

Commande et standardisation de graphes d'événements temporisés par les systèmes monotones

Abdelhak GUEZZI¹, Philippe DECLERCK¹, Jean-Louis BOIMOND¹

¹Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés
LISA EA4094 - Université d'Angers 62, avenue Notre Dame du Lac - 49000 Angers France

abdelhak.guezzi@etud.univ-angers.fr,
philippe.declerck@istia.univ-angers.fr, boimond@istia.univ-angers.fr
<http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/>

Résumé—Les Graphes d'Événements Temporisés et P-temporels sont généralement modélisés dans l'algèbre $(\max, +)$ à l'aide de "dateurs". Dans ce document, nous utilisons également les dateurs mais dans l'algèbre standard afin de décrire ces modèles sous la forme $Ax \leq b$. L'utilisation d'une classe particulière des systèmes linéaires permet de déterminer la trajectoire au plus tôt et la commande juste à temps des graphes d'événements temporisés. Nous abordons une méthode de réécriture du modèle algébrique afin d'avoir un modèle analogue à l'équation d'état discrétisée de l'automatique classique. L'approche est appliquée à un processus de traitement de draps.

Mots-clés—Graphe d'événements temporisé, algèbre $(\max, +)$, programmation linéaire, systèmes monotones, commande.

I. INTRODUCTION

Les Graphes d'Événements Temporisés et P-temporels permettent d'exprimer des systèmes à événements discrets temporels. Par exemple, les durées d'opération sont comprises entre des bornes minimales et maximales [9] dans les Graphes d'Événements P-temporels. Dans le document [5], nous avons introduit un nouveau modèle utilisant les dateurs, non dans l'algèbre $(\max, +)$ [2] mais dans l'algèbre standard. Afin de déterminer le taux de production, des matrices d'incidences liant des transitions internes ont été introduites. Dans [6], le taux de production est calculée par deux approches en utilisant le théorème de la dualité bien connue en programmation linéaire ainsi que le théorème de Stiemke. Il est important de préciser que les approches développées sur le modèle introduit permettent de conserver la relation d'ordre composante par composante comme dans l'algèbre $(\max, +)$. Cette approche permet donc de conserver des éléments fondamentaux de l'algèbre $(\max, +)$ tout en ajoutant les nombreux outils de la programmation linéaire. Cette étude contribue ainsi à relier les travaux développés de manière indépendante, dans l'algèbre $(\max, +)$ et dans les réseaux de Petri. Cette approche facilite enfin l'accès aux concepts $(\max, +)$ sans devoir apprendre une notation qui peut sembler peut-être hermétique.

Les objectifs de ce document sont les suivants : après avoir complété le modèle initial en introduisant des transitions d'entrée et de sortie, on aborde une technique de réécriture du modèle telle que chaque place interne contienne seulement un jeton. L'objectif est d'avoir un modèle dont la forme est proche de celui de l'équation d'état de l'automatique classique. On présente également le fonctionnement au plus tôt du graphe d'évé-

nements temporisé où les entrées sont connues et on discute de la technique de résolution. Enfin, on réalise la synthèse de la commande sous le critère classique de juste à temps : la commande doit retarder, autant qu'il est possible le système, de telle sorte que la sortie se produise avant une sortie désirée définie sur un horizon fini donné.

Naturellement, des techniques utilisant l'algèbre $(\max, +)$ ont déjà été proposées. Dans ce papier, on montre que des approches peuvent également être réalisées dans l'algèbre standard. Pour cela, on a besoin d'utiliser une classe spéciale d'inégalités linéaires qui a été étudiée par différents auteurs dans le domaine des systèmes à événements discrets. Les concepts de base sont les treillis et la relation d'ordre. G.B. Dantzig a analysé les systèmes Leontief dynamiques en 1955. R. W. Cottle [3] a montré une correspondance entre les inégalités linéaires et les treillis. Une recherche récente c'est celle de M. Queyranne 2006 [11].

Le document suit le plan suivant. On complète [5] et [6], en présentant le modèle entrées/sorties et une première approche de réécriture du modèle (une approche plus générale sera proposée dans un autre document). Ensuite, on présente le concept des inégalités monotones qui permet la résolution des inégalités linéaires. Enfin, ces résultats sont appliqués pour faire la synthèse de la commande du graphe d'événements temporisé. Un exemple simple représentant une chaîne de production illustre notre approche.

II. MODÈLE

La présentation des notions de réseau de Petri peut être trouvée par exemple dans [8]. Un Réseau de Petri est un graphe d'événements si toute place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. Les graphes d'événements temporisés permettent de considérer des contraintes de temps de séjour des jetons dans les places. A chaque place p_i nous associons une temporisation T_i .

Inéquations d'un Graphe d'événements temporisés.

