

**Systemes à événements discrets
dans l'algèbre des dioïdes
et l'algèbre conventionnelle.**

Habilitation à Diriger des Recherches

Philippe Declerck

Université d'Angers

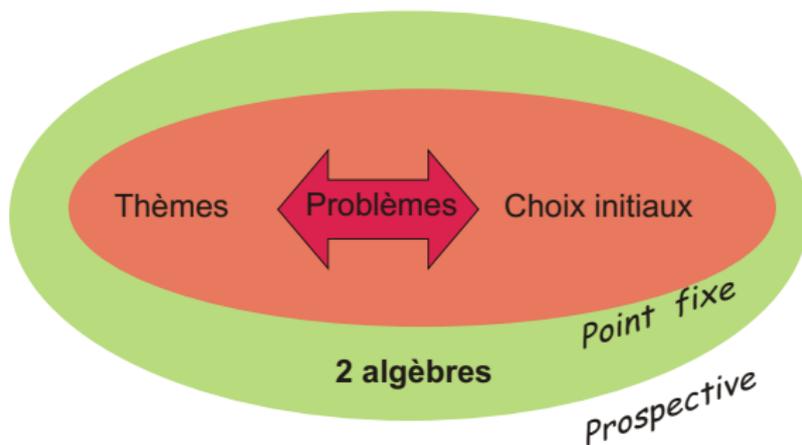
Vendredi 2 décembre 2011

Fil conducteur de cette soutenance.

- Synthèse de mes travaux effectués au Laboratoire Lisa dans l'Université d'Angers.
- Ligne(s) directrice(s) dans un contexte scientifique global.
- Le raisonnement de l'exposé sera étayé par quelques résultats spécifiques.

