

Temps de cycle des Graphes d'Événements Temporisés et P-temporels

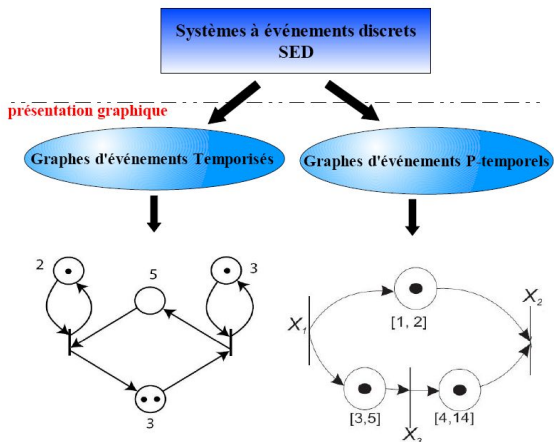
A. Guezzi

Ph. Declerck
Université d'Angers - LISA
<http://www.istia.univ-angers.fr/LISA>

22 janvier 2009

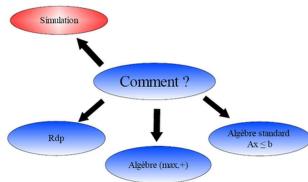
Plan

- 1 Objectif
- 2 Les graphes d'événements P-temporels
- 3 Modèle algébrique matriciel d'un graphe d'événements P-temporel
- 4 Temps de cycle
- 5 Fonctionnement au plus tôt
- 6 Système monotone
- 7 Conclusion



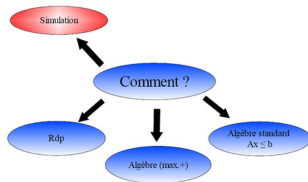
Objectif

Proposer des techniques algébriques permettant de calculer le temps de cycle noté λ (qui est égal à l'inverse du taux de production).



Rdp

- GE p-temporel : [Khansa 96]
- Une approche classique pour les GET se base sur l'analyse des circuits : [A.Giua 00] et [J.Magott 84]

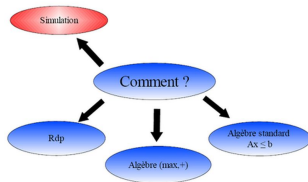


Rdp

- GE p-temporel : [Khansa 96]
- Une approche classique pour les GET se base sur l'analyse des circuits : [A.Giua 00] et [J.Magott 84]

(Max,+)

GET : (Théorème de karp [Gaubert 95])



Rdp

- GE p-temporel : [Khansa 96]
- Une approche classique pour les GET se base sur l'analyse des circuits : [A.Giua 00] et [J.Magott 84]

(Max,+)

GET : (Théorème de karp [Gaubert 95])

Algèbre standard

Lemme de Farkas [ICINCO 07]

Plan

1. Objectifs
- 2. Les graphes d'événements P-temporels**
3. Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel
4. Temps de cycle
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
5. Fonctionnement au plus tôt
6. Système monotone
7. Conclusion

Graphe d'événements

Un graphe d'événements est un réseau de Petri tel que toute place $p \in \mathcal{P}$ a exactement une transition amont et une transition aval

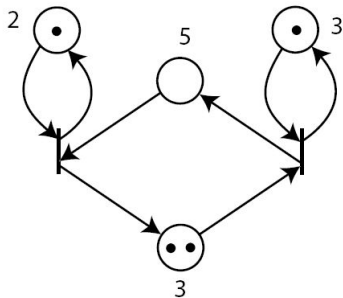


FIG.: Graphe d'événements temporisé

Les graphes d'événements P-temporels

Grphe d'événements P-temporel

Un graphe d'événements P-temporel est décrit par le couple $\langle \mathcal{R}, IS \rangle$ où : \mathcal{R} un graphe d'événements ; $IS : P \rightarrow R^+ \times (R^+ \cup \{+\infty\})$

$$p_i \rightarrow is_i = [a_i, b_i]$$

avec $0 \leq a_i \leq b_i$ où is_i définit l'intervalle statique de temps de séjour d'une marque dans la place p_i .

