

La résonance stochastique ou le signal favorisé par le bruit : Application aux signaux à événements discrets.

Xavier GODIVIER¹, François CHAPEAU-BLONDEAU²

¹Department of Electrical and Computer Engineering, Boston University,
8 Saint Mary's Street, Boston, MA 02215, USA,

²Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), Université d'Angers,
62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 ANGERS, FRANCE.
godivier@bu.edu, chapeau@univ-angers.fr

Résumé – La résonance stochastique est un effet de transmission non linéaire du signal favorisée par le bruit. Pour cet effet en émergence encore à explorer, nous proposons une vision synthétique ainsi qu'une extension à une nouvelle classe de signaux. L'étude apporte une illustration des mécanismes non linéaires pouvant donner lieu à de la résonance stochastique, accompagnée de différentes méthodes de caractérisation appropriées. On montre ainsi des systèmes où le rapport signal sur bruit en sortie, l'information mutuelle entrée–sortie, ou l'intercorrélation entrée–sortie, peuvent être augmentés par ajout de bruit.

Abstract – Stochastic resonance is a nonlinear effect of noise-enhanced signal transmission. For this emerging effect, still to be explored, we propose a synthetic view and an extension to a new class of signals. The study provides an illustration of the nonlinear mechanisms giving way to stochastic resonance, together with various appropriate methods of characterization. Systems are exhibited where the output signal-to-noise ratio, input–output mutual information, or input–output cross-correlation, can be increased via noise addition.

1 Introduction

La résonance stochastique est un effet non linéaire par lequel le bruit est capable de favoriser la transmission d'un signal utile (voir [1, 2] pour des revues récentes). Cet effet paradoxal a été mis en évidence pour la première fois il y a environ une vingtaine d'années. Il a depuis lors été étendu et observé dans une grande variété de systèmes non linéaires, incluant des circuits électroniques [3, 4, 5], des dispositifs optiques [6, 7], des systèmes neuronaux [8, 9]. La résonance stochastique peut survenir sous diverses formes, selon les signaux et le système non linéaire de transmission impliqués, et selon la mesure d'efficacité qui est améliorée grâce au bruit.

Jusqu'à présent la résonance stochastique a été essentiellement étudiée avec un signal utile périodique [10, 11, 1, 2] ou plus récemment apériodique [12, 13], et un bruit souvent gaussien et blanc, ces signaux prenant des valeurs dans un continuum.

2 Signaux à événements discrets

Nous étudions ici la résonance stochastique pour une nouvelle classe de signaux : À la fois le signal utile et le bruit sont des signaux à événements discrets. Le bruit est modélisé comme $\eta(t) = \sum_k \delta(t-t_k)$, un train d'impulsions de Dirac où les t_k sont des instants aléatoires poissonniens d'intensité λ_η , muni d'une fonction d'autocorrélation $E[\eta(t)\eta(t+\tau)] = \lambda_\eta\delta(\tau) + \lambda_\eta^2$ et d'une densité spectrale de puissance $P_{\eta\eta}(\nu) = \lambda_\eta^2\delta(\nu) + \lambda_\eta$. Le signal utile est aussi un train d'impulsions discrètes $s(t) = \sum_j \delta(t-t_j)$

dont la structure pourra être choisie de différentes façons (déterministe ou aléatoire). Ce type de signaux à événements discrets peut modéliser différents processus, comme des trains de solitons ou de potentiels d'action neuronaux, ou encore des flux de particules individualisées, de photons, ou autres.

Nous considérons la transmission (ou la réception) de ces signaux à événements discrets par un système non linéaire constitué comme suit. Le système présente d'abord un filtre linéaire passe-bas (capteur) qui en réponse à un événement d'entrée produit une impulsion d'amplitude finie A et de durée effective finie ($A \exp(-t/\tau_c)\Gamma(t)$ par exemple pour un filtre du 1er ordre, $\Gamma(t)$ étant l'échelon unité). Ce capteur linéaire est suivi d'un dispositif de détection ou de comptage à seuil (compteur), qui émet un événement en sortie si et seulement si l'impulsion délivrée par le capteur dépasse un seuil de détection θ . La sortie du compteur est donc un signal à événements discrets $y(t) = \sum_\ell \delta(t-t_\ell)$. Ce type de système non linéaire peut servir de modèle à différents processus de transmission ou réception de signaux à événements discrets; il schématise par exemple les éléments essentiels de la réponse d'un neurone. Nous allons voir que ce modèle permet de mettre en évidence une transmission d'information par signaux à événements discrets pouvant être assistée par le bruit.

