

Estimation d'état par l'étoile de Kleene

Philippe DECLERCK¹, Mohamed Khalid DIDI ALAOU¹ Marc BOURCERIE¹

¹LISA EA-2168, ISTIA, Université d'Angers
62 avenue Notre-Dame du Lac, 49000 Angers FRANCE

philippe.declerck@istia.univ-angers.fr, mohamed.didi.alaoui@istia.univ-angers.fr, Marc.Bourceri@univ-angers.fr
<http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/>

Résumé— Les systèmes à événements discrets sont soumis à des perturbations telles les défaillances qui interrompent le fonctionnement habituel du système et réduisent les capacités de prédiction et de commande de la future évolution du système. Sous l'hypothèse d'un fonctionnement normal, les processus modélisés par un graphe d'événements temporisés peuvent être représentés par un modèle linéaire dans l'algèbre $(\max, +)$. La connaissance du modèle et des conditions initiales nous permettent de caractériser le vecteur d'état par une itération directe de l'équation d'état mais les perturbations peuvent générer une mauvaise détermination de ce vecteur et ainsi d'empêcher le contrôle du processus. L'objectif de ce papier est de proposer une estimation d'état en utilisant, non la théorie de la résiduation mais l'étoile de Kleene.

Mots-clés— Système dynamique à événements discrets, Perturbation, Estimation, Prédiction, Commande.

I. INTRODUCTION

Un grand nombre de processus peuvent être décrits par un modèle dynamique à événements discrets comme les ateliers flexibles, les systèmes multiprocesseurs ou les réseaux de transport. Ils se caractérisent en particulier par le séquençement et la répétition de tâches identiques. Parmi les différents formalismes, les réseaux de Petri jouent un rôle important, présentant la caractéristique d'être un outil à la fois graphique et mathématique de modélisation. Intégrant explicitement le temps, la classe des graphes d'événements temporisés joue un rôle important en raison de son comportement déterministe. L'évolution du système est décrite par des équations linéaires définies sur un dioïde. L'interprétation de chaque variable est par exemple, pour les dateurs dans l'algèbre $(\max, +)$ que chaque variable $x_i(k)$ représente la date du k ème tir de la transition x_i ; \oplus correspond à l'opération maximum tandis que l'addition usuelle joue le rôle de la multiplication qui est notée \otimes . Dans le dioïde $(\max, +)$, le modèle peut être représenté par une forme d'état classique où le contrôle u , la sortie y et l'état x sont définis sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

$$\begin{aligned}x(k) &= A \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k) \\y(k) &= C \otimes x(k)\end{aligned}$$

Par exemple, le tir de la transition u_i dans le système de production signifie qu'un objet est donné au processus pour être transformé. Le tir de la transition y_i signifie que la fabrication d'un objet vient d'être terminée.

Supposons que certains événements puissent être désignés comme contrôlables, ou en d'autres termes que le tir des transitions correspondantes peut être retardé jusqu'à une certaine date notée $u_i(k)$ ceci par un système de supervision. Supposons que nous désirions ralentir le système de manière qu'aucun événement ne puisse arriver plus tard qu'une séquence de dates Z . Il peut être prouvé

que, pour le système pour lequel les équations du type dateur donnent la solution minimale (solution au plus tôt), la plus grande solution (solution au plus tard) est donnée explicitement par les équations récursives appelées "backward" où le co-vecteur joue le rôle du vecteur d'état.

Les équations d'état et les équations récursives donnent respectivement les dates au plus tôt et au plus tard des tâches. La différence entre le co-état et l'état représente le temps disponible pour le tir des transitions. L'existence d'une différence négative empêche le respect des dates désirées. Cette approche exige donc la connaissance des valeurs du vecteur d'état. La connaissance des conditions initiales et du système nous permettent de caractériser le vecteur d'état par une itération directe de l'équation d'état. Cependant, cette approche doit partir d'un état connu et ignore les inévitables erreurs de modélisation, produites par les perturbations suivantes :

- la nature physique mais aussi humaine du processus entraîne une variation des temporisations.

