

Estimation des durées algébriques entre les événements d'un graphe IPERT

Iteb Ouerghi, Philippe Declerck et Jean- Louis Ferrier
LISA CNRS FRE 2656

62, avenue Notre Dame du Lac - 49000 Angers

e-mail: itebouergui@yahoo.fr [philippe.declerck, jean-louis.ferrier] @istia.univ-angers.fr

Résumé

Dans ce document, nous considérons le problème de l'estimation des durées algébriques minimales et maximales séparant des événements pour des systèmes modélisés par un graphe IPERT. Ce diagramme temporel représente des contraintes du type "max-only" avec des durées d'activité incertaines. La première méthode d'estimation proposée se base sur un dioïde d'intervalles et présente une complexité en $O(n^4)$, n étant le nombre d'événements. Nous améliorons cette approche en exploitant la décomposition des graphes acycliques en niveaux et en opérant une classification des sommets. L'algorithme correspondant présente une complexité en $O(n.m)$, avec n le nombre de sommets et m le nombre d'arcs.

Mots clés

Dioïde d'intervalles, contraintes temporelles, durée algébrique.

1 Introduction

L'analyse du comportement temporel est cruciale dans de nombreux domaines comme les systèmes de production, les réseaux de transport ou informatiques. La conception et la synthèse des circuits digitaux à grande vitesse est également un exemple de domaine important où se pose le problème de l'interface entre les composants d'un système dont l'évolution temporelle est difficile à simuler. La question est alors de déterminer si les caractéristiques temporelles des composants interconnectés satisfont les spécifications requises [Bor 92]. Dans ce document, nous considérons le cas des contraintes "max-only", le problème avec des contraintes "min-only" se résolvant de la même manière.

Le problème ci-dessus se traduit par la recherche de toutes les durées algébriques maximales $\overline{S}_{ij} = \max(t_j - t_i)$, les durées algébriques minimales sont données par $\underline{S}_{ij} = \min(t_j - t_i) = -\max(t_i - t_j) = -\overline{S}^T$, entre deux événements X_i et X_j sous le système de contraintes que nous appelons "max-only" de la forme :

$$t_j = \max_{i \in \text{pred}(j)} (t_i + \delta_{ij}).$$

où $\text{pred}(j)$ est l'ensemble des prédécesseurs immédiats de X_j , t_i est la date de l'occurrence de l'événement X_i et δ_{ij} est la durée de l'activité entre les événements X_i et X_j . Les durées des activités sont incertaines mais présentent une borne inférieure et une borne supérieure: $\underline{\delta}_{ij} \leq \delta_{ij} \leq \overline{\delta}_{ij}$. Ayant l'estimation de ces durées, nous pouvons comparer avec les spécifications requises.

Une manière de résoudre ce problème est la suivante: supposons que l'on soit certain de la date de l'occurrence d'un événement i . L'objectif est alors de déterminer les dates maximales de l'occurrence de tous les autres événements.

Sur ce problème, MacMillan et Dill [MD 92] ont proposé un algorithme basé sur la technique de propagation de contraintes et ayant une complexité en $O(n^3)$. De même, la technique de P. Girodias, E. Cerny et W.J. Older [GCO 97] se base sur l'arithmétique d'intervalles et la CLP (Constraint Logic Programming). L'algorithme correspondant présente une complexité en $O(n^4)$.

Le document est organisé selon la structure suivante: la première partie décrit le dioïde et l'arithmétique d'intervalles [M 79], [LMS 01] et [LHCJ 03]. Dans la deuxième partie, nous proposons successivement une démarche algébrique et une approche basée sur les graphes pour estimer les durées algébriques entre les événements.

La démarche est la suivante: supposons qu'on est certain de la date de l'occurrence d'un événement i . Le but est de déterminer la date maximale (respectivement minimale) de l'occurrence de tous les autres événements.

2 Dioïde et arithmétique d'intervalles

2.1 Définitions

Définition 2.1 *Un monoïde (\mathcal{M}, \oplus) est une structure algébrique, constituée d'un ensemble d'éléments*

\mathcal{M} et d'une opération \oplus avec :

- \oplus est associative.

- \mathcal{M} a un élément neutre.

Un monoïde (\mathcal{M}, \oplus) est commutatif si :

$\forall a, b \in \mathcal{M} : a \oplus b = b \oplus a$.

