

Détection quantique en présence de bruit : analyse théorique et étude expérimentale sur un processeur quantique

François CHAPEAU-BLONDEAU, Nicolas DELANOUÉ[†]

Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),
Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.
f.chapeau@univ-angers.fr, nicolas.delanoue@univ-angers.fr

Résumé – Sur les technologies quantiques pour le traitement de l'information et du signal, trois problématiques interconnectées sont abordées ici : (i) Nous examinons un problème de traitement du signal quantique – un problème de détection – en présence de bruit quantique ou de décohérence, avec ses formulation et analyse théoriques. (ii) Nous réalisons les mise en œuvre et étude expérimentales de la tâche de détection, sur un processeur quantique accessible publiquement sur Internet, en illustrant aussi les possibilités génériques de tels processeurs. (iii) Nous montrons expérimentalement pour la première fois une possibilité de résonance stochastique ou d'amélioration par le bruit ou la décohérence, dans la tâche de détection quantique, comme cela a été prévu théoriquement il y a peu.

Abstract – On quantum technologies for information and signal processing, three interconnected problems are addressed here: (i) We examine a problem of quantum signal processing – a detection problem – in the presence of quantum noise or decoherence, with its theoretical formulation and analysis. (ii) We realize experimental implementation and study of the detection task, on a quantum processor publicly accessible on the Internet, while also illustrating the generic capabilities of such processors. (iii) We experimentally demonstrate for the first time a possibility of stochastic resonance or improvement by noise or decoherence, in the quantum detection task, as theoretically predicted recently.

1 Introduction

Les technologies quantiques connaissent un essor grandissant et présentent de larges potentialités pour le traitement de l'information et du signal. Dans cette perspective, cette communication aborde trois problématiques interconnectées : (i) Nous examinons un problème de traitement du signal quantique – un problème de détection – en présence de bruit quantique ou de décohérence, avec ses formulation, analyse et optimisation théoriques. (ii) En complément, nous réalisons une mise en œuvre et une étude expérimentales de la tâche de détection, sur un processeur quantique accessible depuis peu publiquement sur Internet, en illustrant aussi les possibilités génériques de tels processeurs. (iii) Nous montrons expérimentalement pour la première fois une possibilité de résonance stochastique ou d'amélioration par le bruit ou la décohérence, dans la tâche de détection quantique, comme cela avait été prévu théoriquement dans [1].

2 Détection quantique

Nous considérons le problème de détection quantique aussi abordé dans [2, 1]. Associé à un espace de Hilbert \mathcal{H} , un signal quantique représenté par l'opérateur densité $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ peut être préparé dans l'état $\rho = \rho_0$ ou $\rho = \rho_1$ avec les probabilités a priori P_0 ou $P_1 = 1 - P_0$ respectivement. Le signal quantique ρ , après sa préparation, est altéré par de la décohérence ou du bruit quantique, dont l'action est modélisée par l'opération quantique $\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho)$. À partir de l'opérateur densité bruité $\mathcal{N}(\rho)$, il s'agit alors de décider si la préparation initiale de ρ était ρ_0 ou ρ_1 . Le détecteur optimal accomplissant cette tâche est caractérisé dans [3, 2] ; il réalise une mesure quantique de $\mathcal{N}(\rho)$ au moyen de deux projecteurs orthogonaux M_0^{opt} et M_1^{opt} agissant dans \mathcal{H} et décomposant l'identité Id de \mathcal{H} , c'est-à-dire $M_0^{\text{opt}} + M_1^{\text{opt}} = \text{Id}$. Les opérateurs de mesure optimaux $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$ sont construits à partir de l'opérateur (hermitien) de test

$$T = P_1 \mathcal{N}(\rho_1) - P_0 \mathcal{N}(\rho_0), \quad (1)$$

et M_1^{opt} est le projecteur orthogonal sur le sous-espace propre associé aux valeurs propres positives de T , alors que M_0^{opt} est le projecteur sur le sous-espace propre complémentaire dans \mathcal{H} .

