

Temps de cycle des Graphes d'Événements Temporisés et P-temporels.

Philippe DECLERCK¹, Abdelhak GUEZZI¹, Cécile GREMY-GROS²

¹LISA EA4014

Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac - 49100 Angers, France

²LASQUO EA3858

Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac - 49100 Angers, France

philippe.declerck@istia.univ-angers.fr ;

abdelhak.guezzi@etud.univ-angers.fr ; cecile.gros@univ-angers.fr

Résumé— Les dateurs sont généralement utilisés dans l'algèbre $(\max, +)$ afin de modéliser les Graphes d'Événements Temporisés et P-temporels. Dans ce document, nous utilisons les dateurs dans l'algèbre standard. Plus particulièrement, l'objectif est de caractériser le temps de cycle des Graphes d'Événements P-temporels. Deux approches définies sous la forme de problèmes d'optimisation linéaire sont proposées. La technique est appliquée à un processus de panification.

Mots-clés— Graphe d'événements, temps de cycle, taux de production, programmation linéaire.

I. INTRODUCTION

Les Graphes d'Événements Temporisés et P-temporels sont des modèles permettant d'exprimer certains processus avec des durées d'opération. Pour les Graphes d'Événements P-temporels, ces dernières sont comprises entre des bornes minimales et maximales [8]. Dans le document [4], une nouvelle modélisation utilise les dateurs, non dans l'algèbre $(\max, +)$ [1], mais dans l'algèbre standard. Des matrices d'incidences particulières ont été introduites. Considérant un comportement 1-périodique, une application d'un lemme de Farkas a permis la détermination de bornes encadrant le temps de cycle [4]. Les expressions des bornes obtenues dépendent uniquement des caractéristiques du Graphe d'Événements P-temporel. Rappelons que l'inverse du temps de cycle est le taux de production.

Dans [4], nous avons également proposé des conditions d'existence du comportement 1-périodique. De ce fait, le Graphe d'Événements P-temporel présente une trajectoire et peut être qualifié de vivant par rapport à son évolution dans le temps. L'existence du temps de cycle étant analysée, l'objectif est maintenant de proposer des techniques efficaces permettant de calculer les bornes minimale et maximale du temps de cycle. Une approche classique pour les GET se base sur l'analyse des circuits (et qui prend le maximum des rapports poids en temporisations sur poids en jetons [5] et [9]). Ce théorème met en valeur les structures fondamentales du graphe d'événements mais devant énumérer tous les circuits, n'aboutit pas à une résolution numériquement efficace pour des systèmes de taille moyenne.

Contrairement à cette approche, le point de départ de cette étude est le modèle décrivant le comportement du système. A partir du modèle algébrique, nous montrons que les temps de cycle minimal et maximal peuvent simplement être obtenus moyennant l'utilisation d'algorithmes classiques de la programmation linéaire comme le simplex. La transposition de cette étude en théorie des graphes est l'analyse des circuits non du Graphe d'Événements mais d'un graphe associé au Graphe d'Événements P-temporel, qui est défini dans [8]. Notons que la simulation ne permet pas de répondre de manière satisfaisante à cette question car les Graphes d'Événements P-temporels nécessitent une anticipation de la future évolution du système sous peine de morts de jetons et de blocages. A notre connaissance, les seuls travaux portant sur le calcul du temps de cycle des Graphes d'Événements P-temporels sont [8] et [4]. Dans ce document, nous supposons que les transitions sont contrôlables, c'est-à-dire que les dates de tir de toutes les transitions peuvent être imposées par un système de supervision.

Le document suit le plan suivant. Le Graphe d'Événements P-temporel est d'abord défini et son modèle algébrique construit. Puis, nous proposons deux approches qui permettent de déterminer le temps de cycle et les dates de tir des transitions. Deux exemples simples et une application à un processus de panification illustrent l'approche.

II. MODÈLE

Un réseau de Petri est un couple (G, M_0) , où $G = (R, V)$ est un graphe biparti avec un nombre fini de nœuds (l'ensemble V) qui est partitionné en deux ensembles disjoints de places P et de transitions TR (les transitions sont notées t tandis que les temporisations sont notées T , T^- ou T^+); R se compose de couples de la forme (p_i, x_i) et (x_i, p_i) avec $p_i \in P$ et $x_i \in TR$. Chaque place $p_l \in P$ est associée à un marquage initial (nombre initial de jetons) noté m_l . Le marquage initial M_0 est un vecteur de dimension $|P|$ dont chaque composante est m_l . On note m la plus grande composante de M_0 .

L'ensemble $\bullet p$ est l'ensemble des transitions entrant dans p et p^\bullet est l'ensemble des transitions sortant de la place $p \in P$. L'ensemble $\bullet x_i$ (respectivement, x_i^\bullet) est l'ensemble

des places amont (respectivement, aval) de $x_i \in TR$.