- le processus est soumis à des défaillances qui doivent être traitées et qui sont donc également à l'origine de variations des temporisations. Les principales étapes de la surveillance sont la détection, l'isolation, le diagnostic et la reconfiguration.

- un des rôles de la maintenance est de prévenir les pannes (maintenance prédictive). Cette opération se traduit également par une perturbation de la production.

Ces perturbations peuvent être qualifiées d'internes par opposition aux perturbations externes comme les variations de consignes ou de l'approvisionnement du système en produits et pièces. Ces perturbations internes produisent des variations du modèle ou même des ruptures de la description du modèle ce qui peut être à l'origine d'une mauvaise détermination du vecteur d'état. Replacé dans un contexte général, le problème est :

- d'estimer les valeurs passées de l'état à partir des valeurs connues de l'entrée et de la sortie, ce qui est l'objet de cette étude

- de calculer les dates au plus tard des tirs des transitions d'entrée de manière que les tirs des sorties arrivent au plus tard avant les dates désirées

- de prédire la future évolution de la sortie et de vérifier l'optimum de la commande.

Le modèle est supposé connu et invariant à partir d'un numéro d'événement noté k_s . L'équation d'état ou une forme analogue est donc utilisable pour $k \geq k_s$.

Le papier est structuré de la manière suivante : nous donnons d'abord, les notations et quelques résultats déjà établis [BACCE 92] ; la seconde partie concerne l'estima-

tion à partir de l'étoile de Kleene.

II. PRÉLIMINAIRES

Un monoïde est un couple (S, \oplus) où l'opération \oplus est associative et présente un élément neutre. Un semi-anneau S est un triplet (S, \oplus, \otimes) où (S, \oplus) et (S, \otimes) sont des monoïdes, \oplus est commutatif, \otimes est distributif relativement à \oplus et l'élément zéro de \oplus est l'élément absorbant de \otimes . Un dioïde D est un semi-anneau idempotent. Remarquons que, contrairement aux structures de groupe et d'anneau, le monoïde et le demi-anneau n'ont pas de propriété de symétrie sur S .

L'ensemble $\mathfrak{R} \cup \{-\infty\}$ muni de l'opération maximum notée \oplus et de l'addition notée \otimes est habituellement appelé algèbre $(\max, +)$ et est un exemple de dioïde. Nous avons : $\mathfrak{R}_{max} = (\mathfrak{R} \cup \{-\infty\}, \oplus, \otimes)$ avec

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max(a, b); \varepsilon = -\infty \text{ est l'élément neutre pour } \oplus \\ a \otimes b &= a + b; e = 0 \text{ est l'élément identité de } \otimes \\ a \oplus a &= a \text{ (idempotence de } \oplus) \\ a \otimes \varepsilon &= \varepsilon \otimes a = \varepsilon \text{ (élément absorbant } \varepsilon) \end{aligned}$$

Par la suite $a \otimes b$ pourra être noté $a.b$ ou simplement ab . On rappelle que dans la notation $(\max, +)$, $[C_{i,j}]^{\otimes(-1)} = -[C_{i,j}]$ avec le signe moins ordinaire.

La somme et le produit des matrices opèrent comme dans l'algèbre usuel :

$$\begin{aligned} (A \oplus B)_{ij} &= A_{ij} \oplus B_{ij} \\ (A \otimes B)_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj} \end{aligned}$$

L'étoile de Kleene est définie de la manière suivante : $A^* = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} A^i$

Un graphe associé à une matrice carrée A est déduit de cette matrice en associant

- un sommet i à la colonne i et la ligne i
- un arc du sommet j vers le sommet i si $A_{ij} \neq \varepsilon$.

thorme[Bacce 92. Théorème 3.17]

Soit une matrice A dont tous les circuits du graphe associé ont un poids **strictement** négatif. L'unique solution de $x = A \otimes x \oplus B$ est donnée par $A^* \otimes B$.