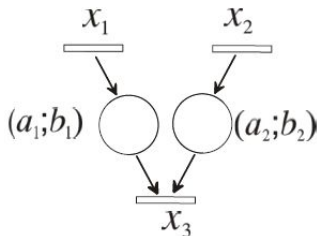


FIG.: Graphe d'événements P-temporel

Les graphes d'événements P-temporels

Nous associons un dateur $x_i(k)$ pour chaque transition.

Les graphes d'événements P-temporels

Nous associons un dateur $x_i(k)$ pour chaque transition.

Dateur : $x(k)$ est la date à laquelle se produit la k^{ieme} activation de la transition i .

Les graphes d'événements P-temporels

Nous associons un dateur $x_i(k)$ pour chaque transition.

Dateur : $x(k)$ est la date à laquelle se produit la k^{ieme} activation de la transition i .

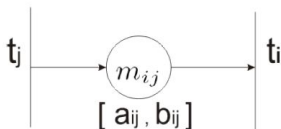
Sous l'hypothèse d'un fonctionnement FIFO :

La borne inférieure :

$$\forall x_j \in \leftarrow x_i, a_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k)$$

La borne supérieure :

$$\forall x_j \in \leftarrow x_i, x_i(k) \leq b_{ij} + x_j(k - m_{ij})$$



Les graphes d'événements P-temporels

Proposition

Pour qu'un graphe d'événements p-temporel respecte un fonctionnement admissible, la modélisation correspondant à chacune de ses transitions, est donnée par l'expression suivante : $\bigoplus_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + a_j) \leq x_i(k) \leq \bigwedge_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + b_j)$ avec :

\bigoplus : maximum ; \bigwedge : minimum.

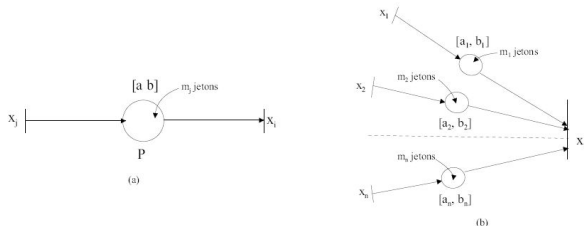


FIG.: Partie d'un graphe d'événements P-temporel

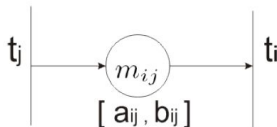
Plan

1. Objectifs
2. Les graphes d'événements P-temporels
- 3. Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel**
4. Temps de cycle
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
5. Fonctionnement au plus tôt
6. Système monotone
7. Conclusion

Le modèle algébrique

La borne inférieure

$$a_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

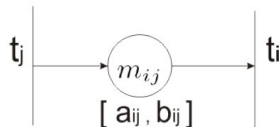


Le modèle algébrique

La borne inférieure

$$a_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

$$x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$



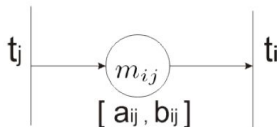
- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} noté a_{ij} .

Le modèle algébrique

La borne inférieure

$$a_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

$$x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$



- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} noté a_{ij} .

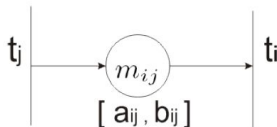
Le modèle algébrique

La borne inférieure

$$a_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

$$x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} noté p_l .



$$G_m^- = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Le modèle algébrique

La borne inférieure

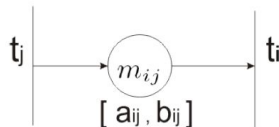
$$a_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

$$x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} noté p_l .

$$x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

- Le poids de l'arc sortant de la place p_{ij} , de p_{ij} noté p_l vers la transition t_i



$$G_m^- = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Le modèle algébrique

La borne inférieure

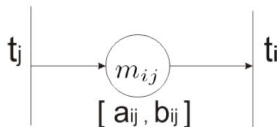
$$a_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

$$x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} noté p_l .

$$x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

- Le poids de l'arc sortant de la place p_{ij} , de p_{ij} noté p_l vers la transition t_i



$$G_m^- = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Le modèle algébrique