Dans un réseau de Petri ayant $|P|$ places et $|TR|$ transitions, la matrice d'incidence $W = [W_{ij}]$ est une matrice $|P| \cdot |TR|$ d'entiers et chaque composante de cette matrice est exprimée par $W_{ij} = W_{ij}^+ - W_{ij}^-$ où W_{ij}^+ est le poids de l'arc de la transition j vers la place i et W_{ij}^- est le poids de l'arc de la place i vers la transition j [11].

Depuis un marquage M_i , on atteint un marquage M , avec la séquence de franchissement S . Le vecteur caractéristique S de dimension $|TR|$ a pour composante d'indice j le nombre de franchissements de la transition x_j dans S . L'équation fondamentale exprimant le marquage est : $M = M_i + W.S$ avec W la matrice d'incidence.

Definition 1 *Un Réseau de Petri est un graphe d'événements si toute transition a exactement une place d'entrée et une place de sortie.*

Les réseaux de Petri P-temporels permettent la modélisation des systèmes à événements discrets avec des contraintes de temps de séjour des jetons dans les places. Compatible avec le dioid \mathbb{R}_{max} (voir[1]), nous associons à chaque place un intervalle de temps défini dans $\mathbb{R}^+ \cdot (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})$.

Chaque place $p_i \in P$ est associée à un intervalle $[T_i^-, T_i^+]$, où T_i^- est la durée minimale et T_i^+ la durée maximale.

Definition 2 *Un graphe d'événements P-temporel est défini par le couple (R, IS) où R est un graphe d'événements et la fonction $IS : P \rightarrow \mathbb{R}^+ \cdot (\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\})$ est définie par $p_i \rightarrow [T_i^-, T_i^+]$ avec $0 \leq T_i^- \leq T_i^+$*

Le jeton doit rester dans la place durant un temps de séjour au minimum T_i^- . Avant l'écoulement de cette durée, le jeton est dans un état d'indisponibilité pour tirer la transition aval. De même, la grandeur T_i^+ est le temps de séjour maximal qui ne doit pas être dépassé sous peine de la mort du jeton. Ainsi, le jeton est disponible pour tirer la transition aval dans l'intervalle $[T_i^-, T_i^+]$.

Inéquations d'un Graphe d'Événements P-temporel :

Afin de décrire le Graphe d'Événements P-temporel, nous considérons la forme dateur bien connue dans l'algèbre $(\max, +)$: chaque variable $x_i(k)$ représente la date du k -ème tir de la transition x_i . Si nous supposons un fonctionnement FIFO des places qui garantit qu'il n'y aura pas de dépassement de jeton, une numérotation des événements peut être utilisée. L'évolution peut alors être représentée par les inégalités suivantes qui décrivent les relations entre les dates de tir. Comme un Graphe d'Événements peut être considéré comme un ensemble de sous-graphes composés d'une place p_i liant une transition amont $\{t_j\} = \bullet p$ et une transition aval $\{t_i\} = p \bullet$, nous pouvons décrire le système à partir de chaque place p_i où $(j, i) = (\bullet p, p \bullet)$: $T_i^- + x_j(k - m_i) \leq x_i(k)$ ou, $x_j(k - m_i) - x_i(k) \leq -T_i^-$ avec T_i^- la borne inférieure.

Le poids 1 de $x_j(k - m_i)$ (respectivement, -1 de $x_i(k)$) est le poids de l'arc allant de la transition x_j à la place p_i (respectivement, l'arc allant de la place p_i à la transition x_i) qui est égal à W_{ij}^+ (respectivement, $-W_{ij}^-$).

De même, en utilisant la borne supérieure T_i^+ , nous avons : $x_i(k) \leq T_i^+ + x_j(k - m_i)$ ou $x_i(k) - x_j(k - m_i) \leq T_i^+$.

Le poids 1 de $x_i(k)$ et -1 de $x_j(k - m_i)$ correspond respectivement à $-W_{li}^-$ et W_{ij}^+ .

III. MODÈLE ALGÈBRIQUE MATRICIEL D'UN GRAPHE D'ÉVÉNEMENTS P-TEMPOREL

On rappelle que m est la plus grande composante de M_0 . Ci-dessous, les deux vecteurs colonne $-T^-$ et T^+ sont des vecteurs de temporisations où $[T_i^-, T_i^+]$ est l'intervalle de temps de la place p_i .

L'ensemble des inégalités précédentes qui décrivent un graphe d'événements P-temporels, peut être exprimé avec la forme symétrique suivante

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k - m) \\ x(k - m + 1) \\ \vdots \\ x(k - 1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (1)$$

avec

$$G^- = [G_m^- G_{m-1}^+ G_{m-2}^+ \cdots G_1^+ G_0^+] \text{ et } G^+ = [G_m^+ G_{m-1}^- G_{m-2}^- \cdots G_1^- G_0^-].$$

Chaque place correspond à une ligne de G^- qui contient les poids de ses arcs entrants et sortants. En particulier,

1. La matrice G_i^- contient les poids avec le signe plus, des arcs entrant des places dont le marquage initial est i pour $i \in [0, m]$.

2. De plus, la matrice G_0^- contient avec le signe moins, le poids de l'arc sortant de chaque place dont le marquage initial est nul (habituellement exprimé par $-W^-$).