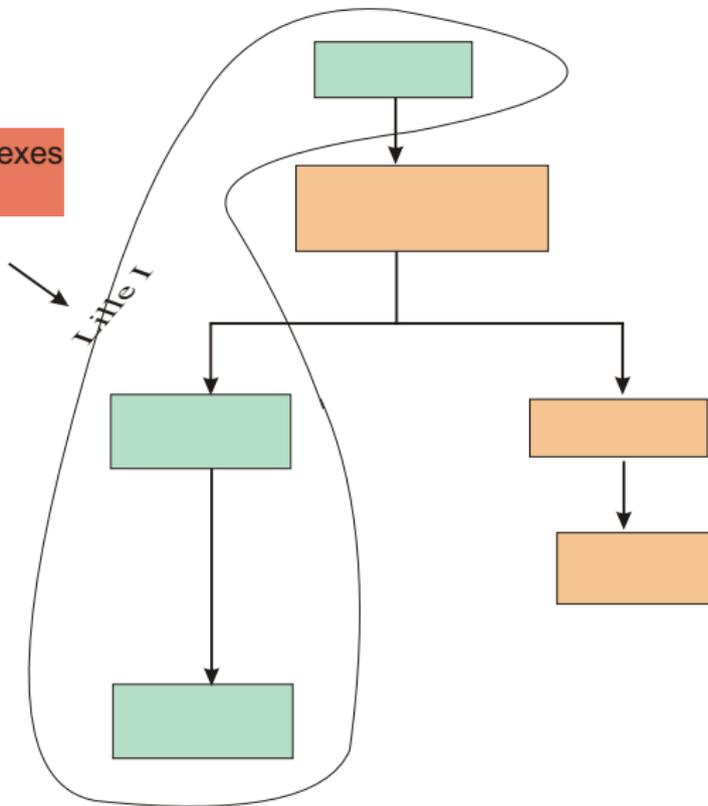


Sommaire



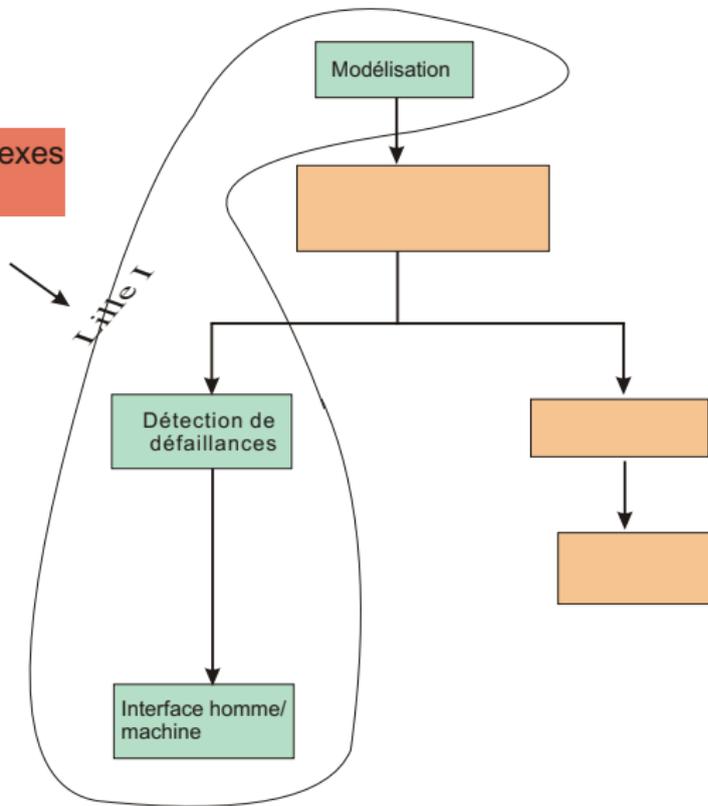
Thèmes de l'automatique traités

Grands systèmes complexes
continus



Thèmes de l'automatique traités

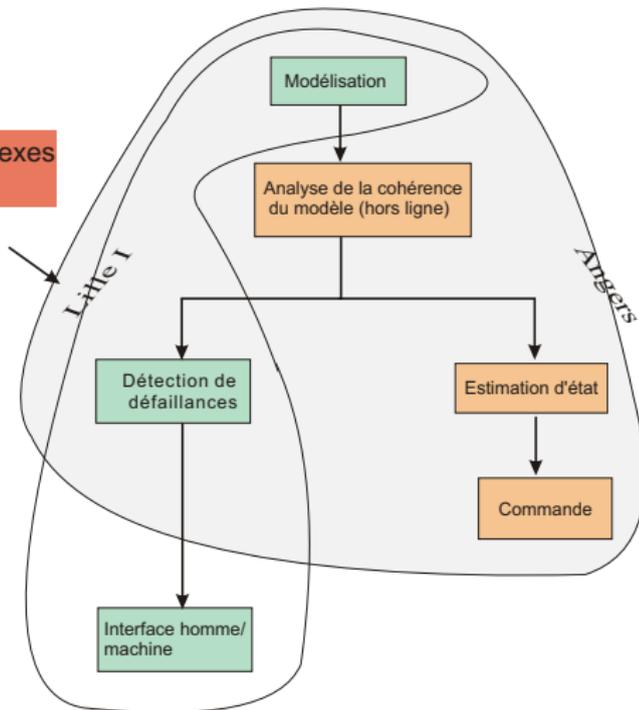
Grands systèmes complexes continus



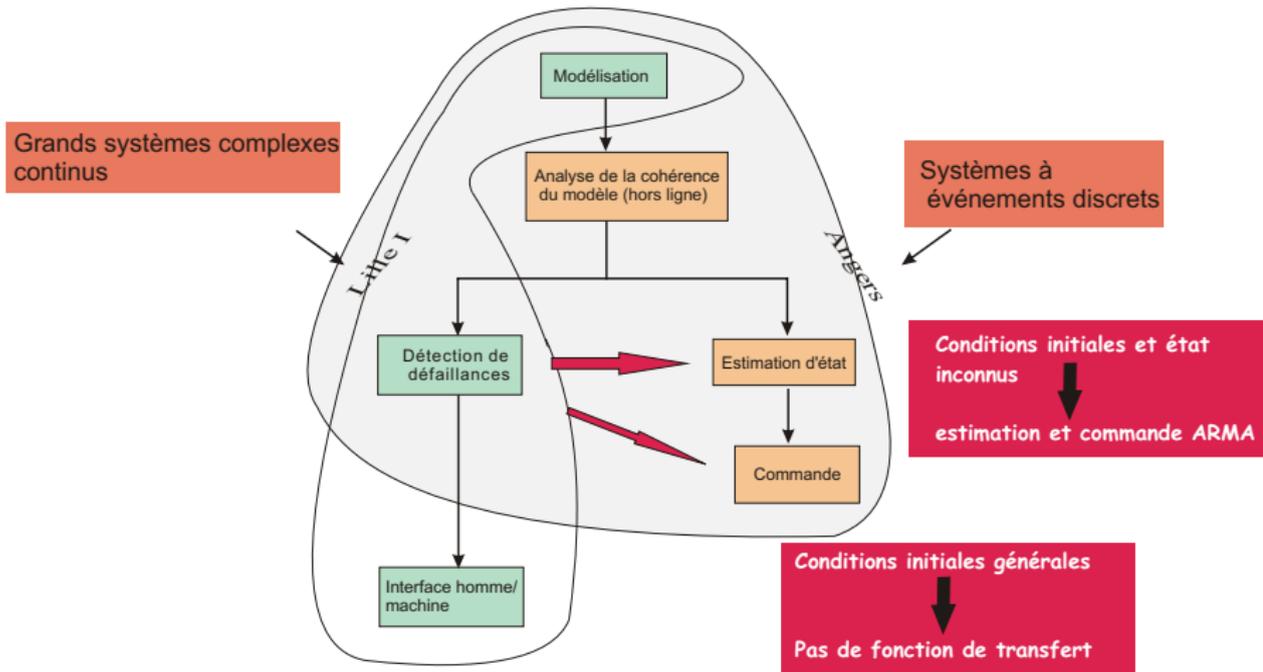
Thèmes de l'automatique traités

Grands systèmes complexes continus

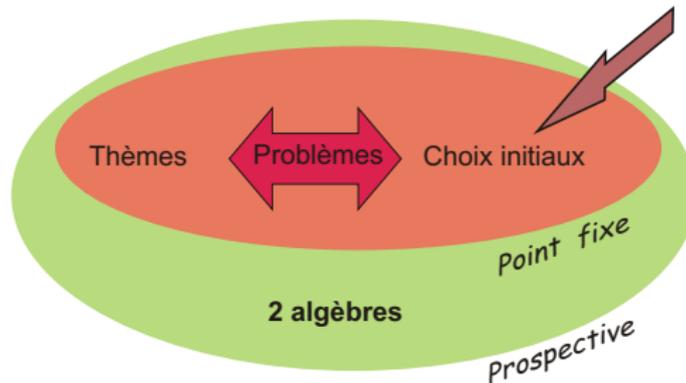
Systèmes à événements discrets



Thèmes de l'automatique traités

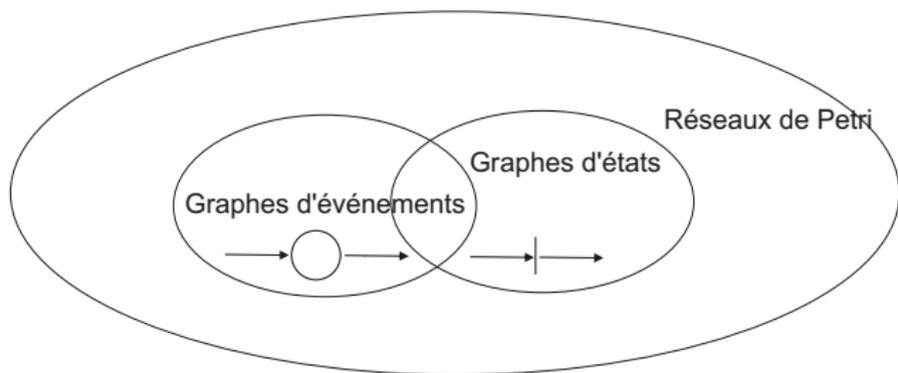


Sommaire

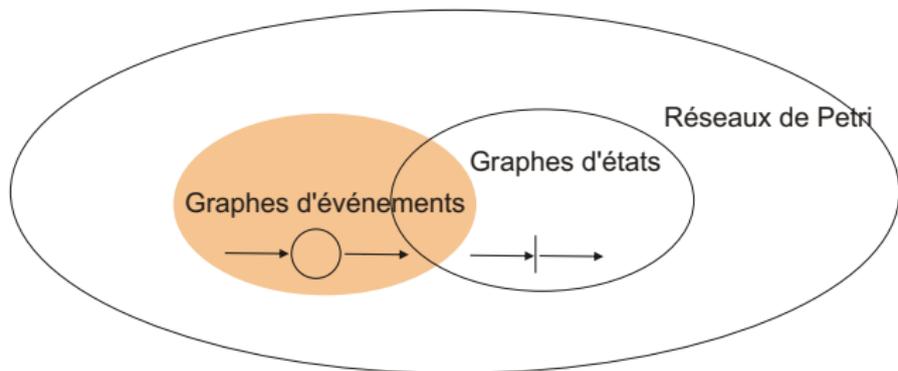


- Classes de réseaux de Petri
- Dateurs/compteurs
- Unification dans le modèle algébrique d'intervalles

2 types de Réseaux de Petri opposés



Réseaux de Petri : les structures clés
d'après la figure 25 de T. Murata 1989



Choix de travail a priori

- La structure du graphe d'événements.
- Les dateurs.
- L'algèbre (max, +).