La borne inférieure

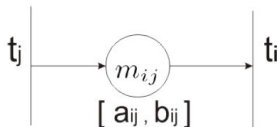
$$a_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \leq x_i(k) \Leftrightarrow x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

$$x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} noté p_l .

$$x_j(k - m_{ij}) - x_i(k) \leq -a_{ij}$$

- Le poids de l'arc sortant de la place p_{ij} , de p_{ij} noté p_l vers la transition t_i



$$G_m^- = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$G_0^- = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

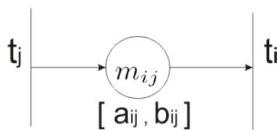
Le modèle algébrique

La borne supérieure

$$x_i(k) \leq b_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \Leftrightarrow -x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

$$-x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_i vers la place p_{ij} noté p_l .



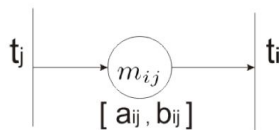
Le modèle algébrique

La borne supérieure

$$x_i(k) \leq b_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \Leftrightarrow -x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

$$-x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

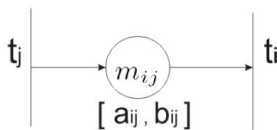
- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_i vers la place p_{ij} noté p_l .



Le modèle algébrique

La borne supérieure

$$x_i(k) \leq b_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \Leftrightarrow -x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$



$$-x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

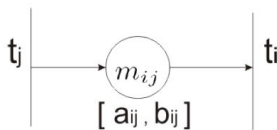
- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_j vers la place p_{ij} noté p_l .

$$G_m^+ = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Le modèle algébrique

La borne supérieure

$$x_i(k) \leq b_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \Leftrightarrow -x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$



$$-x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_i vers la place p_{ij} noté p_l .

$$-x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

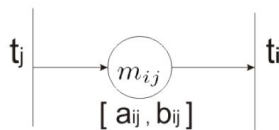
- Le poids de l'arc sortant de la place p_{ij} , de la place p_{ij} noté p_l vers la transition t_j

$$G_m^+ = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Le modèle algébrique

La borne supérieure

$$x_i(k) \leq b_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \Leftrightarrow -x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$



$$-x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_i vers la place p_{ij} noté p_l .

$$-x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

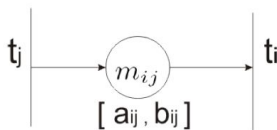
- Le poids de l'arc sortant de la place p_{ij} , de la place p_{ij} noté p_l vers la transition t_j

$$G_m^+ = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Le modèle algébrique

La borne supérieure

$$x_i(k) \leq b_{ij} + x_j(k - m_{ij}) \Leftrightarrow -x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$



$$-x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

- Le poids de l'arc entrant dans la place p_{ij} , de t_i vers la place p_{ij} noté p_l .

$$-x_j(k - m_{ij}) + x_i(k) \leq b_{ij}$$

- Le poids de l'arc sortant de la place p_{ij} , de la place p_{ij} noté p_l vers la transition t_j

$$G_m^+ = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & -1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$G_0^+ = \begin{pmatrix} & & j & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ l & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Écriture algébrique

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k-m) \\ x(k-m+1) \\ \vdots \\ x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

avec : $G^- = [G_m^- G_{m-1}^- G_{m-2}^- \cdots G_1^- G_0^-]$ et $G^+ = [G_m^+ G_{m-1}^+ G_{m-2}^+ \cdots G_1^+ G_0^+]$.

Écriture algébrique

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k-m) \\ x(k-m+1) \\ \vdots \\ x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

avec : $G^- = [G_m^- G_{m-1}^- G_{m-2}^- \cdots G_1^- G_0^-]$ et $G^+ = [G_m^+ G_{m-1}^+ G_{m-2}^+ \cdots G_1^+ G_0^+]$.

