

Temps de cycle des graphes d'événements P-temporel

A. Guezzi

Ph. Declerck , JL. Boimond
Université d'Angers - LISA
<http://www.istia.univ-angers.fr/LISA>

22 novembre 2007

- 1 Objectifs
- 2 Réseaux de Petri
- 3 Les graphes d'événements temporisés
- 4 Le nouveau modèle (écriture algébrique)
- 5 Le temps de cycle
- 6 Exemple
- 7 Conclusion

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

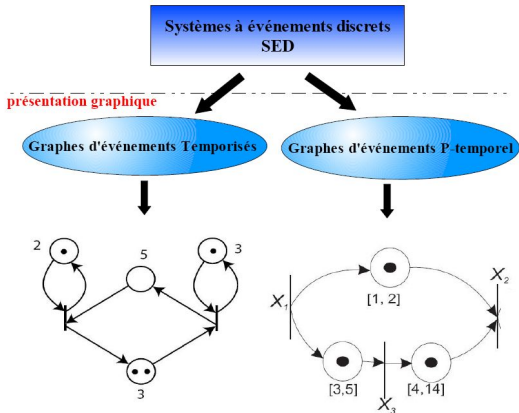
Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion



1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

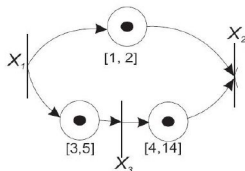
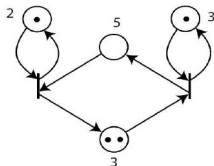
Conclusion

Systèmes à événements discrets
SED

présentation graphique

Graphes d'événements Temporisés

Graphes d'événements P-temporel



Objectif 1

Calculer le cycle de temps (le taux de productions) λ

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

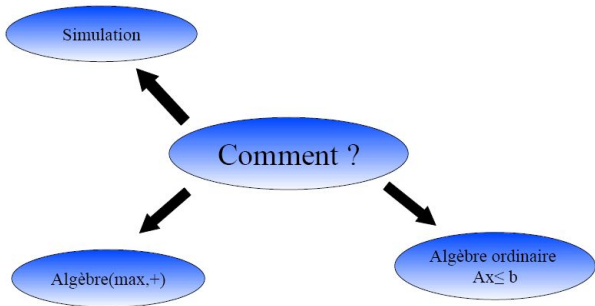
Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion



GET :(Théorème de karp
[Gaubert95])
GE p-temporel :[Khansa96]

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

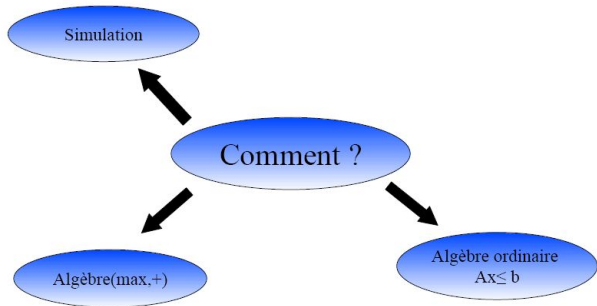
Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion



GET :(Théorème de karp [Gaubert95])
GE p-temporel :[Khansa96]

Lemme de Farakas [ICINCO07]

Grphe d'événements P-temporel \Rightarrow 1-périodique.

$$x(k+1) = x(k) + \lambda.$$

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

Graphe d'événements P-temporel \Rightarrow 1-périodique.

$$x(k+1) = x(k) + \lambda.$$

Objectif 2

Existence d'une trajectoire 1-périodique ?

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes
d'événements
temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

Grphe d'événements P-temporel \Rightarrow 1-périodique.

$$x(k+1) = x(k) + \lambda.$$

Objectif 2

Existence d'une trajectoire 1-périodique ?

\Rightarrow *Calcul du temps de cycle maximal et minimal λ (lemme de FARKAS en programmation linéaire)*

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes
d'événements
temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

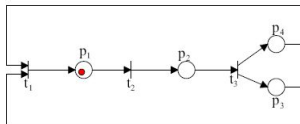
Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

1. Objectifs
- 2 Réseaux de Petri**
- 3 Les Graphes d'événements temporisés
 - Les graphes d'événements P-temporel
- 4 Le nouveau modèle
- 5 Temps de cycle
- 6 Exemple
- 7 Conclusion



Notations

- i Le marquage \mathcal{M} d'un réseau de Petri $\mathcal{M} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$. La quantité $\mathcal{M}(p)$ détermine le marquage de la place p ;
- ii $\mathcal{N} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$: Un réseau de Petri \mathcal{R} marqué par le marquage initial \mathcal{M}_0 .

Notations

La matrice d'incidence $W = W^+ - W^-$ où :

- i $W^+ = [Post(p_i, t_j)]$ (la matrice d'incidence arrière)
- ii $W^- = [Pre(p_i, t_j)]$ (la matrice d'incidence avant)

1. Objectifs
- Réseaux de Petri
- Les Graphes d'événements temporisés**
 - Les graphes d'événements P-temporel
- Le nouveau modèle
- Temps de cycle
- Exemple
- Conclusion

Grphe d'événements

Un graphe d'événements est un réseau de Petri tel que toute place $p \in \mathcal{P}$ a exactement une transition amont et une transition aval

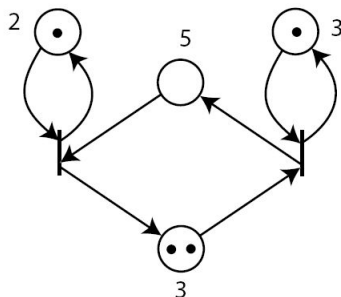


FIG.: GET

1. Objectifs
2. Réseaux de Petri
3. Les Graphes d'événements temporisés
 - Les graphes d'événements P-temporel
4. Le nouveau modèle
5. Temps de cycle
6. Exemple
7. Conclusion

Les graphes d'événements P-temporel

Grphe d'événements P-temporel

Un graphe d'événements est P-temporel est décrit par le couple $\langle \mathcal{R}, IS \rangle$ où : \mathcal{R} un graphe d'événements ;

$$IS : P \rightarrow R^+ \times (R^+ \cup \{+\infty\})$$

$$p_j \rightarrow is_j = [a_j, b_j]$$

avec $0 \leq a_j \leq b_j$ où is_j définit l'intervalle statique de temps de séjour d'une marque dans la place p_j .

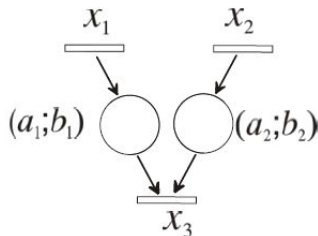


FIG.: Grphe d'événements P-temporel

Les graphes d'événements P-temporel

Proposition

Pour qu'un graphe d'événements p-temporel respecte un fonctionnement admissible, la modélisation correspondant à chacune de ses transistions, est donnée par l'expression suivante :

$$\bigoplus_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + a_j) \leq x_i(k) \leq \bigwedge_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + b_j)$$

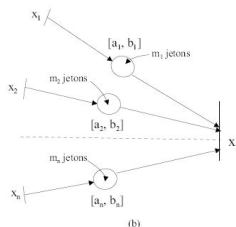
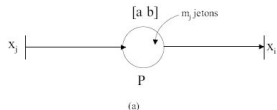


FIG.: Partie d'un graphe d'événements P-temporel

1. Objectifs
2. Réseaux de Petri
3. Les Graphes d'événements temporisés
 - Les graphes d'événements P-temporel
- 4. Le nouveau modèle**
5. Temps de cycle
6. Exemple
7. Conclusion

Le nouveau modèle

Nous associons un dateur $x_j(k)$ pour chaque transition. Sous l'hypothèse d'un fonctionnement FIFO,

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

Le nouveau modèle

Nous associons un dateur $x_i(k)$ pour chaque transition. Sous l'hypothèse d'un fonctionnement FIFO,

Dateur : $x(k)$ la date à laquelle se produit la k^{ieme} activation de la transition i .