Dateurs/compteurs pour le Graphe d'Événements Temporisé

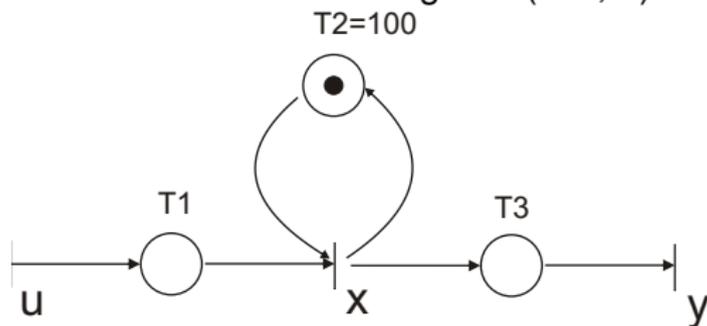
La variable $x_i(k) \in \mathbb{R}$ est la date du k^{th} événement de x_i ou k^{th} tir de la transition x_i .

$x(k) = A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k)$ dans l'algèbre $(\max, +)$ ou (\oplus, \otimes) .

La variable $x_i(t) \in \mathbb{Z}$ est le numéro de l'événement ou tir de cette transition survenue avant ou à t .

$$c(t) = \sup\{k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } d(k) \leq t\}$$

$x(t) = A \otimes x(t-1) \oplus B \otimes u(t)$ dans l'algèbre $(\min, +)$.



Graphe d'Événements Temporisé :
 $x(k) = \max(T_2 + x(k-1), T_1 + u(k))$.

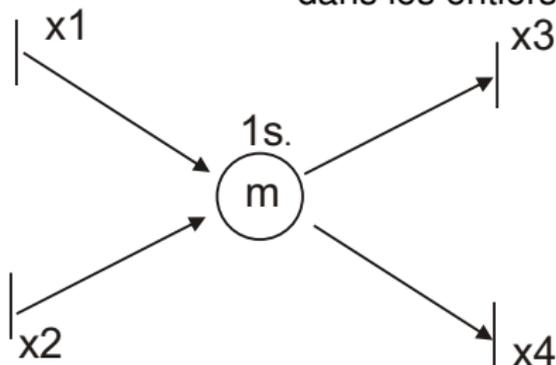
Mais des différences :

- $=$ et \leq
- $x_i(k) \in \mathbb{R}$ et $x_i(t) \in \mathbb{Z}$.
- L'ordre des systèmes est différent selon le nombre maximal de jetons initiaux et la valeur maximale des temporisations pour un Graphe d'Événements Temporisé.
- Difficulté avec le comportement périodique $A \otimes \nu = \lambda \otimes \nu$ des compteurs dans \mathbb{Z} car λ peut ne pas être entier.

Dateurs/Compteurs dans d'autres Graphes d'Événements

Dateurs

Fixer des ordonnancements !

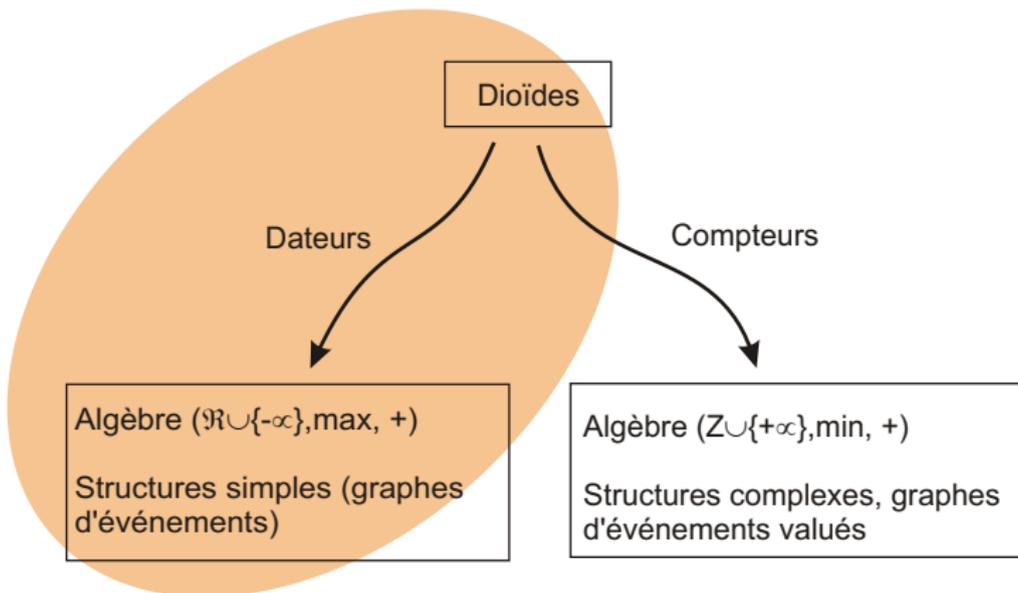


Place multi-entrées/multi-sorties

Compteurs

$x_1(t-1) + x_2(t-1) + m \geq x_3(t) + x_4(t)$
dans les entiers.

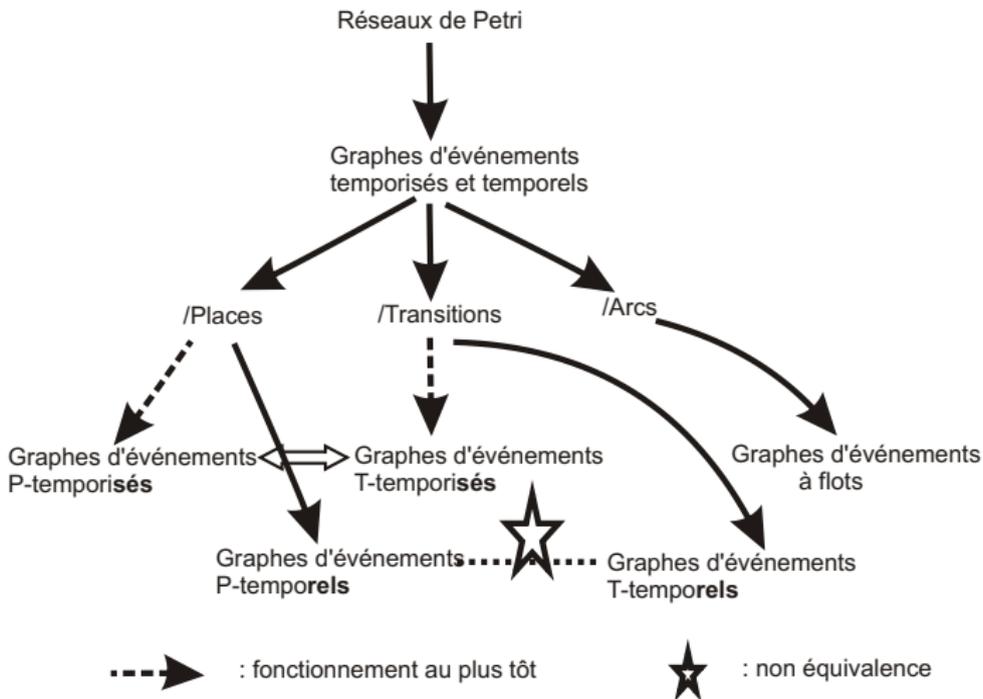
Synthèse 1



→ Les dateurs peuvent modéliser des synchronisations complexes.