- 1 m est le nombre maximum de jetons pour toutes les places dans le marquage initial ;

Écriture algébrique

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k-m) \\ x(k-m+1) \\ \vdots \\ x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

avec : $G^- = [G_m^- G_{m-1}^- G_{m-2}^- \cdots G_1^- G_0^-]$ et $G^+ = [G_m^+ G_{m-1}^+ G_{m-2}^+ \cdots G_1^+ G_0^+]$.

- 1 m est le nombre maximum de jetons pour toutes les places dans le marquage initial ;
- 2 G_i^- contient les poids avec le signe plus, des arcs entrant des places dont le marquage initial est i pour tout marquage même nul.

Écriture algébrique

$$\begin{pmatrix} G^- \\ G^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k-m) \\ x(k-m+1) \\ \vdots \\ x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

avec : $G^- = [G_m^- G_{m-1}^- G_{m-2}^- \cdots G_1^- G_0^-]$ et $G^+ = [G_m^+ G_{m-1}^+ G_{m-2}^+ \cdots G_1^+ G_0^+]$.

- 1 m est le nombre maximum de jetons pour toutes les places dans le marquage initial ;
- 2 G_i^- contient les poids avec le signe plus, des arcs entrant des places dont le marquage initial est i pour tout marquage même nul.
- 3 En plus, la matrice G_0^- contient avec le signe moins, le poids de l'arc sortant de chaque place.

Exemple

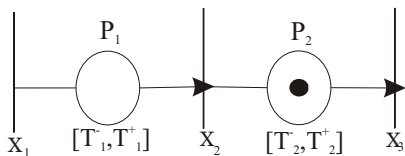


FIG.: Graphe d'Événements P-temporel 1

Exemple

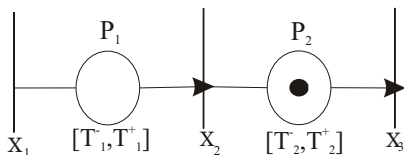


FIG.: Graphe d'Événements P-temporel 1

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T_1^- \\ -T_2^- \\ T_1^+ \\ T_2^+ \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T_1^- \\ -T_2^- \\ T_1^+ \\ T_2^+ \end{pmatrix}$$

Les matrices sont donc : $G^- = [G_1^- G_0^-]$ et $G^+ = [G_1^+ G_0^+]$ où $G_1^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,
 $G_0^- = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $G_1^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $G_0^+ = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Notons
 que $-W^- = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Remarque

- Nous pouvons déduire la relation suivante avec la matrice d'incidence W :

$$W = \sum_{i=0}^{i=m} G_i^-$$

Remarque

- Nous pouvons déduire la relation suivante avec la matrice d'incidence W :

$$W = \sum_{i=0}^{i=m} G_i^-$$

- Dans le cas où le graphe d'événements a initialement exactement un jeton par place, $m=1$, $G_1^- = W^+$ et $G_0^- = -W^-$.

Remarque

- Nous pouvons déduire la relation suivante avec la matrice d'incidence W :

$$W = \sum_{i=0}^{i=m} G_i^-$$

- Dans le cas où le graphe d'événements a initialement exactement un jeton par place, $m=1$, $G_1^- = W^+$ et $G_0^- = -W^-$.
- Dans le cas où le graphe d'événements n'a initialement aucun jeton par place, $m=0$, $G_0^- = W$.

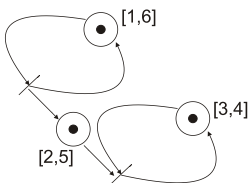


FIG.: Graphe d'Événements P-temporel 2

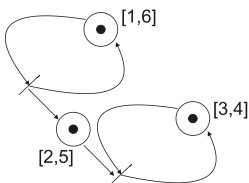


FIG.: Graphe d'Événements P-temporel 2

$$\begin{pmatrix} W^+ & -W^- \\ -W^+ & W^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

avec $x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) & x_2(k) \end{pmatrix}^t$,

$$W^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad -W^- = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$-T^- = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T^+ = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Cas général (Écriture réduite)

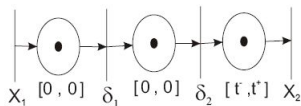
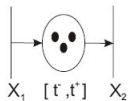
Chaque place contenant $k \geq 2$ jetons, l'idée générale est de dupliquer chaque place en k places, chacune contenant un seul jeton.