Définition 2.2 Un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est une structure algébrique constituée d'un ensemble d'éléments \mathcal{D} et de deux opérations \otimes et \oplus avec :

- (\mathcal{D}, \oplus) est un monoïde commutatif contenant l'élément neutre ε .

- (\mathcal{D}, \otimes) est un monoïde contenant l'élément neutre e .

- ε est absorbant pour \otimes :

$\forall a \in \mathcal{D} : a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$.

- \otimes est distributive à droite et à gauche, par rapport à \oplus :

$\forall a, b, c \in \mathcal{D} : c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$

$\forall a, b, c \in \mathcal{D} : (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.

- \oplus est idempotent :

$\forall a \in \mathcal{D} : a \oplus a = a$.

Exemple 2.1 L'algèbre $\{max, +\}$ est un dioïde $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}, max, +)$, avec les correspondances suivantes :

$$\oplus = max, \otimes = +.$$

Les éléments neutres sont $\varepsilon = -\infty$ pour "max" et $e = 0$ pour "+".

Définition 2.3 (Ensemble ordonné). Un ensemble ordonné est un ensemble S muni d'une relation d'ordre, c'est-à-dire une relation binaire qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Cette relation sera notée \leq et un ensemble ordonné sera noté (S, \leq) .

Un ensemble est dit totalement ordonné si deux éléments quelconques s et s' sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a $s \leq s'$ ou $s' \leq s$.

La notation $s < s'$ signifie $s \leq s'$ et $s \neq s'$.

2.2 Dioïde d'intervalle

Le dioïde d'intervalle est un exemple de dioïde qui sera utilisé dans ce document. Nous le présentons ci-dessous.

Définition 2.4 (Intervalle) Un intervalle fermé dans le dioïde borné ordonné \mathbb{R}_{max} , noté $\mathbf{X} = [\underline{x}, \bar{x}]$, est l'ensemble satisfaisant

$$\mathbf{X} = \{x \in \mathbb{R}_{max} | \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\},$$

où $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}_{max}$ ($\underline{x} \leq \bar{x}$) sont appelés, respectivement, la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle x .

Définition 2.5 Un intervalle pour lequel $\underline{x} = \bar{x}$ est appelé un intervalle dégénéré. Les intervalles dégénérés permettent de représenter des éléments sans incertitudes. Dans ce cas, on identifie \mathbf{X} avec ses éléments, c.-à-d. $\mathbf{X} = x$.

Définition 2.6 Soient \mathbf{X} et \mathbf{Y} deux intervalles, on dira que $\mathbf{X} \subset \mathbf{Y}$ si et seulement si $\underline{y} \leq \underline{x} \leq \bar{x} \leq \bar{y}$. En particulier, $\mathbf{X} = \mathbf{Y}$ si et seulement si $\underline{y} = \underline{x}$ et $\bar{x} = \bar{y}$.

Définition 2.7 L'addition de deux intervalles est définie par

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = [\underline{x}, \bar{x}] + [\underline{y}, \bar{y}] = [\underline{x} + \underline{y}, \bar{x} + \bar{y}].$$

Le max entre deux intervalles (la définition peut être généralisée pour n intervalles) est défini par

$$\max(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = [\max(\underline{x}, \underline{y}), \max(\bar{x}, \bar{y})].$$

Définition 2.8 (Ensemble des intervalles fermés d'un dioïde). On notera $I(\mathbb{R}_{max})$ l'ensemble des intervalles fermés du dioïde \mathbb{R}_{max} .

Proposition 1 L'ensemble $I(\mathbb{R}_{max})$ des intervalles fermés de \mathbb{R}_{max} muni des opérations $\bar{\oplus}$ et $\bar{\otimes}$ définies par

$$\mathbf{X} \bar{\oplus} \mathbf{Y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}] \text{ et } \mathbf{X} \bar{\otimes} \mathbf{Y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}],$$

$(I(\mathbb{R}_{max}), \bar{\oplus})$ admet pour élément neutre $[\varepsilon, \varepsilon]$,

$(I(\mathbb{R}_{max}), \bar{\otimes})$ admet pour élément neutre $[e, e]$,

est un dioïde.

