

# Éléments de correction

CC2, 2020-2021

## Exercice 1.

1. On résout le système  $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 + t\vec{v}_4 = \vec{0}$ ,

c'est-à-dire 
$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ x + y + t = 0 \\ x + 2y - 2z + 2t = 0 \\ x + y + 3z - 2t = 0 \end{cases}$$

les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ ,  $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$  et  $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$

donnent :

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ 2y - 3z + t = 0 \\ y + 2z - 3t = 0 \end{cases}$$

les opérations  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$  et  $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$  donnent :

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ -z + t = 0 \\ 3z - t = 0 \end{cases}$$

L'opération  $L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3$  donne :

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ -z + t = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Le système initial est donc équivalent au système échelonné suivant :

$$\begin{cases} x + z + t = 0 \\ y - z = 0 \\ -z + t = 0 \end{cases}$$

On choisit  $t$  comme variable libre et on obtient :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = t \\ t = t \end{cases}$$

On conclut que  $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 + t\vec{v}_4 = \vec{0}$  si et seulement si il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

Il y a donc une infinité de solutions au système  $x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 + t\vec{v}_4 = \vec{0}$ , ce qui signifie que la famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$  n'est pas libre.

2. Un vecteur  $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$  appartient au sous-espace vectoriel engendré par la famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$

si et seulement si il existe  $x, y, z, t \in \mathbb{R}$  tels que  $\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 + t\vec{v}_4$ .

On doit donc résoudre le système  $\vec{w} = x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 + t\vec{v}_4$ ,

c'est à dire :

$$\begin{cases} x + z + t = a \\ x + y + t = b \\ x + 2y - 2z + 2t = c \\ x + y + 3z - 2t = d \end{cases}$$

On l'échelonne en faisant les mêmes opérations élémentaires que dans la question 1, i.e. :

$$\left. \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \right\} \text{donnent} \left\{ \begin{array}{l} x + z + t = a \\ y - z = b - a \\ 2z - 3t = c - a \\ y + 2z - 3t = d - a \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \right\} \text{donnent} \left\{ \begin{array}{l} x + z + t = a \\ y - z = b - a \\ -z + t = c - a - 2(b - a) = a - 2b + c \\ 3z - 3t = d - a - (b - a) = -b + d \end{array} \right.$$

$$L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3 \text{ donne } \left\{ \begin{array}{l} x + z + t = a \\ y - z = b - a \\ -z + t = a - 2b + c \\ 0 = -b + d + 3(a - 2b + c) = 3a - 7b + 3c + d \end{array} \right.$$

On voit que le système est compatible, donc admet des solutions, si et seulement si  $3a - 7b + 3c + d = 0$ .

Donc  $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$  est dans le sous-espace vectoriel engendré par  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  et  $\vec{v}_4$  si et seulement si  $3a - 7b + 3c + d = 0$ .

Une équation cartésienne de ce sous-espace est donc  $3a - 7b + 3c + d = 0$ .

3. On voit que  $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$  appartient au

sous-espace engendré par  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$  et  $\vec{v}_4$  si et

seulement si  $3a - 7b + 3c + d = 0$ ,

c'est-à-dire si et seulement si 
$$\begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \\ d = -3a + 7b - 3c \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si  $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ .

On conclut qu'un base du sous-espace engendré par la famille  $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$  est donnée par  $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix})$ , et que la dimension de ce sous-espace est 3.

## Exercice 2

1. Soit  $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  et soit  $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$  deux vecteurs de  $F$ .

On a  $-x - y + z = 0$ ,  $-x' - y' + z' = 0$ ,  $2x + y - 5z = 0$   
et  $2x' + y' - 5z' = 0$ .

Le vecteur  $\vec{u} + \vec{v}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$ .

On voit que  $-(x + x') - (y + y') + (z + z') = (-x - y + z) + (-x' - y' + z') = 0$ .

De même  $2(x + x') + (y + y') - 5(z + z') = (2x + y - 5z) + (2x' + y' - 5z') = 0$ .

Donc  $\vec{u} + \vec{v} \in F$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le vecteur  $\lambda \vec{u}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$ .

On a  $-dx - dy + dz = \lambda(-x - y + z) = 0$ . De même,  $2dx + dy - 5dz = 0$ .

Donc  $\lambda \vec{u} \in F$ .

On conclut que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .

2. On a les équivalences suivantes:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ 2x + y - 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y + z = 0 \\ -y - 3z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z = 4z \\ y = -3z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On conclut que  $F$  est la droite vectorielle engendrée par le vecteur  $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Donc  $\dim F = 1$  et une base de  $F$  est donnée par  $\left( \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

3. Il faut trouver deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  tels que

$\left( \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}, \vec{w} \right)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ . Par cela;

il suffit de trouver deux vecteurs  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$

tels que  $\left( \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}, \vec{w} \right)$  soit libre.

Prenons par exemple  $\vec{v} = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\vec{w} = \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

Vérifions que  $(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$  est libre. Il faut résoudre le système  $x \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

C'est-à-dire 
$$\begin{cases} 4x + y = 0 \\ -3x + z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

On voit immédiatement que  $x=0, y=0, z=0$  est l'unique solution du système. La famille est donc libre et  $(\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

### Exercice 3

1. C'est une famille à 2 éléments dans  $\mathbb{R}^2$ . Il suffit de vérifier qu'elle est libre. On résout le système  $x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,

C'est-à-dire le système 
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

L'opération  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  donne le système

équivalent 
$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ -x = 0 \end{cases}$$

et donc on conclut que  $x=y=0$  est l'unique

solution du système initial. La famille est libre,  
c'est donc une base de  $\mathbb{R}^2$ .

2. On cherche  $x$  et  $y$  tels que  $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

On résout donc le système suivant:

$$\begin{cases} 2x + y = a \\ x + y = b. \end{cases}$$

L'opération  $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$  donne le système

équivalent 
$$\begin{cases} 2x + y = a \\ -x = b - a. \end{cases}$$

On trouve donc que 
$$\begin{cases} x = a - b \\ y = a - 2x = -a + 2b. \end{cases}$$

Donc  $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  a pour coordonnées  $\begin{pmatrix} a-b \\ -a+2b \end{pmatrix}$  dans  
la base  $\left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .