

Amélioration par le bruit de la dynamique de capteurs à saturation

David ROUSSEAU, François CHAPEAU-BLONDEAU

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), FRE CNRS 2656, Université d'Angers,
62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 ANGERS, France.

david.rousseau@univ-angers.fr, chapeau@univ-angers.fr,
<http://www.istia.univ-angers.fr/~chapeau/>

Résumé – Nous considérons des capteurs non linéaires de caractéristique entrée–sortie linéaire aux faibles amplitudes et saturantes aux grandes amplitudes. Nous proposons une méthodologie pour étendre la gamme d'amplitude de signaux pour laquelle ces capteurs répondent de manière fidèle au delà de leur région linéaire. L'extension de dynamique est obtenue via une réplication des capteurs à saturation associés en réseau parallèle puis via un ajout de bruits indépendants à l'entrée de chacun des capteurs. Ces résultats tirent profit de travaux récents sur l'utilisation de la résonance stochastique et du bruit utile dans les systèmes non linéaires avec de la signification pour les neurones biologiques et les capteurs à l'échelle micro ou nanométrique. Dans la méthodologie proposée, contrairement à ce que l'on observe classiquement dans les études sur la résonance stochastique et le bruit utile, le niveau de bruit à ajouter ne dépend pas de manière critique du niveau du signal utile que le capteur doit acquérir, conférant ainsi une certaine robustesse à cette extension de dynamique.

Abstract – We consider nonlinear sensor devices which are linear for small inputs and saturate at large inputs. A methodology is proposed in order to extend the amplitude range upon which these sensors give a faithful representation beyond the linear part of their input–output characteristic. The widened dynamic is obtained via replication of the saturating sensors associated in a parallel array and via the addition of independant noises at the input of each sensor. These results, which benefit from recent studies on the use of stochastic resonance and the constructive role of noise in nonlinear processes, bear significance for sensory neurons and sensors at micro or nano scale. Classically, in the study on stochastic resonance and useful noise, the optimal level of noise to be added critically depends on the signal to be transmitted. This is not the case in the proposed dynamic extension methodology which presents some property of robustness.

1 Introduction

Des comportements de saturation sont couramment observés chez les capteurs linéaires soumis à des signaux de grandes amplitudes. De tels comportements se traduisent, aux grandes amplitudes, par des distorsions qui affectent la qualité de l'information transmise lors de la transduction de signaux. La zone linéaire de la caractéristique entrée–sortie d'un capteur à saturation délimite donc habituellement la dynamique des signaux qu'il est capable de transmettre de manière fidèle. Nous montrons un moyen original pour étendre la zone linéaire de capteurs à saturation en réduisant la distorsion due à la saturation. Pour ce faire, nous utilisons des résultats récents sur l'étude du rôle bénéfique du bruit dans les systèmes non linéaires.

Le bruit joue un rôle essentiellement négatif dans les systèmes linéaires où une augmentation du niveau de bruit présent dans le système se traduit par une dégradation du traitement ou de la transmission d'un signal utile. Dans certains systèmes non linéaires, des effets coopératifs entre le signal utile et le bruit peuvent exister permettant à une augmentation du niveau de bruit présent dans le système d'entraîner une amélioration du traitement ou de la transmission d'un signal utile. Les effets bénéfiques du bruit dans les systèmes non linéaires, rassemblés sous le terme générique de résonance stochastique, sont intensément étudiés depuis 2 décennies dans une variété de processus toujours grandissante actuellement (voir [1] pour une synthèse récente dans le domaine de l'instrumentation). On ob-

serve des effets de résonance stochastique pour différentes familles de capteurs de caractéristique entrée–sortie non linéaire sans mémoire incluant des non-linéarités en loi de puissance [3], des non-linéarités à seuil [8], ou encore des non-linéarités à saturation [7] comme celles que nous considérons ici.

On distingue deux mécanismes par lequel le bruit peut jouer un rôle bénéfique dans la transduction d'un signal utile par des capteurs à saturation [10]. Le premier est un effet de polarisation par le bruit [7]. Il opère avec des capteurs isolés, où un ajout de bruit peut d'une certaine façon déplacer le point de fonctionnement du capteur vers une région de la caractéristique du capteur plus favorable à la transduction du signal. Un second mécanisme d'amélioration par le bruit agit dans des réseaux parallèles de capteurs identiques comme un effet d'enrichissement de la représentation du signal produit par le réseau de capteurs [4, 11, 8, 10]. Dans cette communication, nous montrons comment ces deux mécanismes de la résonance stochastique permettent d'étendre la dynamique de capteurs à saturation au delà de leur région linéaire au moyen d'une augmentation du niveau de bruit. Nous introduisons une méthodologie robuste pour régler le niveau de bruit de façon à conserver l'effet bénéfique du bruit même lorsque certains paramètres liés au signal utile ou aux capteurs sont amenés à varier.