Le nouveau modèle

Nous associons un dateur $x_i(k)$ pour chaque transition. Sous l'hypothèse d'un fonctionnement FIFO,

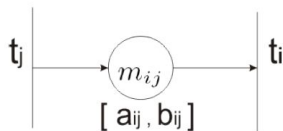
Dateur : $x_i(k)$ la date à laquelle se produit la k^{ieme} activation de la transition i .

La borne inférieure :

$$\forall x_j \in \leftarrow x_i, a_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k),$$

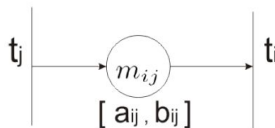
La borne supérieure :

$$\forall x_j \in \leftarrow x_i, x_i(k) \leq b_{ij} + x_j(k - m_{ij}),$$



La borne inférieure

$$a_{ij} + x_i(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow$$
$$x_i(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$



1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes
d'événements
temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

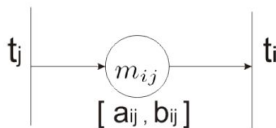
Temps de cycle

Exemple

Conclusion

La borne inférieure

$$a_{ij} + x_i(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow \\ x_i(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$



- Le poids 1 de $x_i(k - m_{ij})$ est le poids de l'arc entrant de la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} (équivalent de w_{ij}^+ dans la matrice d'incidence w^+);

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

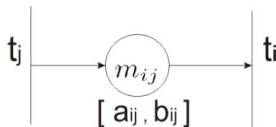
Temps de cycle

Exemple

Conclusion

La borne inférieure

$$a_{ij} + x_i(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow \\ x_i(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$



- 1 Le poids 1 de $x_i(k - m_{ij})$ est le poids de l'arc entrant de la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} (équivalent de w_{ij}^+ dans la matrice d'incidence w^+);
- 2 Le poids -1 de $x_i(k)$ est le poids de l'arc sortant de la place p_{ij} , de p_{ij} vers la transition t_i (équivalent de w_{ij}^- dans la matrice d'incidence w^-);

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

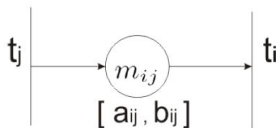
Exemple

Conclusion

La borne supérieure

$$x_i(k) \leq b_{ij} + x_i(k - m_{ij})$$

$$\Leftrightarrow x_i(k) + x_i(k - m_{ij}) \leq b_{ij}$$



- ❶ Le poids 1 de $x_i(k)$ est le poids de l'arc entrant de la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} (équivalent de w_{ij}^+ dans la matrice d'incidence w^+);

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

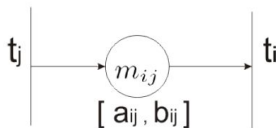
Exemple

Conclusion

La borne supérieure

$$x_i(k) \leq b_{ij} + x_i(k - m_{ij})$$

$$\Leftrightarrow x_i(k) + x_i(k - m_{ij}) \leq b_{ij}$$



- 1 Le poids 1 de $x_i(k)$ est le poids de l'arc entrant de la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} (équivalent de w_{ij}^+ dans la matrice d'incidence w^+);
- 2 Le poids -1 de $x_i(k - m_{ij})$ est le poids de l'arc sortant de la place p_{ij} , de p_{ij} vers la transition t_i (équivalent de w_{ij}^- dans la matrice d'incidence w^-);

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

La matrice d'expression :

$$H = [H_m H_{m-1} \dots H_1 H_0] \times \begin{pmatrix} x(k-m) \\ x(k-m+1) \\ \dots \\ x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}.$$

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

La matrice d'expression :

$$H = [H_m H_{m-1} \dots H_1 H_0] \times \begin{pmatrix} x(k-m) \\ x(k-m+1) \\ \dots \\ x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}.$$

- 1 m est le nombre maximum de jetons dans une place du marquage initial ;

La matrice d'expression :

$$H = [H_m H_{m-1} \dots H_1 H_0] \times \begin{pmatrix} x(k-m) \\ x(k-m+1) \\ \dots \\ x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}.$$

- 1 m est le nombre maximum de jetons dans une place du marquage initial ;
- 2 La matrice $H_i = \begin{pmatrix} G_i \\ -G_i \end{pmatrix}$ où G_i décrit les poids des arcs entrants dans les places contenant i jetons, avec $i \in [1, m-1]$.