Un régime existe, quand les événements utiles d'entrée apportés par $s(t)$ ne sont pas assez "énergétiques" (et pas trop fréquents) ou quand le capteur linéaire n'est pas assez sensible, où les impulsions délivrées par le capteur attaqué par $s(t)$ restent sous le seuil θ , alors la sortie $y(t)$ ne répond pas, et aucune information utile n'est transmise.

Dans une même situation, les événements de bruit apportés par $\eta(t)$, pourvu qu'ils ne soient pas trop fréquents (λ_η pas trop grand), seront à eux seuls également incapables de déclencher $y(t)$.

Une coopération est alors possible entre le signal $s(t)$ et le bruit $\eta(t)$ qui va permettre la transmission d'information utile. Avec $s(t) + \eta(t)$ en entrée, et λ_η pas trop grand, il peut arriver qu'un événement de bruit survienne suffisamment proche d'un événement utile, de façon à ce que la superposition linéaire des deux impulsions répondues par le capteur permette de dépasser le seuil θ . Un événement est alors émis en sortie, qui est corrélé avec l'événement utile d'entrée puisque celui-ci est à son origine, pour une part. Cet effet bénéfique, lorsque λ_η est augmenté à partir de zéro, va d'abord se produire de façon de plus en plus fréquente, renforçant ainsi la corrélation du signal de sortie $y(t)$ avec l'entrée utile $s(t)$. Passé un certain niveau de bruit (λ_η suffisamment fort), deux événements de bruit survenant suffisamment proches vont pouvoir à eux seuls déclencher un événement de sortie, sans l'aide d'un événement utile en entrée. À partir de là, la corrélation de $y(t)$ avec $s(t)$ va progressivement décroître. On s'attend donc à une influence non monotone du niveau de bruit mesuré par λ_η , qui culmine à une transmission optimale pour un niveau suffisant de bruit. C'est une forme de résonance stochastique.

Il est possible de quantifier cet effet au moyen de différentes mesure d'efficacité de la transmission, selon la nature du signal utile à événements discrets $s(t)$.

3 Signal périodique

Tout d'abord, pour se conformer à la forme la plus standard de résonance stochastique, on peut considérer $s(t) = \sum_j \delta(t - jT)$ périodique de période T . Sous l'influence de l'entrée aléatoire $\eta(t)$ et de l'entrée déterministe T -périodique, la sortie $y(t)$ est un signal aléatoire cyclostationnaire de période T [10, 14]. Sa densité spectrale de puissance est formée d'un fond continu large bande dû à $\eta(t)$ auquel se superposent des raies spectrales aux harmoniques de la fondamentale $1/T$ dues à $s(t)$. Dans ces conditions de périodicité, nous transposons aux signaux à événements discrets la mesure standard de la résonance stochastique donnée par le rapport signal sur bruit en sortie \mathcal{R} , défini comme la puissance contenue dans la raie spectrale à la fréquence $1/T$ divisée par la puissance contenue dans le fond continu de bruit dans la région de la raie en $1/T$ [1, 2].

La Fig. 1 représente l'évolution du rapport signal sur bruit \mathcal{R} , en fonction de l'intensité du bruit d'entrée mesurée par λ_η . Les résultats ont été obtenus par simulation numérique dans un modèle qui s'apparente au système non linéaire générique décrit plus haut, et pouvant s'interpréter comme un modèle de neurone, identique à celui de [15] (le capteur linéaire est notamment un filtre du 1er ordre). Sur la Fig. 1, l'évolution non monotone du rapport signal sur bruit qui culmine à une valeur maximale pour un niveau de bruit suffisant, identifie la résonance stochastique dans la transmission du signal utile périodique.