On a donc $G_i^- \geq 0$ pour $i \in [1, m]$ et $G_0^- \geq -W^-$. Remarquons qu'un coefficient non nul de la matrice G_0^- peut être négatif ou positif.

Notons que chaque place présentant une temporisation supérieure infinie correspond à une contrainte $x_i(k) - x_j(k - m_i) \leq T_i^+$ avec $T_i^+ = +\infty$. N'ayant pas d'effet sur l'évolution du système, chacune de ces contraintes peut donc être retirée. Une autre possibilité est de supposer que chaque borne infinie est remplacée par une grandeur finie arbitrairement grande ce qui neutralise également la contrainte. Afin de présenter simplement l'approche, nous choisissons cette deuxième possibilité. Ainsi, on a $G^+ = -G^-$, et l'interprétation de la matrice G^+ est la même que G^- au changement de signe des coefficients près. La dimension de G^- et G^+ est égale à $|P| \cdot (m + 1) \cdot |TR|$.

Exemple : Soit le Graphe d'Événements P-temporel dans la Figure(2). L'ensemble des inégalités qui décrivent ce graphe est exprimé avec ce système d'inégalités suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k - 1) \\ x_2(k - 1) \\ x_3(k - 1) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T_1^- \\ -T_2^- \\ T_1^+ \\ T_2^+ \end{pmatrix}$$

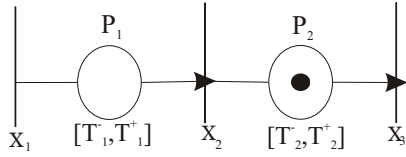


Fig. 1. Graphe d'Événements P-temporel 1

Les matrices sont donc : $G^- = [G_1^- G_0^-]$ et $G^+ = [G_1^+ G_0^+]$ où $G_1^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $G_0^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $G_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $G_0^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Notons que $-W^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ■

De la description ci-dessus sur le poids des arcs, nous pouvons déduire la relation suivante avec la matrice d'incidence W :

$$W = \sum_{i=0}^{i=m} G_i^-$$

- Remarquons que dans le cas où le graphe d'événements a initialement exactement un jeton par place, $m=1$, $G_1^- = W^+$ et $G_0^- = -W^-$.
- Dans le cas où le graphe d'événements n'a initialement aucun jeton par place, $m=0$, $G_0^- = W$.

Afin de présenter simplement les approches de ce document, le système d'inégalités (1) va être exprimé sur un horizon réduit. La technique est d'établir un modèle équivalent tel que chaque place du graphe contienne seulement un jeton au plus. L'idée est de dupliquer chaque place en plusieurs places, chacune contenant un seul jeton. Chaque place contenant au maximum m jetons, cette opération se fera au maximum m fois. La procédure est alors d'introduire la nouvelle variable X , définie comme suit :

$X(k) = (X_0(k) \cdots X_i(k) \cdots X_{m-1}(k))$ avec $X_i(k) = x(k - m + i + 1)$. Par construction, on obtient : $X_{m-1}(k) = x(k)$ et $X_i(k) = X_{i+1}(k-1)$ pour $i \in [0, m-2]$

Donc, le système (1) devient :

$$\begin{pmatrix} G_1'^- & G_0'^- \\ G_1'^+ & G_0'^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(k-1) \\ X(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

où :

$$\begin{aligned} G_1'^- &= (G_m'^- \ 0 \ \cdots \ 0), \\ G_0'^- &= (G_{m-1}'^- \ G_{m-2}'^- \ \cdots \ G_1'^- \ G_0'^-), \\ G_1'^+ &= (G_m'^+ \ 0 \ \cdots \ 0) \text{ et} \\ G_0'^+ &= (G_{m-1}'^+ \ G_{m-2}'^+ \ \cdots \ G_1'^+ \ G_0'^+). \end{aligned}$$

Il est nécessaire de compléter le système avec $2(m-1) \cdot |TR|$ relations :

$$\begin{cases} X_i(k) - X_{i+1}(k-1) \leq 0 \\ -X_i(k) + X_{i+1}(k-1) \leq 0 \end{cases} \text{ pour } i = 0 \text{ à } m-2.$$

Alors on peut écrire le système de la manière suivante :

$$\begin{pmatrix} V_{01}^- & V_{00}^- \\ V_{01}^+ & V_{00}^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(k-1) \\ X(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a $V_{00}^+ = -V_{00}^-$ et $V_{01}^+ = -V_{01}^-$, où la matrice V_{00}^- est la matrice identité tandis que V_{01}^- est une matrice de

dimension $((m-1) \cdot |TR| \cdot m)$ composée d'une sur-diagonale de coefficients -1 partant des coordonnées $(1, |TR| + 1)$.