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

La matrice d'expression :

$$H = [H_m H_{m-1} \dots H_1 H_0] \times \begin{pmatrix} x(k-m) \\ x(k-m+1) \\ \dots \\ x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}.$$

- 1 m est le nombre maximum de jetons dans une place du marquage initial ;
- 2 La matrice $H_i = \begin{pmatrix} G_i \\ -G_i \end{pmatrix}$ où G_i décrit les poids des arcs entrants dans les places contenant i jetons, avec $i \in [1, m-1]$.
- 3 La matrice $H_0 = \begin{pmatrix} G_0 \\ -G_0 \end{pmatrix}$ où G_0 décrit les poids des arcs sortants des places.

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

- 1 m est le nombre maximum de jetons dans une place du marquage initial ;
- 2 La matrice $H_i = \begin{pmatrix} G_i \\ -G_i \end{pmatrix}$ où G_i décrit les poids des arcs entrants dans les places contenant i jetons, avec $i \in [1, m - 1]$.
- 3 La matrice $H_0 = \begin{pmatrix} G_0 \\ -G_0 \end{pmatrix}$ où G_0 décrit les poids des arcs sortants des places.

- 1 m est le nombre maximum de jetons dans une place du marquage initial ;
- 2 La matrice $H_i = \begin{pmatrix} G_i \\ -G_i \end{pmatrix}$ où G_i décrit les poids des arcs entrants dans les places contenant i jetons, avec $i \in [1, m-1]$.
- 3 La matrice $H_0 = \begin{pmatrix} G_0 \\ -G_0 \end{pmatrix}$ où G_0 décrit les poids des arcs sortants des places.

remarque

- 1 $H_m + H_{m-1} + H_{m-2} \dots + H_1 = \begin{pmatrix} W^+ \\ -W^+ \end{pmatrix}$ et $H_0 = \begin{pmatrix} W^- \\ -W^- \end{pmatrix}$
Alors $W = G_m + G_{m-1} + G_{m-2} \dots + G_1 + G_0$

- 1 m est le nombre maximum de jetons dans une place du marquage initial ;
- 2 La matrice $H_i = \begin{pmatrix} G_i \\ -G_i \end{pmatrix}$ où G_i décrit les poids des arcs entrants dans les places contenant i jetons, avec $i \in [1, m-1]$.
- 3 La matrice $H_0 = \begin{pmatrix} G_0 \\ -G_0 \end{pmatrix}$ où G_0 décrit les poids des arcs sortants des places.

remarque

- 1 $H_m + H_{m-1} + H_{m-2} \dots + H_1 = \begin{pmatrix} W^+ \\ -W^+ \end{pmatrix}$ et $H_0 = \begin{pmatrix} W^- \\ -W^- \end{pmatrix}$
Alors $W = G_m + G_{m-1} + G_{m-2} \dots + G_1 + G_0$
- 2 $-A$ et B : vecteurs de temporisations où : $A_l = a_{ij}$ et $B_l = b_{ij}$.

Le marquage initial de toutes les places est nul :

$$\begin{cases} x_j(k) - x_i(k) \leq -a_{ij} \\ -x_j(k) + x_i(k) \leq b_{ij} \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Le système (1)} \Leftrightarrow H_0 \times x(k) \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$$

$$\text{où } H_0 = \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} \text{ et } W = W^+ - W^-.$$

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes
d'événements
temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

Les cas particuliers

Le marquage initial de toutes les places est nul :

$$\begin{cases} x_j(k) - x_i(k) \leq -a_{ij} \\ -x_j(k) + x_i(k) \leq b_{ij} \end{cases} \quad (1)$$

Le système (1) $\Leftrightarrow H_0 \times x(k) \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$

où $H_0 = \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix}$ et $W = W^+ - W^-$.