III. MÉTHODE

A. Objectif

L'objectif est de trouver la borne maximale de $x(k)$ pour k allant de k_s à k_0 sachant que la commande $u(k)$ et la sortie sont connues sur le même horizon.

Le modèle est supposé connu sur le même horizon d'observation.

Ce problème d'estimation est ainsi différent de celui de la synthèse de commande où la commande et la sortie sont des données inconnues.

B. Principe

A partir du graphe d'événements, on construit dans un premier temps un nouveau réseau de Petri tel que chaque place contenant n jetons avec n strictement supérieur à 1 soit développée sous forme d'une chaîne de n places contenant chacune un jeton. Ce nouveau graphe peut être décrit par les équations ci-dessous.

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k) \\ y(k) &= C \otimes x(k) \end{aligned}$$

L'élément $[A_0]_{ij}$ (respectivement $[A_1]_{ij}$) représente la temporisation de la place sans jeton (respectivement : avec un jeton) formant le lien entre la transition x_j et la transition x_i . L'élément $[B]_{ij}$ (respectivement : $[C]_{ij}$) représente la temporisation de la place sans jeton formant le lien entre l'entrée u_j et la transition x_i (respectivement : entre la transition x_j et la sortie y_i).

Sous la condition que le graphe d'événements ne présente pas de circuit sans jeton, le système peut se réduire à une forme d'état classique en utilisant l'étoile de A_0 . On obtient $x(k) = A_0^* \otimes A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_0^* \otimes B.u(k)$

Cette dernière forme n'étant pas indispensable, nous utiliserons la forme qui la précède et dont l'intérêt est que chaque composante $[A_0]_{ij}$, $[A_1]_{ij}$, $[B]_{ij}$ ou $[C]_{ij}$ représente exactement une temporisation du graphe et non une expression fonction de temporisations pour la forme d'état. Ce modèle est donc plus proche du graphe d'événement. La démarche qui suit peut naturellement être appliquée indifféremment aux deux types de modèle moyennant une modification des matrices et des équations.

Nous adoptons ici une démarche itérative qui nous permettra de limiter le nombre de variables et d'équations à traiter simultanément. Ainsi, nous allons résoudre dans un premier temps le système précédent pour $k = k_0$ ce qui va nous permettre de donner une borne supérieure pour $x(k_0)$ et $x(k_0 - 1)$. Nous notons respectivement $x^+(k \mid [k, k_0])$ et $x^+(k - 1 \mid [k, k_0])$ la borne supérieure de $x(k)$ et $x(k - 1)$ connaissant l'entrée et la sortie sur l'horizon $[k, k_0]$. Remarquons que ces données sont des bornes supérieures comme le co-état des équations du type "backward" mais répondent à un objectif différent présenté ci-dessus.

Au rang suivant $k = k_0 - 1$, on a $x(k_0 - 1) = A_0.x(k_0 - 1) \oplus A_1.x(k_0 - 2) \oplus B.u(k_0 - 1)$

$$y(k_0 - 1) = C.x(k_0 - 1)$$

Comme il faut tenir compte des calculs précédents et en particulier de la borne supérieure de $x(k_0 - 1)$ déjà calculée, on doit donc ajouter l'inégalité suivante dans le système à résoudre. $x(k_0 - 1) \leq x^+(k_0 - 1 \mid [k_0, k_0])$.

On peut donc répéter la procédure de manière itérative et décroissante jusque k_s . La démarche est donc la suivante :

- Transformer le système à résoudre en un ensemble d'inéquations de type contrainte bornant par dessus la valeur d'une seule variable (CBD) qui sera définie dans la partie suivante.
- Résoudre le système en calculant une borne supérieure pour $x(k)$ et $x(k - 1)$ par l'étoile de Kleene.
- Recommencer l'étape précédente en décrémentant k d'une unité et en intégrant le résultat précédent.

C. Obtention du système d'inéquations

$$\begin{aligned} x(k) &= A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus B \otimes u(k) \\ y(k) &= C \otimes x(k) \end{aligned}$$

Ces équations peuvent être réécrites de la manière suivante.

