

Parallélisme quantique pour le traitement d'images

Nicolas GILLARD, Étienne BELIN, François CHAPEAU-BLONDEAU



LARIS, Université d'Angers.



13èmes Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle, Gdr ISIS, Paris,
26 et 27 mars 2018.

- Les technologies de l'information ont tendance à la **miniaturisation** menant à des problématiques quantiques du traitement d'images.
- De plus le quantique apporte des **ressources spécifiques** inaccessibles en classique pour le traitement de l'information.
- Nous allons présenter ici des notions d'information **quantique** appliquées au traitement d'images et montrer l'apport du traitement quantique d'images par rapport au traitement classique d'images.

- Dans le cadre des JIONC, précédemment [1, 2] nous nous sommes focalisés sur les apports d'une ressource quantique spécifique – **l'intrication**.
- Nous montrons ici l'apport pour le traitement d'images, d'une autre ressource quantique spécifique – **le parallélisme**.

[1] F. Chapeau-Blondeau, "Ressources quantiques et traitement numérique des images", *11èmes Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle*, Paris, France, 16–17 mars 2016.

[2] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, "L'intrication en imagerie quantique pour résister au bruit", *12èmes Journées Imagerie Optique Non Conventionnelle*, Paris, France, 15–16 mars 2017.

Du bit au qubit

Un bit classique a un équivalent quantique : le qubit [3], avec ses 2 états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ constituant une base orthonormée de l'espace de Hilbert \mathcal{H}_2 de dimension 2 sur \mathbb{C} .

Un qubit peut être placé dans l'état **superposé** : $\alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle$, en quelque sorte **simultanément** dans l'état $|0\rangle$ et $|1\rangle$.

Lors de la mesure le qubit est projeté dans une base orthonormée de référence (ici $\{|0\rangle, |1\rangle\}$) et a une probabilité $|\alpha_0|^2$ d'être observé dans l'état $|0\rangle$ et une probabilité $|\alpha_1|^2$ d'être observé dans l'état $|1\rangle$.

[3] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, "Quantum Computation and Quantum Information", *Cambridge University Press*, 2000.

Représentation quantique d'une image

Considérons une image $I(\vec{x}, \vec{y})$ à N pixels :

- Dans le domaine **classique** cette image est représentable par un registre d'intensité $I(\vec{x}, \vec{y})$ pour chaque pixel.
- Grâce à la superposition **quantique**, cette image est représentable par un unique registre contenant dans un **état superposé** les intensités $I(\vec{x}, \vec{y})$ associées aux N pixels repérés par leurs adresses (\vec{x}, \vec{y}) :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{x}} \sum_{\vec{y}} |\vec{x}, \vec{y}\rangle |I(\vec{x}, \vec{y})\rangle.$$

Représentation compacte grâce à la superposition

Pour un nombre de pixels $N = 2^{10} \times 2^{10} = 2^{20}$, l'intensité en chacun de ces N pixels est codée par un registre de $L = 8$ bits :

- La **représentation classique** nécessite $N \times L \approx 8 \times 10^6$ bits.
- La **représentation quantique** ne nécessite que $\log_2(N) + L = 28$ qubits.

Double bénéfice :

⇒ Possibilité d'une représentation quantique plus **compacte** que les représentations classiques.

ET

⇒ Possibilité de traiter en **parallèle** les N pixels en superposition.

Contraintes du traitement quantique

- Limitation des évolutions à des opérateurs **unitaires** sur les vecteurs d'états $|\psi\rangle$.
- Mesure sous forme de **projection** d'un vecteur d'état dans une base orthonormée.

Nous allons montrer ici un exemple de l'utilité de l'information quantique avec ces 2 ressources et 2 contraintes quantiques pour le traitement d'images.

Description du problème d'appariement d'images

Considérons des images binaires de N pixels d'intensités $I(\vec{x}, \vec{y})$ représentées par 1 ou -1.

