TD3, Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

(3 séances de 2h40)

Exercice 1

1. Représenter géométriquement les sous-ensembles du plan suivant :

   i) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x - y = 0 \right\}$,

   ii) $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x - y = 1 \right\}$,

   iii) $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x + |y| = 0 \right\}$,

   iv) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 = y^2 \right\}$.

2. Ces sous-ensembles sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 2

Les sous-ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

i) $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x \geq 0 \right\}$,

ii) $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$

iii) $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x = 3y \right\}$,

iv) $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } xy = 0 \right\}$.

Exercice 3

Exprimer, si c'est possible, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme combinaison linéaire des 3 vecteurs $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Même question avec $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et

$\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Exercice 4
Montrer que les vecteurs $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5
Trouver les conditions sur a, b et c pour que $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ appartienne à $W = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$, avec $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 6
Déterminer si les familles suivantes de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sont ou non linéairement dépendantes :

1. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$;
2. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$;
3. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$;
4. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Exercice 7
Déterminer si les familles suivantes de vecteurs forment des bases de $\mathbb{R}^3$:

1. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;
2. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$;
3. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$;
4. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 8
Les familles de vecteurs suivantes sont-elles libres ? Génératrices de $\mathbb{R}^3$? Bases de $\mathbb{R}^3$?

1. $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
3. $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\7\\1\end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

Exercice 9

1. Montrer que la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4)$ définie par
$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix},$$
engendre $\mathbb{R}^3$.
2. Extraire de cette famille une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner les coordonnées des vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 10
Soient $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^n$ linéairement indépendants. Montrer que les vecteurs $\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{v}$, $\mathbf{c} = \mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ sont aussi linéairement indépendants.

Exercice 11
Déterminer si les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\6\\4\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\6\\8\\5\end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^4$. Si la réponse est négative, trouver la dimension du sous-espace qu'ils engendrent.

Exercice 12
Compléter la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ pour former une base de $\mathbb{R}^4$ avec $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix}2\\2\\3\\4\end{pmatrix}$.

Exercice 13
Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les familles de vecteurs suivantes et trouver une base de ce sous-espace.

1. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$
2. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Exercice 14

Soient $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. La famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est-elle libre ?
2. Justifier sans calcul si la famille $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ est génératrice de $\mathbb{R}^3$ ou non.
3. Donner la dimension de $E = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$ et une base de E.
4. Donner une équation déterminant E.

Exercice 15

Trouver une base et la dimension des sous-espaces vectoriels W de $\mathbb{R}^3$ suivants :

i) $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \right\},$

ii) $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z \right\}.$

Exercice 16

Trouver une base et la dimension de l'espace W des solutions du système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 2z & + & 2s & - & t & = & 0, \\ x & + & 2y & - & z & + & 3s & - & 2t & = & 0, \\ 2x & + & 4y & - & 7z & + & s & + & t & = & 0. \end{array} \right.$$