Démonstration. Notons tout d'abord que l'ensemble $I(\mathbb{R}_{max})$ est fermé pour l'opération $\bar{\oplus}$. En effet comme $\underline{x} \leq \bar{x}$ et $\underline{y} \leq \bar{y}$, par définition de l'intervalle, on a toujours

$$\underline{x} \oplus \underline{y} \leq \bar{x} \oplus \bar{y}.$$

L'ensemble $I(\mathbb{R}_{max})$ est également fermé pour l'opération $\bar{\otimes}$: par isotonie de la multiplication, il suffit de remarquer, toujours pour $\underline{x} \leq \bar{x}$ et $\underline{y} \leq \bar{y}$, que

$$\underline{x} \otimes \underline{y} \leq \bar{x} \otimes \bar{y},$$

ce qui prouve que l'ensemble $I(\mathbb{R}_{max})$ est fermé pour les opérations $\bar{\oplus}$ et $\bar{\otimes}$. De plus, on vérifie aisément les autres propriétés des dioïdes.

■

Remarque 2.1 L'opération $\bar{\oplus}$ engendre une relation d'ordre canonique \leq dans $I(\mathbb{R}_{max})$:

$$\mathbf{X} \bar{\oplus} \mathbf{Y} \leq \mathbf{Z} \iff \mathbf{X} \leq \mathbf{Z} \iff \underline{x} \leq \underline{z} \text{ et } \bar{x} \leq \bar{z}.$$

Proposition 2 ([LMS 01]). Pour tout $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in I(\mathbb{R}_{max})$ l'intervalle $\mathbf{X} \bar{\oplus} \mathbf{Y}$ (respectivement $\mathbf{X} \bar{\otimes} \mathbf{Y}$) est le plus petit intervalle de $I(\mathbb{R}_{max})$ contenant l'ensemble $\{x \oplus y | x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\}$ (respectivement l'ensemble $\{x \otimes y | x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\}$).

Remarque 2.2 La proposition précédente est importante puisqu'elle montre que les opérations

$$\mathbf{X} \bar{\oplus} \mathbf{Y} = \{x \oplus y | x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\},$$

$$\mathbf{X} \bar{\otimes} \mathbf{Y} = \{x \otimes y | x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\}$$

peuvent être représentés en utilisant seulement les bornes des intervalles \mathbf{X} et \mathbf{Y} .

Définition 2.9 La pseudo-inverse d'un intervalle dans $I(\mathbb{R}_{max})$ est définie par

$$-\mathbf{X} = -[\underline{x}, \bar{x}] = [-\bar{x}, -\underline{x}] = \{-x | x \in \mathbf{X}\}.$$

Proposition 3 Pour tout $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in I(\mathbb{R}_{max})$ l'intervalle $\mathbf{X} + (-\mathbf{Y})$ est le plus petit intervalle de $I(\mathbb{R}_{max})$ contenant l'ensemble $\{x + (-y) | x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{Y}\}$.

Démonstration. On considère \mathbf{Z} de $I(\mathbb{R}_{max})$ le plus petit intervalle contenant l'ensemble $\{x + (-y) | x \in \mathbf{X}; y \in \mathbf{Y}\} \subset \mathbf{Z}$. On montre d'abord que $\mathbf{X} + (-\mathbf{Y}) \subset \mathbf{Z}$.

$\underline{x} \leq x \leq \bar{x}$ et $y \leq y \leq \bar{y} \Leftrightarrow -\bar{y} \leq -y \leq -y \Leftrightarrow \underline{x} + (-\bar{y}) \in \{x + (-y) | x \in \mathbf{X}; y \in \mathbf{Y}\}$ et $\bar{x} + (-\underline{y}) \in \{x + (-y) | x \in \mathbf{X}; y \in \mathbf{Y}\}$.

Ainsi, $\underline{z} \leq \underline{x} + (-\bar{y})$ et $\bar{x} + (-\underline{y}) \leq \bar{z}$.

Ce qui signifie que l'intervalle $[\underline{x} + (-\bar{y}); \bar{x} + (-\underline{y})] = \mathbf{X} + (-\mathbf{Y}) \subset \mathbf{Z}$.

Autrement dit, l'intervalle $[\underline{x} + (-\bar{y}); \bar{x} + (-\underline{y})]$ est contenu dans tout intervalle contenant l'ensemble $\{x + (-y) | x \in \mathbf{X}; y \in \mathbf{Y}\}$.

Inversement, montrons que $\mathbf{Z} \subset \mathbf{X} + (-\mathbf{Y})$. Soit $t \in \{x + (-y) | x \in \mathbf{X}; y \in \mathbf{Y}\}$ tels que $t = x + (-y)$.

