TD5, Applications linéaires

(2 séances de 2h40)

Exercice 1
Déterminer si oui ou non les applications suivantes sont linéaires :

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} xy \\ x \end{pmatrix}$,
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+3 \\ 2y \\ x+y \end{pmatrix}$,
3. $f_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_3(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} |x| \\ y+z \end{pmatrix}$.

Exercice 2
On considère les applications linéaires f et g définies de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ par

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x-y \\ y+2z \\ x+z \end{pmatrix} \text{ et } g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+z \\ y-z \end{pmatrix}$$

Déterminer les applications $f \circ g$ et $g \circ f$. Conclusion ?

Exercice 3
Soit l'application linéaire $h_1 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$h_1(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x-y+z+t \\ x+2z-t \\ x+y+3z-3t \end{pmatrix}.$$

1. Trouver une base et la dimension du noyau de h_1.
2. Trouver une base et la dimension de l'image de h_1.
3. L'application h_1 est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. Mêmes questions avec l'application $h_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$h_2(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+2y-z \\ y+z \\ x+y-2z \end{pmatrix}.$$

Exercice 4
Déterminer si chacune des applications linéaires suivantes est bijective et lorsque c'est le cas, déterminer sa réciproque.

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_1(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x-y \\ x-2y \end{pmatrix}$,
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f_2(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2x-4y \\ 3x-6y \end{pmatrix}$,
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f_3(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-2y \\ 3x+y \end{pmatrix}$.

Exercice 5
Notons $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
On considère les applications linéaires $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ données par

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x \\ x-y \end{pmatrix} \text{ et } g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2z \\ y-x \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices $M_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$ et $M_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(g)$.
2. En déduire $M_{\mathcal{B}}(g \circ f)$.
3. Proposer une deuxième méthode pour le calcul de $M_{\mathcal{B}}(g \circ f)$.

Exercice 6
On note par $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}'$ la famille de vecteurs $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ de sorte que $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ aient pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1. Montrer que $\mathcal{B}$ est aussi une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Sans calcul, donner les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{E}$, en déduire les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{E}$.
3. Sans calcul, donner les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{E}$.
4. Déterminer la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, puis celle de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.
5. Donner les coordonnées du vecteur $\begin{pmatrix} 5 \\ 17 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$.