Afin de décrire le Graphe d'événements temporisés, nous considérons la forme dateur bien connue dans l'algèbre $(\max, +)$: chaque variable $x_i(k)$ représente la date du k -ème tir de la transition x_i . Si nous supposons un fonctionnement FIFO des places qui garantit qu'il n'y aura pas de dépassement de jeton, une numérotation des événements peut être utilisée. L'évolution

peut alors être représentée par les inégalités suivantes qui décrivent les relations entre les dates de tir. Comme un Graphe d'événements peut être considéré comme un ensemble de sous-graphes composés d'une place p_l liant une transition amont $\{x_j\} = \bullet p$ et une transition aval $\{x_i\} = p \bullet$, nous pouvons décrire le système à partir de chaque place p_l où $(j, i) = (\bullet p_l, p_l \bullet)$: $T_l + x_j(k - m_l) \leq x_i(k)$ ou, $x_j(k - m_l) - x_i(k) \leq -T_l$.

Le poids 1 de $x_j(k - m_l)$ (respectivement, -1 de $x_i(k)$) est le poids de l'arc allant de la transition x_j à la place p_l (respectivement, l'arc allant de la place p_l à la transition x_i) qui est égal à W_{lj}^+ (respectivement, $-W_{li}^-$).

Modèle algébrique matriciel d'un graphe d'événements temporisé.

Ci-dessous, m est la plus grande composante de M_0 et le vecteur colonne $-T$ est le vecteur de temporisations.

L'ensemble des inégalités précédentes qui décrivent un graphe d'événements temporisés, peut être exprimé avec la forme symétrique suivante

$$(G) \times \begin{pmatrix} x(k-m) \\ x(k-m+1) \\ \dots \\ x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq (-T) \quad (1)$$

avec $G = [G_m G_{m-1} G_{m-2} \dots G_1 G_0]$ et sa dimension est $(|P| \cdot (m+1)) \times |TR|$. Chaque place correspond à une ligne de G qui contient les poids de ses arcs entrants et sortants. En particulier,

1. La matrice G_i contient les poids avec le signe plus, des arcs entrant des places dont le marquage initial est i pour $i \in [0, m]$.
2. En plus des poids définis ci-dessus, la matrice G_0 contient avec le signe moins, le poids de l'arc sortant de chaque place dont le marquage initial est nul (habituellement exprimé par $-W^-$).

De la description ci-dessus sur le poids des arcs, nous pouvons déduire la relation suivante avec la matrice d'incidence W :

$$W = \sum_{i=0}^{i=m} G_i$$

III. LE MODÈLE ENTRÉES/SORTIES

Le système d'inégalités (1) va être exprimé sur un horizon réduit. La technique est d'établir un modèle équivalent tel que chaque place du graphe contienne seulement un jeton au plus. L'idée est de dupliquer chaque place en plusieurs places, chacune contenant un seul jeton. Chaque place contenant au maximum m jetons, cette opération se fera au maximum m fois. La technique utilisée est détaillée dans [6]. Les transitions internes, les transitions d'entrée et de sortie sont notées x , u et y respectivement. Les ensembles correspondant à ces transitions sont notés comme suit TR_x , TR_u and TR_y .

L'ensemble des places P est l'union des trois ensembles, qui est $P = P_{u \rightarrow x} \cup P_{x \rightarrow x} \cup P_{x \rightarrow y}$ où $P_{u \rightarrow x}$ est l'ensemble des places entre les transitions d'entrée et les transitions internes, $P_{x \rightarrow x}$ est l'ensemble des places entre les transitions internes et $P_{x \rightarrow y}$ est l'ensemble des places entre les transitions internes et les transitions de sortie. Cette notation graphique est conservée pour les matrices et on note $W_{u \rightarrow x}^+$. Cet abus de notation facilite l'écriture des matrices.

Pour simplifier la présentation, nous supposons que chaque place de $P_{x \rightarrow x}$ contient un seul jeton : cette hypothèse sera levée dans la partie suivante. Sans restriction de généralité, nous supposons que le marquage initial des places $P_{u \rightarrow x}$ et $P_{x \rightarrow y}$ est nul. Cela peut s'obtenir simplement en ajoutant une place de temporisation et de marquage initial nuls aux entrées et sorties le nécessitant. Nous écrivons ci-dessus les inégalités qui expriment les relations entre les dates de tir des transitions internes, d'entrée et de sortie.

On obtient pour $P_{x \rightarrow x}$, $P_{u \rightarrow x}$ et $P_{x \rightarrow y}$, respectivement :

$$(W_{x \rightarrow x}^+ \quad -W_{x \rightarrow x}^-) \begin{pmatrix} x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq (-T_{x \rightarrow x}) \quad (2)$$

$$(W_{u \rightarrow x}^+ \quad -W_{u \rightarrow x}^-) \begin{pmatrix} u(k) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq (-T_{u \rightarrow x}) \quad (3)$$

$$(W_{x \rightarrow y}^+ \quad -W_{x \rightarrow y}^-) \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} \leq (-T_{x \rightarrow y}) \quad (4)$$

où les dimensions des matrices d'incidence sont : $\dim(W_{x \rightarrow x}^+) = \dim(W_{x \rightarrow x}^-) = |P_{x \rightarrow x}| \cdot |TR_x|$, $\dim(W_{u \rightarrow x}^+) = |P_{u \rightarrow x}| \cdot |TR_u|$, $\dim(W_{u \rightarrow x}^-) = |P_{u \rightarrow x}| \cdot |TR_x|$, $\dim(W_{x \rightarrow y}^+) = |P_{x \rightarrow y}| \cdot |TR_x|$ and $\dim(W_{x \rightarrow y}^-) = |P_{x \rightarrow y}| \cdot |TR_y|$.