Le marquage initial de toutes les places égal à un :

$$\begin{cases} x_j(k-1) - x_i(k) \leq -a_{ij} \\ -x_j(k-1) + x_i(k) \leq b_{ij} \end{cases} \quad (2)$$

Le système (2) $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} H_1 & H_0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$ où

$H_1 = \begin{pmatrix} W^+ \\ -W^+ \end{pmatrix}$ et $H_0 = \begin{pmatrix} -W^- \\ W^- \end{pmatrix}$.

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

Cas général (écriture réduite)

Chaque place contenant k jetons, l'idée générale est de dupliquer chaque place en k places, chacune contenant un seul jeton.

$$\begin{pmatrix} G \\ H' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} X(k-1) \\ X(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -A \\ B \end{pmatrix}.$$

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes
d'événements
temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

1. Objectifs
2. Réseaux de Petri
3. Les Graphes d'événements temporisés
 - Les graphes d'événements P-temporel
4. Le nouveau modèle
- 5. Temps de cycle**
6. Exemple
7. Conclusion

Hypothèses

- $m_{ij} = 0$ ou 1 ;

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes
d'événements
temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

Hypothèses

- $m_{ij} = 0$ ou 1 ;

- $H \times \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$ avec $H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{10} \\ H_{21} & H_{20} \end{pmatrix}$;

Hypothèses

- $m_{ij} = 0$ ou 1 ;
- $H \times \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$ avec $H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{10} \\ H_{21} & H_{20} \end{pmatrix}$;
- Un comportement 1-périodique : $x(k+1) = \lambda \times u + x(k)$ avec le vecteur unitaire $u = (1, 1, \dots, 1)^t$ et le temps de cycle λ

LEMME DE FARKAS

Corollary 7.1.e in (*Schijver87*)(*Hennet89*).

Soit A une matrice et soit b un vecteur. Le système $Ax \leq b$ d'inégalités linéaire a une solution x , si et seulement si pour chaque vecteur colonne $y \geq 0$ avec $y \times A = 0$ on a $y \times b \geq 0$

THÉORÈME

Le système a un comportement 1-périodique pour un temps de cycle λ donné, si et seulement si, pour chaque vecteur colonne

$y \geq 0$ avec

$$y \times \begin{pmatrix} H_{11} + H_{10} \\ H_{21} + H_{20} \end{pmatrix} = 0$$

On a

THÉORÈME

Le système a un comportement 1-périodique pour un temps de cycle λ donné, si et seulement si, pour chaque vecteur colonne

$y \geq 0$ avec

$$y \times \begin{pmatrix} H_{11} + H_{10} \\ H_{21} + H_{20} \end{pmatrix} = 0$$

On a

$$\textcircled{1} \frac{y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u} \geq \lambda \text{ Si } y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u > 0,$$

THÉORÈME

Le système a un comportement 1-périodique pour un temps de cycle λ donné, si et seulement si, pour chaque vecteur colonne

$y \geq 0$ avec

$$y \times \begin{pmatrix} H_{11} + H_{10} \\ H_{21} + H_{20} \end{pmatrix} = 0$$

On a

$$\textcircled{1} \frac{y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u} \geq \lambda \text{ Si } y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u > 0,$$

THÉORÈME

Le système a un comportement 1-périodique pour un temps de cycle λ donné, si et seulement si, pour chaque vecteur colonne

$y \geq 0$ avec

$$y \times \begin{pmatrix} H_{11} + H_{10} \\ H_{21} + H_{20} \end{pmatrix} = 0$$

On a

$$\textcircled{1} \frac{y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u} \geq \lambda \text{ Si } y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u > 0,$$

$$\textcircled{2} \frac{y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u} \leq \lambda \text{ Si } y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u < 0,$$

THÉORÈME

Le système a un comportement 1-périodique pour un temps de cycle λ donné, si et seulement si, pour chaque vecteur colonne

$y \geq 0$ avec

$$y \times \begin{pmatrix} H_{11} + H_{10} \\ H_{21} + H_{20} \end{pmatrix} = 0$$

On a

$$\textcircled{1} \frac{y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u} \geq \lambda \text{ Si } y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u > 0,$$

$$\textcircled{2} \frac{y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u} \leq \lambda \text{ Si } y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u < 0,$$

