolation.

La plupart du temps, les signaux considérés sont une entrée cohérente sinusoïdale superposée à un bruit continu (souvent choisi gaussien et blanc). Les modèles de neurone utilisés [6, 7, 54, 56] ont d’abord cherché à reproduire des systèmes dynamiques non linéaires bistables gouvernés par un potentiel à double puits du type de l’Éq. (1), analogues aux modèles connus pour la RS dans des systèmes non neuronaux. De telles propriétés de dynamique bistable ne font pas partie des caractéristiques directement accessibles au neurone dans son fonctionnement de base. Les modèles proposés parvenaient à les obtenir, en vue d’accéder à la RS, en introduisant des comportements effectifs pour le neurone, résultant des interactions dans un réseau.

Plus tard, des modèles de neurone monostables excitables, plus proches du fonctionnement standard du neurone, tel le modèle de Fitzhugh-Nagumo, ont aussi révélé la propriété de RS dans la transmission d’une sinusoïde superposée à un bruit gaussien [54, 48, 82, 66].

Une première mise en évidence expérimentale de la RS chez les neurones sensoriels a été obtenue par [20], sur une cellule nerveuse mécanoreceptrice d’écrevisse soumise à un mouvement sinusoïdal ajouté à un bruit. D’autres observations expérimentales ont ensuite suivi pour la RS périodique puis apériodique chez le neurone isolé ou dans des réseaux [64, 53, 18, 33].

Toutes ces études ont considéré le cas de neurones soumis à des excitations sous forme de signaux analogiques continus (très souvent une sinusoïde plus un bruit gaussien) représentant un stimulus de l’environnement extérieur incident sur des neurones périphériques. Néanmoins, la plupart des neurones du système nerveux ont une localisation plus “centrale” dans le sens où ils reçoivent et traitent les signaux sous forme de trains d’impulsions discrètes, les potentiels d’action, provenant d’autres neurones en amont.

Nous avons montré [15, 13, 36, 35] la possibilité d’étendre la RS aux neurones centraux, qui reçoivent les signaux codés sous forme de trains de potentiels d’action. À nouveau, en guise d’illustration, pour la RS chez le neurone, nous allons décrire un mécanisme permettant un effet de RS dans la transmissions de potentiels d’action par le neurone.

4.2 Résonance stochastique chez les neurones centraux

Nous considérons un modèle simple [15] qui décrit la non-linéarité essentielle lors de la transmission de trains de potentiels d'action par un neurone (intégration capacitive suivie d'une réponse à seuil). La membrane du neurone, de constante de temps τ_m , possède un potentiel électrique $V(t)$ gouverné par

$$\tau_m \frac{dV}{dt} = -V(t) + ws(t) + w\eta(t) . \quad (67)$$

Comme signaux d'entrée sur $V(t)$ figure une composante cohérente $s(t) = \sum_n \delta(t - nT_s)$ avec n entier, qui représente un train d'impulsions périodique de période T_s . De tels trains périodiques peuvent coder l'intensité d'un stimulus via leur période de décharge, et transportent ainsi de l'information utile. Dans d'autres circonstances, au sein des systèmes neuronaux, certains trains de potentiels d'action aussi peuvent être des signaux de bruit résultant de processus stochastiques neuronaux [72]. Dans l'Éq. (67), un tel train de bruit est représenté par l'entrée $\eta(t) = \sum_k \delta(t - t_k)$, où les t_k sont des instants aléatoires poissonniens de densité $1/T_\eta$, de fonction d'autocorrélation $R_{\eta\eta}(\tau) = D\delta(\tau) + D^2$, et de densité spectrale de puissance $P_{\eta\eta}(\nu) = D^2\delta(\nu) + D$, avec $D = 1/T_\eta$. Le paramètre w de l'Éq. (67) est un couplage synaptique, qui modélise l'efficacité des entrées, et qui pourrait être différent pour les voies cohérente et de bruit, mais que nous supposons identique ici pour limiter le nombre de paramètres.