Remarque.

1. De la description ci-dessus sur le poids des arcs, nous pouvons déduire que les éléments de $W_{u \rightarrow x}^+$, $W_{x \rightarrow y}^+$, $W_{u \rightarrow x}^-$, $W_{x \rightarrow y}^-$ sont des éléments de W . Elles sont des sous-matrices des matrices d'incidence W^+ et W^- sous les conditions de marquage ci-dessus.

2. Aucune ligne des matrices d'incidence est nulle comme nous exprimons les relations de chaque place du graphe d'événements. De même, aucune colonne de W_{ux}^+ et W_{xy}^- est nulle, sachant que chaque transition d'entrée et sortie est supposée reliée au graphe.

IV. VERS UNE STANDARDISATION DU MODÈLE

Dans cette partie, nous montrons que le modèle peut être écrit de telle sorte que chaque place interne contienne seulement un jeton. L'intérêt de ce traitement est d'obtenir un modèle itératif tel que la connaissance de la commande et de l'état à l'itération précédente permet de déterminer l'état suivant sans avoir à traiter les relations liant les composantes du vecteur d'état pour un k donné. On évite de cette manière la répétition de calculs inutiles. On obtient alors un modèle dont le fonctionnement est proche de celui de l'équation d'état de l'automatique classique. La forme est d'autre part plus simple car elle permet la reconstruction d'un nouveau réseau de Petri. Une étude plus avancée de cette partie sera prochainement proposée.

Considérons les places internes avec un marquage initial nul. On note L , l'ensemble des transitions d'entrée et I , l'ensemble des transitions de sortie de ces places internes sans jeton. Soit une place de ce type liant une transition l à une transition i . L'inégalité correspondante est $x_l(k) - x_i(k) \leq -T_{l \rightarrow i}^0$ que l'on peut réécrire

$$T_{l \rightarrow i}^0 + x_l(k) \leq x_i(k) \quad (5)$$

La notation $T_{l \rightarrow i}^0$ représente la temporisation de la place entre la transition i et l avec un marquage initial nul.

Utilisant les relations liant les transitions L et I , on peut donc établir un graphe liant ces sommets, chaque arc de l à i présentant une valuation $T_{l \rightarrow i}^0$. Pour chaque transition $l \in L$, pour

chaque transition $i \in I$, on peut calculer à l'aide d'un algorithme classique de la théorie des graphes, le poids maximal du chemin de l à i . Les inéquations (5) pourront ainsi être remplacées par :

$$\max\{T_{l \rightarrow i}^0\} + x_l(k) \leq x_i(k) \quad (6)$$

Nous avons ainsi effectué une première fusion. L'effet des inéquations (6) peut maintenant être considéré dans une écriture ne comportant pas à priori de places internes sans marquage initiale nulle si on fusionne chacune de ces places dans des places en amont (soit internes, soit d'entrée) ou même des places en aval (de sortie). Nous décrivons maintenant cette démarche. Si nous supposons que le système est structurellement commandable (rappelons que ceci est une condition nécessaire pour commander les dates de tir des transitions internes du système), il y aura toujours un chemin pour chaque transition interne venant d'une transition d'entrée. Chacun de ces chemins allant à une transition $l \in L$ pourra présenter une place interne de marquage initial unitaire ou non. Dans le premier cas, on pourra fusionner avec cette place interne tandis que l'on pourra fusionner avec une place d'entrée dans le second cas. Plus précisément, il faudra fusionner avec toutes les places internes en amont de marquage unitaire et, avec toutes les places d'entrée en amont. Nous décrivons ci-dessous cette technique en nous limitant à l'hypothèse de structurellement commandable.

- Fusion avec des places internes présentant un marquage initial unitaire : Cela est possible si la transition $l \in L$ est aussi transition de sortie d'une place interne présentant un marquage initial unitaire. Soit une place de marquage initial unitaire de la transition j à la transition l et sa temporisation est : $T_{j \rightarrow l}^1$

De $\begin{cases} \max\{T_{l \rightarrow i}^0\} + x_l(k) \leq x_i(k) \\ x_j(k-1) - x_l(k) \leq -T_{j \rightarrow l}^1 \end{cases}$, on déduit :

$$x_j(k-1) - x_i(k) \leq -T_{j \rightarrow l}^1 - \max\{T_{l \rightarrow i}^0\}$$

- Fusion avec des places d'entrée : Cela est possible si transition $l \in L$ est aussi transition de sortie d'une place d'entrée dont le marquage initial est ici nul. Soit une place de marquage initial nul de la transition d'entrée j à la transition l et sa temporisation $T_{j \rightarrow l}^0$.