Comme dans un dioïde la loi " + " est compatible avec l'ordre, on peut écrire $\underline{x} + (-\bar{y}) \leq x + (-y) \leq \bar{x} + (-\underline{y})$.

Ce qui signifie que $t \in [\underline{x} + (-\bar{y}); \bar{x} + (-\underline{y})]$, c'est-à-dire $\{x + (-y) | x \in \mathbf{X}; y \in \mathbf{Y}\} \subset [\underline{x} + (-\bar{y}); \bar{x} + (-\underline{y})]$.

On peut donc conclure que l'intervalle $\mathbf{X} + (-\mathbf{Y})$ est le plus petit intervalle contenant l'ensemble $\{x + (-y) | x \in \mathbf{X}; y \in \mathbf{Y}\}$.

■

Remarque 2.3 Cette proposition est un cas particulier du théorème 1.

Théorème 2.1 (Jaulin et al 2001) *Considérons une fonction $f : \mathbf{X}(1) \times \dots \times \mathbf{X}(n) \rightarrow \mathbf{Y}$ pour*

laquelle il existe une expression formelle utilisant des opérateurs et des fonctions. On pose $F(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ une fonction de $\mathcal{P}(\mathbf{X}(1) \times \dots \times \mathbf{X}(n))$ à $\mathcal{P}(\mathbf{Y})$. On impose que $F(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$ a la même expression que $f(\mathbf{X}(1), \dots, \mathbf{X}(n))$. Alors $f(\mathbf{X}(1), \dots, \mathbf{X}(n)) \subset F(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$,

où $f(\mathbf{X}(1), \dots, \mathbf{X}(n)) = \{f(x_1, \dots, x_n) | x_1 \in \mathbf{X}_1, \dots, x_n \in \mathbf{X}_n\}$.

De plus, si chaque x_i apparaît au plus une fois dans l'expression formelle de f , alors $f(\mathbf{X}(1), \dots, \mathbf{X}(n)) = F(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n)$.

2.3 Matrices d'intervalles [LHCJ 03]

Dans ce paragraphe on généralise les définitions et les règles précédentes sur les dioïdes d'intervalles au cas matriciel. Une matrice $m \times n$ d'intervalles est définie par

$$\mathbf{A} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} sont des éléments de $I(\mathbb{R}_{max})$. L'ensemble des matrices d'intervalles sera noté $(I(\mathbb{R}_{max}))^{m \times n}$, $(I(\mathbb{R}_{max}))^{m \times n}$ peut être muni d'une structure de dioïde. Une matrice $n \times 1$ d'intervalles est un vecteur appartenant à $(I(\mathbb{R}_{max}))^n$. Les matrices $\underline{\mathbf{A}} = \underline{a}_{ij}$ et $\overline{\mathbf{A}} = \overline{a}_{ij}$ sont appelées, respectivement, la matrice inférieure et supérieure de la matrice d'intervalles \mathbf{A} . En considérant l'ordre canonique partiel, il est possible de donner une autre descrip-

tion des matrices d'intervalles. En effet, la matrice $\mathbf{A} \in (I(\mathbb{R}_{max}))^{m \times n}$ correspond aussi à l'intervalle $[\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] = \{B \in (\mathbb{R}_{max})^{m \times n} | \underline{\mathbf{A}} \leq B \leq \overline{\mathbf{A}}\}$ si $\underline{\mathbf{A}} = \underline{a}_{ij}$ et $\overline{\mathbf{A}} = \overline{a}_{ij} \in (\mathbb{R}_{max})^{m \times n}$ et si $\mathbf{A} = a_{ij} \leq \mathbf{B} = b_{ij}$ ce qui signifie $a_{ij} \leq b_{ij}$ pour tout i, j .

Les additions \oplus et les multiplications \otimes de matrices d'intervalles s'étendent naturellement au dioïde des matrices d'intervalles.

La matrice E est l'élément neutre de l'opération \otimes dans $(I(\mathbb{R}_{max}))^{n \times n}$ avec $E_{ii} = e = [0, 0]$ et $E_{ij} = [\varepsilon, \varepsilon]$ pour $i \neq j$. La matrice ε_{ij} est l'élément neutre de l'opération \oplus dans $(I(\mathbb{R}_{max}))^{n \times n}$ avec $\varepsilon_{ij} = [\varepsilon, \varepsilon]$ pour tous les i, j .

Notons que les deux descriptions de matrices peuvent sembler différentes. En effet, pour la première description, on a $\mathbf{A} \in (I(\mathbb{R}_{max}))^{m \times n}$, alors que dans la deuxième description, $\mathbf{A} = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] \in I((\mathbb{R}_{max})^{m \times n})$. Il est possible de montrer que l'application $\mathbf{A} \in (I(\mathbb{R}_{max}))^{m \times n} \mapsto [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] \in I((\mathbb{R}_{max})^{m \times n})$ est un isomorphisme entre les dioïdes $(I(\mathbb{R}_{max}))^{m \times n}$ et $I((\mathbb{R}_{max})^{m \times n})$. Cet isomorphisme est évident en considérant la proposition 2. En effet, cette proposition implique que les additions et les multiplications de matrices d'intervalles sont réduites à l'addition et la multiplication de leurs matrices inférieures et supérieures.

3 Calcul des durées algébriques d'un graphe IPERT

3.1 Modèle IPERT

Le PERT (Program Evaluation and Research Task) est une technique d'ordonnancement qui s'attache essentiellement à mettre en évidence les relations de précedence et de succession qui existent entre les tâches dont la durée est spécifiée. Dans le modèle PERT :

- Chaque tâche ou activité est représentée par un arc, auquel on associe une valeur qui représente la durée de la tâche.

- Entre les arcs figurent des cercles appelés "sommets" ou "événements" (encore, appelés étapes) qui marquent l'aboutissement d'une ou de plusieurs tâches. Ces cercles sont numérotés afin de suivre l'ordre de succession des divers événements. Une source est un sommet qui n'a pas de prédécesseurs et un puits est un sommet qui n'a pas de successeurs.

Un modèle IPERT (Interval Program Evaluation and Research Task) est un graphe PERT dont la durée des tâches est incertaine. Ces dernières sont représentées par des intervalles fermés.

Exemple 3.1 (voir Figure 1)

X_i , avec i de 0 à 6 sont des événements. Les arcs représentent des activités de durées incertaines. X_5 synchronise X_3 et X_4 , c'est pour cette raison que

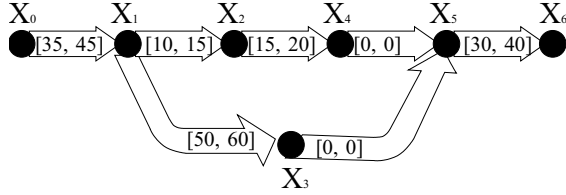


Figure 1: Exemple de système de type IPERT

les durées des activités $X_3 \rightarrow X_5$ et $X_4 \rightarrow X_5$ sont égales à $[0, 0]$.

3.2 Résolution

Dans cette section, on va proposer deux techniques de recherche des durées algébriques maximales, la première utilise l'algèbre des dioïdes, en particulier la résolution classique de l'équation de Bellman ($X = A \otimes X \oplus B$). On propose également une deuxième méthode qui se base sur la décomposition en niveaux des graphes acycliques et qui permet d'optimiser l'approche précédente en exploitant les propriétés des durées algébriques que nous définissons maintenant.

Définition 3.1 (durée algébrique)

La durée algébrique entre deux événements X_i et X_j , qui se produisent respectivement à l'instant t_i et t_j , est définie par $S_{ij} = t_j - t_i$, avec $\underline{S}_{ij} = \min(t_j - t_i) = -\max(t_i - t_j) = -\overline{S}^T$ et $t_i = \max_{k \in \text{pred}(i)} (t_k + \delta_{ki})$ où $\text{pred}(i)$ est l'ensemble des prédécesseurs immédiats de X_i et δ_{ki} est la durée incertaine de l'activité entre les événements X_k et X_i , $\underline{\delta}_{ki} \leq \delta_{ki} \leq \overline{\delta}_{ki}$.

Propriétés 3.1 Pour deux événements X_i et X_j :

(i)- La matrice d'intervalles S avec $S_{ij} = t_j - t_i$ est antisymétrique:

$$S_{ij} = -S_{ji}.$$

(ii)- $S_{ii} = [0, 0]$.

(iii)- $S_{ij} = \max_{k \in \text{pred}(j)} (S_{ik} + S_{kj})$.

Démonstration.

(i) $S_{ij} = t_j - t_i$ et $S_{ji} = t_i - t_j$
si $\underline{S}_{ij} \leq t_j - t_i \leq \overline{S}_{ij}$ alors $-\overline{S}_{ij} \leq t_i - t_j \leq -\underline{S}_{ij}$
 $\iff S_{j,i} = -S_{i,j}$. Donc S est antisymétrique.