- Pour i allant de 1 à n (n dimension de l'état, q de l'entrée),

$$x_i(k) = \bigoplus_{j=1}^n [A_0]_{i,j} \otimes x_j(k) \oplus \bigoplus_{j=1}^n [A_1]_{i,j} \otimes x_j(k-1) \oplus \bigoplus_{j=1}^q B_{i,j} \otimes u_j(k)$$

- Pour i allant de 1 à m (m dimension de la sortie)

$$y_i(k) = \bigoplus_{j=1}^n C_{i,j} \otimes x_j(k)$$

A partir de ce système de $n + m$ équations et n variables $x_i(k)$, ceci pour k donné, nous allons construire un système d'inégalités particulières que nous définissons ci-dessous.

Définition 1. Une contrainte bornant par dessus ou CBD présente la forme suivante $x_{\tau(i)} \leq \bigoplus_{j=1}^s A_{i,j} x_j$ où $\tau(i)$ est utilisé pour désigner la variable du terme gauche de cette i ème inégalité.

Remarque. La variable $x_{\tau(i)}$ peut être le terme gauche de plusieurs CBD et donc on peut avoir $x_{\tau(i)} = x_{\tau(j)}$ avec $i \neq j$

- Considérons maintenant la première équation. Dans le problème posé, le terme $[\bigoplus_{j=1}^q B_{i,j} \otimes u_j(k)]$ représente une constante. Pour ramener le système à une forme CBD, nous introduisons une nouvelle variable x_0 qui représente l'élément neutre e pour l'opération \otimes et le zéro en notation usuelle. Pour i allant de 1 à n (n est la dimension de l'état et q de l'entrée),

$$x_i(k) \leq \bigoplus_{j=1}^n [A_0]_{i,j} \otimes x_j(k) \oplus \bigoplus_{j=1}^n [A_1]_{i,j} \otimes x_j(k-1) \oplus [\bigoplus_{j=1}^q B_{i,j} \otimes u_j(k)] \otimes x_0 \text{ et}$$

pour chaque j allant de 1 à n , $[A_0]_{i,j} \otimes x_j(k) \leq x_i(k)$ ou $x_j(k) \leq [A_0]_{i,j}^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$ et également $x_j(k-1) \leq [A_1]_{i,j}^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$

Pour le dernier terme de droite, $[\bigoplus_{j=1}^q B_{i,j} \otimes u_j(k)] \otimes x_0 \leq x_i(k)$ ou $x_0 \leq [\bigoplus_{j=1}^q [B_{i,j}] \otimes u_j(k)]^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$

- Considérons la seconde équation. Pour i allant de 1 à m (m est la dimension de la sortie), elle est équivalente à $y_i(k) \leq \bigoplus_{j=1}^n C_{i,j} \otimes x_j(k)$ et $\bigoplus_{j=1}^n C_{i,j} \otimes x_j(k) \leq y_i(k)$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, nous introduisons la variable x_0 dans les inégalités.

$$y_i(k) \otimes x_0 \leq \bigoplus_{j=1}^n C_{i,j} \otimes x_j(k) \text{ ou } x_0 \leq [y_i(k)]^{-1} (\bigoplus_{j=1}^n C_{i,j} \otimes x_j(k))$$

et pour chaque j allant de 1 à n , $C_{i,j} \otimes x_j(k) \leq y_i(k) \otimes x_0$ ou $x_j(k) \leq [C_{i,j}]^{\otimes(-1)} \otimes y_i(k) \otimes x_0$

En résumé, le système peut être ramené au système CBD suivant et équivalent si $x_0 = e$:

- $m(1 + n)$ relations état/sortie
 $(\forall i \in [1, m]), x_0 \leq [y_i(k)]^{-1} (\bigoplus_{j=1}^n C_{i,j} \otimes x_j(k))$
- $(\forall i \in [1, m])(\forall j \in [1, n]), x_j(k) \leq [C_{i,j}]^{\otimes(-1)} \otimes y_i(k) \otimes x_0$
- $2n(1 + n)$ relations état/entrée
 $(\forall i \in [1, n]), x_i(k) \leq \bigoplus_{j=1}^n [A_0]_{i,j} \otimes x_j(k) \oplus \bigoplus_{j=1}^n [A_1]_{i,j} \otimes x_j(k-1) \oplus [\bigoplus_{j=1}^q B_{i,j} \otimes u_j(k)] \otimes x_0$
- $(\forall i \in [1, n]) x_0 \leq [\bigoplus_{j=1}^q B_{i,j} \otimes u_j(k)]^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$
- $(\forall i \in [1, n]) (\forall j \in [1, n]), x_j(k) \leq [A_0]_{i,j}^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$ et $x_j(k-1) \leq [A_1]_{i,j}^{\otimes(-1)} \otimes x_i(k)$

Nous ajoutons d'autre part, les n relations d'itération afin de tenir compte du pas précédent.

$$(\forall k < k_0) (\forall i \in [1, n]) [x(k)]_i \leq [x^+(k | [k+1, k_0])]_i \otimes x_0$$

Ce système compte au plus $(1 + n) \cdot (m + 2n) + n$ inégalités de type CBD pour $2 \cdot n + 1$ variables, x_0 étant une nouvelle variable ajoutée au système. Lorsqu'elle prendra la valeur zéro, la solution maximale du système sera trouvée. Pour faciliter la lecture du document, nous posons le nombre d'inégalités égal à r et le nombre de variables x_0 non comprise, égal à s . Le système à résoudre est donc un système de r inégalités de type CBD ayant $s + 1$ variables.

D. Résolution par l'étoile de Kleene

Exploitant l'étoile de Kleene, la technique de résolution de E. Walkup et G. Borriello permet de calculer la plus grande solution des systèmes d'équations et d'inéquations pouvant se mettre sous la forme d'un ensemble d'inéquations du type CBD. Elle peut résoudre des équations (max,+) linéaires de la forme $A \otimes x \oplus B = C \otimes x \oplus D$, des inéquations courantes du type $Ax \leq B$ et faire de l'optimisation de fonctions sous contraintes. Utilisant l'opérateur bien connu de l'étoile de Kleene, cette approche naturelle est plus simple et plus efficace que l'approche de S. Gaubert, qui présente des analogies avec la règle de Cramer : en effet, la résolution d'un système rectangulaire de s variables est exigeante sous le point de vue des calculs car elle exige la résolution de tous les systèmes carrés de dimension $s-1$. Cette démarche exploite une symétrisation moins naturelle que celle de la symétrisation classique qui permet de passer des entiers naturels aux entiers relatifs. A l'opposé, la solution apparaît dans l'approche Walkup-Borriello à la fin de la décroissance d'une borne supérieure avec un nombre de pas fini. Remarquons que cette approche ne traite pas les formes de type polynomial (max,+) comme l'algorithme relatif au problème ELCP (problème linéaire complémentaire étendu) de Bart de Schutter qui généralise le problème linéaire complémentaire en utilisant l'algèbre usuelle. Cependant, cette dernière approche ne traite pas les équations du type $A \otimes x \oplus B = C \otimes x \oplus D$ et est NP-complet. Les approches ELCP et Walkup-Borriello partagent le fait d'avoir eu une idée originale pour traiter les égalités des équations (max,+) tout en proposant des solutions différentes. Les grandes lignes de l'approche Walkup-Borriello dont une description détaillée se trouve dans [WALK 98], sont données ci-dessous.

D.1 Technique

Pour k donné, la technique comporte trois étapes :

- Choisir un sous-ensemble particulier de contraintes CBD

- Appliquer l'étoile de Kleene pour calculer la solution maximale.

- Utiliser la solution précédente pour guider le choix de la nouvelle contrainte et ainsi minimiser la solution maximale.

Les deux étapes précédentes sont répétées jusqu'à la convergence vers une solution vérifiant si elle existe, toutes les contraintes.