Décrivant un Graphe d'Événements présentant initialement dans chaque place un jeton au plus, la concaténation des deux systèmes donne la forme algébrique suivante :

$$\begin{pmatrix} H^- \\ H^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(k-1) \\ X(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ 0 \\ T^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{où } H^- = \begin{pmatrix} G_1'^- & G_0'^- \\ V_{01}^- & V_{00}^- \end{pmatrix} \text{ et } H^+ = \begin{pmatrix} G_1'^+ & G_0'^+ \\ V_{01}^+ & V_{00}^+ \end{pmatrix}.$$

Remarque. La non-décroissance des trajectoires temporelles n'est pas une propriété intrinsèque du graphe d'événements temporisé. Elle peut simplement être imposée dans le modèle algébrique avec l'écriture $x(k+1) \geq x(k)$. Cela peut également être imposé dans le réseau de Petri par des boucles élémentaires sur chaque transition, la place correspondante devant présenter un jeton.

En conclusion, nous pouvons toujours nous ramener à la forme (1) avec $m = 1$: c'est le modèle algébrique que nous considérons dans la suite du document.

IV. CALCUL DU TAUX DE PRODUCTION

Problème

Dans cette section, nous désirons calculer le taux de production minimal et maximal d'un Graphe d'Événements P-temporel dont chaque place a au plus un jeton. Pour un temps de cycle λ , le système a un comportement 1-périodique qui est défini de la manière suivante. Le temps de cycle est noté λ :

$$x(k+1) = \lambda \cdot u + x(k)$$

avec $u = (1, 1, \dots, 1)^t$.

A. Approche 1

Comme chaque place a au plus un jeton, alors à partir de (1) avec $m = 1$, en remplaçant $x(k+1)$, nous obtenons

$$\begin{pmatrix} G_1^- & G_0^- \\ G_1^+ & G_0^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \cdot u + x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} (G_1^- + G_0^-) \\ (G_1^+ + G_0^+) \end{pmatrix} \cdot x + \begin{pmatrix} G_0^- \\ G_0^+ \end{pmatrix} \cdot \lambda \cdot u \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (2)$$

Si nous simplifions l'écriture avec $x(k) = x$. On obtient ainsi une formulation du type programmation linéaire de la forme : $\min \lambda$ (respectivement, $\max \lambda$) sous la contrainte de la forme $Ax \leq b$. Celle-ci généralise l'approche présentée dans [9] développée pour les graphes d'événements temporisés.

$$\begin{pmatrix} (G_1^- + G_0^-) & G_0^- \cdot u \\ (G_1^+ + G_0^+) & G_0^+ \cdot u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (3)$$

Cette écriture peut être simplifiée car $G_1^- + G_0^- = W$ et $G_1^+ + G_0^+ = -W$. D'autre part, remarquons que dans le cas où le graphe d'événements a un jeton par place initialement, $G_0^- = -W^-$ et $G_1^- = W^+$. Ainsi, $G_0^- \cdot u = -W^- \cdot u =$

$-M_0$ (soit la somme des colonnes de $-W^-$) ce qui représente le marquage initial. Ce résultat est également vrai lorsque chaque place a initialement un jeton au plus. En effet, chaque place sans jeton est représentée par une ligne de G_0^- contenant les poids de l'arc entrant 1 et de l'arc sortant -1. De même, $G_0^+.u = W^-.u = M_0$.

Alors on peut écrire (3) comme suit :

$$\begin{pmatrix} W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

On notera que chaque ligne de la contrainte contient 3 variables par inégalité : λ et 2 variables x_i . En appliquant un algorithme de la programmation linéaire, on pourra ainsi déterminer le λ optimal. Pour la bonne application de l'algorithme, il est cependant nécessaire que la solution optimale qui est un point extrême (ou une surface extrême) du polyèdre soit fini. De même, si on utilise un algorithme comme le simplex, alors tous les points extrêmes qui conduisent à la solution optimale devront être également finis. Le plus petit et le plus grand λ sont fixés par les caractéristiques du Graphe d'Événements P-temporel. Ce n'est cependant pas le cas pour l'instant pour le plus petit ou plus grand vecteur x . La solution est de borner par dessous (respectivement, par dessus) par un minorant (respectivement, majorant) pris fini le problème de minimisation (respectivement, maximisation). Le minorant de l'état x (respectivement, majorant) est noté L (respectivement, noté U). Sous condition de compatibilité du système de contraintes et qu'il existe un plus petit (respectivement, grand) temps de cycle, les systèmes suivants présentent une solution dans \mathbb{R} .

min λ sous la contrainte :

$$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -L \\ -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (4)$$

max λ sous la contrainte :

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} U \\ -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (5)$$

– Remarquons que les bornes L et U peuvent décrire des dates de tir désirées au plus tôt ou au plus tard. Les dates de tir calculées donneront des dates suivant au plus près ces limites.

– La non-décroissance des trajectoires peut être imposée dans le modèle algébrique avec l'écriture $x(k+1) \geq x(k)$ avec pour conséquence $\lambda \geq 0$. En effet, cela donne $x(k-1) - x(k) \leq 0$ et donc, $m=1$, $G_1^- = W^+ = I$, $G_0^- = -W^- = -I$ et $-T^- = 0$. On obtient $W = 0$ et $-M_0 = -u$. Ainsi,

$$\begin{pmatrix} W & -M_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \end{pmatrix}$$

se réduit à $-u \cdot \lambda \leq 0$ soit $\lambda \geq 0$.