Une multitude de modèles

Distinction par rapport aux places, aux transitions et arcs.



Unification dans le Modèles algébrique d'intervalles

→ Agir plus facilement sur les différents réseaux de Petri.

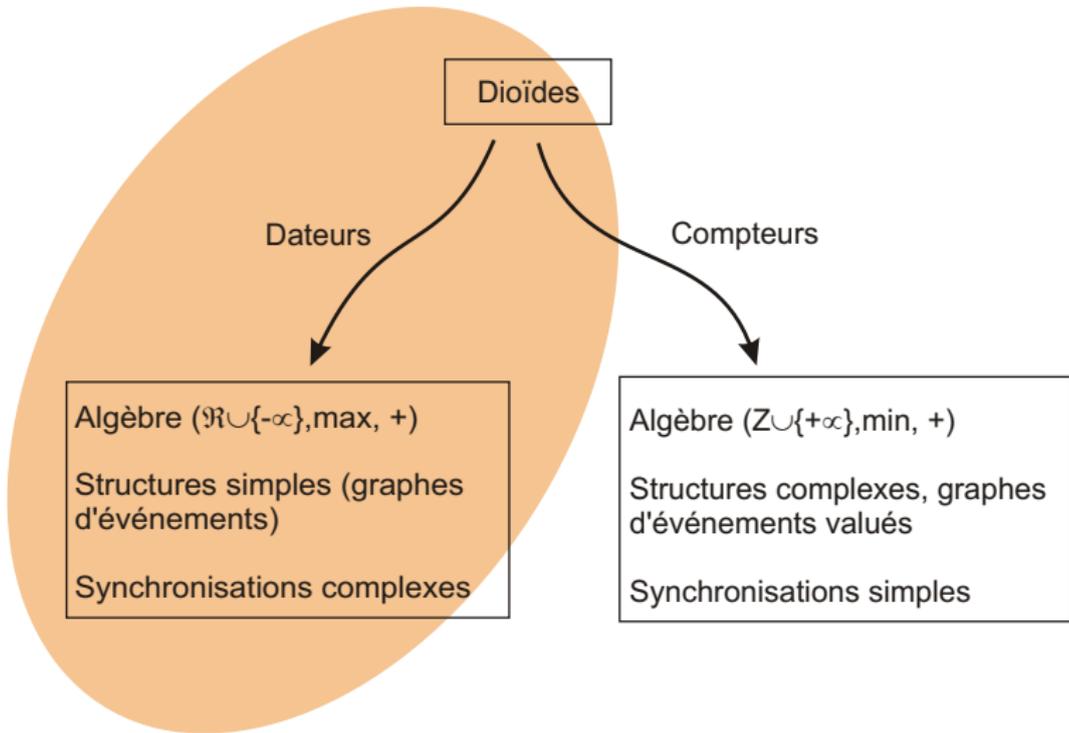
Modèle d'intervalles

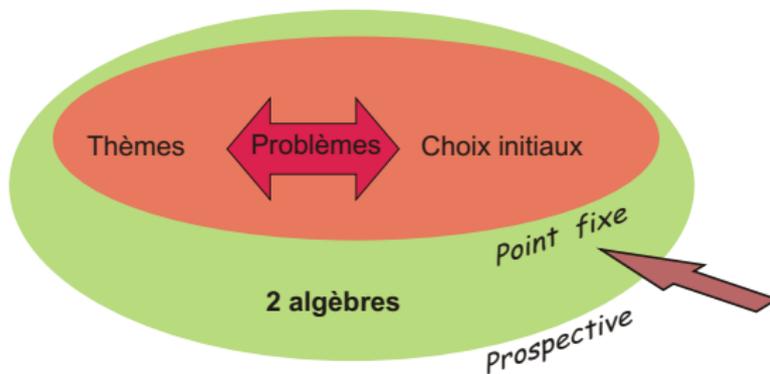
$$f^-(x(k-1), x(k), u(k)) \leq x(k) \leq f^+(x(k-1), x(k), u(k)) \quad (1)$$

Graphe d'Evénements	$f^-()$	$f^+()$
Graphe d'Evénements temporisé	(max, +)	(max, +)
Graphe d'Evénements P-temporel	(max, +)	(min, +)
Graphe d'Evénements à flots	(min, max, +)	(min, max, +)

Le modèle d'intervalles décrit uniquement la synchronisation du Graphe d'Evénements T-temporel sur un aspect temporel.

Synthèse 2





- Description
- Exemples de travaux

Approche du type point fixe

$$x \leq f(x) , x = f(x) \text{ et } x \geq f(x) \quad (2)$$

- Cohérent avec $x \leq A \setminus x \wedge b$ et $x \geq A \otimes x \oplus b$
- Modèle mathématique général : Utilisée par de nombreux travaux (voir les 900 pages du livre de Eberhard Zeidler 1992...)
- Le type de $f(\cdot)$ donne des généralisations naturelles.

f (min, +), (max, +) et (min, max)

$\subset f$ (min, max, +)

$\subset f$ topicale (monotonie + homogénéité + non-expansivité)

$\subset f$ monotone

Monotonie : si $x \leq y$ alors $f(x) \leq f(y)$

Homogénéité : $f(x + h) = f(x) + h$

Non expansivité de f : $\| f(x) - f(y) \| \leq \| x - y \|$

Travaux

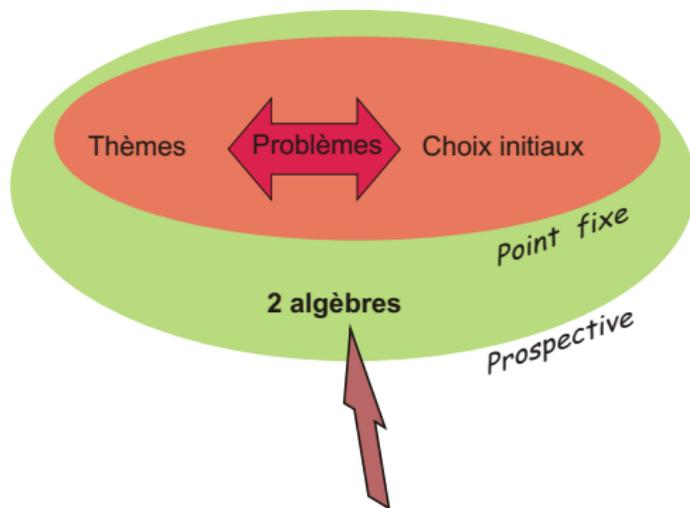
Problème mathématique. → Problème dans les systèmes à événements discrets