Quand M_1^{opt} est mesuré le détecteur décide pour ρ_1 , et inversement pour ρ_0 . Ce faisant, le détecteur quantique optimal atteint le minimum de la probabilité d'erreur P_{er} exprimable comme

$$P_{\text{er}}^{\min} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \text{tr}(|T|). \quad (2)$$

Dans cette étude, nous considérons un signal quantique supporté par l'état d'un qubit, avec un opérateur densité $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ décrit en représentation de Bloch [4, 2, 1] par $\rho = (\text{Id} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})/2$, de vecteur de Bloch $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$, de norme $\|\vec{r}\| = 1$ pour un état pur $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$, et $\|\vec{r}\| < 1$ pour un état mélangé. L'action du bruit quantique $\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho)$ peut alors se décrire en représentation de Bloch comme [4, 2, 1] la transformation affine $\vec{r} \mapsto A\vec{r} + \vec{c}$ dans \mathbb{R}^3 . Nous choisissons ici d'étudier un bruit quantique spécialement important qui est un bruit thermique, caractérisé [4, 2, 1] par la transformation matricielle

$$\vec{r} \mapsto \begin{bmatrix} \sqrt{1-\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{1-\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 1-\gamma \end{bmatrix} \vec{r} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (2p-1)\gamma \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Ce modèle de bruit décrit l'interaction du qubit avec un bain thermique de température T . Le paramètre $\gamma \in [0, 1]$ est un facteur de couplage qui peut s'exprimer selon le temps t d'interaction du qubit avec le bain thermique comme $\gamma = 1 - e^{-t/\tau_1}$. Le paramètre p est une probabilité définie par l'équilibre thermique via la relation de Boltzmann $p = 1/(1 + \exp[-(E_1 - E_0)/(k_B T)])$; cette probabilité $p = p(T)$ est donc une fonction de la température T du bain thermique, qui décroît de $p = 1$ quand $T = 0$ jusqu'à $p = 1/2$ quand $T = +\infty$. Dans la suite il sera commode de considérer la température réduite $T_p = 2(1-p)$, qui est une fonction croissante de la température physique T , variant de $T_p = 0$ quand $T = 0$ à $T_p = 1$ quand $T = +\infty$, et qui offre une description générique dispensant de spécifier les énergies E_0 et $E_1 > E_0$ pour les états fondamentaux $|0\rangle$ et excité $|1\rangle$ du qubit.

En représentation de Bloch, l'opérateur de test T de l'Éq. (1) s'exprime alors par

$$T = \frac{1}{2} [(P_1 - P_0)\text{Id} + \vec{r} \cdot \vec{\sigma}], \quad (4)$$

caractérisé par le vecteur de Bloch de test

$$\vec{r} = A(P_1 \vec{r}_1 - P_0 \vec{r}_0) + (P_1 - P_0) \vec{c}, \quad (5)$$

où \vec{r}_0 et \vec{r}_1 sont les vecteurs de Bloch des deux états, respectivement ρ_0 et ρ_1 , à détecter. L'opérateur de test T possède deux valeurs propres $\lambda_{\pm} = (P_1 - P_0 \pm \|\vec{r}\|)/2$, associées à deux états propres orthogonaux $|\lambda_{\pm}\rangle$ définis par les deux vecteurs de Bloch unitaires $\pm\vec{r}/\|\vec{r}\|$.