Pour conclure, remarquons enfin que cette approche ne donne pas d'information sur la partie du système qui est à l'origine de ce plus grand temps de cycle. L'approche suivante apporte une réponse à cette question.

B. Approche 2

L'approche 1 utilise comme variables le temps de cycle et la première date de tir de chaque transition. En appliquant le principe de la dualité, nous allons nous affranchir de ces variables tout en introduisant une nouvelle variable que nous notons y^t (les raisons de cette notation seront données plus tard). Ce type d'approche a déjà été appliqué dans [2] et [5] mais pour les graphes d'événements temporisés. De plus, nous choisissons un raisonnement inverse, ne partant pas du célèbre théorème de calcul de temps de cycle à partir des circuits élémentaires. Il en résulte une démarche plus simple. Notons que la démarche [4] permet de retrouver l'expression utilisée dans ce théorème.

B.1 Forme duale

Rappelons d'abord les problèmes duaux.

Problème (P) $\min_{x \in \mathbb{R}_+^n} y.b$ sous $y.A = c$ et $y \geq 0$

et

Problème (D) $\max_{x \in \mathbb{R}^m} c.x$ sous $A.x \leq b$ avec x quelconque.

Notre problème correspond à (D) en raison de l'inégalité (4). Considérons pour simplifier la présentation la minimisation de λ . Ainsi,

$$A = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -L \\ -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

et $c = (0 \dots 0 \quad -1)$ comme

$$\min \lambda = \max(-\lambda) = \max(0 \dots 0 \quad -1) \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi le problème dual suivant (P) qui est également un problème de programmation linéaire.

$$\min (-L^t \quad -(T^-)^t \quad (T^+)^t) \cdot y^t$$

$$\text{sous } y \cdot \begin{pmatrix} -I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} = (0 \dots 0 \quad -1) \text{ avec } y \geq 0$$

On introduit la notation $X^{ad} = \{x \in \mathbb{R}^m | A.x \leq b\}$ qui désigne l'ensemble des x admissibles pour le problème dual. De même, $Y^{ad} = \{y \in \mathbb{R}_+^n | y.A = c\}$

Théorème (Chapitre 4 dans [3]) :

1. si $y \in Y^{ad}$ et $x \in X^{ad}$, alors $y.b \geq c.x$
2. si $\bar{y} \in Y^{ad}$, $\bar{x} \in X^{ad}$ et $y.b = c.x$ alors \bar{y} et \bar{x} sont optimaux respectivement pour (P) et (D) ;
3. si (P) ou (D) admet une solution optimale finie, alors il en est de même pour l'autre et les valeurs optimales associées sont égales ;
4. si (P) ou (D) admet une valeur optimale infinie, alors l'autre n'admet pas de solution.

Ces formes duales sont pleinement liées car nous pouvons appliquer le théorème de la Dualité ci-dessus, les matrices A , b et c étant dans \mathbb{R} . De plus, si dans l'approche 1, les solutions sont dans \mathbb{R} , alors l'approche 2 donnera également des solutions correspondantes finies et inversement.

Le théorème suivant fait le lien avec l'approche 1. L'approche 2 ne donne pas la date où chaque transition doit initier son premier tir, ni a priori, le temps de cycle λ mais un certain vecteur y pour l'instant, sans sens physique. L'application du théorème de la dualité va montrer que la solution optimale du problème (P) ci-dessus donne également le

temps de cycle minimal. Il en est de même pour le temps de cycle maximal. On note $b_1^t = \begin{pmatrix} -L^t & -(T^-)^t & (T^+)^t \end{pmatrix}$ et $b_2^t = \begin{pmatrix} U^t & -(T^-)^t & (T^+)^t \end{pmatrix}$ les deux vecteurs présents dans les problèmes (4) et (5). Soit $\begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}$ et y^t appartenant respectivement aux ensembles admissibles des problèmes (D) et (P) définies ci-dessus pour le problème (4) et, $\begin{pmatrix} x_{min} \\ \lambda_{min} \end{pmatrix}$ et y_{min}^t les solutions optimales correspondantes.

Symétriquement, pour le problème (5), soit $\begin{pmatrix} x_{max} \\ \lambda_{max} \end{pmatrix}$ et y_{max}^t les solutions optimales correspondantes. Alors, nous avons le résultat suivant.

Théorème

Pour les problèmes (4) et (5), nous avons respectivement $-y.b_1 \leq \lambda$ et $\lambda \leq y.b_2$ ainsi que

$$\lambda_{min} = -y_{min}.b_1 \text{ et } \lambda_{max} = y_{max}.b_2.$$

Preuve

Le point 1 du théorème de la dualité indique que :

$$y.b \geq c.x$$

d'où, pour le problème (4),

$$\begin{pmatrix} -L^t & -(T^-)^t & (T^+)^t \end{pmatrix} . y^t \geq \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} = -\lambda. \text{ De plus,}$$

les valeurs optimales associées sont égales (point 2) si les deux problèmes admettent une solution optimale finie. Le raisonnement est identique pour le problème (5).