Si le potentiel de membrane V atteint un seuil fixé $V_{th} > 0$, un potentiel d'action est émis en sortie du neurone, puis V est remis à zéro, d'où les variations de V reprennent selon l'Éq. (67). Le signal $y(t)$ en sortie du neurone est donc constitué par un train d'impulsions évoluant selon :

$$\begin{aligned} \text{Si } V(t) = V_{th} \quad &\text{alors } y(t) = \delta(t' - t), \quad V(t) = 0 ; \\ &\text{sinon } y(t) = 0. \end{aligned} \quad (68)$$

La réponse de l'Éq. (67) à un unique potentiel d'action à t_0 est, pour $t > t_0$:

$$V(t) = \left[V(t_0^-) + \frac{w}{\tau_m} \right] \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau_m}\right) . \quad (69)$$

Ainsi, si l'efficacité synaptique w n'est pas suffisamment forte, le signal cohérent seul, qui apporte une impulsion chaque T_s , sera incapable d'amener $V(t)$ au seuil de décharge V_{th} . Cependant, à cause de l'effet de mémoire dû à l'intégrateur à relaxation de l'Éq. (67) qui conduit à une superposition linéaire de réponses du type de l'Éq. (69), si deux impulsions d'entrée surviennent suffisamment proches, elles pourront produire un potentiel d'action en sortie. Le mécanisme suivant de coopération entre le signal cohérent et le bruit est donc possible. En l'absence du bruit $\eta(t)$, le signal cohérent $s(t)$ seul, est insuffisant pour déclencher la sortie. À mesure que la densité de puissance D du bruit augmente à partir de 0 (ou équivalamment à mesure que T_η diminue), une possibilité existe pour un potentiel d'action de bruit de survenir suffisamment proche d'un potentiel d'action cohérent en entrée. L'effet coopératif de deux telles impulsions d'entrée est capable de générer un potentiel d'action de sortie, qui sera corrélé avec le potentiel d'action cohérent d'entrée. À mesure que D augmente, cette éventualité devient d'abord de plus en plus probable, entraînant un renforcement de la corrélation entre le train de sortie et le train cohérent d'entrée. Pour D encore plus fort, la possibilité à deux potentiels d'action de bruit de survenir suffisamment proches pour engendrer un potentiel d'action de sortie par eux-mêmes, va commencer de se manifester, et à partir de là va progressivement détruire la

corrélation du train de sortie avec le train cohérent d'entrée. Cette influence non monotone du bruit est la manifestation du phénomène de RS.

Pour quantifier l'effet, puisque nous sommes dans la cas de la RS périodique, nous nous appuyons sur le schéma général de la Section 2.2 pour l'établissement du RSB de sortie.

La fonction d'autocorrélation temporelle $R_{yy}(\tau)$ définie par l'Éq. (7) a été évaluée pour le signal $y(t)$ de l'Éq. (68) via une simulation numérique du modèle de neurone. Cette autocorrélation, représentée sur la Fig. 13, possède bien la constitution annoncée par le schéma général de la Section 2.2 : elle est formée d'un motif T_s -périodique (correspondant au deuxième terme du membre de droite de l'Éq. (7)), auquel se superpose un motif apériodique localisé autour de l'origine (correspondant au premier terme, l'autocovariance $C_{yy}(\tau)$, du membre de droite de l'Éq. (7)).

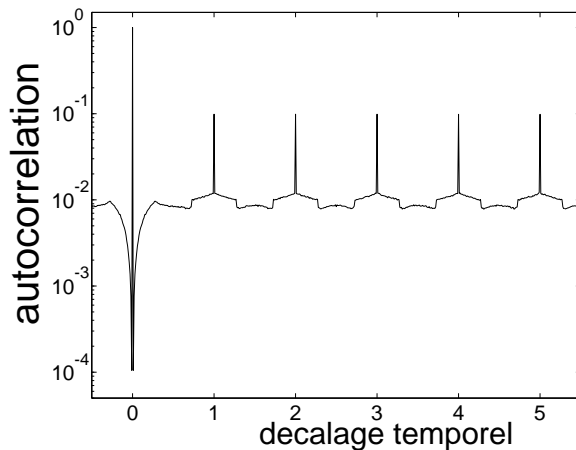


Figure 13: Fonction d'autocorrélation de sortie $R_{yy}(\tau)$ normalisée du signal $y(t)$ de l'Éq. (68), en fonction du décalage temporel τ/T_s , estimée sur une simulation numérique du modèle de neurone avec une discrétisation par la méthode d'Euler de l'Éq. (67) au pas temporel $\Delta t = 10^{-2}\tau_m$, avec $T_s = 5\tau_m$ et $w/\tau_m = 0.8V_{th}$. L'autocorrélation $R_{yy}(\tau)$ est ici obtenue à $T_\eta = 0.5T_s$ qui est l'endroit du maximum de la RS.