Le détecteur optimal utilisant les opérateurs de mesure $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$ atteint alors dans l'Éq. (2) la probabilité d'erreur minimale

$$P_{\text{er}}^{\text{min}} = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 - \|\vec{r}\|), & \text{si } \|\vec{r}\| \geq |P_1 - P_0|, \\ \min(P_0, P_1), & \text{si } \|\vec{r}\| < |P_1 - P_0|. \end{cases} \quad (6)$$

Au delà, si cela est accessible, il peut encore être possible d'ajuster la paire d'états d'entrée $\{\rho_0, \rho_1\}$, c'est-à-dire $\{\vec{r}_0, \vec{r}_1\}$, afin de minimiser la probabilité d'erreur $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ des Éqs. (6)–(7). Cette optimisation est accomplie en particulier dans [2], où l'on trouve que pour minimiser $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ des Éqs. (6)–(7), il faut utiliser en entrée deux états purs $|\psi_0^{\text{opt}}\rangle$ et $|\psi_1^{\text{opt}}\rangle$, orthogonaux dans \mathcal{H} , avec une orientation \vec{r}_0 et $\vec{r}_1 = -\vec{r}_0$ dans \mathbb{R}^3 en général dépendant de la température T du bruit thermique. Après cette double minimisation, par la mesure optimale $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$ en sortie sur le signal bruité, et via la paire de signalement optimale $\{|\psi_0^{\text{opt}}\rangle, |\psi_1^{\text{opt}}\rangle\}$ en entrée, la probabilité d'erreur $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ qui résulte des Éqs. (6)–(7) est en général une fonction croissante de la température T du bruit thermique, comme illustré dans [2], traduisant la situation naturelle d'une performance de détection qui se dégrade à mesure que la température T du bruit augmente.

Ici nous explorons une situation différente, où la paire d'états de signalement en entrée est une paire d'états purs orthogonaux $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$ fixée, non ajustable en particulier selon la température T du bruit. Avec $\{\rho_0 = |\psi_0\rangle\langle\psi_0|, \rho_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|\}$ nous étudions alors la performance $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ des Éqs. (6)–(7) pour le détecteur optimal $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$, dans différentes conditions. C'est cette étude qui va être mise en œuvre expérimentalement sur un processeur quantique, et confrontée à l'analyse théorique. Cette étude nous permettra aussi de mettre en évidence, selon les conditions, des régimes, davantage contre-intuitifs, où la probabilité d'erreur $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ peut diminuer lorsque la température T du bruit thermique augmente.

3 Étude sur processeur quantique

Nous entreprenons maintenant une mise en œuvre expérimentale de cette tâche de détection à partir d'un signal quantique bruité. Nous utilisons les processeurs quantiques accessibles librement en ligne sur Internet depuis [5]. Il s'agit de processeurs quantiques exploitant des qubits supraconducteurs couplés électromagnétiquement. Ils rendent accessibles des portes quantiques élémentaires [4], à un qubit comme les portes de Pauli usuelles X, Y, Z , ou bien à deux qubits comme la porte Cnot (controlled not), ceci à l'instar des portes de la logique booléenne en électronique numérique classique. Avec les portes à un qubit et la porte Cnot à deux qubits, on dispose d'un jeu de portes quantiques universel, qui par assemblage permet de réaliser toute évolution unitaire sur un nombre arbitraire de qubits, tout comme en classique la porte NOT à un bit, jointe à la porte OR ou AND à deux bits, constituent un jeu de portes universel pour les circuits de la logique booléenne. Une interface graphique permet de composer en ligne un circuit quantique, en assemblant les portes quantiques élémentaires disponibles, puis de lancer l'exécution du circuit quantique sur le processeur quantique, et enfin de récupérer les résultats des mesures quantiques programmées. Un aperçu de cette interface apparaît sur la Fig. 1. Le circuit quantique peut également être

décrit en langage Python, via l'environnement de développement dédié Qiskit, visible sur la partie droite de la Fig. 1.

Le circuit quantique pour notre tâche de détection est représenté sur la Fig. 2. Il inclut la préparation du signal quantique d'entrée ρ selon une paire d'états purs $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$ choisis, l'implémentation de l'effet du bruit thermique $\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho)$ selon le modèle de l'Éq. (3) avec des paramètres de bruit (γ, p) contrôlables, et enfin la mesure du signal de sortie bruité $\mathcal{N}(\rho)$ par le détecteur quantique optimal $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$.