Modèle	GE P-temporels	GE d'intervalles	GE temporisé
Thème	Vivacité	Cd+spécif.	Cd ARMA
Sol. opt.	$[x^-, x^+]$	u^+	u^+ sans CI et état
Existence	mort de jetons	$X(f)$	-
Journal	IEEE-TAC 11	IEEE-TAC 10	Kybernetika 99

Modèle	GE P-temporels	GE d'intervalles
Thème	Cd+spécif.	Estimation
Sol. opt.	u^+ fort.poly.	x^+
Existence	-	Test de redond.
Conf. Inter.	Wodes 10	DCDS'07

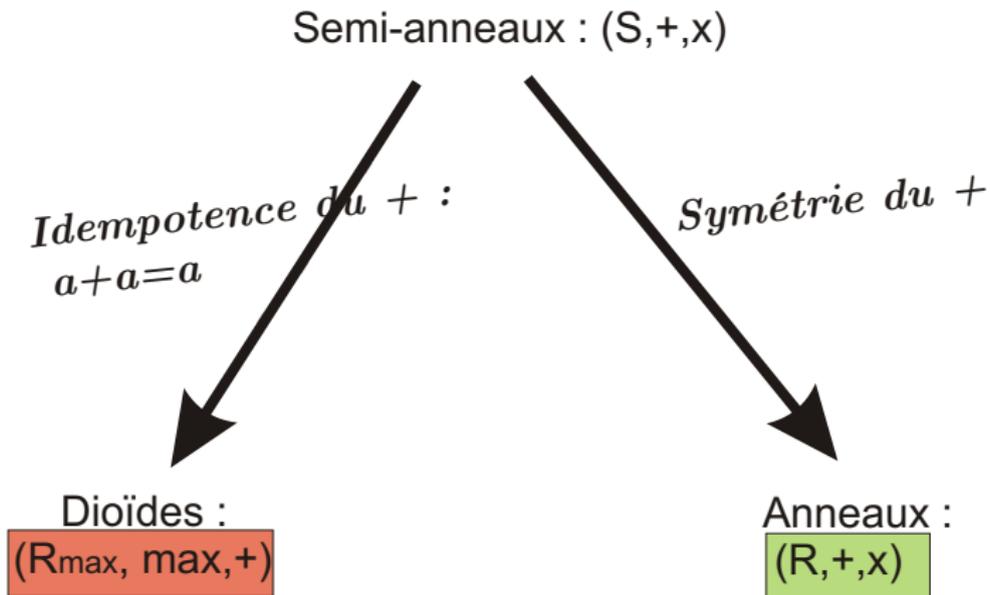
avec GE : Graphe d'Événements ; Cd : Commande ; spécif. : spécifications ;
ARMA : AutoRegressive Moving Average ; CI : Conditions Initiales ; fort.poly. :
fortement polynômial ; redond : redondance.

Sommaire



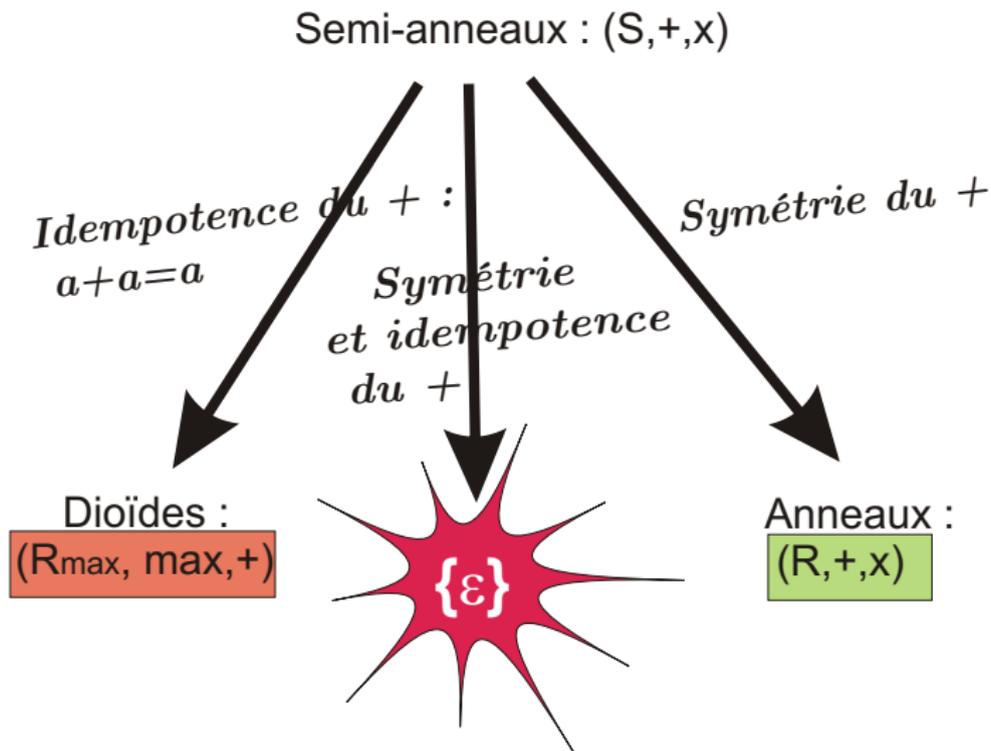
- Semi-anneaux
- Passage entre les deux algèbres
- Thèmes traités par rapport aux deux algèbres

2 algèbres opposées



Deux algèbres : structure commune

2 algèbres opposées



Deux algèbres : structure commune et opposition

Passage entre les 2 algèbres

(Algèbre (max, +))

Inéquations matricielles d'état dateur

$$x(k) \geq A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_0 \otimes x(k) \oplus B_0 \otimes u(k) \quad (3)$$

$$y(k) \geq C \otimes x(k) \quad (4)$$

Algèbre standard

Inéquations matricielles d'état dateur

$$\begin{pmatrix} A_{.,1} & A_{.,0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k-1)} \\ x^{(k)} \end{pmatrix} \leq -T^A \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(k)} \\ x^{(k)} \end{pmatrix} \leq -T^B \quad (6)$$

$$\begin{pmatrix} C_1 & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} \leq -T^C \quad (7)$$

Outil : Relation d'ordre composante par composante

$$x \leq y \Leftrightarrow x_i \leq y_i \quad \forall i$$

La relation d'ordre composante par composante et les treillis peuvent encore être utilisés dans l'algèbre conventionnelle.