(ii) $S_{ii} = t_i - t_i = [0, 0]$.

(iii) $S_{ij} = t_j - t_i$ avec $t_j = \max_{k \in \text{pred}(j)} (t_k + S_{kj}) \iff$
 $t_j - t_i = \max_{k \in \text{pred}(j)} (t_k + S_{kj}) - t_i = \max_{k \in \text{pred}(j)} (t_k - t_i + S_{kj})$
avec $t_k - t_i = S_{ik}$.

Donc $S_{ij} = \max_{k \in \text{pred}(j)} (S_{ik} + S_{kj})$.

■

3.2.1 Algorithme basé sur l'étoile de Kleene

Le problème de vérification d'un diagramme temporel [Bor 92] consiste à trouver le temps maximal qui sé-

pare les événements X_j d'un événement X_i initialisé à $[0, 0]$ avec les contraintes:

$$X_i = [0, 0]$$

et pour $j \neq i$

$$X_j = \max_{K \in \text{pred}(j)} (X_k + \delta_{kj}). \text{ Avec } X_j, X_k \text{ et } \delta_{kj} \in I(\mathbb{R}_{max})$$

Cela se traduit par la résolution de l'équation de Bellman ($X = A \otimes X \oplus B$) où A est la matrice d'incidence de dimension $n \times n$. Dans le dioïde $I(\mathbb{R}_{max})$ le vecteur X est le vecteur d'état de dimension n et B est un vecteur de dimension n qui nous permet d'ajouter la condition $X_i = [0, 0]$: toutes les composantes du vecteur B sont égales à $[\varepsilon, \varepsilon]$ sauf la $i^{\text{ème}}$ composante qui est égale à $[e, e]$.

Théorème 3.1 ([BCOQ 92]) Pour une matrice A carrée, si le graphe d'incidence ne contient que des circuits de poids strictement négatif alors l'équation:

$$X = A \otimes X \oplus B$$

admet une solution unique, donnée par $X = A^*B$, l'opérateur "*" est appelé étoile de Kleene.

$A^* = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} A^i$ et $A^0 = E_n$. La matrice E_n est l'élément neutre de l'opération \otimes dans $(\mathbb{R}_{max})^{n \times n}$ avec $E_{ii} = e$ et $E_{ij} = \varepsilon$ pour $i \neq j$.

Corollaire 3.1 Les graphes IPERT sont des graphes acycliques. Alors l'équation:

$$X = A \otimes X \oplus B$$

admet une solution unique, donnée par $X = A^*B$.

Le principe de l'algorithme est de construire à partir du graphe IPERT initial ayant pour source x_0 , un nouveau graphe IPERT avec pour source x_i ceci pour chaque événement x_i . On inversera pour cela tous les arcs "prédécesseurs" du sommet x_i . Tous les intervalles sans exception seront calculés à partir de la nouvelle source x_i (voir figure 2, 3) à partir de la théorie du plus long chemin.

Algorithme

Debut

Pour chaque noeud X_i

Inverser tous les arcs qui précèdent X_i et construire la matrice A correspondante.

Calculer $X = A^*B$ ($B_i = [0, 0]$ et $B_j = [\varepsilon, \varepsilon]$ pour $j \neq i$).

Les durées algébriques maximales sont données par $S_{ij} = \overline{X}_i^T$.

Fin Pour

Fin

Remarque 3.1 La complexité de l'algorithme est en $O(n^4)$ (La complexité de A^* est en $O(n^3)$).

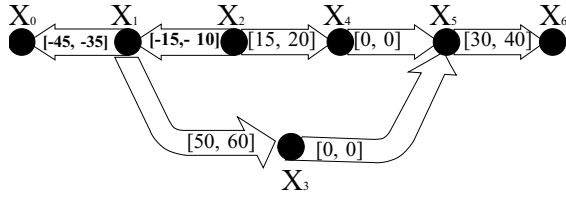


Figure 2: Graphe IPERT de la Figure 1 avec inversion d'arcs

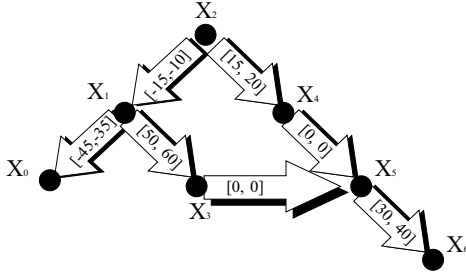


Figure 3: Mise en évidence de la nouvelle source X_2

Application de l'algorithme

Pour l'exemple de la Figure 1, on va utiliser l'algorithme précédant pour chercher les durées algébriques maximales du noeud X_2 à tous les autres noeuds.