THÉORÈME

Le système a un comportement 1-périodique pour un temps de cycle λ donné, si et seulement si, pour chaque vecteur colonne

$y \geq 0$ avec

$$y \times \begin{pmatrix} H_{11} + H_{10} \\ H_{21} + H_{20} \end{pmatrix} = 0$$

On a

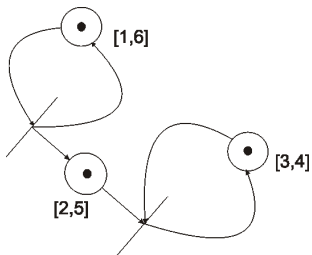
$$\textcircled{1} \frac{y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u} \geq \lambda \text{ Si } y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u > 0,$$

$$\textcircled{2} \frac{y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}}{y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u} \leq \lambda \text{ Si } y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u < 0,$$

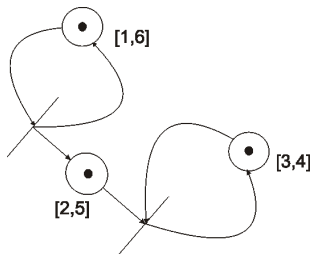
$$\textcircled{3} y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix} \geq 0 \text{ Si } y \times \begin{pmatrix} H_{10} \\ H_{20} \end{pmatrix} \times u = 0.$$

1. Objectifs
2. Réseaux de Petri
3. Les Graphes d'événements temporisés
 - Les graphes d'événements P-temporel
4. Le nouveau modèle
5. Temps de cycle
- 6. Exemple**
7. Conclusion

Soit le graphe d'événements p-temporel suivant :



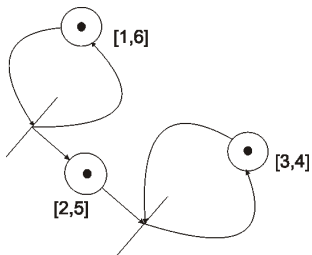
Soit le graphe d'événements p-temporel suivant :



Le système d'inégalités :

$$\begin{pmatrix} W^+ & -W^- \\ -W^+ & W^- \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$$

Soit le graphe d'événements p-temporel suivant :



Le système d'inégalités :

$$\begin{pmatrix} W^+ & -W^- \\ -W^+ & W^- \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix}$$

avec : $x(k) = (x_1(k) \quad x_2(k) \quad x_3(k))^t$, $W^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$-W^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad -A = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes
d'événements
temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

$$\text{On a : } W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice entière $Y \geq 0$ tel que : $Y \cdot \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = 0$

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes
d'événements
temporisés

Les graphes d'événements
P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

$$\text{On a : } W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice entière $Y \geq 0$ tel que : $Y \cdot \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = 0$

$$\text{est : } Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice entière $Y \geq 0$ tel que : $Y \cdot \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = 0$

$$\text{est : } Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -W^- \\ W^- \end{pmatrix} \times u = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^t$$

On a : $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice entière $Y \geq 0$ tel que : $Y \cdot \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = 0$

est : $Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -W^- \\ W^- \end{pmatrix} \times u = (-1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^t$

$Y \cdot \begin{pmatrix} -W^- \\ W^- \end{pmatrix} \times u = (-7 \quad -7 \quad +7 \quad +7 \quad 0)^t$

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

On a : $W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice entière $Y \geq 0$ tel que : $Y \cdot \begin{pmatrix} W \\ -W \end{pmatrix} = 0$

est : $Y = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -W^- \\ W^- \end{pmatrix} \times u = (-1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)^t$

$Y \cdot \begin{pmatrix} -W^- \\ W^- \end{pmatrix} \times u = (-7 \quad -7 \quad +7 \quad +7 \quad 0)^t$

$Y \times \begin{pmatrix} -A \\ B \end{pmatrix} = (-7 \quad -21 \quad +42 \quad +28 \quad +21)^t$.