Dans le circuit quantique de la Fig. 2 mettant en œuvre une tâche de détection à partir d'un signal quantique bruité, un rôle essentiel est joué par le sous-circuit tenant lieu de générateur de bruit quantique contrôlé. Les processeurs quantiques, comme ceux concernés par les Figs. 1 et 2, ont pour destination première de réaliser des traitements quantiques unitaires, représentant des processus quantiques fermés, pour accomplir des calculs ou algorithmes quantiques d'intérêt pour l'informatique. Nous utilisons ici ces processeurs quantiques dans une perspective étendue, d'intérêt pour le traitement du signal, où dans les traitements mis en œuvre l'on inclut une prise en compte contrôlée d'un bruit quantique, en réalisant des évolutions non unitaires, représentant des processus quantiques ouverts subissant de la décohérence quantique de façon contrôlée.

Dans le circuit quantique de la Fig. 2, le qubit de signal constituant le support de l'opération de détection est le qubit marqué $q[0]$ sur l'entrée (la partie gauche) du circuit. D'une façon générale, la porte quantique notée RY implémente sur l'état du qubit la rotation

$$R_Y(\beta) = \exp\left(-i\frac{\beta}{2}Y\right) = \begin{bmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{bmatrix} \quad (8)$$

dans le plan vectoriel \mathcal{H} . Sur la Fig. 2, sur le qubit d'entrée $q[0]$ initialisé dans l'état de base $|0\rangle$, la première porte quantique RY délivre sur sa sortie l'état $R_Y(\beta)|0\rangle = \cos(\beta/2)|0\rangle + \sin(\beta/2)|1\rangle$, qui permet de fixer l'état $|\psi_0\rangle$ ou $|\psi_1\rangle$ pour le qubit de signal $q[0]$ en entrée, en choisissant l'angle β .

Le qubit de signal $q[0]$ subit ensuite l'effet du bruit quantique, implémenté par le générateur de bruit contrôlé constitué par la partie de circuit encadré en vert sur la Fig. 2. Ce générateur de bruit utilise deux qubits auxiliaires marqués $q[1]$ et $q[2]$ sur la Fig. 2. Ces deux qubits finissent intriqués avec $q[0]$ mais ne sont pas mesurés en sortie. L'incertitude résultante constitue ce qui convient pour produire l'évolution non unitaire $\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho)$ du qubit de signal $q[0]$ provoquée par le bruit quantique. Les deux qubits auxiliaires $q[1]$ et $q[2]$ constituent un modèle d'environnement en interaction avec le qubit de signal $q[0]$. Non mesurés, $q[1]$ et $q[2]$ représentent un environnement non observé, induisant une évolution de système ouvert, non unitaire, pour le qubit de signal $q[0]$. On vise ici à réaliser le modèle de bruit thermique quantique défini par l'Éq. (3). Le générateur de bruit résultant sur la Fig. 2 est alors construit selon la méthode exposée dans [6]. Le générateur de bruit inclut ainsi 5 portes Cnot à deux qubits, et 3 portes de rotation RY à un qubit. La première porte RY qui agit sur le qubit $q[1]$ implémente la rotation $R_Y(\beta_p)$ avec l'angle $\beta_p = 2 \arccos(\sqrt{p})$, et permet ainsi de contrôler le paramètre p du bruit thermique quantique de l'Éq. (3). Les deux autres portes RY du générateur de bruit, qui agissent sur le qubit $q[0]$, implémentent successivement les rotations $R_Y(\beta_\gamma)$ puis $R_Y(-\beta_\gamma)$ avec l'angle $\beta_\gamma = \arcsin(\sqrt{\gamma})$, de façon à contrôler le paramètre γ du bruit thermique quantique de l'Éq. (3).