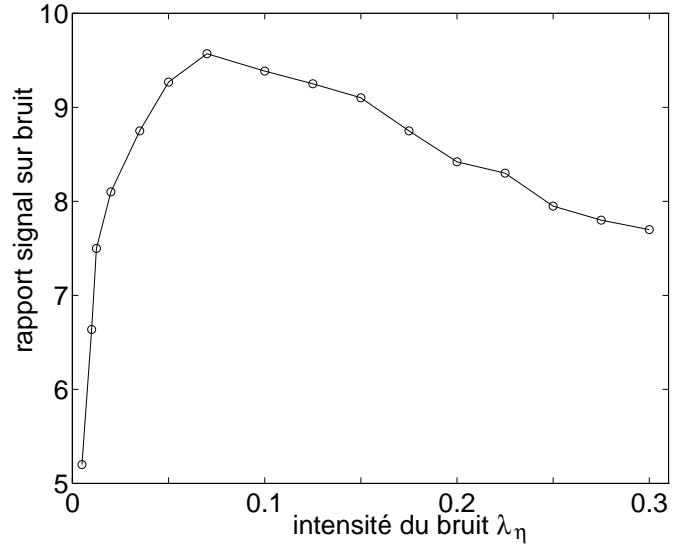


FIG. 1 – Rapport signal sur bruit \mathcal{R} en sortie, en fonction de l'intensité du bruit d'entrée λ_η .

4 Signal aperiodique

On peut réaliser également la transmission assistée par le bruit d'un signal utile $s(t)$ aperiodique. Comme mesure d'efficacité, nous transposons aux signaux à événements discrets les mesures d'intercorrélation entrée–sortie de [12] ou informationnelles de [12, 13]. Nous nous plaçons dans un cas où des expressions analytiques peuvent être calculées pour ces mesures, le cas où le signal utile $s(t)$ est constitué par un train poissonnien d'intensité λ_s et le bruit $\eta(t)$ par un train poissonnien d'intensité λ_η . Le système de transmission est celui de la section précédente, identique au modèle de neurone de [15]. Pour ce système, deux événements d'entrée doivent être séparés d'un temps inférieur à T_h pour produire un événement en sortie. L'intercovariance entrée–sortie $C_{sy} = E[s(t)y(t)] - E[s(t)]E[y(t)]$ peut s'exprimer comme

$$C_{sy} = (p_{11} - q_1)p_1. \quad (1)$$

L'information mutuelle entrée–sortie $I_{sy} = H(y) - H(y|s)$ peut s'exprimer à partir des entropies

$$H(y) = h[p_1 p_{11} + (1 - p_1)p_{10}] + h[p_1(1 - p_{11}) + (1 - p_1)(1 - p_{10})] \quad (2)$$

et

$$H(y|s) = (1 - p_1)[h(p_{10}) + h(1 - p_{10})] + p_1[h(p_{11}) + h(1 - p_{11})], \quad (3)$$

avec la fonction $h(u) = -u \log_2(u)$. On a adopté un modèle à temps discret de pas Δt ; dans les Éqs. (1)–(3), $p_1 = \lambda_s \Delta t$ est la probabilité d'un événement sur $s(t)$ dans l'intervalle élémentaire $[t, t + \Delta t]$, et $q_1 = (\lambda_s + \lambda_\eta) \Delta t p_{11}$ la même probabilité sur $y(t)$. Les termes

$$p_{11} = \frac{1 - \exp[-(\lambda_s + \lambda_\eta)T_h]}{2 - \exp[-(\lambda_s + \lambda_\eta)T_h]} \quad (4)$$

et

$$p_{10} = \frac{q_1 - p_{11}p_1}{1 - p_1} \quad (5)$$

sont des probabilités de transmission entrée–sortie.

Les Figs. 2 et 3 montrent des évolutions de C_{sy} et I_{sy} résultant des Éqs. (1)–(5) quand $\Delta t = 1$ et $T_h = 5$. Selon les conditions, un niveau optimum non nul du bruit maximise l’efficacité, ce qui identifie à nouveau un effet de transmission d’information assistée par le bruit. Les Éqs. (1)–(5) sont correctes en régime de bruit faible. Elles permettent donc de montrer, comme sur les Figs. 2 et 3, que l’efficacité de la transmission augmente lorsque le bruit croît à partir de zéro, ce qui est proprement l’effet de résonance stochastique. Dans des conditions plus générales, la simulation numérique permet à son tour de montrer, comme pour la Fig. 1, que la résonance stochastique subsiste dans des situations variées.