$$\begin{pmatrix} H^- \\ H^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(k-1) \\ X(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ 0 \\ T^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cas général (Écriture réduite)

Chaque place contenant $k \geq 2$ jetons, l'idée générale est de dupliquer chaque place en k places, chacune contenant un seul jeton.

$$\begin{pmatrix} H^- \\ H^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X(k-1) \\ X(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ 0 \\ T^+ \\ 0 \end{pmatrix}$$



Plan

1. Objectifs
- Les graphes d'événements P-temporels
- Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel
- Temps de cycle**
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
- Fonctionnement au plus tôt
- Système monotone
- Conclusion

Problématique

Calculer le taux de production minimal et maximal d'un Graphe d'Événements P-temporel

Problématique

Calculer le taux de production minimal et maximal d'un Graphe d'Événements P-temporel

Hypothèse

- 1 Chaque place a au plus un jeton : $m_{ij} = 0$ ou 1 ;

Problématique

Calculer le taux de production minimal et maximal d'un Graphe d'Événements P-temporel

Hypothèse

- 1 Chaque place a au plus un jeton : $m_{ij} = 0$ ou 1 ;
- 2 Un comportement 1-périodique : $x(k+1) = \lambda.u + x(k)$ avec $u = (1, 1, \dots, 1)^t$ et le temps de cycle est noté λ .

Plan

1. Objectifs
2. Les graphes d'événements P-temporels
3. Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel
4. Temps de cycle
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
5. Fonctionnement au plus tôt
6. Système monotone
7. Conclusion

Approche 1

- $m = 1$, en remplaçant $x(k+1)$:

$$\begin{pmatrix} G_1^- & G_0^- \\ G_1^+ & G_0^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda.u + x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

Approche 1

- $m = 1$, en remplaçant $x(k+1)$:

$$\begin{pmatrix} G_1^- & G_0^- \\ G_1^+ & G_0^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda.u + x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

- d'où

$$\begin{pmatrix} (G_1^- + G_0^-) & G_0^- \cdot u \\ (G_1^+ + G_0^+) & G_0^+ \cdot u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

Approche 1

- $m = 1$, en remplaçant $x(k+1)$:

$$\begin{pmatrix} G_1^- & G_0^- \\ G_1^+ & G_0^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \cdot u + x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

- d'où

$$\begin{pmatrix} (G_1^- + G_0^-) & G_0^- \cdot u \\ (G_1^+ + G_0^+) & G_0^+ \cdot u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

- Alors on peut écrire $\begin{pmatrix} W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$

Approche 1

- $m = 1$, en remplaçant $x(k+1)$:

$$\begin{pmatrix} G_1^- & G_0^- \\ G_1^+ & G_0^+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k) \\ \lambda \cdot u + x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

- d'où

$$\begin{pmatrix} (G_1^- + G_0^-) & G_0^- \cdot u \\ (G_1^+ + G_0^+) & G_0^+ \cdot u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

- Alors on peut écrire $\begin{pmatrix} W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$

Remarque

Chercher λ_{min} et le vecteur x avec $x \geq L$ (respectivement λ_{max} et le vecteur x avec $x \leq U$)

Une formulation du type programmation linéaire de la forme $\min \lambda$ (respectivement, $\max \lambda$) sous la contrainte de la forme $Ax \leq b$

$\min \lambda$ sous la contrainte :

$$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -L \\ -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (1)$$

$\max \lambda$ sous la contrainte :

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} U \\ -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (2)$$

x, λ dans \mathbb{R}

Algorithme de Simplexe

Principes de base : La zone des solutions définie par les contraintes forme un polyèdre, et la recherche de l'optimum peut être restreinte à l'ensemble de ses points extrêmes.

La méthode du simplexe explore les points extrêmes en améliorant à chaque itération la valeur du critère.

Avantages

- La complexité de la méthode n'est pas polynomiale mais pratiquement elle donne de très bon résultats [Schrijver] ;
- Bien connu (Algorithme disponible).