La densité spectrale de puissance de sortie $P_{yy}(\nu)$ définie par l'Éq. (10), a été évaluée dans la simulation du modèle de neurone par une transformation de Fourier discrète sur l'autocorrélation $R_{yy}(\tau)$ estimée numériquement, telle que sur la Fig. 14.

On retrouve dans la densité spectrale de puissance de la Fig. 14, la forme générique du schéma général de la Section 2.2, avec des pics aux harmoniques de la fréquence cohérente $1/T_s$ émergeant d'un fond large-bande. L'émergence de ces pics cohérents peut être rendue plus prononcée en augmentant le bruit d'entrée. C'est la signature de la RS qui est vérifiée par l'évolution non monotone du RSB de sortie présenté sur la Fig. 15.

Ces résultats établissent donc la possibilité de RS dans le mécanisme de base de la transmission non linéaire de trains de potentiels d'action par le neurone, où l'on voit comment la transmission d'un train cohérent peut être aidé par un train de bruit. Des modèles différents [13] ou plus élaborés [36] de neurone montrent la persistance et la robustesse de l'effet, ainsi que d'autres mécanismes pour utiliser le bruit au profit de l'information utile [67, 76], y compris en présence de signaux cohérents apériodiques [34].

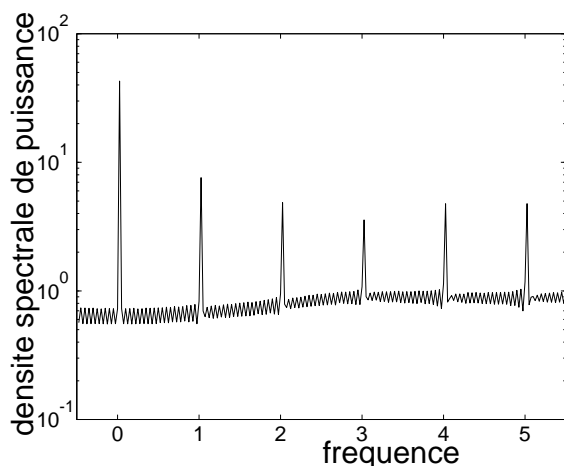


Figure 14: Densité spectrale de puissance de sortie $P_{yy}(\nu)$ résultant d'une transformée de Fourier discrète de $R_{yy}(\tau)$ de la Fig. 13, en fonction de la fréquence $\nu/(1/T_s)$.

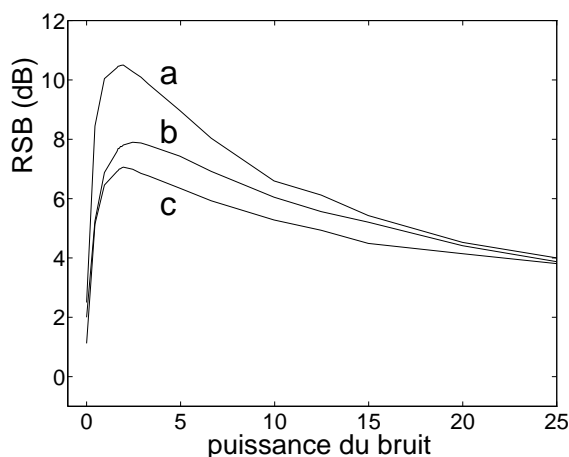


Figure 15: Rapport signal sur bruit RSB en sortie du modèle de neurone, en fonction de la densité de puissance du bruit en entrée $D/(1/T_s)$, à la fréquence fondamentale $1/T_s$ en (a), et aux harmoniques $2/T_s$ en (b), et $4/T_s$ en (c).

5 Conclusion

La résonance stochastique, entendue comme un effet de transmission non linéaire du signal assistée par le bruit, et sa généralisation sous diverses formes à différents types de signaux et systèmes, constituent des avancées relativement récentes. Actuellement, la pertinence et l'intérêt de la RS se disposent le long de trois directions principales :

1. La RS présente un intérêt conceptuel important, en ce qu'elle illustre, de manière précise et quantifiée, la possibilité, dans des systèmes complexes (non linéaires), d'extraire de l'ordre hors du désordre ou du signal utile hors du bruit. Jusqu'à présent, c'est plutôt cet aspect conceptuel qui a été approfondi.
2. Il a été établi par des travaux nombreux, que la RS opère dans une classe importante de systèmes naturels très efficaces pour le traitement de l'information : les systèmes neuronaux. La RS peut donc être étudiée comme une propriété signifiante pour le traitement non linéaire du signal par les neurones.

3. Une troisième voie d'intérêt est constituée par les applications technologiques de la RS. Cette question commence tout juste à être abordée, et demeure encore largement à explorer. Des possibilités sont envisagées pour la détection de faibles signaux bruités, dans certains dispositifs [51, 46, 47]. Les potentialités révélées par la RS rendent de telles explorations très valables.

Des développements spécialement féconds pourraient survenir en examinant en même temps les directions 2 et 3 précédentes. Une limitation dans les applications technologiques est que la RS est essentiellement un effet non linéaire, opérant principalement en présence de non-linéarités à seuil ou dans des systèmes dont les états accessibles sont séparés par des barrières de potentiel (quoique pas exclusivement [5, 14]). Par opposition, dans les dispositifs technologiques conçus pour l'acquisition et le traitement du signal, spécialement aux bas niveaux de traitement là où le bruit ambiant peut être important, l'effort vise principalement à rendre linéaires les systèmes, interdisant ainsi l'exploitation de la RS. Les traitements linéaires présentent de nombreux avantages, spécialement dans la conception et le contrôle de dispositifs technologiques ; ils présentent également des limitations. De leur côté, les systèmes neuronaux naturels offrent l'exemple de systèmes très performants pour le traitement de l'information, qui mettent en jeu, dès les plus bas niveaux, des constituants intrinsèquement non linéaires. On peut voir là la suggestion de possibilités radicalement distinctes, encore à élucider, pour un traitement de l'information essentiellement non linéaire, où la RS serait une propriété parmi d'autres concourant à l'efficacité des performances.

Pour terminer, dégageons les références [61, 59, 81, 24, 8, 29] qui offrent de bonnes introductions et synthèses sur la RS, et pour ceux qui lisent le français [62] au niveau introductif. Un serveur Internet est consacré à la RS à l'adresse <http://www.pg.infn.it/sr/> et il n'est pas en italien. Une autre adresse intéressante <http://www.istia.univ-angers.fr/~chapeau/>.

Références

- [1] P. O. Amblard, S. Zozor. Cyclostationarity and stochastic resonance in threshold devices. *Physical Review E*, (en préparation), 1998.
- [2] V. S. Anishchenko, M. A. Safonova, L. O. Chua. Stochastic resonance in Chua's circuit driven by amplitude or frequency modulated signals. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4:441–446, 1994.
- [3] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani. Stochastic resonance in climatic changes. *Tellus*, 34:10–16, 1982.
- [4] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A*, 14:L453–L458, 1981.
- [5] S. M. Bezrukov, I. Vodyanoy. Stochastic resonance in non-dynamical systems without response thresholds. *Nature*, 385:319–321, 1997.
- [6] A. Bulsara, E. W. Jacobs, T. Zhou, F. Moss, L. Kiss. Stochastic resonance in a single neuron model: Theory and analog simulation. *Journal of Theoretical Biology*, 152:531–555, 1991.
- [7] A. Bulsara, A. J. Maren, G. Schnera. Single effective neuron: Dendritic coupling effects and stochastic resonance. *Biological Cybernetics*, 70:145–156, 1993.
- [8] A. R. Bulsara, L. Gammaitoni. Tuning in to noise. *Physics Today*, 49:39–45, March 1996.