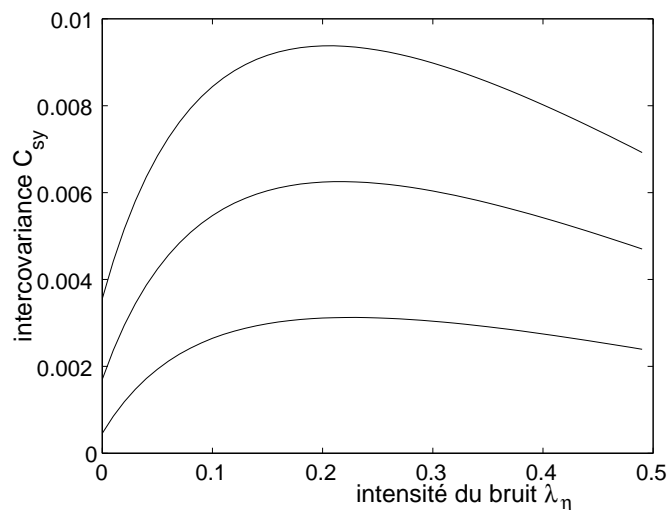


FIG. 2 – Intercovariance entrée–sortie C_{sy} en fonction de l’intensité du bruit d’entrée λ_η , pour de bas en haut $\lambda_s = 0.01, 0.02$ et 0.03 .

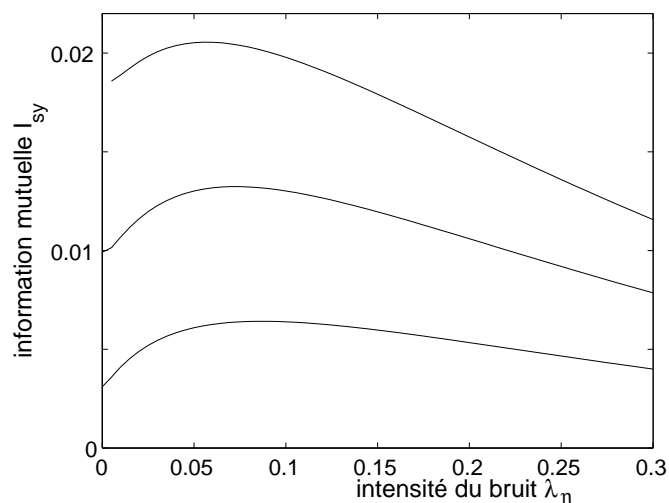


FIG. 3 – Information mutuelle entrée–sortie I_{sy} en fonction de l’intensité du bruit d’entrée λ_η , pour de bas en haut $\lambda_s = 0.01, 0.02$ et 0.03 .

5 Conclusion

L’effet de résonance stochastique que nous avons illustré ici dans la transmission de signaux à événements discrets, se retrouve avec bien d’autres signaux et systèmes de transmission. Le champ d’applicabilité de la résonance stochastique n’est pas encore figé, et de nouvelles formes de cet effet d’information aidée par le bruit sont encore proposées et analysées [16].

La résonance stochastique est un effet non linéaire qui présente une grande importance conceptuelle, en ce qu’elle illustre de façon précise et quantifiée les notions d’information tirée du bruit ou d’ordre tiré du désordre fréquemment évoquées au sujet des systèmes complexes. Jusqu’à présent, c’est plutôt cet intérêt conceptuel ou fondamental qui a été exploré afin d’étendre la connaissance des multiples aspects de cet effet non linéaire encore en évolution.