■

B.2 Approche 2 simplifiée

Si nous posons $L = 0$ (resp., $U = 0$), nous pouvons simplifier l'approche 2. Cette hypothèse effectue une modification des premières dates de tir des transitions mais n'a pas d'effet sur le calcul des bornes du temps de cycle qui sont des constantes du système, indépendante de ces dates : l'étude dans [4] montre que le calcul des bornes ne dépend que des paramètres du Graphe d'Événements P-temporel.

On note $y^t = \begin{pmatrix} y_1^t \\ y_2^t \end{pmatrix}$ avec y_1^t de la dimension de x . Le problème (P) peut être réécrit sous la forme suivante :

$$\min \begin{pmatrix} -(T^-)^t & (T^+)^t \end{pmatrix} . y_2^t$$

sous :

$$\begin{cases} y_2 . \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} \geq 0 \\ y_2 . \begin{pmatrix} M_0 \\ -M_0 \end{pmatrix} = 1 \\ y_2 \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

Preuve. En effet, le problème (P) devient :

$$y_1 . \begin{pmatrix} -I & 0 \end{pmatrix} + y_2 . \begin{pmatrix} W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit directement que $y_2 . \begin{pmatrix} M_0 \\ -M_0 \end{pmatrix} = 1$.

Le deuxième résultat découle de $y_1 \geq 0$. ■

Ainsi, chaque composante non-nulle du vecteur y_2 va sélectionner une ligne des matrices $\begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} M_0 \\ -M_0 \end{pmatrix}$ ce qui correspond à une place et son marquage initial. Le

vecteur y_2 répondant au problème de minimisation (respectivement, maximisation) définira une structure critique du Graphe d'Événements P-temporel limitant la vitesse la plus rapide par dessous (respectivement, limitant la vitesse la plus lente par dessus) du système.

Le théorème suivant va permettre d'analyser la première relation de (6).

Théorème (Stiemke 1915, [13]). *Pour une matrice A , les cas suivants s'excluent mutuellement.*

- cas 1. $Ax = 0$, $x > 0$ a une solution x .
- cas 2. $y.A \geq 0$ et $y.A \neq 0$ a une solution y .

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix}.$$

Comme dans un graphe d'événements, chaque ligne de W a exactement un coefficient 1 et -1, il existe $x > 0$ tel que $A.x = 0$ ce qui correspond au cas 1. On peut en déduire que le graphe d'événements est "répétitif" (consistant en anglais), c'est-à-dire qu'il existe une séquence de tir et un marquage initial permettant de retrouver ce même marquage sous la condition que chaque transition soit tirée au moins une fois (voir page 567 [11]).

L'application du théorème de Stiemke entraîne que le cas 2 est sans solution : le système $y.A \geq 0$ et $y.A \neq 0$ n'a pas de solution y . D'autre part, la condition $y.A \geq 0$ dans (6) doit être vérifiée afin de pouvoir calculer le temps de cycle. La seule possibilité pour que le système du cas 2 soit sans solution est $y.A = 0$ ou sous forme développée

$$y_2 . \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = 0.$$

V. EXEMPLES

Les exemples utilisent la fonction simplex de Scilab appelée "linpro()".

A. Exemple 1

Modèle [4]

Le graphe d'événements contient deux circuits.

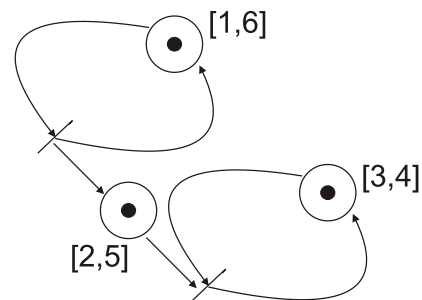


Fig. 2. Graphe d'Événements P-temporel 1

$$\begin{pmatrix} W^+ & -W^- \\ -W^+ & W^- \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

avec $x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) \end{pmatrix}^t$,

$$W^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -W^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$-T^- = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ et } T^+ = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Approche 1

Pour λ_{min} et avec $L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda_{min} = 3$.

Pour λ_{max} et avec $U = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 48 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\lambda_{max} = 4$.

Approche 2

Les valeurs correspondant aux temporisations du Graphe d'Événements sont les 6 dernières valeurs.

$$b_1^t = (0 \ 0 \ -1 \ -2 \ -3 \ 6 \ 5 \ 4)$$

$$y = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

et $\lambda_{min} = 3$.

$$b_2^t = (50 \ 50 \ -1 \ -2 \ -3 \ 6 \ 5 \ 4)$$

$$y = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1) \text{ et } \lambda_{max} = 4.$$

Les résultats numériques sont cohérents entre eux et confirme le temps de cycle calculé par l'approche présentée dans [4].

B. Exemple 2

Modèle [4]

Le graphe d'événements ne contient pas de circuit contrairement au graphe associé du Graphe d'Événements P-temporel, qui est défini dans [8].