Théorème

$$1 \Leftrightarrow 2$$

1. L'ensemble $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ a un élément maximal x_0 .
2. x_0 est optimal pour le problème $\max\{cx \mid Ax \leq b \text{ pour tout } c > 0\}$. ■

Exemples de travaux

- **Standardisation** du modèle $A.x \leq b$ d'un Graphe d'Événements Temporisé telle que chaque place interne contienne un seul jeton (conf. CIE39, 2009) : obtenir l'équivalent de

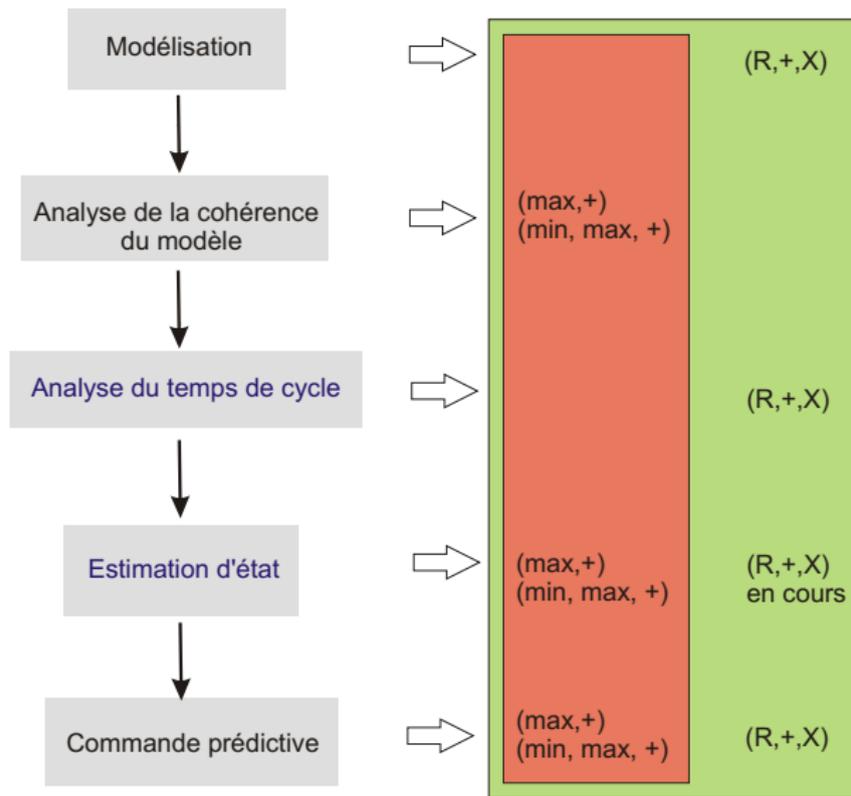
$$x(k) = A_0^* \otimes A_1^- \otimes x(k-1) \oplus A_0^* \otimes B \otimes u(k) \quad (8)$$

avec une étoile de Kleene dans l'algèbre conventionnelle.

- **Commande** de Graphes d'Événements Temporisés sur un horizon glissant (JESA 2009) : résiduation matricielle sur des dateurs.
- **Temps de cycle** : analyse d'un Graphe d'Événements P-temporel généralisé.

→ La théorie des graphes classique ne peut s'appliquer dans ce dernier cas → Pas d'algèbre (max, +) standard.

Thèmes traités par rapport aux 2 algèbres

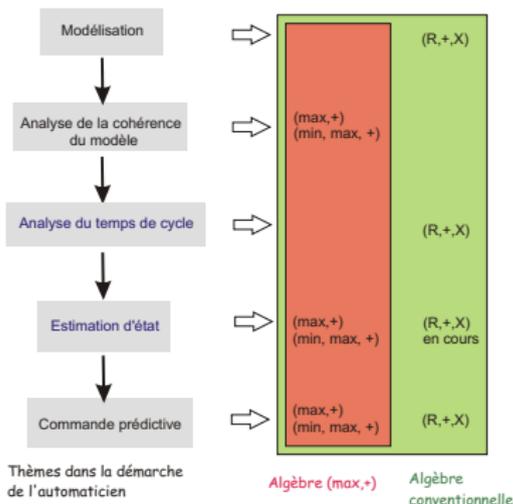


Thèmes dans la démarche de l'automaticien

Algèbre $(\max, +)$

Algèbre conventionnelle

2 doctorats pour 2 algèbres

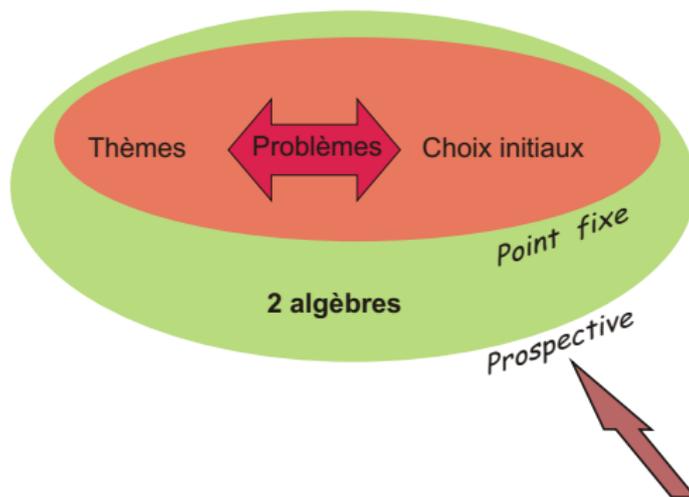


M. Khalid Didi Alaoui, "Etude et supervision des graphes d'événements temporisés et temporels : vivacité, estimation et commande", 2005.

Abdelhak Guezzi, "Modélisation, analyse de performance et commande des systèmes à événements discrets", 2010.



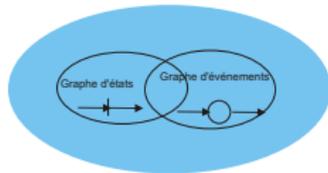
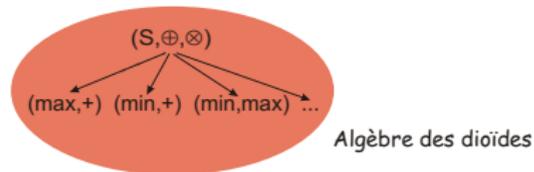
Sommaire



- 3 thématiques
- Approfondir : différents problèmes avec différentes dimensions
- Point de vue inverse : transfert mathématique
- Conclusion : résumé

3 Thématiques

Titre du mémoire : Systèmes à événements discrets dans l'algèbre des dioïdes et l'algèbre conventionnelle.

