

## Devoir maison 1

À rendre en TD la semaine du 16 octobre

**Exercice 1.** Soit  $\mathcal{D}$  une droite du plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne  $ax + by + c = 0$ . Soit  $M(x_M, y_M)$  un point du plan et soit  $H$  son projeté orthogonal sur  $\mathcal{D}$ .

1. Montrer qu'il existe un réel  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{HM} = \lambda \vec{n}$ , où  $\vec{n}$  est le vecteur de coordonnées  $(a, b)$ .
2. Soit  $A(x_A, y_A)$  un point de  $\mathcal{D}$ . Faire une figure avec les points  $A$ ,  $M$  et  $H$ , la droite  $\mathcal{D}$  et le vecteur  $\vec{n}$ . Montrer que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$ .
3. Montrer que  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = ax_M + by_M + c$ .
4. On rappelle que  $d(M, \mathcal{D})$  désigne la distance du point  $M$  à la droite  $\mathcal{D}$ . En déduire que :

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

**Exercice 2.** Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère deux plans  $P_1$  et  $P_2$  d'équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : 2x + 2y + z = 1 \text{ et } P_2 : 3x - 4y = 1.$$

1. Déterminer un vecteur normal à  $P_1$  et un vecteur normal à  $P_2$ . En déduire que les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants.
2. Déterminer un vecteur directeur  $\vec{v}$  de la droite  $\Delta$  d'intersection de ces deux plans.
3. Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  les droites données par les systèmes d'équations paramétriques suivants :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = 2 - 22t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{et } \mathcal{D}' : \begin{cases} x = \frac{1}{19}(2t + 8) \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}.$$

- (a) Montrer que  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont sécantes et donner les coordonnées de leur point d'intersection.
- (b) Soit  $A$  un point de coordonnées  $(x, y, 0)$ . Montrer que  $d(A, P_1) = d(A, P_2)$  si et seulement si  $A \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ .

**Exercice 3.** On considère la droite  $\mathcal{D}$  du plan  $\mathcal{P}$  d'équation cartésienne par  $x - 3y + 3 = 0$ , ainsi que les points  $A$  et  $B$  ayant les coordonnées  $x_A = 3$ ,  $y_A = 1$  et  $x_B = -9$ ,  $y_B = -3$ .

1. Faire un dessin et calculer l'aire du triangle  $[ABP]$  pour  $P$  de coordonnées  $(0, 1)$ .
2. Trouver tous les points  $P$  appartenant à la droite  $\mathcal{D}$  tels que l'aire du triangle  $ABP$  soit égale à 6.