- [9] A. R. Bulsara, A. Zador. Threshold detection of wideband signals: A noise-controlled maximum in the mutual information. *Physical Review E*, 54:R2185–R2188, 1996.
- [10] F. Chapeau-Blondeau. Stochastic resonance in the Heaviside nonlinearity with white noise and arbitrary periodic signal. *Physical Review E*, 53:5469–5472, 1996.
- [11] F. Chapeau-Blondeau. Input–output gains for signal in noise in stochastic resonance. *Physics Letters A*, 232:41–48, 1997.
- [12] F. Chapeau-Blondeau. Noise-enhanced capacity via stochastic resonance in an asymmetric binary channel. *Physical Review E*, 55:2016–2019, 1997.
- [13] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier. Stochastic resonance in nonlinear transmission of spike signals: An exact model and an application to the neuron. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6:2069–2076, 1996.
- [14] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier. Theory of stochastic resonance in signal transmission by static nonlinear systems. *Physical Review E*, 55:1478–1495, 1997.
- [15] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier, N. Chambet. Stochastic resonance in a neuron model that transmits spike trains. *Physical Review E*, 53:1273–1275, 1996.
- [16] J. J. Collins, C. C. Chow, A. C. Capela, T. T. Imhoff. Aperiodic stochastic resonance. *Physical Review E*, 54:5575–5584, 1996.
- [17] J. J. Collins, C. C. Chow, T. T. Imhoff. Aperiodic stochastic resonance in excitable systems. *Physical Review E*, 52:R3321–R3324, 1995.
- [18] J. J. Collins, T. T. Imhoff, P. Grigg. Noise-enhanced information transmission in rat SA1 cutaneous mechanoreceptors via aperiodic stochastic resonance. *Journal of Neurophysiology*, 76:642–645, 1996.
- [19] T. M. Cover, J. A. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley, New York, 1991.
- [20] J. K. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazelou, F. Moss. Noise enhancement of information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance. *Nature*, 365:337–340, 1993.
- [21] M. I. Dykman, H. Haken, G. Hu, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, C. Z. Ning, N. D. Stein, N. G. Stocks. Linear response theory in stochastic resonance. *Physics Letters A*, 180:332–336, 1993.
- [22] M. I. Dykman, T. Horita, J. Ross. Statistical distribution and stochastic resonance in a periodically driven chemical system. *Journal of Chemical Physics*, 103:966–972, 1995.
- [23] M. I. Dykman, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. D. Stein, N. G. Stocks. Stochastic resonance: Linear response theory and giant nonlinearity. *Journal of Statistical Physics*, 70:463–478, 1993.
- [24] M. I. Dykman, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. D. Stein, N. G. Stocks. Stochastic resonance in perspective. *Nuovo Cimento*, 17D:661–683, 1995.
- [25] M. I. Dykman, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. G. Stocks. Phase shifts in stochastic resonance. *Physical Review Letters*, 68:2985–2988, 1992.
- [26] M. I. Dykman, P. V. E. McClintock, R. Mannella, N. G. Stocks. Stochastic resonance in the linear and nonlinear responses of a bistable system to a periodic field. *Soviet. Phys. JETP Letters*, 52:144–154, 1990.