De $\begin{cases} \max\{T_{l \rightarrow i}^0\} + x_l(k) \leq x_i(k) \\ u_j(k) - x_l(k) \leq -T_{j \rightarrow l}^0 \end{cases}$, on déduit

$$u_j(k) - x_i(k) \leq -T_{j \rightarrow l}^0 - \max\{T_{l \rightarrow i}^0\}$$

La procédure est répétée sur toutes places en amont. Ainsi, les relations déduites dans les deux situations précédentes peuvent remplacer la relation $x_l(k) - x_i(k) \leq -\max\{T_{l \rightarrow i}^0\}$ dans le système d'inéquations décrivant le graphe d'événements temporisé. En effet, l'effet potentiel qu'elle avait sur les dates de tir de x_i à travers les deux types de chemins est maintenant considéré. Notons qu'il sera nécessaire de faire les deux types d'opérations ci-dessus pour chaque transition $l \in L$ afin de n'oublier aucun chemin qui exprime l'effet potentiel de la commande $u(k)$ et de l'évolution passée exprimée par $x(k-1)$.

Remarque. Le cas où la transition $l \in L$ est aussi transition de sortie d'une place interne présentant un marquage initial nul, n'est pas à être considéré dans l'algorithme car son effet potentiel est exprimé dans la structure concaténée.

Si nous supposons maintenant que le système est structurellement observable, une démarche analogue (mais plus inhabituelle par rapport à l'algèbre $(\max, +)$) pourra être développée. Rappelons que l'observabilité structurelle est une condition nécessaire

pour observer l'effet des dates de tir des transitions internes sur les sorties du système. Par définition, il y aura toujours un chemin de chaque transition interne vers au moins une transition de sortie. Chacun de ces chemins partant d'une transition $i \in I$ pourra présenter une place interne de marquage initial unitaire ou non. Dans le premier cas, il faudra fusionner avec cette place interne tandis que l'on fusionnera avec une place de sortie dans le second cas. Comme ci-dessus, il sera nécessaire de faire systématiquement ces deux types d'opérations pour chaque transition $i \in I$ afin de n'oublier aucun chemin qui a un effet potentiel sur les transitions de sortie.

V. EXEMPLE 1

A. Graphe d'événements temporisé

L'exemple de la figure 1 illustre l'approche. Cet exemple décrit un processus de la fabrication de draps. Son processus est décrit comme suit : le drap est imprimé, plié et emballé. Chaque place du graphe correspond aux tâches suivantes : les places p_0, p_1, p_2 représentent la machine d'impression avec un temps de traitement égal (p_1). Les places p_3, p_4, p_5 représentent la plieuse avec un temps de traitement égal à 8 mn (p_4). Les places p_6, p_7, p_8 représentent la machine d'emballage avec un temps de traitement qui dure 3 mn (p_7).

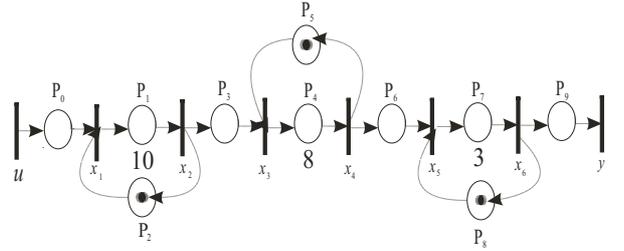


Fig. 1. Graphe d'Événements Temporisé

B. Modèle entrées/sorties initial

$P = P_{u \rightarrow x} \cup P_{x \rightarrow x} \cup P_{x \rightarrow y}$ où : $P_{u \rightarrow x} = \{P_0\}$, $P_{x \rightarrow x} = \{P_1, P_2, P_3, P_5, P_4, P_6, P_7, P_8\}$ et $P_{x \rightarrow y} = \{P_9\}$.

$TR = TR_u \cup TR_x \cup TR_y$ où : $TR_u = \{u\}$, $TR_x = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ et $TR_y = \{y\}$.

On suppose que $M_0 = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0)^t$. Comme le réseau de Petri ne respecte pas l'hypothèse que les places internes ont toutes un marquage initial unitaire, nous notons $A_{x \rightarrow x}^1$ et $A_{x \rightarrow x}^0$ les matrices correspondant respectivement à $W_{x \rightarrow x}^+$ et $W_{x \rightarrow x}^-$.

Le modèle d'entrée/sortie est comme suit : $x(k) = (x_1(k), x_2(k), x_3(k), x_4(k), x_5(k), x_6(k))^t$

$$A_{x \rightarrow x}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{x \rightarrow x}^0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \text{et } T_{x \rightarrow x} = (10, 0, 0, 0, 8, 0, 3, 0)^t (W_{u \rightarrow x}^+ \quad -W_{u \rightarrow x}^-) \begin{pmatrix} u(k) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \\
& -T_{u \rightarrow x} = 0 \\
& \text{avec } W_{u \rightarrow x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \text{ et } W_{u \rightarrow x}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& (W_{x \rightarrow y}^+ \quad -W_{x \rightarrow y}^-) \begin{pmatrix} x(k) \\ y(k) \end{pmatrix} \leq -T_{x \rightarrow y} = 0 \\
& \text{avec } W_{x \rightarrow y}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } W_{x \rightarrow y}^- = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