En sortie du générateur de bruit sur la Fig. 2, le qubit de signal $q[0]$ placé dans l'état quantique $\mathcal{N}(\rho)$, doit être mesuré par le détecteur optimal formé des deux projecteurs $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$

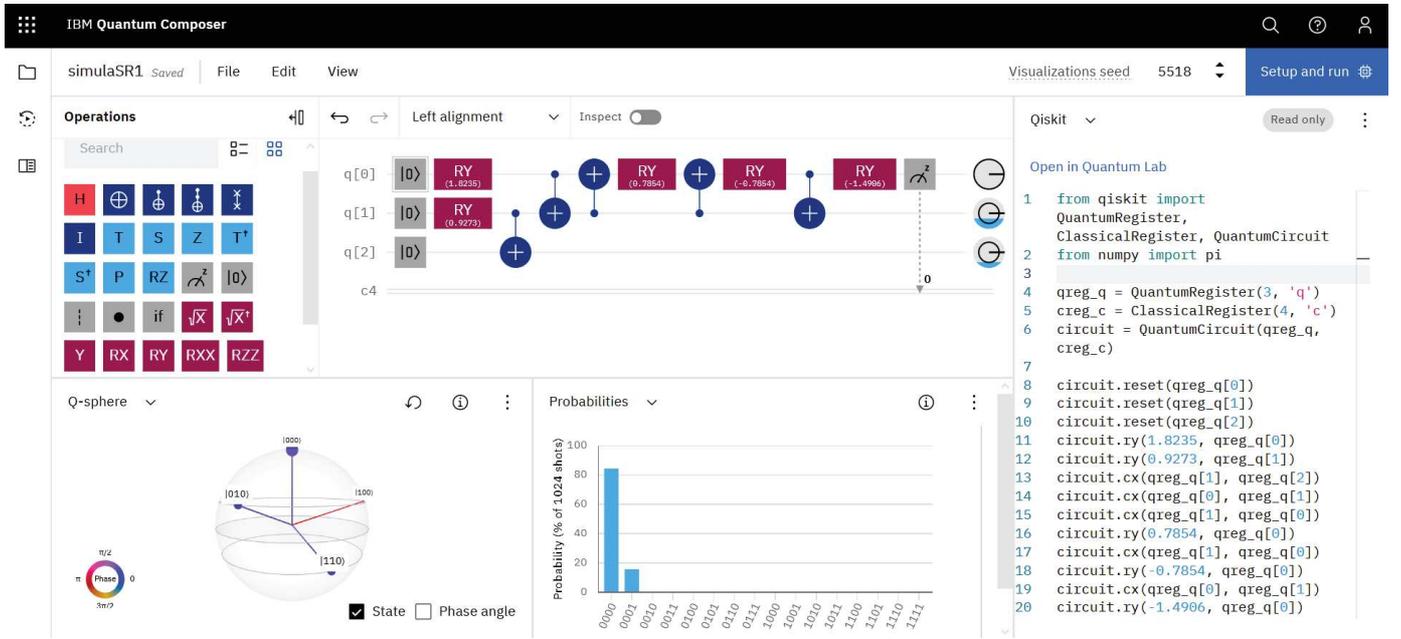


FIGURE 1 – Interface graphique du processeur quantique accessible en ligne sur Internet [5], et permettant la composition, l’exécution et la mesure d’un circuit quantique.