Le produit scalaire euclidien entre 2 images $I_1(\vec{x}, \vec{y})$ et $I_2(\vec{x}, \vec{y})$ est défini comme :

$$I_1 \cdot I_2 = \frac{1}{N} \sum_{\vec{x}} \sum_{\vec{y}} I_1(\vec{x}, \vec{y}) \cdot I_2(\vec{x}, \vec{y}).$$

Deux images sont dites **similaires** quand $I_1 \cdot I_2 = \pm 1$, c'est-à-dire $I_1(\vec{x}, \vec{y})$ est identique à $I_2(\vec{x}, \vec{y})$ ou en est l'inversion binaire.

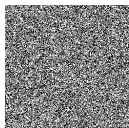
Deux images sont **maximalement dissimilaires** lorsqu'elles sont orthogonales, c'est-à-dire $I_1 \cdot I_2 = 0$.

Description du problème d'appariement d'images

On considère une image binaire de référence $I_R(\vec{x}, \vec{y})$



et une image binaire requête $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$.



On doit décider entre les 2 hypothèses :

- $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$ est similaire à l'image de référence ($I_Q \cdot I_R = \pm 1$).
- $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$ est orthogonale à l'image de référence ($I_Q \cdot I_R = 0$).

Description du problème d'appariement d'images

Exemple d'image de référence $I_R(\vec{x}, \vec{y})$.



Les 2 images requêtes $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$ similaires à l'image de référence $I_R(\vec{x}, \vec{y})$ ($I_Q \cdot I_R = \pm 1$).

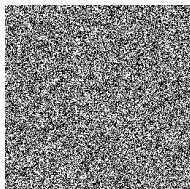


Description du problème d'appariement d'images

Exemple d'image de référence $I_R(\vec{x}, \vec{y})$.



Exemples d'images requêtes $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$ maximale-ment dissimilaires à l'image de référence $I_R(\vec{x}, \vec{y})$ ($I_Q \cdot I_R = 0$).



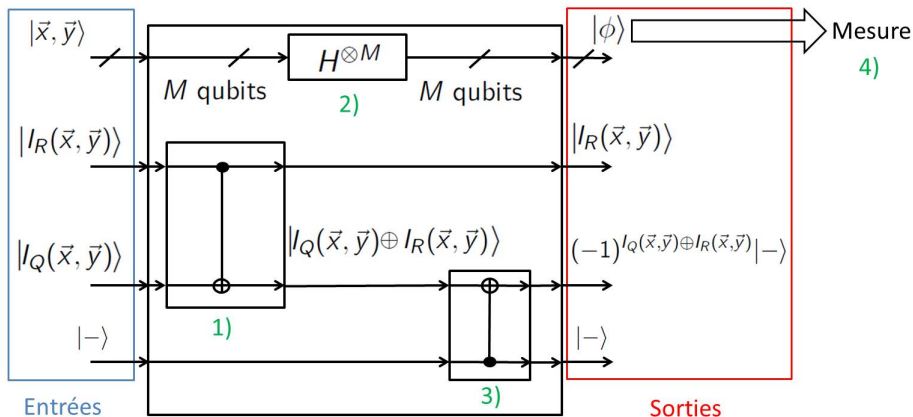
Description du problème d'appariement d'images

Un algorithme **classique** pour cette tâche d'appariement nécessite de traiter l'ensemble des N pixels, en calculant les N produits qui constituent le produit scalaire $I_Q \cdot I_R$, la complexité algorithmique est alors de l'ordre de $O(N)$.

Nous allons montrer que la superposition **quantique** permet de réduire le nombre d'opérations nécessaires à une complexité $O(1)$ constante quel que soit le nombre N de pixels des images à comparer.

Appariement d'images par superposition quantique

Circuit d'appariement d'images aidé par la superposition quantique.

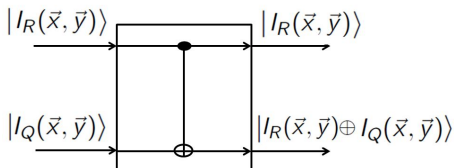


Appariement d'images par superposition quantique

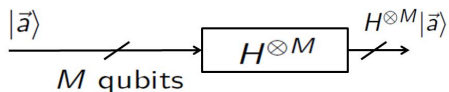
Soit la représentation superposée quantique d'une image binaire à $N = 2^M$ pixels :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{x}} \sum_{\vec{y}} |\vec{x}, \vec{y}\rangle |I(\vec{x}, \vec{y})\rangle.$$

1) On applique sur la représentation quantique du registre d'intensité à 1 qubit de l'image requête $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$ un opérateur **unitaire** Controlled-NOT (C-NOT) produisant un OU Exclusif (XOR) avec l'intensité de référence $I_R(\vec{x}, \vec{y})$.



