TD6, Déterminants

(2 séances de 2h40)

Exercice 1

1. Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ a & -3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & -b \\ -a & 1 & c \\ b & -c & 1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} r\cos\theta & -r\sin\theta \\ r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -0,002 & -8 & 32 \\ -0,001 & 4 & 8 \\ -0,003 & 2 & 4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Résoudre l'équation d'inconnue x réelle suivante

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

3. Résoudre l'équation d'inconnue x réelle suivante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$$

Exercice 2

Pour quelles valeurs du paramètre réel m les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$A = \begin{pmatrix} 2m & 1 \\ 1 & m \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & m \\ -1 & -1 & m \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} m & -m^2 & m \\ 1 & -m & m^2 \\ m & 1 & -m^3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

1. À l'aide des déterminants, préciser si la famille $\mathcal{F}_1$ est une base ou non de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

2. Est-ce prévisible sans le calcul du déterminant ?

3. À l'aide des déterminants, préciser si la famille $\mathcal{F}_2$ est une base ou non de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

4. Est-ce prévisible sans le calcul du déterminant ?

Exercice 4

1. Montrer que la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible.
2. Calculer son inverse à l'aide de la méthode de la comatrice.
3. En déduire une solution du système $M\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5

Sans recours au calcul, expliquez pourquoi, quel que soit le choix des coefficients, la matrice M n'est jamais inversible :

$$M = \begin{pmatrix} a & \alpha & \alpha^2 & 2a+\alpha \\ b & \beta & \beta^2 & 2b+\beta \\ c & \gamma & \gamma^2 & 2c+\gamma \\ d & \delta & \delta^2 & 2d+\delta \end{pmatrix}.$$

Exercice 6

1. Sachant que $\det A = 2$ et $\det B = 5$, calculer $\det\left(A^2\, B^{-1}\, {}^{\mathbf{t}}\!A\, B^3\right)$.
2. Peut-on trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_n = 0$?
3. Calculer $\det A$ sachant que A est une matrice de type (3,3) et que $\det(2A) = 6$.
4. Donner des conditions sur A permettant d'en déduire $\det(-A) = \det A$?

Exercice 7

1. Résoudre les systèmes suivants à l'aide de la méthode de Cramer :

$$\begin{cases} 3x + y = 5, \\ 4x - y = 9. \end{cases}$$

2. Même question avec

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a, \\ -x + 2y - 3z = b, \\ x + 2y + z = c. \end{cases}$$