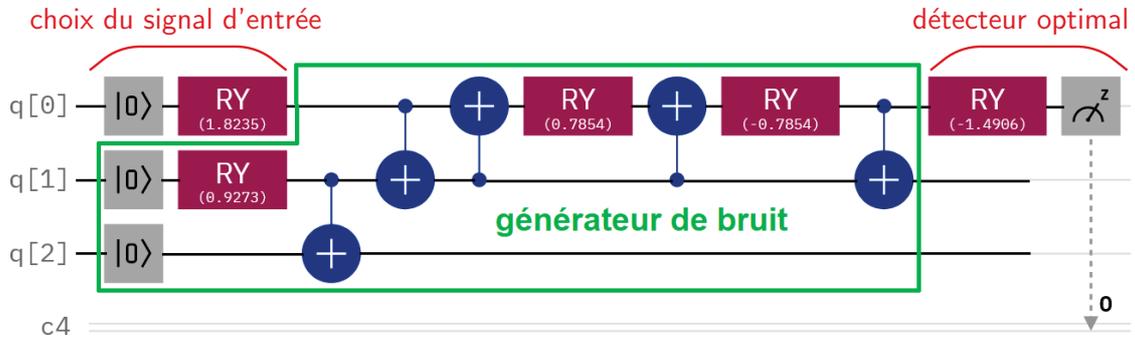


FIGURE 2 – Circuit quantique pour l’étude expérimentale de la détection sur le qubit de signal $q[0]$, avec le choix de l’état $|\psi_0\rangle$ ou $|\psi_1\rangle$ pour le signal quantique en entrée, le générateur de bruit quantique selon l’Éq. (3) de paramètres (γ, p) contrôlables et utilisant deux qubits auxiliaires $q[1]$ et $q[2]$, et le détecteur quantique optimal $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$ en sortie.

du plan vectoriel \mathcal{H} . Sur le processeur quantique utilisé, les qubits sont mesurés dans la base standard $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, comme matérialisé sur la Fig. 2 par le bloc gris avec un cadran marqué z , pour la mesure du qubit de signal $q[0]$ en sortie. Le détecteur optimal $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$ nécessite de mesurer dans la base propre $\{|\lambda_+\rangle, |\lambda_-\rangle\}$ de l’opérateur de test T de l’Éq. (4). Dans le plan vectoriel \mathcal{H} du qubit, la base propre $\{|\lambda_+\rangle, |\lambda_-\rangle\}$ peut être atteinte en tournant d’un angle θ_m la base standard $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. Pour mesurer le qubit $q[0]$ dans la base $\{|\lambda_+\rangle, |\lambda_-\rangle\}$, on lui applique une pré-rotation d’angle $-\theta_m$, par l’opérateur $R_Y(-2\theta_m)$, puis on mesure $q[0]$ dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, ce qui est équivalent, et accompli ainsi en sortie du circuit de la Fig. 2.

4 Résultats

Nous avons utilisé depuis [5] le processeur quantique “ibmq_quito” à 5 qubits. Les Figs. 3–5 montrent les résultats expérimentaux obtenus avec le processeur quantique, et leur confrontation avec l’analyse théorique de la Section 2. Dans différentes configurations selon la paire d’états purs orthogonaux $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$ en entrée, la probabilité a priori P_0 , le facteur de couplage γ du qubit au bain thermique, les Figs. 3–5 présentent l’évolution de la probabilité d’erreur $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ des Éqs. (6)–(7) atteinte par le détecteur quantique optimal $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$, en fonction de la température du bruit thermique. Les configura-

tions des Figs. 3–5 sont choisies pour tester l’existence de 3 régimes distincts pour l’évolution de $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ avec la température du bruit. La Fig. 3 montre la situation naturelle d’une probabilité $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ qui se dégrade (augmente) quand la température du bruit croît. La Fig. 4 montre la possibilité d’une probabilité $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ qui s’améliore (diminue) quand la température du bruit croît. La Fig. 5 montre la possibilité d’une probabilité $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ résonante qui culmine en un maximum pour une température de bruit critique finie. L’augmentation du bruit, par son action géométrique via l’Éq. (3), peut rendre mieux distinguables les deux états $\{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$ fixés en entrée. Ces effets où l’augmentation du bruit peut être bénéfique, peuvent s’apparenter à des effets de résonance stochastique ou de bruit utile, identifiés et analysés en traitement du signal classique [7], et plus récemment quantique [8]. Les régimes de bruit quantique favorable des Fig. 4–5 avaient été prévus théoriquement dans [1], et sont ici observés expérimentalement pour la première fois.