- [27] S. Fauve, F. Heslot. Stochastic resonance in a bistable system. *Physics Letters A*, 97:5–7, 1983.
- [28] L. Gammaitoni. Stochastic resonance and the dithering effect in threshold physical systems. *Physical Review E*, 52:4691–4698, 1995.
- [29] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni. Stochastic resonance. *Reviews of Modern Physics*, 70:223–287, 1998.
- [30] L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta, S. Santucci. Stochastic resonance in bistable systems. *Physical Review Letters*, 62:349–352, 1989.
- [31] L. Gammaitoni, M. Martinelli, L. Pardi, S. Santucci. Observation of stochastic resonance in bistable electron-paramagnetic-resonance systems. *Physical Review Letters*, 67:1799–1802, 1991.
- [32] C. W. Gardiner. *Handbook of Stochastic Methods*. Springer, Berlin, 1985.
- [33] B. J. Gluckman, T. I. Netoff, E. J. Neel, W. L. Ditto, M. L. Spano, S. J. Schiff. Stochastic resonance in a neuronal network from mammalian brain. *Physical Review Letters*, 77:4098–4101, 1996.
- [34] X. Godivier. La résonance stochastique dans la transmission non linéaire du signal. Thèse de Doctorat de l'Université d'Angers, 1997.
- [35] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. La résonance stochastique chez le neurone, ou le signal utile favorisé par le bruit. Actes des 8^{èmes} Journées Neurosciences et Sciences de l'Ingénieur, pp. 79–82, Marly-le-Roi, France, 6–9 mai 1996, 1996.
- [36] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. Noise-enhanced transmission of spike trains in the neuron. *Europhysics Letters*, 35:473–477, 1996.
- [37] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. Noise-assisted signal transmission in a nonlinear electronic comparator: Experiment and theory. *Signal Processing*, 56:293–303, 1997.
- [38] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. Stochastic resonance in the information capacity of a nonlinear dynamic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8:581–590, 1998.
- [39] X. Godivier, J. Rojas-Varela, F. Chapeau-Blondeau. Noise-assisted signal transmission via stochastic resonance in a diode nonlinearity. *Electronics Letters*, 33:1666–1668, 1997.
- [40] D. Gong, G. Qin, G. Hu, X. Wen. Experimental study of stochastic resonance. *Physics Letters A*, 159:147–152, 1991.
- [41] R. M. Gray, T. G. Stockham. Dithered quantizers. *IEEE Transactions on Information Theory*, IT-39:805–812, 1993.
- [42] C. Heneghan, C. C. Chow, J. J. Collins, T. T. Imhoff, S. B. Lowen, M. C. Teich. Information measures quantifying aperiodic stochastic resonance. *Physical Review E*, 54:R2228–R2231, 1996.
- [43] J. Héroult, C. Jutten. *Réseaux Neuronaux et Traitement du Signal*. Hermès, Paris, 1994.
- [44] A. D. Hibbs, A. L. Singaas, E. W. Jacobs, A. R. Bulsara, J. J. Bekkedahl, F. Moss. Stochastic resonance in a superconducting loop with a Josephson junction. *Journal of Applied Physics*, 77:2582–2590, 1995.
- [45] G. Hu, D. C. Gong, X. D. Wen, C. Y. Yang, G. R. Qin, R. Li. Stochastic resonance in a nonlinear system driven by an aperiodic force. *Physical Review A*, 46:3250–3254, 1992.
- [46] M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara. Signal detection statistics of stochastic resonators. *Physical Review E*, 53:R2021–R2024, 1996.

- [47] M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara, L. Gammaitoni. Higher-order resonant behavior in asymmetric nonlinear stochastic systems. *Physical Review E*, 55:4049–4056, 1997.
- [48] P. Jung. Threshold devices: Fractal noise and neural talk. *Physical Review E*, 50:2513–2522, 1994.
- [49] P. Jung. Stochastic resonance and optimal design of threshold detectors. *Physics Letters A*, 207:93–104, 1995.
- [50] P. Jung, P. Hänggi. Amplification of small signal via stochastic resonance. *Physical Review A*, 44:8032–8042, 1991.
- [51] I. K. Kaufman, D. G. Luchinsky, P. V. E. McClintock, S. M. Soskin, N. D. Stein. High-frequency stochastic resonance in SQUIDS. *Physics Letters A*, 220:219–223, 1996.
- [52] D. S. Leonard, L. E. Reichl. Stochastic resonance in a chemical reaction. *Physical Review E*, 49:1734–1739, 1994.
- [53] J. E. Levin, J. P. Miller. Broadband neural encoding in the cricket cercal sensory system enhanced by stochastic resonance. *Nature*, 380:165–168, 1996.
- [54] A. Longtin. Stochastic resonance in neuron models. *Journal of Statistical Physics*, 70:309–327, 1993.
- [55] A. Longtin, A. Bulsara, F. Moss. Time-interval sequences in bistable systems and the noise-induced transmission of information by sensory neurons. *Physical Review Letters*, 67:656–659, 1991.
- [56] A. Longtin, A. Bulsara, D. Pierson, F. Moss. Bistability and the dynamics of periodically forced sensory neurons. *Biological Cybernetics*, 70:569–578, 1994.
- [57] B. McNamara, K. Wiesenfeld. Theory of stochastic resonance. *Physical Review A*, 39:4854–4869, 1989.
- [58] D. Middleton. *An Introduction to Statistical Communication Theory*. IEEE Press, Piscataway, 1996.
- [59] F. Moss. Stochastic resonance: From the ice ages to the monkey’s ear. In G. H. Weiss, editor, *Contemporary Problems in Statistical Physics*, pages 205–253. SIAM, Philadelphia, 1994.
- [60] F. Moss, A. Bulsara, M. F. Shlesinger, eds. Proceedings NATO Advanced Research Workshop on Stochastic Resonance in Physics and Biology. *Journal of Statistical Physics*, 70:1–512, 1993.
- [61] F. Moss, D. Pierson, D. O’Gorman. Stochastic resonance: Tutorial and update. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4:1383–1398, 1994.
- [62] F. Moss, K. Wiesenfeld. Les avantages du bruit de fond. *Pour La Science*, (216):86–90, Octobre 1995.
- [63] C. Nicolis. Stochastic aspects of climatic transitions— response to periodic forcing. *Tellus*, 34:1–9, 1982.
- [64] E. Pantazelou, C. Dames, F. Moss, J. Douglass, L. Wilkens. Temperature dependence and the role of internal noise in signal transduction efficiency of crayfish mechanoreceptors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5:101–108, 1995.
- [65] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 1991.