1. Objectifs

Réseaux de Petri

Les Graphes d'événements temporisés

Les graphes d'événements P-temporel

Le nouveau modèle

Temps de cycle

Exemple

Conclusion

- 1 Les deux bornes inférieures de λ sont : $(\frac{-7}{-7} = 1, \frac{-21}{-7} = 3)$;
- 2 les deux bornes supérieures de λ sont :
 $(\frac{+42}{+7} = 6, \frac{+28}{+7} = 4)$.

- 1 Les deux bornes inférieures de λ sont : $(\frac{-7}{-7} = 1, \frac{-21}{-7} = 3)$;
- 2 les deux bornes supérieures de λ sont :
 $(\frac{+42}{+7} = 6, \frac{+28}{+7} = 4)$.

Donc, la trajectoire 1-périodique existe avec :
 $\max(1, 3) = 3 \leq \lambda \leq \min(6, 4) = 4$.

- 1 Les deux bornes inférieures de λ sont : $(\frac{-7}{-7} = 1, \frac{-21}{-7} = 3)$;
- 2 les deux bornes supérieures de λ sont : $(\frac{+42}{+7} = 6, \frac{+28}{+7} = 4)$.

Donc, la trajectoire 1-périodique existe avec :
 $\max(1, 3) = 3 \leq \lambda \leq \min(6, 4) = 4$.

Calcul

- 1 Pour $\lambda = 3$, la trajectoire possible est :
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$;

- ① Les deux bornes inférieures de λ sont : $(\frac{-7}{-7} = 1, \frac{-21}{-7} = 3)$;
- ② les deux bornes supérieures de λ sont : $(\frac{+42}{+7} = 6, \frac{+28}{+7} = 4)$.

Donc, la trajectoire 1-périodique existe avec :
 $\max(1, 3) = 3 \leq \lambda \leq \min(6, 4) = 4$.

Calcul

- ① Pour $\lambda = 3$, la trajectoire possible est :
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$;
- ② Pour $\lambda = 3.5$, la trajectoire possible est :
 $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8.5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$;

- 1 Les deux bornes inférieures de λ sont : $(\frac{-7}{-7} = 1, \frac{-21}{-7} = 3)$;
- 2 les deux bornes supérieures de λ sont : $(\frac{+42}{+7} = 6, \frac{+28}{+7} = 4)$.

Donc, la trajectoire 1-périodique existe avec :
 $\max(1, 3) = 3 \leq \lambda \leq \min(6, 4) = 4$.

Calcul

- 1 Pour $\lambda = 3$, la trajectoire possible est :
 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$;
- 2 Pour $\lambda = 3.5$, la trajectoire possible est :
 $\begin{pmatrix} 1.5 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 3.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 8.5 \\ 7 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$;
- 3 Pour $\lambda = 4$, la trajectoire possible est :
 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix} \rightarrow \dots$

1. Objectifs
2. Réseaux de Petri
3. Les Graphes d'événements temporisés
 - Les graphes d'événements P-temporel
4. Le nouveau modèle
5. Temps de cycle
6. Exemple
- 7. Conclusion**

Conclusion

- 1 Ecriture algébrique $Ax \leq b$ d'un graphe d'événements p-temporel à l'aide des dateurs ;

Conclusion

- 1 Ecriture algébrique $Ax \leq b$ d'un graphe d'événements p-temporel à l'aide des dateurs ;
- 2 Condition d'existence d'une trajectoire 1-périodique \Rightarrow Calcul de $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$;

Conclusion

- 1 Ecriture algébrique $Ax \leq b$ d'un graphe d'événements p-temporel à l'aide des dateurs ;
- 2 Condition d'existence d'une trajectoire 1-périodique \Rightarrow Calcul de $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$;
- 3 Aucune hypothèse limitative sauf FIFO ;

Conclusion

- 1 Ecriture algébrique $Ax \leq b$ d'un graphe d'événements p-temporel à l'aide des dateurs ;
- 2 Condition d'existence d'une trajectoire 1-périodique \Rightarrow Calcul de $\lambda \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$;
- 3 Aucune hypothèse limitative sauf FIFO ;
- 4 Optimisation de ressources $\max |j(m)| \lambda \in [\lambda^-, \lambda^+]$.