Sur les Figs. 3–5, au delà d’un accord global sur la possibilité des 3 régimes, on peut noter des écarts quantitatifs entre l’expérience et la théorie, qui varient selon les conditions. L’écart relatif observé sur la probabilité d’erreur $P_{\text{er}}^{\text{min}}$ est d’environ 5 à 10 % sur les Figs. 3–4, là où le détecteur optimal est invariant avec la température de bruit et implémenté via une porte élémentaire fixe Id ou Y . Par contre, dans les conditions de la Fig. 5, le détecteur optimal résultant change avec la tem-

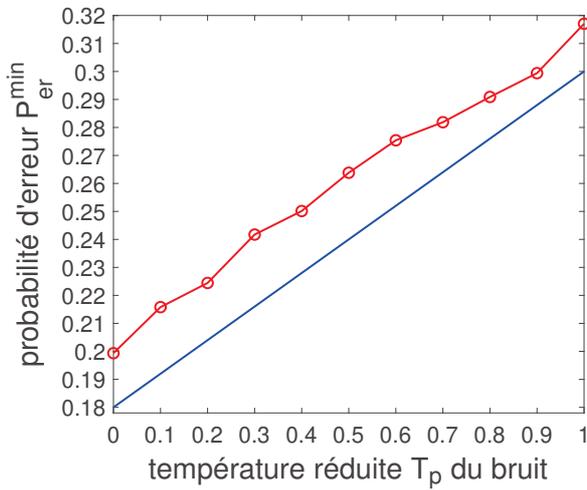


FIGURE 3 – Probabilité d’erreur de détection P_{er}^{\min} du détecteur optimal $\{M_0^{\text{opt}}, M_1^{\text{opt}}\}$, en fonction de la température réduite $T_p = 2(1-p)$ du bruit quantique, avec $P_0 = 0.3$, $\vec{r}_1 = [0, 0, 1]^T = -\vec{r}_0$ et $\gamma = 0.6$. En bleu la théorie des Éqs. (6)–(7), en rouge (\circ) les points expérimentaux.

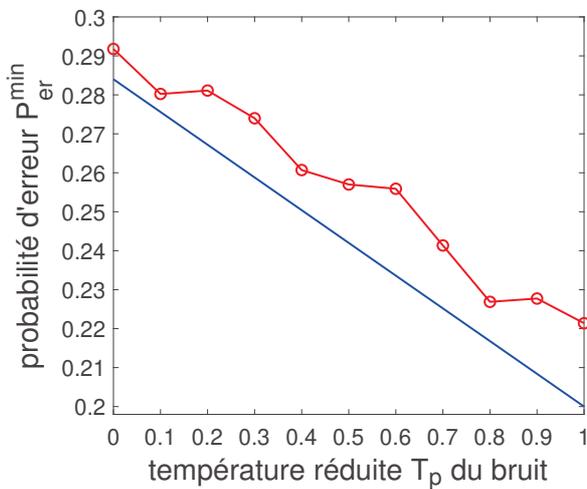


FIGURE 4 – Comme sur la Fig. 3, mais avec $P_0 = 0.3$, $\vec{r}_1 = [0, 0, -1]^T = -\vec{r}_0$ et $\gamma = 0.4$.

pérature du bruit, et est implémenté via une porte de rotation RY d’angle ajusté à chaque température de bruit ; ce circuit de détection plus compliqué étant associé à une erreur relative d’environ 10 à 20 %. Sur les Figs. 3–5, chacune des probabilités expérimentales est estimée comme une fréquence relative sur $L = 10^4$ expériences de détection répétées (qui prennent quelques secondes d’exécution sur le processeur, alors que l’attente dans la queue de batch peut prendre plusieurs minutes à quelques heures). On peut ainsi escompter une précision statistique d’estimation de l’ordre de $1/\sqrt{L} \sim 10^{-2} = 1\%$. Les écarts restants, tels qu’ils sont rendus quantitativement observables ici, et apparaissant plutôt comme des biais systématiques de surestimation, sont difficiles à analyser plus avant ici, et peuvent être attribués aux imperfections de fonctionnement existant dans ces processeurs quantiques, connus pour être des dispositifs avancés encore très sujets aux bruits et perturbations, quoique représentant des technologies de pointe actuellement en développement et progrès constants.