Après inversion des arcs qui précèdent X_2 on obtient le graphe de la Figure 2.

La Figure 3 met en évidence la nouvelle source X_2 du nouveau graphe IPERT.

Le calcul de $X = A * B$ donne :

$$X = \begin{pmatrix} [-60, -45] \\ [-15, -10] \\ [0, 0] \\ [35, 50] \\ [15, 20] \\ [35, 50] \\ [65, 90] \end{pmatrix},$$

ce qui donne le vecteur \bar{S}_2 suivant : $\bar{S}_2 = \bar{X}^T = [-45 \ -10 \ 0 \ 50 \ 20 \ 50 \ 90]$.

\bar{S}_{2j} sont les durées algébriques maximales du noeud x_j au noeud $x_i, i = 2$ et j de 0 à 6.

3.2.2 Algorithme par niveau

La méthode consiste à :

- décomposer le graphe en niveaux,
- puis calculer les durées algébriques maximales entre un événement x_i et un événement x_j suivant le sens croissant des niveaux correspondants.

Décomposition en niveaux On classe les sommets de telle sorte que tout sommet a ses prédécesseurs dans les niveaux inférieurs (dont au moins un dans le niveau qui lui est immédiatement inférieur).

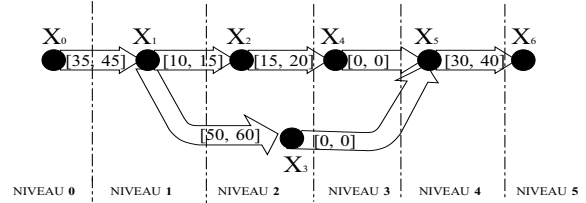


Figure 4: Décomposition en niveaux du graphe de la Figure 1

Définition 3.2 (demi-degrés intérieurs)

Le demi-degré intérieur, d'un noeud x , est le nombre d'arcs qui sont en amont de x .

Algorithme de décomposition en niveaux en $O(m)$ d'un graphe G (n sommets et m arcs). $NNiveau$ est le numéro de niveau.

$Niveau[x]$ est un tableau qui contient les niveaux de chaque événement.

$d^-(x)$ demi-degré intérieur de l'événement x .

Debut

Calculer les demi-degrés intérieurs $d^-(x)$ des sommets de G .

Mettre dans une file F les x avec $d^-(x) = 0$.

$NNiveau := 0$

Tant que F non vide

Incrémenter $NNiveau$

Pour $i := 1$ à $|F|$

Soit x le sommet de F

$Niveau[x] := NNiveau$

Pour tout successeur y de x

Décrémenter $d^-(y)$

Si $d^-(y) = 0$, mettre y dans F

Fin Pour

Enlever x de la file F

Fin Pour

Fin Tant que

FIN

Exemple 3.2 La décomposition du graphe de la Figure 1 nous donne la Figure 4.

Remarque 3.2 Pour le codage du graphe on utilise une liste de prédécesseurs puisqu'elle présente deux avantages :

- $(n + m + 1)$ mots-mémoire.
- Parcours des prédécesseurs de x : $O(d^-(x))$.

Algorithme de calcul des durées algébriques maximales en $O(m.n)$

Debut

Placer dans X les événements dans le sens croissant de leurs niveaux

Pour $i = 0$ à $n - 1$
 $S_{ii} := [0, 0]$
 Pour $j = i + 1$ à $n - 1$
 $S_{ij} := \max_{k \in \text{pred}(X[j])} (S_{ik} + S_{kj})$
 $S_{ji} := -S_{ij}$
 Fin Pour

Fin Pour

FIN

Remarque 3.3 *L'événement x_k est un prédécesseur de x_j donc par définition x_k est dans un niveau inférieur à celui de x_j . Donc $k < j$. Cela implique que S_{ik} est déjà calculé.*

Dans cet algorithme on n'utilise que les opérations "pseudo-inverse", "+" et "max". Les propositions 2 et 3 montrent que ces trois opérations conservent l'information: calculer les durées algébriques maximales en utilisant les intervalles donne le même résultat que lorsqu'on travaille avec les bornes des intervalles. Donc la méthode garantie le calcul des durées algébriques maximales.