2 Capteurs à saturation

Nous considérons des capteurs de caractéristique entrée–sortie statique $g(\cdot)$, linéaire pour des signaux de faibles amplitudes et saturantes aux grandes amplitudes. Nous modélisons ces capteurs par des saturations douces

$$g(u) = \tanh(\beta u), \quad (1)$$

avec $g(u) = \beta u$ si $|u| \ll 1/\beta$ et ± 1 si $|u| \gg 1/\beta$ ou des saturations dures

$$g(u) = \begin{cases} -1 & \text{pour } \beta u \leq -1 \\ \beta u & \text{pour } -1 < \beta u < 1 \\ 1 & \text{pour } \beta u \geq 1, \end{cases} \quad (2)$$

le paramètre $\beta > 0$ représentant la sensibilité du capteur.

Les capteurs à saturation $g(\cdot)$ sont chargés de la transduction du signal d'entrée $s(t)$. Nous considérons des situations où cette entrée $s(t)$ est d'amplitude suffisamment grande pour solliciter les capteurs dans leurs zones saturantes, au moins par moments, de tel sorte que $s(t)$ subit une forte distorsion lors de sa transduction. Pour diminuer l'effet de cette distorsion, nous introduisons un réseau parallèle constitué de N capteurs identiques $g(\cdot)$ qui reçoivent le signal $s(t)$, similairement à la configuration considérée dans [4, 11, 8, 10]. De plus, on contrôle la présence d'un bruit $\eta_i(t)$, indépendant de $s(t)$, que l'on ajoute volontairement à $s(t)$ sur chaque capteur i . Ainsi, chaque capteur i produit individuellement le signal de sortie $y_i(t) = g[s(t) + \eta_i(t)]$ avec $i = 1, 2, \dots, N$. Les N bruits $\eta_i(t)$ associés aux capteurs sont blancs, mutuellement indépendants et identiquement distribués, de fonction de répartition $F_\eta(u)$, de densité de probabilité $f_\eta(u) = dF_\eta(u)/du$ et d'amplitude efficace identique $\sigma_{\eta_i} = \sigma_\eta$. La réponse $y(t)$ du réseau est obtenue en moyennant les réponses individuelles $y_i(t)$ des N capteurs :

$$y(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g[s(t) + \eta_i(t)]. \quad (3)$$

Le rôle bénéfique attendu du bruit peut être expliqué qualitativement de la manière suivante [11, 8, 10] : les bruits ajoutés $\eta_i(t)$ vont permettre à chaque capteur du réseau de répondre de manière différente au même signal d'entrée $s(t)$, au lieu de répondre à l'unisson. Ceci génère une représentation plus riche du signal d'entrée $s(t)$ lorsque toutes les réponses individuelles $y_i(t)$ sont collectées en sortie du réseau.

3 Extension de la dynamique par le bruit

Pour montrer la possibilité d'améliorer la dynamique de capteurs à saturation au moyen du réseau de l'Éq. (3), nous considérons comme signal utile un signal aperiodique déterministe $s(t)$ (nous avons également mené des études similaires sur des signaux périodiques [10]). Pour mesurer la distorsion subie par $s(t)$ lors de sa transduction, nous choisissons d'utiliser l'intercovariance normalisée entre l'entrée $s(t)$ et la sortie $y(t)$

$$C_{sy} = \frac{\langle s(t) E[y(t)] \rangle - \langle s(t) \rangle \langle E[y(t)] \rangle}{\sqrt{[\langle s(t)^2 \rangle - \langle s(t) \rangle^2] [\langle E[y^2(t)] \rangle - \langle E[y(t)] \rangle^2]}}. \quad (4)$$

