TD4, Calcul matriciel

(2 séances de 2h40)

Exercice 1
Écrire sous forme de tableau chacune des matrices suivantes données en écriture indicielle :

i.
$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 2}} \quad \text{où } a_{ij} = i + j,$$

ii.
$$B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 2 \\ 1 \leq j \leq 4}} \quad \text{où } b_{ij} = i - j + ij.$$

Exercice 2
Transposer chacune des matrices suivantes :

i. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & 0 & 3 \\ 1 & x^2 & 2 \end{pmatrix}$, ii. $\begin{pmatrix} 1 & x & 1 \\ 2 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$, iii. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ x & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 3
On considère dans cet exercice les 3 matrices A, B et C suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Parmi les expressions suivantes, lesquelles n'ont pas de sens ?

i. AB,
ii. BA,
iii. $A + B$,
iv. AC,
v. BC,
vi. CB,
vii. $\frac{B}{C}$,
viii. ${}^{\mathbf{t}}BA$,
ix. ${}^{\mathbf{t}}BC$,
x. $({}^{\mathbf{t}}A + A)B$.

Exercice 4
1. Échelonner chacune des matrices suivantes et entourer les pivots :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 6 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 11 \\ 2 & 4 & -5 & 14 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 6 & -3 & -3 \\ 3 & 10 & -6 & -5 \end{pmatrix}.$$

2. Déterminer le rang des matrices ci-dessus.

Exercice 5

1. Effectuer les opérations suivantes sur les matrices, quand c'est possible :

   i. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

   ii. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$,

   iii. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Calculer le produit suivant de deux façons : $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Comparer $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} \right)$.

4. Trouver le facteur commun puis calculer $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Calculer $3A^2 - 2A - I_2$ avec $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 6

Quelle matrice est diagonale ? symétrique ? triangulaire ? antisymétrique ? (Effectuer d'abord les multiplications de matrices le cas échéant)

i. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ii. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^2$,

iii. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

iv. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^2$,

v. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

vi. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3$,

vii. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix}^3$,

viii. $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Résoudre les équations matricielles suivantes :

i. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

ii. $M \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 8
Déterminer les valeurs de a pour que $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ a & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Exercice 9
Soient $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 7\end{pmatrix}$.

1. Calculer AB, BA, A^3 et A^n.
2. Déterminer A^{-1} et B^{-1}, puis trouver une matrice C telle que $C^2 = A$.

Exercice 10
Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 3 & 5 & 6\end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 3 & 5\\ 4 & 1 & 3\end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix}0 & 1 & -4 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & 1\\ 0 & -3 & 3 & -1\end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4 & 1\\ 3 & 4 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Exercice 11
On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix}1 & a & b\\ 0 & 1 & c\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Montrer que la matrice A admet pour inverse une matrice de la même forme (triangulaire supérieure) et la déterminer.

Exercice 12
On considère la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Calculer A^2. En déduire l'inverse A^{-1} de A.

Exercice 13
On considère les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{pmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

1. Déterminer un nombre réel x tel que $B = A + x\, I_3$.
2. Trouver une relation simple entre B et B^2.
3. En déduire une égalité reliant A, A^2 et I_3.

4. En déduire que A est inversible et expliciter A^{-1}.

Exercice 14

1. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ alors ${}^{\mathbf{t}}AA$ et $A\,{}^{\mathbf{t}}A$ sont des matrices symétriques.
2. Préciser leurs tailles.