Application de l'algorithme sur l'exemple 1

La décomposition en niveaux nous donne l'ordre suivant: $[x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6]$

La construction de la matrice S se fait de la manière suivante:

On construit la première ligne à partir de $S_{00} = [0, 0]$, $S_{ji} = -S_{ij}$ nous donne la première colonne.

A partir de la première composante de la deuxième ligne et $S_{11} = [0, 0]$ on obtient la deuxième ligne. $S_{ji} = -S_{ij}$ nous donne la deuxième colonne. Ainsi de suite.

L'application de l'algorithme sur l'exemple 1 nous donne la matrice \overline{S} ($\underline{S} = -\overline{S}^T$) suivante:

Pour une raison de gestion d'espace nous ne présentons que la matrice \overline{S} .

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_0	0	45	60	105	80	105	145
x_1	-35	0	15	60	35	60	100
x_2	-45	-10	0	50	20	50	90
x_3	-85	-50	-35	0	-15	0	40
x_4	-60	-25	-15	35	0	35	75
x_5	-85	-50	-35	0	-15	0	40
x_6	-115	-80	-65	-30	-45	-30	0

La troisième ligne de la matrice nous donne le même résultat trouvé précédemment pour les durées algébriques maximales entre les noeuds x_j , j de 0 à 6 et le noeud x_i , $i = 2$.

4 Conclusions et perspectives

Dans ce document, nous avons appliqué l'algèbre des dioïdes et en particulier des intervalles au modèle IPERT. Deux techniques de calcul des n^2 durées algébriques maximales dans un graphe acyclique avec des

égalités max-only et des durées d'activités incertaines ont été proposées. La première se base sur l'algèbre des dioïdes et l'étoile de Kleene et permet une formulation explicite de l'algorithme. Plus orientée vers la théorie des chemins, la deuxième méthode optimise la première avec pour avantages un espace mémoire nécessaire réduit avec $n + m + 1$ mots-mémoire au lieu de n^2 ainsi qu'une complexité plus faible en $O(n.m)$ au lieu de $O(n^4)$.

Des perspectives seront d'élargir la méthode pour le cas des systèmes qui contiennent des contraintes en max, min et des contraintes de délais puis d'étudier le cas des graphes cycliques ou avec des répétitions d'événements, mais contrairement à S. Chakraborty, D. L. Dill et K. Y. Yun [CDY02], on résoudra le problème en utilisant la théorie spectrale et le dioïde d'intervalles.

BIBLIOGRAPHIE

[BCOQ 92] F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J. P. Quadrat. Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems. John Wiley & Sons, 1992.

[Bor 92] G. Borriello. Formalized timing diagrams. In Proceedings of the European Design Automation Conference, March 1992.

[CDY 02] S. Chakraborty, D. L. Dill and K. Y. Yun, "Efficient Algorithms for Approximate Time Separation of Events", in Sadhana: Academy Proceedings in Engineering Sciences, The Indian Academy of Sciences Vol 27 Part 2, pp. 129-162, April 2002.

[GCO 97] P. Girodias, E. Cerny, and W. J. Older. Solving linear, min and max constraint systems using CLP based on relational interval arithmetic. Elsevier Science 1997.

[Jaulin et al 2001] Jaulin L., M. Kieffer, O. Didrit and E. Walter (2001), Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics, Springer-Verlag, ISBN: 1-85233-219-0.

[LHCJ 03b] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B., and Jaulin, L. (2003b). Interval analysis in dioid: Application to robust controller design for timed event graphs. Accepted in Automatica.

[LMS 01] Litvinov, G.-L., Maslov, V. P. and Sobolevskii, A.-N. (2001). Idempotent Interval Analysis and Optimization Problems. Reliable Computing, 7(5).

[M 79] Moore, R. (1979). Methods and Applications of Interval Analysis. SIAM Publ., Philadelphia.

[MD 92] K. MacMillan and D. Dill. Algorithms for interface timing verification. In Proceedings of the IEEE international Conference on Computer Design: VLSI in computers and Processors, 1992.

[SPO 58] Bureau of Naval Weapons Special Projects Office. PERT summary phase report. Technical report, Departement of the Navy, July 1958.