C. Modèle réduit

Avant d'appliquer la technique de réécriture, une réduction élémentaire permet par exemple d'éliminer les transitions t_1 , t_3 and t_5 et ainsi de réduire le nombre de colonnes des matrices. On passe ainsi de 6 à 3. Par exemple, éliminons t_1 . Du système

$$\begin{cases} u(k) \leq x_1(k) \\ x_1(k) + 10 \leq x_2(k) \\ x_1(k) \leq x_2(k-1) \end{cases}, \text{ on déduit le système suivant :}$$

$$\begin{cases} u(k) \leq x_1(k) \\ u(k) + 10 \leq x_2(k) \\ x_2(k-1) + 10 \leq x_2(k) \end{cases} \quad \text{On obtient ainsi le modèle suivant :}$$

$$W_{u \rightarrow x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \text{ et } W_{u \rightarrow x}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} T_{u \rightarrow x} = \begin{pmatrix} 10 \end{pmatrix}$$

$$\text{Pour les places internes, on obtient : } A_{x \rightarrow x}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } A_{x \rightarrow x}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} T_{x \rightarrow x} = (10, 8, 3, 8, 3)^t$$

Pour la place de sortie, on obtient :

$$W_{x \rightarrow y}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } W_{x \rightarrow y}^- = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} T_{x \rightarrow y} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

Remarquons que la matrice $A_{x \rightarrow x}^0$ contient des lignes avec deux coefficients non nuls dont l'un est négatif.

D. Modèle entrées/sorties final

Appliquons maintenant la technique de standardisation. Elle donne le nouveau modèle entrées/sorties suivant. Pour les places

d'entrées p_{10} , p_{18} et p_{19} , on obtient : $W_{u \rightarrow x}^+ = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $W_{u \rightarrow x}^- =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{u \rightarrow x} = (10, 18, 21)^t \text{ Pour les places internes } p_{14},$$

$$p_{11}, p_{15}, p_{17}, p_{12}, \text{ et } p_{16}, \text{ on obtient : } W_{x \rightarrow x}^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et}$$

$$W_{x \rightarrow x}^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} T_{x \rightarrow x} = (10, 18, 8, 21, 11, 3)^t \text{ Pour la place}$$

de sortie p_{13} , on obtient : $W_{x \rightarrow y}^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $W_{x \rightarrow y}^- = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} T_{x \rightarrow y} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$

Remarquons que la matrice $W_{x \rightarrow x}^-$ contient que des lignes avec un seul coefficient positif : les matrices correspondent maintenant à des matrices d'incidence classiques définies dans le domaine des réseaux de Petri. On peut déduire de cette description algébrique le graphe d'événements présenté en Figure 2 : le marquage initial des places d'entrées et de sorties est nul ; le marquage initial des places internes est égal à un.

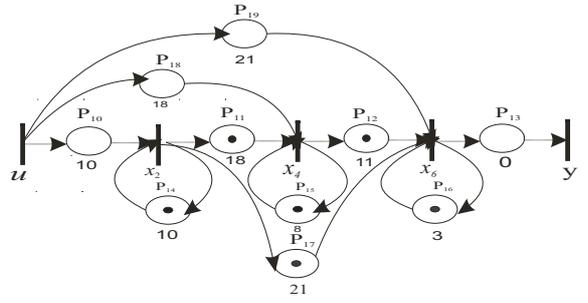


Fig. 2. Graphe d'événements temporisé

VI. INÉGALITÉS MONOTONES

Dans ce papier, nous nous concentrons sur l'ordre partiel défini sur un ensemble S qui est défini comme suit : $x \leq y$ ssi $x_i \leq y_i \forall i \in \{1, 2, \dots, \text{card}(x)\}$. Cette partie présente le vocabulaire (voir la partie 4.3.1 de [2]) et les résultats théoriques utilisés dans les parties VIII et IX.

Un maximum (minimum) d'un sous-ensemble est un élément de ce dernier qui est le plus grande (le plus petit) que tout autre élément du sous-ensemble. S'il existe, il est unique.

Un majorant (minorant) d'un sous-ensemble est un élément pas nécessairement appartenant à ce dernier qui est le plus grand (plus petit) que tout autre élément du sous-ensemble. Si un majorant appartient au sous-ensemble, c'est le maximum (minimum) élément. Le majorant (minorant) est aussi appelé la borne supérieure (inférieure).

Lorsque l'ensemble des majorants ou bornes supérieures a un plus petit élément, ce dernier est appelé plus petite borne supérieure. De même lorsque l'ensemble des minorants ou bornes inférieures de a un plus grand élément, on l'appelle plus grande borne inférieure. Un ensemble ordonné $(S; \leq)$ est un sup-demi-treillis (respectivement, inf-demi-treillis) si toute partie de deux éléments de S admet une plus petite borne supérieure (plus grande borne inférieure).

L'intersection d'un nombre fini de demi-plans dans R^n est appelé un polyèdre convexe ou simplement un polyèdre. Un polyèdre est un sous-ensemble Γ de R^n qui peuvent être représentés comme la solution d'un système des inégalités linéaires : $\Gamma = \{x \in R^n : Ax \leq b\}$ où A est une matrice réelle $m \times n$ et b est un vecteur de dimension m .

Dans ce papier, nous nous concentrons sur une classe particulière des systèmes linéaires définis comme suit :

Definition 1: Le système des inégalités linéaires $Ax \leq b$ est inf-monotone (respectivement, sup-monotone) si chaque ligne de la matrice A a un coefficient strictement négatif (respectivement positif) au plus.