D.2 Résolution du sous-ensemble bornant

Les variables sont réorganisées telles que x_0 soit la première variable. La solution maximale sera trouvée quand $x_0 = 0$.

Définition 2. Un sous-ensemble ciblant d'un ensemble de contraintes sur $s + 1$ variables est un ensemble composé de s CBD tel que chaque variable x_i différente de x_0 est couplée avec exactement une CBD.

L'obtention matricielle de ce sous-système ciblant se fait de la manière suivante. Si on remarque que $a \leq b$ est équivalent à $a \oplus b = b$, les r inéquations $x_{\tau(i)} \leq \bigoplus_{j=0}^s A_{i,j} x_j$ sont équivalentes à $x_{\tau(i)} \oplus \bigoplus_{j=0}^s A_{i,j} x_j =$

IV. EXEMPLE

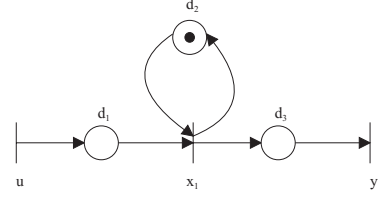


Fig. 1. Un système représenté par un graphe d'événements temporisé

$\bigoplus_{j=0}^s A_{i,j} x_j$. On obtient alors la forme matricielle $(J \oplus A) \otimes x = A \otimes x$ avec J une matrice booléenne $r.(s+1)$ dont les entrées sont égales à e ou ε . Pour choisir s CBD parmi r , il suffit alors de multiplier par une matrice booléenne P de dimensions $s.r$ telle que chaque ligne contienne exactement un e et ε ailleurs. Pour pouvoir appliquer l'étoile de Kleene, il est cependant nécessaire que la matrice $P.A$ soit carrée. La concaténation de P et d'une ligne contenant uniquement des éléments ε permet d'obtenir une matrice P' de dimensions $(s+1).r$ telle que $P' \otimes J$ soit une matrice identité $= E'$ de dimensions $(s+1).(s+1)$ sauf l'élément $(E')_{1,1} = \varepsilon$. La forme obtenue est $(P'.(J \oplus A)) \otimes x = (P'.A) \otimes x$ avec une ligne supérieure de ε . La variable x_0 est donc couplée avec aucune inégalité.

Définition 3. Un sous-ensemble ciblant sera dit sauf si tous les circuits du graphe associé à $P'.A$ ont un poids strictement négatif.

La forme ci-dessus est résolue en considérant la forme $(P.J) \otimes x = (P.A) \otimes x$ auquel on ajoute l'égalité $x_0 = 0$ afin d'obtenir un système carré. Ce système est équivalent à $x = (P'.A) \otimes x \oplus d$ avec d un vecteur colonne dont seul le premier élément $(d)_1$ est différent de ε et est égal à e . Le théorème 1 indique que son unique solution est $(P'.A)_{i,0}^*$. Le lemme suivant déclare que cette solution est aussi la solution maximale du sous-ensemble ciblant, c'est à dire de $(P'.(J \oplus A)) \otimes x = (P'.A) \otimes x$.

Lemme. Soit un sous-ensemble ciblant sauf de CBD. Le vecteur $(l_0, l_1, \dots, l_s)^t$ où $l_i = (P'.A)_{i,0}^*$ est la solution maximale du sous-système quand $x_0 = 0$.

D.3 Résolution du système complet par itération

Comme la solution de l'étape précédente provient de la résolution d'un sous-système ciblant, il n'est pas possible de garantir qu'elle soit la solution du système complet. On peut cependant affirmer que cette solution est une borne supérieure à toute solution du système. Si la solution l du sous-système ciblant en cours n'est pas la solution du système complet, alors il existe au moins une inéquation CBD u_i qui n'est pas encore satisfaite et qui n'est pas dans le sous-ensemble ciblant. Si on remplace la contrainte couplée précédemment avec $x_{\tau(i)}$ avec la nouvelle contrainte u_i , on montre que ce nouveau système est également sauf et que sa résolution effectuée une minimisation. On obtient une nouvelle solution l' telle que, pour tout $j \neq \tau(i)$, $l_j \geq l'_j$ et $l_{\tau(i)} > l'_{\tau(i)}$.