2) Puis on applique l'opérateur **unitaire** d'Hadamard H sur le registre d'adresse à M qubits repérant chacun des $N = 2^M$ pixels de l'image requête $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$. L'opérateur d'Hadamard agissant sur un vecteur d'état $|\vec{a}\rangle = |\vec{x}, \vec{y}\rangle$ de M qubits comme suit :



$$H^{\otimes M}|\vec{a}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{\vec{z} \in \{0,1\}^M} (-1)^{\vec{a} \cdot \vec{z}} |\vec{z}\rangle, \forall \vec{a} \in \{0,1\}^M.$$

Appariement d'images par superposition quantique

3) Puis on applique sur le registre d'intensité transformé de l'image requête $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$ un opérateur **unitaire** Controlled-NOT (C-NOT) avec une entrée $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = |-\rangle$ afin d'obtenir ce registre dans l'état :

$$(-1)^{I_Q(\vec{x}, \vec{y}) \oplus I_R(\vec{x}, \vec{y})} |-\rangle.$$

Le registre d'adresse transformé $|\phi\rangle$ à M qubits en sortie de ce circuit est dans l'état :

$$|\phi\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec{z} \in \{0,1\}^M} \sum_{\vec{a} \in \{0,1\}^M} I_Q(\vec{a}) \oplus I_R(\vec{a}) (-1)^{\vec{a} \cdot \vec{z}} |\vec{z}\rangle.$$

Le poids de l'état $|\vec{z}\rangle = |0\rangle^{\otimes M}$ du registre d'adresse transformé $|\phi\rangle$ est :

$$w(|\vec{z}\rangle = |0\rangle^{\otimes M}) = \sum_{\vec{a} \in \{0,1\}^M} I_Q(\vec{a}) \oplus I_R(\vec{a}) = N I_Q \cdot I_R,$$

avec $\sum_{\vec{z} \in \{0,1\}^M} |w(|\vec{z}\rangle)|^2 = N^2.$

4) On mesure le résultat du calcul précédent en **projetant** le registre d'adresse transformé $|\phi\rangle$ à M qubits dans la base orthonormée $\{|0\rangle, |1\rangle\}^{\otimes M}$ donnant 2^M résultats possibles.

La mesure donne accès à la réponse au problème d'appariement :

- L'image requête $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$ est similaire à l'image de référence $I_R(\vec{x}, \vec{y})$ ($I_Q \cdot I_R = \pm 1$). $\Rightarrow w(|\vec{z}\rangle = |0\rangle^{\otimes M}) = \pm N$.
 \Rightarrow Le registre $|\phi\rangle$ est observé dans l'état $|0\rangle^{\otimes M}$.
- L'image requête $I_Q(\vec{x}, \vec{y})$ est maximale dissimilaire à l'image de référence $I_R(\vec{x}, \vec{y})$ ($I_Q \cdot I_R = 0$). $\Rightarrow w(|\vec{z}\rangle = |0\rangle^{\otimes M}) = 0$.
 \Rightarrow Au moins un qubit du registre $|\phi\rangle$ est observé dans l'état $|1\rangle$.

- Nous avons présenté des notions essentielles permettant l'exploitation du parallélisme quantique pour le traitement d'images.
- Au moyen d'états superposés nous avons mis au point un protocole d'appariement d'images de complexité indépendante du nombre de pixels N .
- Nous avons montré des perspectives intéressantes de l'exploitation de phénomènes quantiques pour le traitement d'images.
- Des algorithmes adaptés aux différentes tâches de traitement d'images restent encore à être élaborés pour tirer parti des spécificités quantiques.

Merci pour votre attention