Exemple 2 :

Soit le système $Ax \leq b$ comme suit :

$$\text{où : } A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On remarque que chaque ligne de la matrice A a un coefficient strictement positif au plus. Alors le système est sup-monotone

Definition 2: Si l'inégalité est inf-monotone et sup-monotone en même temps, cette inégalité est dit bi-monotone. Un système est appelé bi-monotone si chaque inégalité est bi-monotone.

Definition 3: Une inégalité linéaire bi-monotone est de la forme $a_i x_i + a_j x_j \leq c$, avec le produit $a_i a_j$ négatif pour tout

i, j .

Exemple 3 :

Soit le système $Ax \leq b$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}. \text{ Le produit des coeffi-}$$

cients de chaque inégalité est négatif, alors, les inégalités sont bimonotone. Chaque ligne de la matrice A a au plus un coefficient strictement positif et négatif ■

VII. SYSTÈME MONOTONE AYANT UN PLUS PETIT ÉLÉMENT

Théorème 1 [15] [3]. Soit Γ l'ensemble des solutions d'un système inf-monotone (respectivement sup-monotone) $Ax \leq b$. (1) et (2) sont équivalents :

1. L'ensemble Γ est un inf-demi-treillis (respectivement sup-demi-treillis).

2. Si x et y sont deux éléments de Γ alors leur minimum $x \wedge y$ (respectivement, maximum $x \vee y$) appartient à Γ .

Propriété 1 A est un ensemble de solution d'un système bi-monotone $Ax \leq b$ est un treillis.

Le théorème suivant est important car il garantit l'existence d'une solution minimal ou maximal d'un ensemble Γ . Il est appliqué dans les parties suivantes car il prouve l'existence de la trajectoire au plus tôt ou le plus grand contrôle.

Théorème 2 L'ensemble Γ a un plus grand (respectivement, plus petit) élément si l'ensemble est non vide et a un majorant (respectivement, minorant).

VIII. TRAJECTOIRE AU PLUS TÔT :

Dans l'algèbre $(\max, +)$, il est bien connu que le graphe d'événements temporisé a une trajectoire au plus tôt exprimée par une égalité. Dans cette partie, nous analysons ce problème en utilisant le modèle proposé définis dans l'algèbre standard. L'état initial x_0 est connu et la commande u est dans \mathbb{R} . Le but est de prouver l'existence de la trajectoire minimale. Les inégalités d'entrée et d'état sont comme suit.

Pour $k \geq 1$,

$$W_{u \rightarrow x}^- x(k) \geq (T_{u \rightarrow x}) + W_{u \rightarrow x}^+ \cdot u(k)$$

$$\text{et } \begin{pmatrix} I \\ W_{x \rightarrow x}^- \end{pmatrix} x(k) \geq \begin{pmatrix} 0 \\ T_{x \rightarrow x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ W_{x \rightarrow x}^+ \end{pmatrix} x(k-1)$$

avec $x(0) = x_0$ dans \mathbb{R} .

La première ligne exprime la caractéristique non-décroissante de l'état. Les deux dernières inégalités sont un système linéaire d'inégalités qui sont exprimées de la forme $Ax \geq b$.

$$\begin{pmatrix} W_{u \rightarrow x}^- \\ I \\ W_{x \rightarrow x}^- \end{pmatrix} x(k) \geq \begin{pmatrix} T_{u \rightarrow x} \\ 0 \\ T_{x \rightarrow x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & W_{u \rightarrow x}^+ \\ I & 0 \\ W_{x \rightarrow x}^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k-1) \\ u(k) \end{pmatrix} \quad (7)$$

Propriété 2 Proposition 1 Connaissant la commande, il y a un état minimal $x(k)$ et une sortie pour l'état initial $x(0) = x_0$.

A. Algorithmes

Connaissant l'état initial $x(0) = x_0$ et la commande $u(k)$ sur un horizon arbitraire connu, différents algorithmes peuvent donner l'état et les trajectoires de sortie. Cependant, nous ne pouvons appliquer directement la programmation linéaire car la fonction objective n'est pas définie. Le résultat suivant peu connu [3] [7] résout cette difficulté.

Théorème

Les propositions suivantes sont équivalentes : 1. L'ensemble $\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ a un élément maximum x_0 2. x_0 est optimal pour le problème $\max \{cx, \text{ tel que } Ax \leq b \text{ pour tout } c > 0\}$.

Par conséquent, les approches utilisant les relations d'ordre donne les mêmes résultats que les problèmes utilisent la programmation linéaire pour un $c > 0$ arbitraire si le système inf-monotone (respectivement, sup-monotone) définit un ensemble non-vide avec un minorant (respectivement, majorant).

Ainsi, l'algorithme de Fourier-Motzkin qui donne une solution générale arbitraire, peut donner également la solution optimale après une adaptation [13] : il suffit pour cela d'entrer la fonction objective dans le système $Ax \leq b$ et que la variable associée avec la fonction objective soit la dernière dans la résolution.

Notons cependant que la complexité des algorithmes simplex et Fourier-Motzkin est exponentielle et double-exponentielle, respectivement dans le pire des cas. Le Simplex est cependant très efficace en moyenne [13].