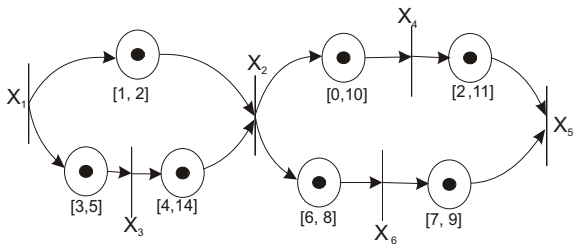


Fig. 3. Graphe d'Événements P-temporel 2

$$\begin{pmatrix} W^+ & -W^- \\ -W^+ & W^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

avec

$$x(k) = (x_1(k) \ x_2(k) \ x_3(k) \ x_4(k) \ x_5(k) \ x_6(k))^t,$$

$$W^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$W^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad -T^- = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$T^+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \\ 10 \\ 8 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Approche 1

Pour λ_{min} et avec $L = 0$,

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \end{pmatrix} = (3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 3 \ 1 \ 5)^t \text{ et } \lambda_{min} = 5.$$

Pour λ_{max} et avec $U^t = (50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50)$,

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \end{pmatrix} = (50 \ 33 \ 37 \ 25 \ 10 \ 21 \ 18)^t \text{ et}$$

$\lambda_{max} = 18$.

Approche 2

Les valeurs correspondant aux temporisations du Graphe d'Événements sont les 14 dernières valeurs.

$$b_1^t = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -3 \ -4 \ 0 \ -6 \ -2 \\ -7 \ 2 \ 5 \ 14 \ 10 \ 8 \ 11 \ 9)$$

$$y = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

et $\lambda_{min} = 5$.

$$b_2^t = (50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ -1 \ -3 \ -4 \\ 0 \ -6 \ -2 \ -7 \ 2 \ 5 \ 14 \ 10 \ 8 \ 11 \ 9)$$

$$y = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \\ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

et $\lambda_{max} = 18$.

Les résultats numériques sont cohérents entre eux et confirme le temps de cycle calculé par l'approche présentée dans [4].

C. Exemple 3

Processus [6] [7].

On considère une boulangerie semi-industrielle qui fabrique deux types de pains, Pain 1 (qualité supérieure) et Pain 2 (qualité ordinaire). Le procédé de fabrication est représenté par un Graphe d'Événements P-temporels dans la Figure (4) pour un ordonnancement arbitraire. Les deux types de pains doivent suivre la même séquence de fabrication sur les quatre machines disponibles : le pétrin (M1), la diviseuse (M2), la façonneuse (M3) et le four (M4).

$$\text{Pains 1 et 2 : } M1 \rightarrow M2 \rightarrow M3 \rightarrow M4$$

Les durées différentes entre les deux gammes ainsi qu'une opération de pointage supplémentaire (place P21) pour la gamme 2 sont à l'origine d'une qualité différente. Les opérations sont les suivantes :

Pétrissage. Le pétrissage commence par un mélange de tous les ingrédients dans un pétrin, cette opération durant de 15 à 27 minutes. Cette étape est représentée par les places P11 et P20.

Pointage. C'est la première fermentation. La pâte est laissée au repos de 10 à 30 minutes pour permettre à la levure ou le levain d'assurer une fermentation suffisante. Cette étape ne concerne que le Pain 2 et elle est représentée par $P21$ dans le graphe.

Division. Il s'agit de découper la pâte, en pâtons plus petits avec la diviseuse. Dans le graphe, cela est représenté par $P12$ pour le Pain 1 et $P22$ pour Pain 2. Deux diviseuses sont disponibles.

Détente. Les pâtons sont laissés au repos une nouvelle fois. Cette étape dure 180 minutes pour le Pain 1 ($P13$) et de 15 à 20 minutes pour Pain 2 ($P23$).

Façonnage. Chaque pâton est retravaillé pour lui donner la forme voulue. On utilise pour cela une façonneuse. Dans le graphe, cela est représenté par $P14$ pour le Pain 1 et $P24$ pour le Pain 2. Deux façonneuses sont disponibles.

Apprêt. Les pâtons sont disposés sur une toile de lin pour la deuxième fermentation. L'apprêt (repos) dépend du type de Pain et est représenté par les places $P15$ et $P25$.

Cuisson. Les pains sont enfournés à $250 - 280^\circ\text{C}$ dans le four supposé suffisamment grand. La cuisson dure de 20 à 25 minutes et est identique pour les deux gammes. Cette opération est représentée par $P16$ pour le Pain 1 et $P26$ pour le Pain 2.

Sortie des chariots. Elle est représentée par $P17$ et $P27$.

