TD1, Géométrie dans le plan et l'espace

(3 séances de 2h40)

Exercice 1

1. Le point $M(1,0)$ appartient-il à la droite (AB), avec $A(-2,1)$ et $B(5,10)$?
2. Calculer la valeur de m pour que le point de coordonnées $C(2,m)$ appartienne à la droite (AB) sachant que les points A et B ont pour coordonnées respectives $(1,0)$ et $(-1,4)$.

Exercice 2

1. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_1$ donnée par le système d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = t. \end{cases}$$
2. Donner une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}_2$ donnée par le système d'équations paramétriques :
$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 1 + 3t. \end{cases}$$
3. Donner un système d'équations paramétriques de la droite d'équation cartésienne :
$$x + 2y - 4 = 0.$$

Exercice 3

1. Écrire une équation cartésienne des droites (AB) et (CD) avec $A(1,1)$, $B(2,2)$, $C(5,-1)$, $D(2,0)$.
2. Déterminer les coordonnées de l'intersection des droites (AB) et (CD).
3. Pour quelles valeurs du paramètre réel m les droites (EF) et (GH) ont-elles une intersection non-vide, où $E(2,0)$, $F(3,4)$, $G(2,2)$, $H(3,m)$?
4. Interpréter géométriquement les positions possibles de H en fonction de m.
5. En déduire une interprétation géométrique de l'ensemble des droites (GH) en fonction de m.
6. Pour quelles valeurs du paramètre réel m l'intersection des droites (EF) et (GH) est un point d'abscisse nulle ?

Exercice 4

1. On considère les trois points du plan A, B et C de coordonnées respectives $A(-3,3)$, $B(5,2)$, et $C(2,1)$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?
2. Si oui, donner une équation cartésienne de la droite qui les contient.

3. Reprendre les questions précédentes avec les coordonnées suivantes :
$$A(1,1), B(-2,2), C(2,1).$$
4. Reprendre les questions précédentes avec les coordonnées suivantes :
$$A(4,-3), B(0,-1), C(2,-2).$$

Exercice 5
Dans cet exercice, on travaille dans l'espace.

1. Trouver un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}_1$ de l'espace définie par le système d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} 2x+3y+5z &= 0, \\ x+y+z &= 0. \end{cases}$$
2. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}_2$ de l'espace passant par le point O de coordonnées $(0,0,0)$ et de vecteur directeur $\mathbf{u}$ ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
3. Représenter graphiquement la droite $\mathcal{D}_2$.
4. Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite $\mathcal{D}_3$ de l'espace passant par $M(1,0,-1)$ et de vecteur directeur $\mathbf{v}$ ayant pour coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

1. Trouver un système d'équations paramétriques du plan défini par $x+3y-z=1$.
2. Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(1,1,-1)$ et dirigé par les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ayant pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7
Pour quelles valeurs du paramètre réel λ les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ données par
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_1 \Leftrightarrow (\lambda-1)x-(2\lambda-5)y+3=0,$$
et
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow (2\lambda+3)x-(\lambda+5)y-8=0,$$
sont-elles parallèles ? perpendiculaires ?

Exercice 8
Donner les coordonnées du point d'intersection des droites $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ d'équations paramétriques respectives :
$$\begin{cases} x = 3+3t \\ y = -2-3t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = -3t \\ y = 3+2t \end{cases}.$$

Exercice 9

1. Déterminer les équations paramétriques de la droite qui contient le point $(1,-2,-1)$ et parallèle à la droite décrite par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -2x & = & y-5, \\ 3x & = & z+7. \end{array}\right.$$

2. Déterminer les équations paramétriques de la droite d'intersection des deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x-y+2z+2=0$ et $2x+y-3z+1=0$.

Exercice 10

1. Donner une équation du plan passant par $P_0(1,-1,2)$ et orthogonal au vecteur $\mathbf{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. Donner une équation du plan passant par les points de coordonnées $(1,4,2)$, $(-1,0,2)$, et $(3,5,1)$.
3. Donner une équation du plan passant par le milieu du segment $[AB]$, où $A(3,2,-1)$ et $B(5,0,7)$, et perpendiculaire à la droite (AB).
4. Donner une équation du plan passant par $P(1,1,0)$ et $Q(1,3,-2)$ et parallèle à l'axe Oy.

Exercice 11

Étant donnés deux réels a et b strictement positifs, on considère les points du plan $A(a,0)$, $B(a,-a)$, $C(0,b)$ et $D(-b,b)$.

1. Donner une équation cartésienne de (BC) et (AD) et montrer que ces droites sont sécantes (on ne cherchera pas à calculer les coordonnées de leur point d'intersection).
2. Écrire une équation cartésienne de Δ la hauteur issue de $O(0,0)$ dans le triangle OAC.
3. Montrer que les droites (BC), (AD) et Δ sont concourantes.

Exercice 12

Déterminer la distance qui sépare le point A du plan $\mathcal{P}$ pour chacun des deux cas particuliers suivants :

1. $A(3,-1,2)$ et le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $2x+6y-z=7$;
2. $A(1,2,-3), \mathcal{P}$ passe par le point $B(-2,1,0)$ et est dirigé par les vecteurs $\mathbf{v}(1,-6,2)$ et $\mathbf{w}(3,-1,1)$.

Exercice 13

1. Soit $\mathbf{a}=3\mathbf{u}-2\mathbf{v}$ et $\mathbf{b}=\mathbf{u}-5\mathbf{v}$ où $\mathbf{u},\mathbf{v}$ forment une base orthonormée de vecteurs du plan $\mathcal{P}$. Calculer $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ et $\|\mathbf{a}\|$.
2. Déterminer les vecteurs unitaires de l'espace $\mathcal{E}$ orthogonaux aux vecteurs $\mathbf{u}(0,3,-2)$ et $\mathbf{v}(1,-2,0)$.

Exercice 14

On considère les droites $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$, $\mathcal{D}_3$ et $\mathcal{D}_4$ données par les équations respectives :

(i) $ax+by+c=0$,

(ii) $ax + by - c = 0$,

(iii) $a'x + b'y + c' = 0$,

(iv) $a'x + b'y - c' = 0$.

Vérifier que l'aire du parallélogramme déterminé par ces quatre droites est égale à :

$$\left|\frac{4cc'}{ab' - a'b}\right|.$$

Exercice 15

1. Calculer le produit vectoriel de $\mathbf{u}(-1, 2, 5)$ et $\mathbf{v}(2, 0, -3)$. Même question pour $\mathbf{u}(-1, -3, 4)$ et $\mathbf{v}(5, 6, -2)$.
2. Soit $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ une base orthonormée directe de l'espace $\mathcal{E}$. Calculer $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ pour $\mathbf{u} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$. Même question pour $\mathbf{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{v} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$.
3. Calculer le produit mixte de $\mathbf{u}(0, 1, -1), \mathbf{v}(1, -2, -3), \mathbf{w}(1, 5, 0)$.

Exercice 16

1. Calculer l'aire du parallélogramme engendré par $\mathbf{u}(-3, 2)$ et $\mathbf{v}(2, 5)$.
2. Calculer l'aire du triangle de sommets $A(2, -3), B(-1, 0), C(0, 1)$.

Exercice 17

1. Calculer le volume du parallélépipède engendré par les vecteurs $\mathbf{u}(1, -1, 2)$, $\mathbf{v}(0, 3, -2)$ et $\mathbf{w}(-1, 5, 0)$.
2. Calculer le volume du tétraèdre de sommets $P(1, 1, 1)$, $Q(1, 2, 3)$, $R(-1, 1, 0)$ et $S(0, 0, 1)$.