IX. SYNTHÈSE DE LA COMMANDE DU GRAPHE D'ÉVÉNEMENTS TEMPORISÉ

Nous proposons ici une méthode pour calculer une commande optimale selon le critère de juste à temps : la commande doit retarder autant qu'il est possible le système, de telle sorte que la sortie se produise avant une trajectoire de référence z dans un horizon $[k_s, k_f]$. Comme nous ne disposons d'aucune information après l'événement k_f , il n'y a pas de demande sur la production et nous prenons $z(k) = +\infty$ (ou arbitrairement une grande valeur) pour $k > k_f$. Alors, le problème est la détermination de la plus grande commande de telle façon que $y(k) \leq z(k)$ sur l'horizon $[k_s, k_f]$. Nous supposons que le graphe d'événements temporisé est structurellement observable et commandable (voir [2]). Une définition est donnée ci-dessous. Une solution connue de ce problème existe dans l'algèbre $(\max, +)$ et est décrit dans la partie 5.6 de [2].

Plus formellement, le système est décrit ci-dessous par les inégalités du modèle et de la contrainte sur la sortie :

$$W_{u \rightarrow x}^- x(k) \geq (T_{u \rightarrow x}) + W_{u \rightarrow x}^+ \cdot u(k) \quad (8)$$

$$\begin{pmatrix} I \\ W_{x \rightarrow x}^- \end{pmatrix} x(k) \geq \begin{pmatrix} 0 \\ T_{x \rightarrow x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ W_{x \rightarrow x}^+ \end{pmatrix} x(k-1) \quad (9)$$

$$W_{x \rightarrow y}^- \cdot y(k) \geq T_{x \rightarrow y} + W_{x \rightarrow y}^+ \cdot x(k) \quad (10)$$

et

$$y(k) \leq z(k) \quad (11)$$

On peut écrire un système équivalent sous la forme $Ax \leq b$. A partir de (10) et (11) on obtient :

$$W_{x \rightarrow y}^+ \cdot x(k) \leq -T_{x \rightarrow y} + W_{x \rightarrow y}^- \cdot y(k) \leq -T_{x \rightarrow y} + W_{x \rightarrow y}^- \cdot z(k)$$

comme $W_{x \rightarrow y}^-$ est non-négative . à partir (9), on obtient :

$$\begin{pmatrix} I \\ W_{x \rightarrow x}^+ \end{pmatrix} x(k) \leq \begin{pmatrix} 0 \\ -T_{x \rightarrow x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I \\ W_{x \rightarrow x}^- \end{pmatrix} x(k+1)$$

Enfin, nous devons résoudre le système d'inégalités exprimé dans la forme $Ax \leq b : \forall k \in [k_s, k_f]$

$$\begin{pmatrix} W_{x \rightarrow y}^+ \\ I \\ W_{x \rightarrow x}^+ \end{pmatrix} x(k) \leq \begin{pmatrix} -T_{x \rightarrow y} \\ 0 \\ -T_{x \rightarrow x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_{x \rightarrow y}^- & 0 \\ 0 & I \\ 0 & W_{x \rightarrow x}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(k) \\ x(k+1) \end{pmatrix} \quad (12)$$

$$W_{u \rightarrow x}^+ u(k) \leq -T_{u \rightarrow x} + W_{u \rightarrow x}^- x(k)$$

Dans l'algèbre $(\max, +)$, l'observabilité structurelle [2] donne une condition pour observer *potentiellement* l'effet de la date de tir d'une transition interne sur au moins une sortie.

Definition 4: [2] Un graphe d'événements est structurellement observable si pour toutes les transitions internes, il existe un chemin d'accès à une transition de sortie au moins. Le nombre initial minimal des jetons de ces chemins des transitions internes est noté $\pi_{i,out}$.

L'hypothèse d'observabilité structurelle est utilisée dans la proposition ci-dessous :

Propriété Il existe une date maximale $x_i^+(k) \in \mathbb{R}$ sur l'horizon $[k_s, k_f - \pi_{i,out}]$ satisfaisant (12) pour chaque transition interne i .

La détermination de la commande optimale peut utiliser les algorithmes cités dans la partie VIII. A partir de k_f , l'algorithme peut résoudre successivement le système (12) avec une approche itérative en arrière de k_f à k_s . Dans la première étape, $x(k_f + 1)$ est égal à l'infini (ou à une grande valeur arbitraire).

X. EXAMPLE 1 (SUITE)

On réalise ci-dessous la synthèse de commande au plus tard et le calcul de la trajectoire au plus tôt correspondante.