Plan

1. Objectifs
2. Les graphes d'événements P-temporels
3. Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel
4. Temps de cycle
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
5. Fonctionnement au plus tôt
6. Système monotone
7. Conclusion

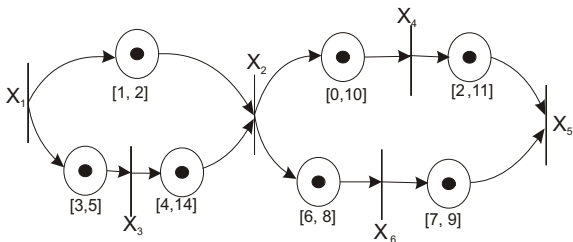


FIG.: Graphe d'Événements P-temporel 3

$$\begin{pmatrix} W^+ & -W^- \\ -W^+ & W^- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(k-1) \\ x(k) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

avec

$$x(k) = (x_1(k) \quad x_2(k) \quad x_3(k) \quad x_4(k) \quad x_5(k) \quad x_6(k))^t,$$

$$W^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$W^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad -T^- = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -4 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \text{et } T^+ = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 14 \\ 10 \\ 8 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Approche 1

Pour λ_{min} et avec $L = 0$,

$$\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \lambda \end{pmatrix} = (3 \ 0 \ 1 \ 0 \ 3 \ 1 \ 5)^t \text{ et } \lambda_{min} = 5.$$

Pour λ_{max} et avec $U^t = (50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50)$,

$$\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \lambda \end{pmatrix} = (50 \ 33 \ 37 \ 25 \ 10 \ 21 \ 18)^t \text{ et } \lambda_{max} = 18.$$

Plan

1. Objectifs
2. Les graphes d'événements P-temporels
3. Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel
4. Temps de cycle
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
5. Fonctionnement au plus tôt
6. Système monotone
7. Conclusion

Approche 2

- En appliquant le théorème de la dualité

Forme duale

À tout PL canonique

$$\begin{array}{l} \text{Max } c \cdot x \\ \text{sous } A \cdot x \leq b \\ x \text{ quelconque} \end{array}$$

Approche 2

- En appliquant le théorème de la dualité

Forme duale

À tout PL canonique

$$\begin{array}{l} \text{Max } c.x \\ \text{sous } A.x \leq b \\ x \text{ quelconque} \end{array}$$

On associe un problème dual

$$\begin{array}{l} \text{Min } y.b \\ \text{sous } y.A = c \\ y \geq 0 \end{array}$$

- Notre problème canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -L \\ -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

et $c = (0 \dots 0 \quad -1)$ comme

$$\min \lambda = \max(-\lambda) = \max(0 \dots 0 \quad -1) \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

- Notre problème canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -L \\ -T^- \\ T^+ \end{pmatrix}$$

et $c = (0 \dots 0 \quad -1)$ comme

$$\min \lambda = \max(-\lambda) = \max(0 \dots 0 \quad -1) \begin{pmatrix} x \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

- Le problème dual est comme suit :

$$\min (-L^t \quad -(T^-)^t \quad (T^+)^t) \cdot y^t$$

$$\text{sous } y \cdot \begin{pmatrix} -I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} = (0 \dots 0 \quad -1) \text{ avec } y \geq 0$$

- 1 L'approche 2 ne donne pas la date où chaque transition doit initier son premier tir, ni à priori, le temps de cycle λ mais un certain vecteur y ;
- 2 On note $b_1^t = (-L^t \quad (-T^-)^t \quad (T^+)^t)$ et $b_2^t = (U^t \quad (-T^-)^t \quad (T^+)^t)$

- 1 L'approche 2 ne donne pas la date où chaque transition doit initier son premier tir, ni à priori, le temps de cycle λ mais un certain vecteur y ;
- 2 On note $b_1^t = (-L^t \quad (-T^-)^t \quad (T^+)^t)$ et $b_2^t = (U^t \quad (-T^-)^t \quad (T^+)^t)$

Théorème

Soit x une solution admissible d'un PL canonique et y une solution admissible de son dual. Alors $cx \leq yb$