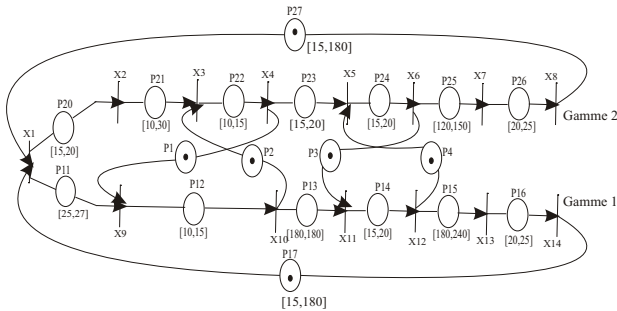


Fig. 4. système de production du pain

Modèle

Les matrices d'incidence sont omises en raison de leurs tailles importantes. Le vecteur d'état est de dimension 14 :

$$x(k) = (x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_{14}(k))^t$$

Approche 1

Pour λ_{min} et avec $L = 0$,

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 35 & 50 & 70 & 90 & 240 & 265 & 25 \\ & 35 & 215 & 230 & 410 & 430 & 445 & & \end{pmatrix}^t \text{ et } \lambda_{min} = 445.$$

Pour λ_{max} et avec $U_i = 500$,

$$\begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 75 & 105 & 120 & 140 & 160 & 310 & 335 \\ & 82 & 97 & 277 & 292 & 475 & 500 & 460 \end{pmatrix}^t$$

et $\lambda_{max} = 460$.

Approche 2

Nous utilisons l'algorithme simplifié de l'approche 2. Les 19 composantes de y correspondent aux places du Graphe d'Événements dans l'ordre suivant : $P11$ à $P17$, $P20$ à $P27$

et $P1$ à $P4$.

Pour λ_{min} ,

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & \end{pmatrix}$$

ce qui correspond aux bornes inférieures des places de la gamme 1. On obtient $\lambda_{min} = 445$.

Pour λ_{max} ,

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

ce qui correspond aux bornes supérieures des places de la gamme 2. On obtient $\lambda_{max} = 460$.

VI. Conclusion

Deux approches permettant le calcul du temps ont été proposées. Elles complètent une première approche [4] basée sur un lemme de Farkas. La première détermine les temps de cycles minimaux et maximaux ainsi que la première date de tir des transitions. L'approche est simple car elle ne nécessite que la construction du modèle algébrique et l'application d'un algorithme de la programmation linéaire. Duale de la première, la seconde permet d'identifier une structure critique pour respectivement le temps de cycle minimal et maximal, c'est à dire correspondant à la vitesse maximale et minimale du système. Cette deuxième approche est également proposée sous une forme plus réduite. Si la notion de structure critique du temps de cycle minimal est bien connue pour les Graphes d'événements temporisés, cette notion est généralisée pour les Graphes d'événements P-temporels. La notion de structure critique relative au temps de cycle maximal ou vitesse minimale pour les Graphes d'événements P-temporels est à notre avis originale. Une perspective naturelle est la détermination de l'ensemble des structures critiques des Graphes d'événements P-temporels.

RÉFÉRENCES

- [1] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder J.P. and Quadrat, Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems, available from <http://maxplus.org>, New York, Wiley, 1992.
- [2] J. Campos, G. Chiola, J.M. Colom and M. Silva. Properties and Performance Bounds for Timed Marked Graphs. IEEE Trans. on Circuits and Systems. Vol. 39, N°5, may 1992.
- [3] J.C. Culioli. Introduction à l'optimisation Ellipses 1994.
- [4] Ph. Declerck, A. Guezzi and J.-L. Boimond. Cycle Time of P-time Event Graphs, 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2007), Angers, France, 09-12 may 2007. Available from <http://www.istia.univ-angers.fr/%7Edeclerck/recherche.html>
- [5] A. Giua, A. Piccaluga and C. Seatzu. Optimal Token Allocation in Timed Cyclic Event-Graphs. Proc. 4th Workshop on Discrete Event Systems. pp. 209-218, August 2000.
- [6] C. Gros. Rapport DEA en Biotechnologies et Industries Alimentaires de l'Ecole Nationale Supérieure d'Agronomie et des Industries Alimentaires (ENSAIA - INPL), 2000.

- [7] R. Jeantet, T. Croguennec, P. Schuk et G. Brulé. Sciences des aliments.T2- Technologie des produits alimentaires, Pages 137-190, Edit. Tec & Doc. Lavoisier, Paris, 2006.
- [8] W. Khansa. Réseaux de Petri P-temporels. Contribution à l' étude des systèmes à Evénements discrets. Thèse. Université de Savoie. Mars 1997.
- [9] J. Magott. Performance Evaluation of Concurrent Systems using Petri Nets. Information Processing Letters 18 (1984) 7-13 North-Holland.
- [10] MuDer Jeng. Comments on "Timed Petri Nets in Modeling and Analysis of Cluster tools". IEEE Trans. on Automation Science and Engineering. Vol.2, N°.1, January 2005.
- [11] T. Murata. Petri Nets : Properties, Analysis and Applications, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 4, 1989.
- [12] C.V. Ramamoorthy and S. Gary H0. Performance Evaluation of Asynchronous Concurrent Systems Using Petri Nets. IEEE Trans. on Software Engineering, Vol. SE-6, N°.5, September 1980.
- [13] A. Schijver. Theory of linear and integer programming. John Wiley and Sons, 1987.