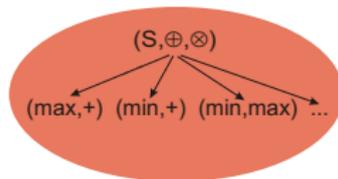


Réseaux de Petri

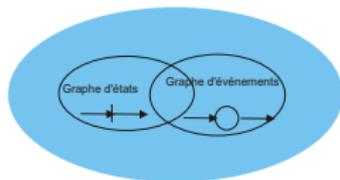


Programmation linéaire

Thématique : réseaux de Petri



Algèbre des diodes



Réseaux de Petri

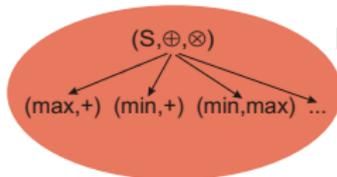


Programmation linéaire

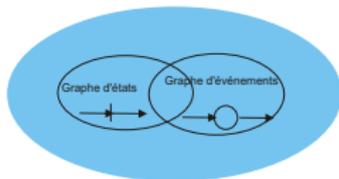
Modélisation élégante
Nombreux modèles graphiques et
domaines d'applications

Thématique : algèbre des dioïdes

Théorie cohérente
Analogies entre dioïdes
Formalisme algébrique clarifiant les notions



Algèbre des dioïdes



Réseaux de Petri

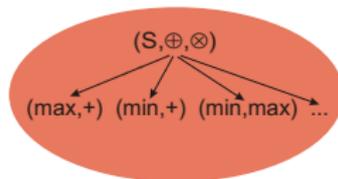


Programmation linéaire

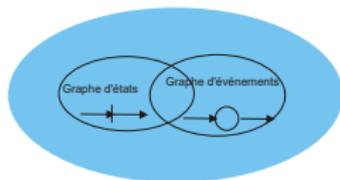
Modélisation élégante
Nombreux modèles graphiques et
domaines d'applications

Thématique : programmation linéaire

Théorie cohérente
Analogies entre dioïdes
Formalisme algébrique clarifiant les notions



Algèbre des dioïdes



Réseaux de Petri

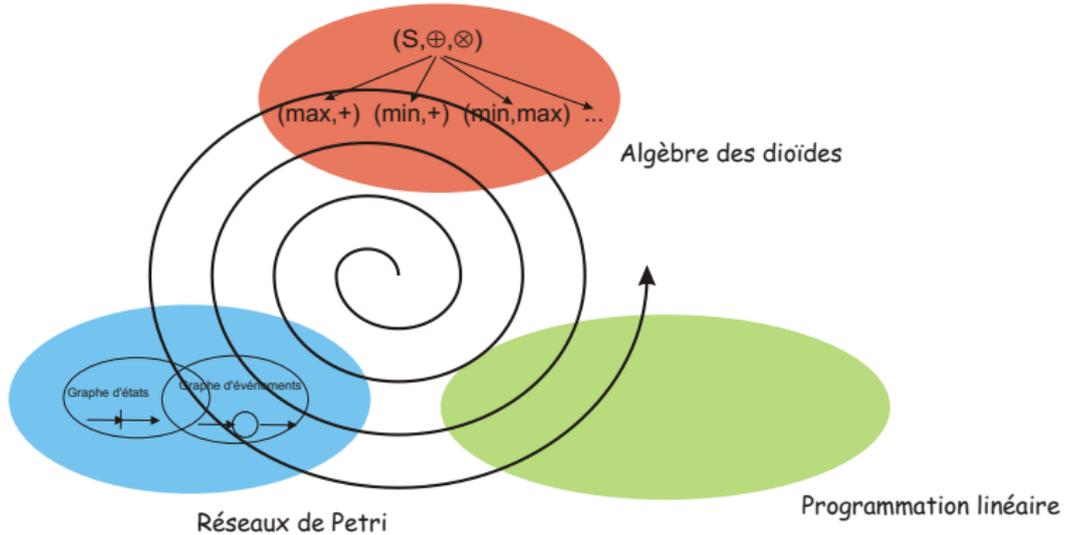
Modélisation élégante
Nombreux modèles graphiques et
domaines d'applications



Programmation linéaire

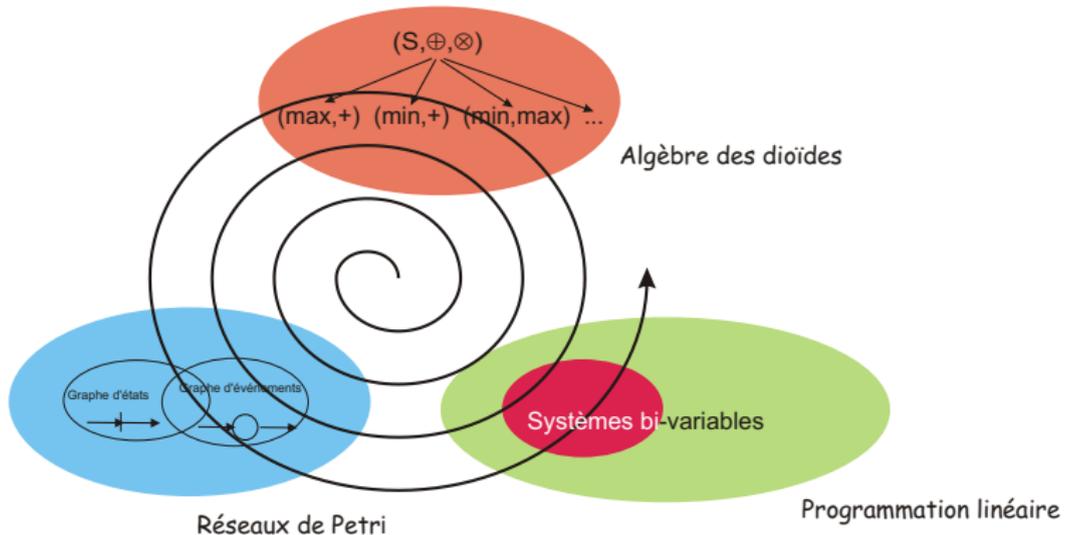
Théorie séculaire
Nombreux outils théoriques
et algorithmes

Motivation : lier ces thématiques et favoriser le transfert de connaissances et de savoir-faire.



Approfondir cette inclusion dans la programmation linéaire

- Une communauté informatique orientée sur la résolution de systèmes bi-variables
- Nombreux algorithmes polynômiaux au sens fort et faible.



Différents problèmes avec différentes dimensions

La complexité augmente avec :

- le nombre de variables par relation ;
- la complexité du critère.

Nombre de variables → Problème ↓	2 variables. + syst. monotone	2 var.	3 var. + hypoth.	≥ 3
c quelconque	(4)			Polyn. faible
$c > 0$ ou $c < 0$	Polyn. fort (2)	(5)		Polyn. faible
Solution arbitraire	Polyn. fort (1)	Polyn. fort (3)	(6)	Polyn. faible

Différents problèmes avec différentes dimensions

La complexité augmente avec :

- le nombre de variables par relation ;
- la complexité du critère.

Nombre de variables Problème	2 variables. + syst. monotone	2 var.	3 var. + hypoth.	≥ 3
c quelconque	(4)			Polyn. faible
$c > 0$ ou $c < 0$	Polyn. fort (2)	(5)		Polyn. faible
Solution arbitraire	Polyn. fort (1)	Polyn. fort (3)	(6)	Polyn. faible

Travailler sur la diagonale.

