

CC2, éléments de correction

Exercice 1:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = a \\ -x + 2y - 3z = b \\ x + 2y + z = c \end{cases}$$

On échelonne le système:

$$L_1 \leftrightarrow L_3 \quad \begin{cases} x + 2y + z = c \\ -x + 2y - 3z = b \\ 3x - y + 2z = a \end{cases}, \quad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \quad \begin{cases} x + 2y + z = c \\ 4y - 2z = b + c \\ -7y - z = a - 3c \end{cases}$$

$$L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \quad \begin{cases} x + 2y + z = c \\ 2y - z = \frac{b+c}{2} \\ -7y - z = a - 3c \end{cases}, \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad \begin{cases} x + 2y + z = c \\ 2y - z = \frac{b+c}{2} \\ -9y = a - 3c - \frac{b+c}{2} \end{cases}$$

On trouve alors $9y = \frac{-2a + b + 7c}{2}$, i.e., $y = \frac{-2a + b + 7c}{18}$.

On reporte ensuite dans le système et on trouve:

$$z = 2y - \frac{b+c}{2} = \frac{-4a - 7b + 5c}{18},$$

$$x = c - 2y - z = \frac{8a + 5b - c}{18}.$$

Exercice 2 : Les vecteurs forment une base de \mathbb{R}^4 si et seulement si ils forment un système libre. Il faut vérifier pour quelles valeurs de t , la famille

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \right)$ est libre. Pour ça, on résout le

système $x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$

c'est-à-dire
$$\begin{cases} x + y + tz = 0 \\ y = 0 \\ tx + ty + z = 0 \\ tu = 0 \end{cases}.$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - tL_1$ permet de l'échelonner :

$$\begin{cases} x + y + tz = 0 \\ y = 0 \\ (1-t^2)z = 0 \\ tu = 0 \end{cases}.$$

Si $1-t^2 \neq 0$ et $t \neq 0$, le système a 4 pivots non nuls et a une unique solution est $x=y=z=u=0$.

Donc si $t \notin \{0, -1, 1\}$, les 4 vecteurs forment un système libre, donc une base.

Si $t=0$, la famille n'est pas libre car le quatrième vecteur est le vecteur nul.

Si $t=1$, la famille n'est pas libre car on a

la relation: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

De même, si $t = -1$, la famille n'est pas libre du fait de la relation $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$

On conclut que les 4 vecteurs forment une base de \mathbb{R}^4 si et seulement si $t \notin \{0, 1, -1\}$.

Exercice 3 : 1) On vérifie que la famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$

est libre : $\alpha \vec{v}_1 + \beta \vec{v}_2 + \gamma \vec{v}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 4\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases}$

Regardons le système donné par les trois premières

équations: $\begin{cases} \alpha + \beta + 2\gamma = 0 \\ 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$

L'opération $L_3 - L_2$ donne l'égalité $\alpha = 0$.

On trouve donc que $\begin{cases} \beta + 2\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$. On en déduit

que $\gamma = 0$ puis que $\beta = 0$.

La famille $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est libre. Comme par définition de F , elle est génératrice de F , on

conclut qu'elle est base de F , et que $\dim F = 3$.

2) On vérifie que la famille (\vec{v}_4, \vec{v}_5) est libre :

$$d\vec{v}_4 + \beta\vec{v}_5 = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -d + 2\beta = 0 \\ 3\beta = 0 \\ -d = 0 \\ 2d + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}.$$

C'est donc une base de G , et $\dim G = 2$.

3) On sait que $F \cap G \subset G$. Donc sa dimension est inférieure ou égale à celle de G .

D'où $\dim F \cap G = 0, 1$ ou 2 .

Cherchons une équation cartésienne de F .

Un vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ appartient à F si et seulement s'il existe x, y et z tels que $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$.

On échelonne le système :

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ 2x + y + z = b \\ 3x + y + z = c \\ 4x + 3y + z = d \end{cases}.$$

les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$

donnent :

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ -y - 3z = b - 2a \\ -2y - 5z = c - 3a \\ -y - 7z = d - 4a \end{cases}$$

les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ donnent:

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ -y - 3z = b - 2a \\ z = a - 2b + c \\ -4z = -2a - b + d. \end{cases}$$

On finit avec l'opération $L_4 \leftarrow L_4 + 4L_3$:

$$\begin{cases} x + y + 2z = a \\ y - 3z = b - 2a \\ z = a - 2b + c \\ 0 = 2a - 9b + 4c + d \end{cases}$$

Le système est compatible si et seulement si

$$2a - 9b + 4c + d = 0.$$

Une équation cartésienne de F est donc : $2a - 9b + 4c + d = 0$.

On voit que $\vec{v}_4 \notin F$ car $2(-1) - 9(0) + 4(-1) + 2 = -4 \neq 0$.

Donc $\vec{v}_4 \notin F \cap G$ et donc $F \cap G \neq G$.

L'inclusion $F \cap G \subset G$ est donc stricte et donc

$$\dim F \cap G = 0 \text{ ou } 1.$$

Cherchons s'il existe des vecteurs de G dans F .

Un vecteur de G est de la forme : $\vec{v} = \alpha \vec{v}_4 + \beta \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta \\ 3\beta \\ -\alpha \\ 2\alpha + \beta \end{pmatrix}$

$$\text{où } (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2.$$

Donc $\vec{v} \in F$ si et seulement si $2(-\alpha + 2\beta) - 9(3\beta) + 4(-\alpha) + 2\alpha + \beta = 0$,

c'est-à-dire si et seulement si $-4\alpha - 22\beta = 0$.

D'où $\vec{v} \in F$ si et seulement si $d = -\frac{11}{2}\beta$.

On conclut que $\vec{v} \in F \cap G$ si et seulement si \vec{v} est

$$\text{de la forme : } \vec{v} = \begin{pmatrix} +\frac{11}{2}\beta + 2\beta \\ 3\beta \\ \frac{11}{2}\beta \\ -11\beta + \beta \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} \frac{15}{2} \\ 3 \\ \frac{11}{2} \\ -10 \end{pmatrix}.$$

On voit donc que $F \cap G$ est l'espace vectoriel engendré

par le vecteur $\begin{pmatrix} 15/2 \\ 3 \\ 11/2 \\ -10 \end{pmatrix}$. D'où $F \cap G$ est de dimension

1, une base est $\left(\begin{pmatrix} 15/2 \\ 3 \\ 11/2 \\ -10 \end{pmatrix} \right)$.

Exercice 4

1. E_1 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 car c'est l'ensemble des solutions du système linéaire

$$\text{homogène suivant : } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}.$$

2. Le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à E_2 . Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ appartient à E_2 . La somme de ces 2 vecteurs est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas dans E_2

car $1(1^2 + 0) = 1 \neq 0$. Donc E_2 n'est pas stable par addition. Ce n'est pas un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 .