Le signal d'entrée $s(t)$ est de support T_s et $\langle \dots \rangle$ est une opération de moyenne temporelle sur T_s . Il est possible [7, 8, 10] d'explicitier les espérances $E[y(t)]$ et $E[y^2(t)]$ en fonction du signal $s(t)$ de la sensibilité β des capteurs, de la taille du réseau N et des grandeurs caractéristiques des bruits η (σ_η , f_η). À l'instant t , on a, d'après l'Éq. (3), l'espérance

$$E[y(t)] = E[y_i(t)] \quad (5)$$

et

$$E[y^2(t)] = \frac{1}{N} E[y_i^2(t)] + \frac{N-1}{N} E^2[y_i(t)] \quad (6)$$

qui sont indépendants de i puisque les $\eta_i(t)$ sont i.i.d. De plus, d'après l'Éq. (3), on a pour tout i ,

$$E[y_i(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(s(t) + u) f_\eta(u) du \quad (7)$$

et

$$E[y_i^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(s(t) + u) f_\eta(u) du. \quad (8)$$

À titre d'illustration, les Figs. 1 et 2 représentent l'intercovariance normalisée de l'Éq. (4), en fonction de l'amplitude efficace σ_η des bruits $\eta_i(t)$ ajoutés sur les capteurs, pour la transmission par le réseau de capteurs à saturation de l'Éq. (3) de signaux d'entrée aperiodiques particuliers de grandes amplitudes. Pour chaque taille N du réseau présentée sur les Figs. 1 et 2, nous constatons que la transmission de signaux de grandes amplitudes qui font saturer les capteurs, peut être améliorée par addition des bruits $\eta_i(t)$ sur les capteurs. L'enrichissement du signal de sortie $y(t)$ par le bruit se traduit par une augmentation de C_{sy} qui culmine pour un niveau optimal non nul des bruits ajoutés sur les capteurs $\eta_i(t)$. L'action du bruit permet une meilleure fidélité de transduction pour des signaux $s(t)$ de grandes amplitudes faisant saturer les capteurs. La dynamique du réseau de capteurs en présence des bruits $\eta_i(t)$ est donc plus étendue que celle d'un seul capteur sans bruit ajouté.

4 Robustesse de l'effet

Sur les Figs. 1 et 2, l'effet bénéfique du bruit est déjà disponible pour un capteur isolé soumis à un signal utile $s(t)$ de grande amplitude (comme noté dans [7]). Toutefois, l'utilisation d'une augmentation de dynamique par le bruit dans le cas d'un capteur isolé est difficilement envisageable en pratique. En effet, la diminution de distorsion apportée par le bruit est faible. De plus, le niveau optimal de bruit minimisant cette distorsion dépend fortement de la sensibilité β du capteur et du signal $s(t)$. Des méthodes adaptatives complexes d'ajustement du niveau de bruit optimal ont été discutées pour des systèmes non linéaires isolés [5]. Nous proposons ici une méthodologie simple et non adaptative pour obtenir cet ajustement en utilisant un réseau de capteurs à saturation de grande taille. Les Figs. 1 et 2 montrent que l'efficacité de l'amélioration par le bruit de l'intercovariance normalisée entrée–sortie C_{sy} est davantage prononcée à mesure que la taille du réseau N augmente. La valeur maximale de C_{sy} , obtenue pour un niveau de bruit non nul, tend d'ailleurs vers 1 lorsque N tend vers l'infini. De plus, la pente décroissante, qui suit le passage par le niveau optimal de bruit, décroît à mesure que N augmente allant même jusqu'à s'annuler pour un réseau de taille infini. Le "plateau"

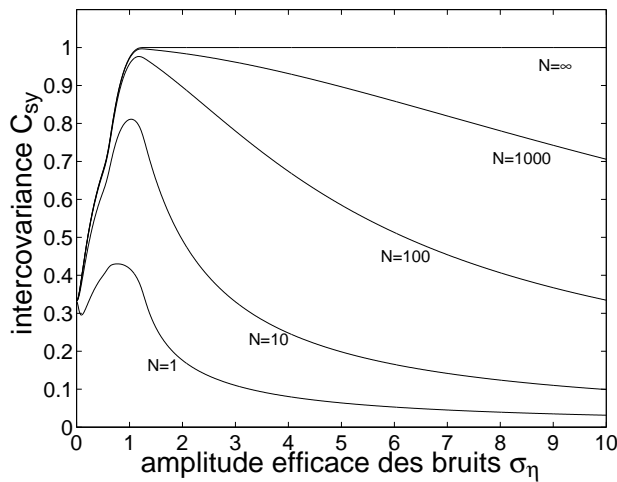


FIG. 1: Intercovariance normalisée entrée–sortie C_{sy} de l'Éq. (4), en fonction de l'amplitude efficace σ_η des bruits $\eta_i(t)$ choisis uniformes, pour différentes tailles de réseaux allant de $N = 1$ à l'infini (l'analyse exacte pour $N = \infty$ est permise par les développements théoriques détaillés dans [8, 10]). Le signal utile aperiodique considéré est $s(t) = 2 \sin\left(2\pi \frac{t}{T_s/2}\right) + \sin\left(2\pi \frac{t}{3T_s/2}\right)$, quand $t \in [0, T_s]$, et $s(t) = 0$ partout ailleurs. Les capteurs ont des caractéristiques à saturations douces comme dans l'Éq. (1) avec tous la même sensibilité $\beta = 10$ de telle sorte qu'à bruit $\eta_i(t)$ nul, $\sigma_\eta = 0$, le signal $s(t)$ sature fortement à travers les capteurs $g(\cdot)$ de l'Éq. (1).

ainsi observé signifie que pour des réseaux de grandes tailles N , la distorsion due à la saturation peut être limitée pour une large gamme de valeurs de l'amplitude efficace des bruits $\eta_i(t)$. Cette dernière observation, cohérente avec celle décrite dans [4] pour un réseau de neurones biologiques, met en évidence une propriété de robustesse (le réglage du niveau de bruit optimal n'est pas un paramètre critique) de l'effet d'amélioration de la dynamique par le bruit dans les réseaux de capteurs à saturation de grandes tailles N .

5 Exemples

Nous illustrons la propriété de robustesse décrite dans la section précédente sur deux exemples pratiques où des capteurs peuvent être amenés à saturer.

5.1 Cas d'une sensibilité variable

Sur la Fig. 3, on envisage la possibilité que la sensibilité β des capteurs, tout en restant identiques dans le réseau, puisse prendre différentes valeurs. Cette situation peut être rencontrée en pratique. En effet, les capteurs sont souvent soumis à d'autres grandeurs physiques que leur mesurande ; des paramètres d'influence (typiquement la température ou la pression) peuvent agir sur la sensibilité des capteurs et amener ceux-ci à saturer si leurs effets ne sont pas compensés [2]. Les résultats de la Fig. 3 montrent que, dans de telles situations, une autre méthodologie est possible pour étendre la dynamique des capteurs sans avoir à contrôler à tout instant la valeur

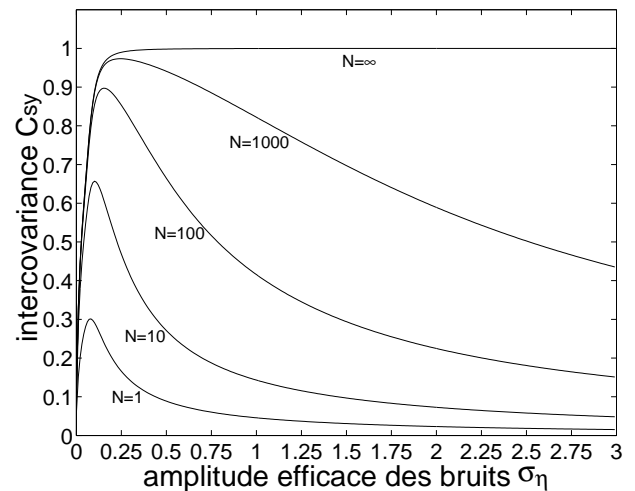


FIG. 2: Similaire à la Fig. 1 avec des capteurs à saturations dures comme dans l'Éq. (2) et des bruits $\eta_i(t)$ choisis gaussiens. Le signal utile aperiodique considéré est $s(t) = A + 0.2 \sin\left(2\pi \frac{t}{T_s/2}\right) + 0.1 \sin\left(2\pi \frac{t}{3T_s/2}\right)$, quand $t \in [0, T_s]$, et $s(t) = 0$ partout ailleurs. La composante $A = 1$ constante ne porte pas d'information. Les capteurs ont tous la même sensibilité $\beta = 1$ de telle sorte qu'à bruit $\eta_i(t)$ nul, $\sigma_\eta = 0$, le signal $s(t)$ sature fortement à travers les capteurs $g(\cdot)$ de l'Éq. (1) (essentiellement à cause de la composante A).

des paramètres d'influence. Ainsi, sur la Fig. 3, le niveau σ_η des bruits ajoutés $\eta_i(t)$ est fixé pour une valeur donnée de la sensibilité des capteurs $\beta = 10$ pour laquelle le signal utile $s(t)$ considéré subit une forte distorsion. Comme on le constate sur la Fig. 3, lorsque l'on considère différentes valeurs de sensibilité, la distorsion reste constante. Le fait de fixer le niveau des bruits ajoutés $\eta_i(t)$ n'affecte pas de manière significative la fidélité avec le signal d'entrée du signal transmis par le réseau. Ceci est particulièrement intéressant pour des réseaux de relatives grandes tailles où la distorsion est quasi nulle avec une intercovariance normalisée C_{sy} qui reste très proche de l'unité qu'elle que soit la saturation subie par le signal utile $s(t)$. Le point important sur un plan pratique est que ce résultat est obtenu sans avoir à ajuster le niveau de bruit ajouté quand la sensibilité des capteurs change.

5.2 Cas d'une composante continue

Sur la Fig. 4, les capteurs ne sont plus soumis à un facteur d'influence et leur sensibilité β est une constante. On s'intéresse au cas où une composante A continue ou lentement variable (par rapport aux variations de $s(t)$) s'ajoute à $s(t)$. Lorsque A est plus grand que la dynamique linéaire du capteur, le signal utile est mal positionné par rapport aux capteurs. Cette situation est illustrée sur la Fig. 2 où l'on montre qu'un ajout de bruit dans le réseau peut permettre de diminuer l'effet de la saturation. Sur la Fig. 4, on adopte la même méthodologie que sur la Fig. 3. On fixe le niveau σ_η des bruits ajoutés $\eta_i(t)$ pour une valeur donnée de la composante $A = 1$ pour laquelle le signal utile $s(t)$ considéré subit la distorsion la plus forte à laquelle on s'attend. Si la composante A prend différentes valeurs, inférieures ou même supérieures (pour les réseaux de

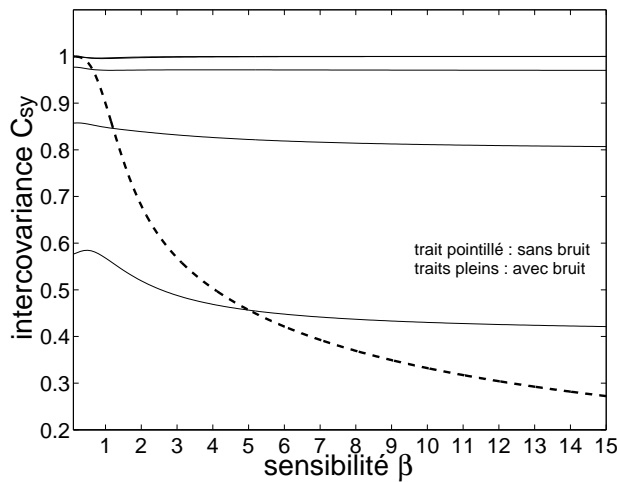


FIG. 3: Intercovariance normalisée entrée–sortie C_{sy} de l'Éq. (4), en fonction de la sensibilité des capteurs à saturation $g(\cdot)$ prise égale à β pour tous les capteurs du réseau. Le signal utile apériodique considéré est le même que celui pris pour la Fig. 1. En trait pointillé, cas d'un seul capteur à saturation en l'absence de bruit. En traits pleins, cas du réseaux de capteurs à saturation ($N = 1, 10, 100, 1000, \infty$ en allant de bas en haut) avec un niveau de bruit uniforme ajouté fixe. Les courbes correspondant à $N = 1000$ et $N = \infty$ sont très proches (quasiment confondues à cette échelle). Pour chaque N représenté, le niveau de bruit considéré est le niveau optimal, correspondant au maximum de C_{sy} , lorsque la sensibilité des capteurs est celle de la Fig. 1, $\beta = 10$.

grandes tailles $N \rightarrow \infty$) à la valeur prise pour l'ajustement du niveau de bruit, alors, la distorsion subie par le signal d'entrée du signal en sortie du réseau reste constante. Ceci illustre, pour une autre situation pratique, la robustesse de l'effet d'extension de dynamique améliorée par le bruit.