La solution trouvée devra également vérifier les inégalités de type CBD couplées avec la variable x_0 afin que toutes les inégalités soient vérifiées. Le système est sans solution si une inégalité CBD couplée avec x_0 lui impose une valeur négative. Il est d'autre part possible de montrer que la convergence opère en un nombre fini d'étapes et qu'il existe un sous-ensemble ciblant sauf permettant l'initialisation de l'itération.

Soit le système élémentaire mono-entrée-mono-sortie décrit par le modèle suivant :

$$\begin{cases} x_1(k) = A_1 \otimes x_1(k-1) \oplus B \otimes u(k) \\ y(k) = C \otimes x_1(k) \end{cases} \text{ avec } A_1 = 2, \\ B = e \text{ et } C = 1. \text{ On prend donc } A_0 = \varepsilon.$$

La traduction des relations état/entrée et état/sortie conduit au système suivant de 6 inégalités de type CBD dont les 3 variables sont $x_0, x_1(k), x_1(k-1)$:

$$\begin{aligned} x_0 &\leq [y(k)]^{\otimes -1} \otimes C \otimes x_1(k) & (1) \\ x_1(k) &\leq [C]^{\otimes -1} \otimes y(k) \otimes x_0 & (2) \\ x_1(k) &\leq [A_1] \otimes x_1(k-1) \oplus [B \otimes u_1(k)] \otimes x_0 & (3) \\ x_0 &\leq [B \otimes u(k)]^{\otimes -1} \otimes x_1(k) & (4) \\ x_1(k-1) &\leq [A_1]^{\otimes -1} \otimes x_1(k) & (5) \\ x_1(k) &\leq x_1^+(k \mid [k+1, k_0]) \otimes x_0 \text{ pour } k < k_0 & (6) \end{aligned}$$

Dans un premier temps, nous considérons uniquement les inéquations ciblant $x_1(k)$ et $x_1(k-1)$. Nous choisissons un sous système ciblant sauf, formé par exemple des inéquations (2) et (5). Remarquons que le système (3)(5) n'est pas sauf et ne peut donc constituer un sous-système ciblant initial. Le calcul de la borne supérieure passe par la résolution des égalités suivantes.

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1(k) = [C]^{\otimes -1} \otimes y(k) \otimes x_0 \\ x_1(k-1) = [A_1]^{\otimes -1} \otimes x_1(k) \end{cases}$$

La solution du système de la forme " $x = Ax \oplus B$ " est donnée par $[A^*]_{i,1}$. On obtient $x_0 = 0$, $x_1(k) = [C]^{\otimes -1} \otimes y(k)$ et $x_1(k-1) = [A_1]^{\otimes -1} \otimes [C]^{\otimes -1} \otimes y(k)$. En remplaçant dans les inéquations relatives à $x_1(k)$ et $x_1(k-1)$, on vérifie sans difficulté leurs validités sauf pour l'inéquation (6) car on ne dispose pas de $x_1^+(k \mid [k+1, k_0])$. Sous l'hypothèse que cette dernière n'est pas vérifiée, il faudra remplacer par son égalité correspondante l'équation ciblant $x_1(k)$ (2) et effectuer une nouvelle minimisation. Enfin, les inéquations (1) et (4) ciblant x_0 devront être vérifiées pour confirmer l'existence de la solution. Appliquons ces résultats à la simulation suivante. On suppose que l'entrée et la sortie sont connues de $k_s = 2$ à $k_0 = 4$.