Une autre voie qui commence tout juste à être considérée consiste à examiner si, et comment, la résonance stochastique peut être exploitée pour des applications compétitives en traitement du signal et de l’information. Cette voie d’étude conduit à aborder le domaine plus large du traitement non linéaire du signal, dès les plus bas niveaux du traitement où l’on a à faire face à la transmission physique, l’acquisition, la détection d’un signal en présence de bruit. À ces niveaux de traitement, les systèmes technologiques actuels s’appuient largement sur des processus linéaires (propagation linéaire, capteurs linéaires, préamplificateurs et filtres linéaires), et si l’on reste dans ce contexte linéaire la résonance stochastique ne peut pas opérer. En même temps, des systèmes naturels comme les systèmes neuro-naux, très performants pour le traitement du signal et de l’information, offrent l’exemple de processus très non linéaires mis en œuvre dès les plus bas niveaux du traitement du signal (et où opère la résonance stochastique). La réponse intrinsèque du neurone présente seuil et saturation, la propagation des signaux est non linéaire (propagation soliton). Il semble ainsi que l’impact de la résonance stochastique doit s’évaluer, et que cet effet puisse prendre sa place et contribuer aux performances globales, dans ce contexte élargi du traitement non linéaire du signal, qui reste encore largement à explorer.

Références

- [1] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni, “Stochastic resonance,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 70, pp. 223–287, 1998.
- [2] S. Mitaim, B. Kosko, “Adaptive stochastic resonance,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 86, pp. 2152–2183, 1998.
- [3] V. S. Anishchenko, M. A. Safonova, L. O. Chua, “Stochastic resonance in the nonautonomous Chua’s circuit,” *Journal of Circuits, Systems and Computers*, vol. 3, pp. 553–578, 1993.
- [4] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, “Noise-assisted signal transmission in a nonlinear electronic comparator : Experiment and theory,” *Signal Processing*, vol. 56, pp. 293–303, 1997.

- [5] X. Godivier, J. Rojas-Varela, F. Chapeau-Blondeau, "Noise-assisted signal transmission via stochastic resonance in a diode nonlinearity," *Electronics Letters*, vol. 33, pp. 1666–1668, 1997.
- [6] M. I. Dykman, G. P. Golubev, I. K. Kaufman, D. G. Luchinsky, P. V. E. McClintock, E. A. Zhukov, "Noise-enhanced optical heterodyning in an all-optical bistable system," *Applied Physics Letters*, vol. 67, pp. 308–310, 1995.
- [7] F. Vaudelle, J. Gazengel, G. Rivoire, X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance and noise-enhanced transmission of spatial signals in optics : The case of scattering," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 15, pp. 2674–2680, 1998.
- [8] A. Bulsara, E. W. Jacobs, T. Zhou, F. Moss, L. Kiss, "Stochastic resonance in a single neuron model : Theory and analog simulation," *Journal of Theoretical Biology*, vol. 152, pp. 531–555, 1991.
- [9] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Noise-enhanced transmission of spike trains in the neuron," *Europhysics Letters*, vol. 35, pp. 473–477, 1996.
- [10] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier, "Theory of stochastic resonance in signal transmission by static nonlinear systems," *Physical Review E*, vol. 55, pp. 1478–1495, 1997.
- [11] L. Gammaitoni, "Stochastic resonance and the dithering effect in threshold physical systems," *Physical Review E*, vol. 52, pp. 4691–4698, 1995.
- [12] C. Heneghan, C. C. Chow, J. J. Collins, T. T. Imhoff, S. B. Lowen, M. C. Teich, "Information measures quantifying aperiodic stochastic resonance," *Physical Review E*, vol. 54, pp. R2228–R2231, 1996.
- [13] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau, "Stochastic resonance in the information capacity of a nonlinear dynamic system," *International Journal of Bifurcation and Chaos*, vol. 8, pp. 581–590, 1998.
- [14] P. O. Amblard, S. Zozor, "Cyclostationarity and stochastic resonance in threshold devices," *Physical Review E*, vol. 59, pp. 5009–5020, 1999.
- [15] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier, N. Chambet, "Stochastic resonance in a neuron model that transmits spike trains," *Physical Review E*, vol. 53, pp. 1273–1275, 1996.
- [16] F. Chapeau-Blondeau, "Noise-assisted propagation over a nonlinear line of threshold elements," *Electronics Letters*, 1999 (in press).