- 1 L'approche 2 ne donne pas la date où chaque transition doit initier son premier tir, ni à priori, le temps de cycle λ mais un certain vecteur y ;
- 2 On note $b'_1 = (-L^t \quad (-T^-)^t \quad (T^+)^t)$ et $b'_2 = (U^t \quad (-T^-)^t \quad (T^+)^t)$

Théorème

Soit x une solution admissible d'un PL canonique et y une solution admissible de son dual. Alors $cx \leq yb$

D'après le théorème de dualité, nous avons respectivement $-y \cdot b_1 \leq \lambda$ et $\lambda \leq y \cdot b_2$ ainsi que

$$\lambda_{min} = -y_{min} \cdot b_1 \text{ et } \lambda_{max} = y_{max} \cdot b_2.$$

Plan

1. Objectifs
2. Les graphes d'événements P-temporels
3. Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel
4. Temps de cycle
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
5. Fonctionnement au plus tôt
6. Système monotone
7. Conclusion

Approche 2

Les valeurs correspondant aux temporisations du Graphe d'Événements sont les 14

dernières valeurs. $b_1^t = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ -3 \ -4 \ 0 \ -6 \ -2$
 $-7 \ 2 \ 5 \ 14 \ 10 \ 8 \ 11 \ 9)$

$y = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$
 $1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$

et $\lambda_{min} = 5$.

$b_2^t = (50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ 50 \ -1 \ -3 \ -4$
 $0 \ -6 \ -2 \ -7 \ 2 \ 5 \ 14 \ 10 \ 8 \ 11 \ 9)$

$y = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$
 $0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$

et $\lambda_{max} = 18$.

- On considère une boulangerie semi-industrielle qui fabrique deux types de pains, Pain 1 (qualité supérieure) et Pain 2 (qualité ordinaire).
- La séquence de fabrication sur les quatre machines disponibles : le pétrin (M1), la diviseuse (M2), la façonneuse (M3) et le four (M4).

Pains 1 et 2 : $M1 \rightarrow M2 \rightarrow M3 \rightarrow M4$

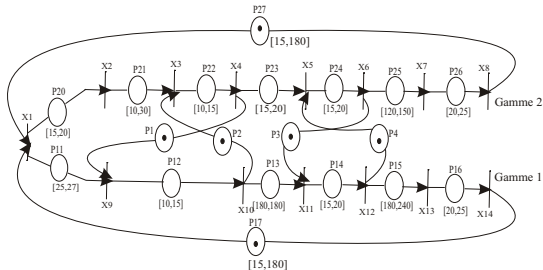


FIG.: système de production du pain

Approche 1

Pour λ_{min} et avec $L = 0$,

$$\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 20 & 35 & 50 & 70 & 90 & 240 & 265 & 25 \\ & 35 & 215 & 230 & 410 & 430 & 445 & & \end{pmatrix}^t \text{ et } \lambda_{min} = 445.$$

Pour λ_{max} et avec $U_i = 500$,

$$\begin{pmatrix} x^{(k)} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55 & 75 & 105 & 120 & 140 & 160 & 310 & 335 \\ & 82 & 97 & 277 & 292 & 475 & 500 & 460 \end{pmatrix}^t$$

et $\lambda_{max} = 460$.

Approche 2

Pour λ_{min} ,

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & \end{pmatrix}$$

On obtient $\lambda_{min} = 445$.

Pour λ_{max} ,

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \end{pmatrix}$$

On obtient $\lambda_{max} = 460$.

Plan

1. Objectifs
2. Les graphes d'événements P-temporels
3. Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel
4. Temps de cycle
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
5. Fonctionnement au plus tôt
6. Système monotone
7. Conclusion

Calcul du trajectoire

Objectif

Calculer le fonctionnement au plus tôt (la date de tir au plus tôt) du graphe d'événements temporisé pour un temps de cycle connu λ_0

Pour un λ_0 :

$$\begin{pmatrix} -I & 0 \\ W & -M_0 \\ -W & M_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \lambda_0 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -L \\ -T^- \\ T^+ \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{pmatrix} -I \\ W \\ -W \end{pmatrix} \cdot (x) \leq \begin{pmatrix} -L \\ -T^- + \lambda_0 M_0 \\ +T^+ - \lambda_0 M_0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Plan

1. Objectifs
2. Les graphes d'événements P-temporels
3. Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel
4. Temps de cycle
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
5. Fonctionnement au plus tôt
6. Système monotone
7. Conclusion

Système monotone

$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ Où :

A une matrice réel et b un vecteur réel.