- [66] X. Pei, K. Bachmann, F. Moss. The detection threshold, noise and stochastic resonance in the Fitzhugh-Nagumo neuron model. *Physics Letters A*, 206:61–65, 1995.
- [67] X. Pei, L. Wilkens, F. Moss. Noise-mediated spike timing precision from aperiodic stimuli in an array of Hodgkin-Huxley-type neurons. *Physical Review Letters*, 77:4679–4682, 1996.
- [68] P. Réfrégier. *Théorie du Signal, Signal-Information-Fluctuations*. Masson, Paris, 1993.
- [69] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, Berlin, 1989.
- [70] L. G. Roberts. Picture coding using pseudo-random noise. *IRE Transactions on Information Theory*, IT-8:145–154, 1962.
- [71] J. C. Russ. *The Image Processing Handbook*. CRC Press, Boca Raton, 1995.
- [72] G. Sampath, S. K. Srinivasan. *Stochastic Models for Spike Trains of Single Neurons*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1977.
- [73] L. Schuchman. Dither signals and their effects on quantization noise. *IEEE Transactions on Communication Technologies*, COM-12:162–165, 1964.
- [74] E. Simonotto, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, J. Twitty, F. Moss. Visual perception of stochastic resonance. *Physical Review Letters*, 78:1186–1189, 1997.
- [75] M. Spano, M. Wun-Fogle, W. L. Ditto. Experimental observation of stochastic resonance in a magnetoelastic ribbon. *Physical Review A*, 46:5253–5256, 1992.
- [76] M. Stemmler. A single spike suffices: The simplest form of stochastic resonance in model neurons. *Network: Computation in Neural Systems*, 7:687–716, 1996.
- [77] N. G. Stocks, N. D. Stein, P. V. E. McClintock. Stochastic resonance in monostable systems. *Journal of Physics A*, 26:L385–L390, 1993.
- [78] J. Vanderkooy, S. P. Lipshitz. Resolution below the least significant bit in digital systems with dither. *Journal of the Audio Engineering Society*, 32:106–113 (correction p. 889), 1984.
- [79] F. Vaudelle, J. Gazengel, G. Rivoire, X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. Stochastic resonance and noise-enhanced transmission of spatial signals in optics: The case of scattering. *Journal of the Optical Society of America B*, 1998 (sous presse).
- [80] G. Vemuri, R. Roy. Stochastic resonance in a bistable ring laser. *Physical Review A*, 39:4668–4674, 1989.
- [81] K. Wiesenfeld, F. Moss. Stochastic resonance and the benefits of noise: From ice ages to crayfish and SQUIDS. *Nature*, 373:33–36, 1995.
- [82] K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames, F. Moss. Stochastic resonance on a circle. *Physical Review Letters*, 72:2125–2129, 1994.