Point de vue inverse : transfert mathématique

Chercher des correspondances entre des théories existantes et des problèmes semi-théoriques avec applications pratiques.

Garder les outils du type treillis, un intérêt étant de disposer d'algorithmes efficaces

Construire cette caractéristique quand le système ne l'a pas.

Techniques de construction :

- Restreindre l'espace jusqu'au inf(resp., sup)-treillis désiré.
- Changer d'espace avec un changement de variables.

Technique de changement d'espace : illustration

Transfert mathématique d'un travail de Dorit S. Hochbaum (Berkeley) en PL.

Soit un problème de commande suivant. On désire avoir $y \leq z$ où z est la sortie désirée mais le problème peut être sans solution en raison d'une condition initiale finie défavorable x_0 d'où $y \not\leq z$.

- On remplace $y \leq z$ par $y + \alpha \leq z$ et on désire maximiser α .

Si $\alpha \geq 0$, on maximise l'avance par rapport à z . ($y \leq z$ est garanti).

Si $\alpha < 0$, le retard par rapport à z est minimisé.

- Maximiser la commande.

Problème :

$\max(f(\alpha) + \mu.g(u))$ pour un graphe d'événements temporisé partant d'une condition initiale $x(0) \geq x_0$ et avec $y + \alpha \leq z$.

- Cependant, le problème n'est pas sup-monotone et on ne peut directement appliquer les concepts courants.

Solution arbitraire.

Dédoublage des variables et du système :

$x \leftrightarrow (x^-, x^+)$, $u \leftrightarrow (u^-, u^+)$, $y \leftrightarrow (y^-, y^+)$ et $\alpha \leftrightarrow (\alpha^-, \alpha^+)$.

$$x(k) = \frac{x^+(k) - x^-(k)}{2} \quad (9)$$

Temporisation : $x - y \leq a$

avec $a = -T$

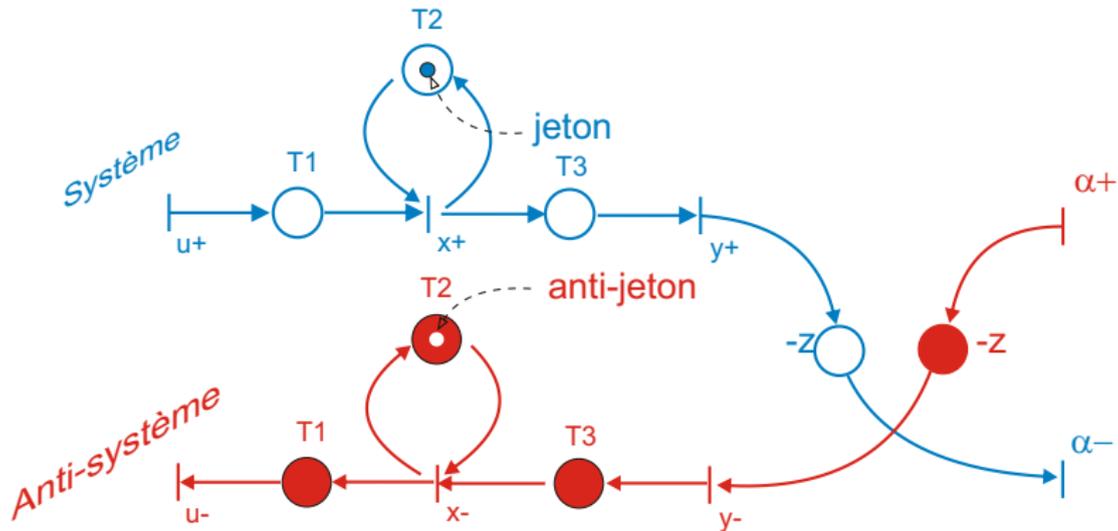
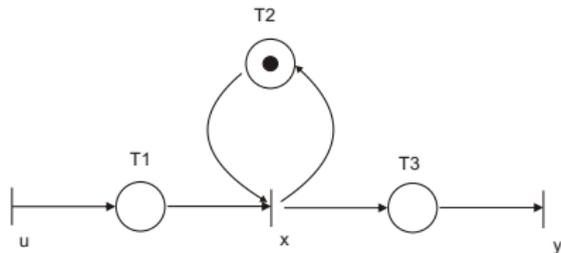
$$\leftrightarrow \begin{cases} x^+ - y^+ \leq a \\ -x^- + y^- \leq a \end{cases}$$

Relation inhabituelle :

$$x + y \leq a \leftrightarrow \begin{cases} x^+ - y^- \leq a \\ -x^- + y^+ \leq a \end{cases}$$

Condition initiale a :

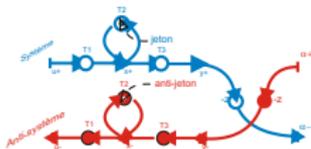
$$a \leq x \leftrightarrow \begin{cases} x^- - y^+ \leq -2.a \end{cases}$$



Problème initial \leftrightarrow un système et un anti-système
interconnectés par une relation sur la condition initiale

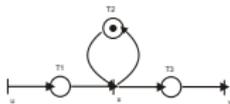
$$x^+(0) \geq x^-(0) + 2.x_0.$$

Approche globale



Algorithme spécialisé
(polynôme au sens fort)

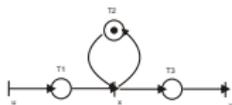
Solution extrémale



$$x(k) = \frac{x^+(k) - x^-(k)}{2}$$

Solution arbitraire

Critère complexe



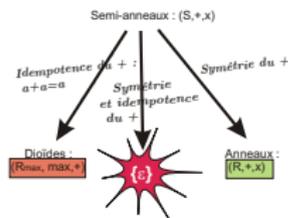
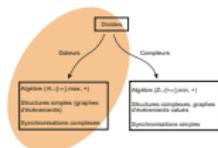
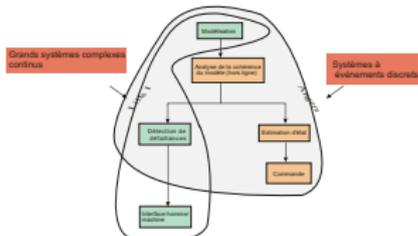
Algorithme générique
(polynôme au sens faible)

Solution optimale

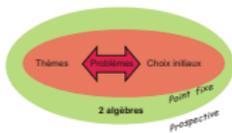


Conclusion : résumé

- Thèmes, contraintes scientifiques.



- Thématiques, prospective.



Nombre de variables Problème	2 variables, + sym. monotonie	2 var.	3 var., hypoth. 2/3
1 quelconque	Probl. (R, Z)		Probl. linéaire
inf ou ordé	Probl. (R, Z)		Probl. linéaire
Solution arbitraire	Probl. (R, Z)	Probl. (R, Z)	Probl. linéaire

- Des choix de perspectives sont à faire →
La démarche inverse basée sur le transfert mathématique semble un juste milieu.