Définition

Un système d'inégalités linéaires $Ax \leq b$ est sup-monotone (resp., inf-monotone) si chaque ligne de la matrice A a au plus un coefficient positif (resp. négatif).

Système monotone

$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ Où :

A une matrice réel et b un vecteur réel.

Définition

Un système d'inégalités linéaires $Ax \leq b$ est sup-monotone (resp., inf-monotone) si chaque ligne de la matrice A a au plus un coefficient positif (resp. négatif).

Exemple

le système $Ax \leq b$ est comme suit :

$$\text{où : } A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

On remarque que chaque ligne de la matrice A a au plus un coefficient positif. Alors le système est sup-monotone

Un système monotone à un plus petit élément

Propriété

Γ l'ensemble des solutions du système inf-monotone $Ax \leq b$ est un demi treillis inférieur.

Théorème

L'ensemble Γ a un plus grand (respectively, plus petit) élément si l'ensemble est non vide et a un majorant (respe. , minorant).

Calcul du trajectoire au plus tôt

A partir du Système :

$$\begin{pmatrix} -I \\ W \\ -W \end{pmatrix} \cdot (x) \leq \begin{pmatrix} -L \\ -T^- + \lambda_0 M_0 \\ +T^+ - \lambda_0 M_0 \end{pmatrix} \quad (5)$$

On remarque :

- Le système (5) est sup-monotone ;
- L'ensemble des solution réelles du système (5) est non vide et a un minorant ;

Alors il possède un plus petit élément : le vecteur noté x_0 .

Plan

1. Objectifs
2. Les graphes d'événements P-temporels
3. Modèle algébrique matriciel d'un Graphe d'événements P-temporel
4. Temps de cycle
 - Approche 1
 - Exemple
 - Approche 2
 - Exemple
5. Fonctionnement au plus tôt
6. Système monotone
7. Conclusion

Conclusion

- La première approche détermine les temps de cycles minimaux et maximaux ainsi que la première date de tir des transitions ;

Conclusion

- La première approche détermine les temps de cycles minimaux et maximaux ainsi que la première date de tir des transitions ;
- La seconde permet d'identifier une structure critique le temps de cycle minimal (respectivement le temps de cycle maximal), c'est à dire correspondant à la vitesse maximale (respectivement minimale) du système ;

Conclusion

- La première approche détermine les temps de cycles minimaux et maximaux ainsi que la première date de tir des transitions ;
- La seconde permet d'identifier une structure critique le temps de cycle minimal (respectivement le temps de cycle maximal), c'est à dire correspondant à la vitesse maximale (respectivement minimale) du système ;
- Calcul du fonctionnement au plus tôt en utilisant la notion des systèmes monotones.

Conclusion

- La première approche détermine les temps de cycles minimaux et maximaux ainsi que la première date de tir des transitions ;
- La seconde permet d'identifier une structure critique le temps de cycle minimal (respectivement le temps de cycle maximal), c'est à dire correspondant à la vitesse maximale (respectivement minimale) du système ;
- Calcul du fonctionnement au plus tôt en utilisant la notion des systèmes monotones.
- **Perspective :**
 - 1 La détermination de l'ensemble des structures critiques des Graphes d'événements P-temporels ;
 - 2 Optimisation du markage initial M_0 .

Publication

- Ph. Declerck, A. Guezzi, Cécile Gros, Temps de cycle des Graphes d'Événements Temporisés et P-temporels. (Bucarest, Roumanie CIFA 08, 2008).
- A. Guezzi, Ph. Declerck , J.L. Boimond, From monotone inequalities to Model Predictive Control, ETFA 2008, Hamburg, Germany 15-18 September 2008.