La trajectoire de référence z est supposée connue et est donnée dans le tableau suivant :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$z(k)$	42	42	42	90	90	90	138	138	138	186

A partir de $z(k)$, l'ensemble des solutions des inégalités (12) a un élément maximum, qui peut être calculé. Le vecteur d'état le plus grand noté x^+ est donné dans le tableau suivant :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x^+(k)$	11	21	49	59	69	97	107	117	165	-
	23	31	63	71	79	111	119	127	175	-
	36	39	42	84	87	90	132	135	138	186

On peut calculer la commande u au plus tard à partir de x^+ :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$u(k)$	1	11	21	49	59	69	97	107	117	165

Soit un état initial $x(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Connaissant la commande u , on résout le système d'inégalités (7). La trajectoire au plus tôt, est donnée dans le tableau suivant :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$x(k)$	11	21	31	59	69	79	107	117	127	175
	19	29	39	67	77	87	115	125	135	183
	22	32	42	70	80	90	118	128	138	186

La trajectoire au plus tôt correspondante y est :

k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$y(k)$	22	32	42	70	80	90	118	128	138	186

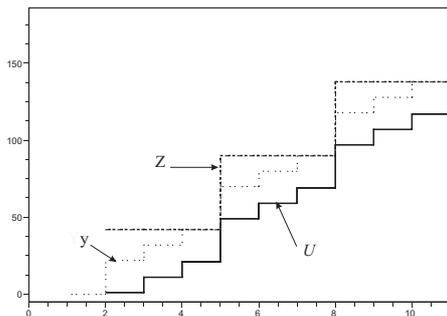


Fig. 3. La trajectoire de simulation

XI. CONCLUSION

Dans ce document nous avons présenté, un modèle entrée/sortie sous la forme d'un système d'inégalités qui peut décrire un graphe d'événements temporisés en algèbre standard. Des matrices d'incidences particulières liées aux transitions d'entrées, internes et de sorties ont été introduites. On a en particulier abordé une méthode de réécriture du modèle telle que initialement chaque place interne (externe, respectivement) contienne un jeton (aucun jeton, respectivement). Nous proposerons un travail plus avancé par la suite. De ce fait, les itérations du modèle en régime autonome seront analogues à celles du modèle d'état de l'automatique classique. Elles dépendront exclusivement d'un sous-ensemble des inéquations liées aux transitions internes. Dans la partie VIII, nous montrons que la détermination de la trajectoire au plus tôt conduit à un système inf-monotone.

Dans la partie IX, on présente le problème de la commande en juste à temps des graphes d'événements temporisés. Classiquement, ce problème est résolu dans l'algèbre $(\max, +)$ à l'aide de la relation d'ordre et la théorie de la résiduation. La détermination de la commande la plus tardive donne un système sup-monotone. La propriété de la partie IX montre que la trajectoire maximale existe. La résolution peut être fait avec algorithme Fourier-Motzkin ou alors la programmation linéaire en utilisant cependant un critère particulier. Une perspective parmi d'autres est par exemple d'ajouter dans le problème de poursuite de trajectoire des contraintes additionnelles et de déterminer l'espace des conditions initiales autorisant la commande.

RÉFÉRENCES

- [1] B. Aspvall and Y. Shiloach. A polynomial time algorithm for solving systems of linear inequalities with two variables per inequality, Siam J. Comput. Vol.9, N°4, November 1980.
- [2] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder J.P. and Quadrat, Synchronization and Linearity. An Algebra for Discrete Event Systems, New York, Wiley, 1992.
- [3] R.W. Cottle and A.F. Veinott. Polyhedral sets having a least element, Mathematical Programming 3, pages 238-249, 1972.
- [4] Ph. Declerck and K. Didi Alaoui. 2005, Extremal trajectories in P-time Event Graphs. Application to control synthesis with specifications. 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference, ECC 2005, Seville Spain, December 12-15,
- [5] Ph. Declerck, A. Guezzi and J.-L. Boimond. Cycle Time of P-time Event Graphs, 4th International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics (ICINCO 2007), Angers, France, 09-12 may 2007.
- [6] Ph. Declerck, A. Guezzi and Cécile Gros. Temps de cycle des Graphes d'Événements Temporisés et P-temporels. La 5ème Conférence Internationale Francophone d'Automatique CIFA'2008 Bucarest (Roumanie).
- [7] H. Gabbay. A note on polyhedral sets having a least element, Mathematical Programming 11, pages 94-96, 1976.
- [8] A. Guezzi, Ph. Declerck and J.-L. Boimond. From monotone inequalities to Model Predictive Control 13th IEEE International Conference on Emerging Technologies and Factory Automation Hamburg, Germany 2008.
- [9] W. Khansa. réseaux de Petri P-temporels. Contribution à l'étude des systèmes à Événements discrets. Thèse. Université de Savoie. Mars 1997.
- [10] T. Murata. Petri Nets : Properties, Analysis and Applications, Proceedings of the IEEE, Vol. 77, No. 4, 1989.
- [11] Maurice Queyranne, Fabio Tardella. Bimontone linear inequalities and sublattices of R^n , Linear Algebra and its Applications 413 (2006) 100-120.
- [12] G. Ramalingan, J.Song, L. Joskowicz and R.E Miller. Solving Systems of Difference Constraints Incrementally. Algorithmica, 23 : 261-275, 1999.
- [13] A. Schrijver. Theory of linear and integer programming. John Wiley and Sons, 1987.
- [14] B. de Schutter and T. van den Boom, Model predictive control for max-plus-linear discrete event systems, Automatica, Vol. 37(7), 2001 pp. 1049-1056.
- [15] A. Veinott. Extreme Points of Leontief Substitution Systems. Linear Algebra and its Applications 1, 181-194, 1968.