5 Conclusion

Les processus quantiques, spécialement en présence de bruit, touchent des problématiques essentielles pour le développement des technologies quantiques et leur maîtrise. Les concepts et méthodologies du traitement du signal peuvent s’étendre

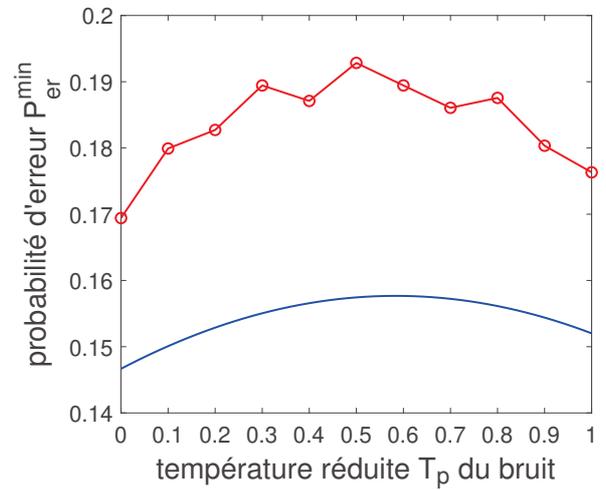


FIGURE 5 – Comme sur la Fig. 3, mais avec $P_0 = 0.2$, $\vec{r}_1 = [\sqrt{1-0.25^2}, 0, -0.25]^T = -\vec{r}_0$ et $\gamma = 0.5$.

naturellement en quantique pour contribuer à ces développements. L’analyse théorique permet de caractériser les traitements optimaux sur les signaux quantiques bruités, dans des tâches standards de traitement du signal identifiées au niveau quantique, comme la détection abordée ici. Les processeurs quantiques permettent des mises en œuvre et tests expérimentaux des opérations de traitement du signal quantique, comme illustré ici. On peut notamment prendre en compte le bruit quantique ou la décohérence, de façon contrôlée, en simulant comme on le fait ici des évolutions non unitaires de processus quantiques ouverts, à partir de processeurs quantiques conçus primitivement pour des évolutions unitaires. On observe notamment ici que le bruit ou la décohérence quantique ne sont pas nécessairement toujours nuisibles, mais qu’il peut exister des régimes où ils deviennent favorables au traitement du signal quantique, et qu’une élévation du niveau de bruit peut améliorer la performance. Ces approches de traitement du signal quantique, couplant analyse théorique et étude expérimentale, présentent de riches potentialités pour la recherche et les applications technologiques.

Références

- [1] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Qubit state detection and enhancement by quantum thermal noise,” *Electronics Letters*, vol. 54, pp. 38–39, 2018.
- [2] F. Chapeau-Blondeau, “Détection quantique optimale sur un qubit bruité,” *Actes 25è Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Lyon, 8–11 sep. 2015.
- [3] C. W. Helstrom, *Quantum Detection and Estimation Theory*. Academic Press, 1976.
- [4] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, 2000.
- [5] “IBM Quantum Computing Platform”, <https://quantum-computing.ibm.com> (accès oct. 2022).
- [6] F. Chapeau-Blondeau, “Modeling and simulation of a quantum thermal noise on the qubit,” *Fluctuation and Noise Letters*, vol. 21, pp. 2250060,1–17, 2022.
- [7] S. Zozor, P. O. Amblard, “On the use of stochastic resonance in sine detection,” *Signal Processing*, vol. 82, pp. 353–367, 2002.
- [8] G. Bowen, S. Mancini, “Stochastic resonance effects in quantum channels,” *Physics Letters A*, vol. 352, pp. 272–275, 2006. ■