TD7, Révisions.

(Le reste des séances de 2h40)

Exercice 1

1. Discuter, suivant la valeur du paramètre $m \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 2 & m \end{pmatrix}.$$

2. Reprendre la question précédente avec la matrice B définie par

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

1. Résooudre l'équation $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ d'inconnue $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$ où

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer A^{-1}.
3. Vérifier votre réponse à la question 1 à l'aide de votre réponse à la question 2.
4. Reprendre les questions précédentes avec la matrice A et le vecteur $\mathbf{b}$ suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

On considère dans cet exercice les sous ensembles de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{R}^4$ suivants :

— $A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 0 \right\}$,

— $B = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0 \right\}$,

— $C = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0 \text{ et } x-y+z=0 \right\}$,

— $D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+w=0 \text{ et } x+2y+3z-5w=0 \right\}$.

Pour chacun des sous-ensembles A, B, C et D,

1. montrer qu'il est un sous-espace vectoriel et en déterminer une base ;
2. donner une interprétation géométrique (droite, plan, ...) ;
3. l'écrire comme le noyau d'une application linéaire.

Exercice 4

Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, et soit $f\colon E \to F$ une application linéaire. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont des sous-espaces vectoriels respectifs de E et de F.

Exercice 5

Soient E, F, G trois sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, et soient $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ deux applications linéaires. Montrer que l'application composée $g \circ f\colon E \to G$ est linéaire.

Exercice 6

Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+z \\ x+y-z \\ x+y-2z \end{pmatrix}$ est une application linéaire bijective de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7

Soient E, F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : E \to F$ une application linéaire. On suppose que $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_p)$ est une famille libre de E, et que $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 ..., \mathbf{v}_q)$ est une famille génératrice de E.

1. Montrer que si f est *injective* alors la famille $(f(\mathbf{u}_1), f(\mathbf{u}_2), ..., f(\mathbf{u}_p))$ est libre dans F.
2. Montrer que si f est *surjective* alors la famille $(f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), ..., f(\mathbf{v}_q))$ est génératrice de F.
3. Qu'en déduisez-vous dans le cas où f est une application linéaire bijective de E sur F ?

Exercice 8

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$ est donnée par la matrice A suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

1. Quels $\mathbf{v}_j$ sont dans le noyau de f ?
2. Quels $\mathbf{v}_j$ sont dans l'image de f ?

Exercice 9
Soient E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : E \to F$ une application linéaire. Pour chacune des assertions suivantes, confirmer par une démonstration ou infirmer par un contre-exemple :

1. Si $E = F$, alors $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.
2. Si $\mathrm{Ker}(f) = E$, alors $F = \{\vec{\mathbf{0}}\}$.
3. Si $\dim E = 5$ et $\dim F = 4$, alors $\mathrm{Ker}(f) \neq \{\vec{\mathbf{0}}\}$.
4. Si $E = F$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$, alors $f = 0$.

Exercice 10
On considère dans cette exemple la famille $\mathcal{F}_1$ suivante :

$$\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

1. La famille $\mathcal{F}_1$ est-elle libre ou liée ?
2. Même question avec la famille $\mathcal{F}_2$ donnée par

$$\mathcal{F}_2 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Exercice 11

1. Montrer que $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{R}^2$ et donner les coordonnées du vecteur $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ dans cette base.
2. Même question dans $\mathbb{R}^3$ pour $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. Même question dans $\mathbb{R}^3$ pour $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Même question dans $\mathbb{R}^3$ pour $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12
Soient $A(a, b)$ et $C(c, d)$ deux points distincts du plan $\mathcal{P}$.

1. Montrer que l'équation
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & a & c \\ y & b & d \end{vmatrix} = 0$$
décrit la droite du plan passant par A et C.
2. Quelle est donc l'équation de la droite passant par $(1,0)$ et $(0,1)$? Ou bien passant par $(0,0)$ et $(1,1)$?
3. Donner un énoncé similaire dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

Exercice 13

1. Soient $\mathbf{w_1}$ et $\mathbf{w_2}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ linéairement indépendants. Montrer qu'un vecteur $\mathbf{v}$ de $\mathbb{R}^3$ est une combinaison linéaire de $\mathbf{w_1}$, $\mathbf{w_2}$ si et seulement si $\det \begin{pmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \mathbf{v} \end{pmatrix} = 0$.
2. Que décrit l'équation
$$\begin{vmatrix} & & x \\ \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & y \\ & & z \end{vmatrix} = 0 \text{ ?}$$
Y a-t-il un énoncé similaire dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^4$, ou bien $\mathbb{R}^n$?
3. Soient
$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ a \end{pmatrix};$$
   (a) Est-ce que le vecteur $\mathbf{v}$ peut s'exprimer en combinaison linéaire de $\mathbf{w_1}$ et $\mathbf{w_2}$?
   (b) Pour quelles valeurs de a :
      i. le vecteur $\mathbf{u}$ (qui dépend de a) est une combinaison linéaire de $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$?
      ii. le système des trois vecteurs $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ et $\mathbf{u}$ est libre ? est lié ?
   (c) Donner une équation du plan engendré par $\mathbf{w}_1$ et $\mathbf{w}_2$.

Exercice 14

Déterminer les produits vectoriels :
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2t+2 \\ 2t^2+t \end{pmatrix}.$$