k	1	2	3	4
u	1	2	3	10
x	1	3	5	10
y	2	4	6	11

Pour $k = k_0 = 4$ $y(4) = 11$ et $u(4) = 10$. L'estimation donne $x_0^+(4[4, 4]) = 0$; $x_1^+(3[4, 4]) = 8$; $x_1^+(4[4, 4]) = 10$. Pour $k = 3$ $y(3) = 6$ et $u(3) = 3$. L'estimation donne $x_0^+(3[3, 4]) = 0$; $x_1^+(2[3, 4]) = 3$; $x_1^+(3[3, 4]) = 5$. Pour $k = 2$ $y(2) = 4$ et $u(2) = 2$. L'estimation donne $x_0^+(2[2, 4]) = 0$; $x_1^+(1[2, 4]) = 1$; $x_1^+(2[2, 4]) = 3$. Le résultat final est donc $x_1^+(2) = 3$; $x_1^+(3) = 5$; $x_1^+(4) = 10$.

V. CONCLUSION

Cette étude a eu pour objet le problème de la supervision sans la connaissance du vecteur d'état, cette situation étant provoquée par exemple, par la présence de perturbations. Dans cet objectif, nous avons proposé une approche d'estimation basée sur le calcul d'une borne supérieure de l'état et utilisant non la théorie de la résiduation mais l'étoile de Kleene. Cette approche permet d'obtenir cette borne de l'état en un temps fini.

Sa structure générale est d'autre part, différente de celle du filtre de Luenberger contrairement à l'estimateur présenté dans [DECL 01]. Elle permettra toutefois, tout en gardant le support mathématique strict de l'étoile de Kleene, la généralisation à des modèles plus souples (temporisations connues sur des intervalles, tir de transitions forcé,...). Cet estimateur peut d'autre part être intégré dans une approche structurée en trois volets, c'est à dire l'estimation du vecteur d'état à partir des valeurs connues de l'entrée et de la sortie, la prédiction de la future évolution de la sortie et la commande du processus.

RÉFÉRENCES

- [1] Baccelli F., Cohen G. , Olsder G.J. et Quadrat J.P., *Synchronization and linearity. An Algebra for Discrete Event Systems*, New York, Wiley, 1992.
- [2] Cohen G., Gaubert S. et Quadrat J.-P., *From first to second-order theory of linear discrete event systems*, 1st SIAC World Congress, Sydney, Australia, 18-23 July, 1993.
- [3] Declerck P., *Predictability and control synthesis in Timed Event Graphs*, Kybernetika, Academy of Sciences of the Czech Republic, vol. 35, no 1, pp. 25-38, 1999.
- [4] Declerck P., *Estimation, prediction and control in (max,+) systems*, Production Editor, IFAC Publications, Elsevier Science Ltd, The Boulevard, Langford Lane, Kidlington, Oxford, OX5 1GB, UK, 2001.
- [5] Declerck P., *Estimation, prediction and control in (max,+) systems*, 1st IFAC Symposium on System Structure and Control, workshop on max-plus algebras, Praha, 27-29 August 2001.
- [6] De Schutter Bart et Van Den Boom Ton, *Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems*, Automatica 37, pages 1049-1056, 2001.
- [7] Gaubert S., *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*, Ph. D. dissertation, Ecole des Mines de Paris, 1 Juillet, 1992.
- [8] Gondran M. , Minoux M., *Graphes et algorithmes*, Edition Eyrolles, 1995.
- [9] Ling K. V. et Lim K. W. , *Receding Horizon Recursive State Estimation*, IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 44, N° 9, September 1999.
- [10] Luenberger David G., *Observing the State of a Linear System*, IEEE Trans. on Military Electronics, vol. MIL-8, pp. 74-80, April 1964.
- [11] Luenberger David G., *Observers for Multivariable Systems*, IEEE Trans. on Automatic Control, vol. AC-II, NO.2, pp. 190-197, April 1966.
- [12] Walkup Elizabeth A., *Optimization of linear max-plus systems with application to timing analysis*, thèse de l'université de Washington, 1995.
- [13] Walkup Elizabeth A. et Borriello Gaetano, *A general linear max-plus solution technique*, dans Idempotency, éditeur Jeremy Guardena, 1998.