

# Éléments de correction

CC2 (2019 - 2020)

## Exercice 1

$$1. \quad \begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ 2x + y - z + t = -1 \end{cases}$$

L'opération  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$  donne le système équivalent suivant:

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ -y - 3z + 7t = -3 \end{cases}$$

L'opération  $L_2 \leftarrow -L_2$  donne le système équivalent suivant:

$$\begin{cases} x + y + z - 3t = 1 \\ y + 3z - 7t = 3 \end{cases}$$

C'est un système échelonné, de variables libres  $z$  et  $t$ .

On trouve donc que:

$$\begin{cases} x = 1 - y - z + 3t = -1 + 2z - 4t \\ y = 3 - 3z + 7t \end{cases}$$

(1)

L'ensemble des solutions est donc :

$$\mathcal{Y} = \left\{ (-2 + 2z - 4t, 3 - 3z + 7t, z, t) ; (z, t) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$$2. \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ x + 3y - z = 11 \\ 2x + 5z - 5z = 13 \\ x + 4y + z = 18 \end{cases}$$

Les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ ,  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$  et  $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$  donnent ~~le~~ système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 \\ y + z = 5 \\ 2y + 4z = 14 \end{cases}.$$

Les opérations  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$  et  $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$  donnent le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 \\ -z = -2 \\ 0 = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire le système suivant :

(2)

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ y + 2z = 7 \\ z = 2 \end{cases}$$

On trouve donc que

$$\begin{cases} x = 4 - 2(3) + 3(2) = 4. \\ y = 7 - 4 = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est  $\mathcal{S} = \{ (4, 3, 2) \}$ .

## Exercice 2

$$1. \quad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \quad x + 2y - z = 0 \right\}.$$

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow x + 2y - z = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2y + z$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y + z \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(3)

Donc la famille  $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  est génératrice de  $F$ .

$$2. \quad G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3; \quad x - y + z = 0 \text{ et } 2x - y - z = 0 \right\}$$

On a les équivalences suivantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in G \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x - y + z = 0 \\ y - 3z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x = y - z = 2z \\ y = 3z \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ 3z \\ z \end{pmatrix}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc la famille  $\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$  est génératrice de  $G$ .

4

### Exercice 3

Notons  $F$  l'espace vectoriel engendré par  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ , c'est-à-dire  $F = \langle \vec{u} \rangle$ .

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} \lambda = x \\ 2\lambda = y \\ 3\lambda = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} \lambda = x \\ 0 = y - 2x, L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 = z - 3x, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

On voit que le dernier système admet une solution  $\lambda$  si et seulement si il est compatible, c'est-à-dire si et seulement si  $y - 2x = 0$  et  $z - 3x = 0$ .

On conclut que  $\begin{cases} y - 2x = 0 \\ z - 3x = 0 \end{cases}$  est un système d'équations cartésiennes de  $F$ .

(5)



## Exercice 4

Un vecteur  $\vec{v}$  de  $\mathbb{R}^4$  appartient à  $F$  si et seulement s'il existe  $\alpha$  et  $\beta$  tels que :

$$\vec{v} = \alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \beta \vec{v}_3.$$

Le vecteur  $\vec{v}$  appartient à  $G$  si et seulement s'il existe  $\delta$  et  $\gamma$  tels que :

$$\vec{v} = \delta(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + \gamma \vec{v}_4.$$

On voit alors que :

$$\vec{v} \in F \cap G \Leftrightarrow \alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + \beta \vec{v}_3 = \delta(\vec{v}_1 + \vec{v}_3) + \gamma \vec{v}_4$$

$$\Leftrightarrow (\alpha - \delta)\vec{v}_1 + \alpha \vec{v}_2 + (\beta - \delta)\vec{v}_3 - \gamma \vec{v}_4 = \vec{0}.$$

Or la famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$  est libre d'où :

$$\vec{v} \in F \cap G \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta - \delta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = 0 \\ \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Donc si  $\vec{v} \in F \cap G$  alors  $\vec{v} = 0(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) + 0\vec{v}_3 = \vec{0}$ .

Comme  $\vec{0} \in F \cap G$ , on conclut que  $F \cap G = \{\vec{0}\}$ .

⑥