

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Le barème est donné à titre indicatif.

**Exercice 1.** (8 points) Considérons les vecteurs de  $\mathbb{R}^4$  suivants :

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. La famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$  est-elle libre ?
2. Donner une équation cartésienne du sous-espace vectoriel engendré par la famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$ .
3. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel engendré par la famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4)$  et trouver une base de ce sous-espace.

**Exercice 2.** (7 points) Soit  $F$  le sous-ensemble de  $\mathbb{R}^3$  suivant :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; -x - y + z = 0 \text{ et } 2x + y - 5z = 0 \right\}.$$

1. Démontrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer une base et la dimension de  $F$ .
3. Compléter cette base de  $F$  en une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Exercice 3.** (5 points)

1. Démontrer que la famille  $(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$  est une base de  $\mathbb{R}^2$ .
2. Donner les coordonnées du vecteur  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  dans cette base.