6 Conclusion

L'effet bénéfique du bruit, visible sur les Figs. 1 à 4, a jusqu'ici essentiellement été montré dans des réseaux de non-linéarités à seuils comme des neurones [4] et des comparateurs (par exemple [11, 8]). Il est montré ici dans un réseau de non-linéarités à saturation en présence de signaux apériodiques ce qui permet, pour la première fois, une interprétation dans le contexte pratique de l'extension de la dynamique de capteurs. On rencontre des réseaux parallèles de transducteurs à saturation dont les tailles peuvent être grandes (largement supérieures à 1000) chez les neurones biologiques [9] ou avec les micro-nanotechnologies [6]. L'effet robuste de dynamique améliorée par le bruit, mis ici en évidence, pourrait se montrer pertinent dans le cadre de ces domaines d'investigation encore largement ouverts.

Références

[1] G. P. Harmer, B. R. Davis, D. Abbott, "A review of stochastic resonance: circuits and measurement", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 51, pp. 299–309, 2002.

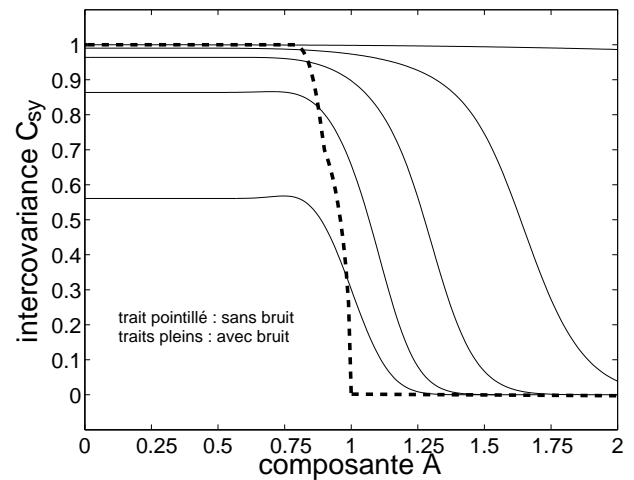


FIG. 4: Intercovariance normalisée entrée–sortie C_{sy} de l'Éq. (4), en fonction d'une composante A continue ou lentement variable non porteuse d'information qui s'ajoute au signal utile $s(t)$. Le signal utile apériodique considéré est le même que celui pris pour la Fig. 2. En trait pointillé, cas d'un seul capteur à saturation en l'absence de bruit. En traits pleins, cas du réseaux de capteurs à saturation ($N = 1, 10, 100, 1000, \infty$ en allant de bas en haut) avec un niveau de bruit gaussien ajouté fixe. Pour chaque N représenté, le niveau de bruit considéré est le niveau optimal, correspondant au maximum de C_{sy} , lorsque la composante A est celle de la Fig. 2, $A = 1$.

- [2] G. Asch, et Collaborateurs, "Acquisition de données : du capteur à l'ordinateur", *Dunod*, Paris, 1999.
- [3] F. Chapeau-Blondeau, D. Rousseau, "Enhancement by noise in parallel arrays of sensors with power-law characteristics", *Physical Review E*, vol. 70, pp. 060101(R), 1-4, 2004.
- [4] J. J. Collins, C. C. Chow, T. T. Imhoff, "Stochastic resonance without tuning", *Nature*, vol 376, pp. 236–287, 1995.
- [5] S. Mitaïm, B. Kosko, "Adaptive stochastic resonance", *Proceedings of the IEEE*, vol 86, pp. 2152–2183, 1998.
- [6] I. Lee, X. Liu, B. Kosko, and C. Zhou, "Nanosignal processing: stochastic resonance in carbon nanotubes that detect subthreshold signal", *Nano Letters*, vol 12, pp. 1683–1686, 2003.
- [7] D. Rousseau, J. Rojas Varela, F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance for nonlinear sensors with saturation", *Physical Review E*, vol 67, pp. 021102,1-6, 2003.
- [8] D. Rousseau, F. Chapeau-Blondeau, "Suprathreshold stochastic resonance and signal-to-noise ratio improvement in arrays of comparators", *Physics Letters A*, vol 321, pp. 280–290, 2004.
- [9] D. Rousseau, F. Chapeau-Blondeau, "Neuronal signal transduction aided by noise at threshold and saturation", *Neural Processing Letters*, vol 20, pp. 71–83, 2004.
- [10] D. Rousseau, F. Chapeau-Blondeau, "Noise improvement and stochastic resonance in parallel arrays of sensors with saturation", *Proceedings 4th International Symposium on Physics in Signal and Image Processing*, pp. 49–54, 31 Jan.-2 Feb. 2005, Toulouse, France.
- [11] N. G. Stocks, "Suprathreshold stochastic resonance in multilevel threshold systems," *Physical Review Letters*, vol. 84, pp. 2310–2313, 2000.