

Corrigé.

Exercice 1. Déterminer la solution générale du système :

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z - w = 1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ x + y + 2z + 2w = -1 \end{cases}$$

Solution : On échange les lignes L_1 et L_3 pour obtenir le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2w = -1 \\ x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 4x - 3y + 2z - w = 1 \end{cases}$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ donnent le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2w = -1 \\ \quad y + z + 2w = 1 \\ \quad -7y - 6z - 9w = 5 \end{cases}$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 7L_2$ donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z + 2w = -1 \\ \quad y + z + 2w = 1 \\ \quad \quad z + 5w = 12 \end{cases}$$

C'est un système échelonné. La variable w est libre et on peut exprimer z puis y et enfin x en fonction de w . On obtient :

$$\begin{cases} x = -14 + 5w \\ y = -11 + 3w \\ z = 12 - 5w \end{cases}$$

Ainsi les solutions du système initial sont les quadruplets de la forme

$$(-14 + 5w, -11 + 3w, 12 - 5w, w),$$

où $w \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient F et G les sous-ensembles de \mathbb{R}^3 donnés par :

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 2y + 3z = 0 \right\} \text{ et } G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y = 0 \right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 .

Solution : Le sous-ensemble F est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3 car c'est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à trois inconnues (vu en cours). Il en est de même pour G .

2. Trouver une base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ de \mathbb{R}^3 telle que (\vec{v}_1) soit une base de F et (\vec{v}_1, \vec{v}_2) soit une base de G .

Solution : On voit que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à F si et seulement si $x = -2y$ et $z = -\frac{2}{3}y$, autrement dit si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

On conclut que F est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. On pose

$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$. On remarque que $\vec{v}_1 \in G$ car $F \subset G$.

On voit que $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ appartient à G si et seulement si $x = -2y$, autrement dit si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Comme la famille $(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ est libre (à vérifier!), G est le plan vectoriel engendré

par $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On peut prendre pour \vec{v}_2 un de ces deux vecteurs. On prend par

exemple $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Il faut vérifier que la famille (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est libre. Si $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0}$

alors α et β sont solutions du système :

$$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\frac{2}{3}\alpha = 0 \end{cases}$$

On voit immédiatement que $\alpha = \beta = 0$ et donc (\vec{v}_1, \vec{v}_2) est libre et c'est une base de G , car $\dim G = 2$.

Pour trouver \vec{v}_3 , il suffit de prendre un vecteur qui n'est pas dans G . Par exemple, on

pose $\vec{v}_3 = \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est libre. En effet si $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 + \gamma\vec{v}_3 = \vec{0}$

alors α , β et γ sont solutions du système :

$$\begin{cases} -2\alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\frac{2}{3}\alpha = 0 \end{cases}$$

On voit immédiatement que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Comme \mathbb{R}^3 est de dimension 3, on conclut que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3. Soit W le sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 engendré par les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ et \vec{v}_5 suivants :

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Donner la dimension de W et une base de W .

Solution : Cherchons une équation de W . Un vecteur $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ appartient à W si et

seulement s'il existe des réels x, y, z, t et s tels que

$$x\vec{v}_1 + y\vec{v}_2 + z\vec{v}_3 + t\vec{v}_4 + s\vec{v}_5 = \vec{w},$$

c'est-à-dire si et seulement si le système linéaire suivant admet des solutions :

$$\begin{cases} x & & + z & + t & - s & = a \\ x & + y & & + t & - 5s & = b \\ & 2y & + z & - 6t & + s & = c \\ -x & + y & - z & - 3t & & = d \end{cases}$$

On échelonne ce système. Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 + L_1$ donnent le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x & & + z & + t & - s & = a \\ & y & - z & & - 4s & = b - a \\ & 2y & + z & - 6t & + s & = c \\ & y & & - 2t & - s & = d + a \end{cases}$$

Les opérations $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_2$ donnent le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x & & + z & + t & - s & = a \\ & y & - z & & - 4s & = b - a \\ & & 3z & - 6t & + 9s & = c - 2b + 2a \\ & & z & - 2t & + 3s & = d - b + 2a \end{cases}$$

On échange les lignes L_3 et L_4 :

$$\begin{cases} x & & + z & + t & - s & = a \\ & y & - z & & - 4s & = b - a \\ & & z & - 2t & + 3s & = d - b + 2a \\ & & 3z & - 6t & + 9s & = c - 2b + 2a \end{cases}$$

L'opération $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_3$ donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x & & + z & + t & - s & = a \\ & y & - z & & - 4s & = b - a \\ & & z & - 2t & + 3s & = d - b + 2a \\ & & & & 0 & = -4a + b + c - 3d \end{cases}$$

On conclut que \vec{w} est combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$ et \vec{v}_5 si et seulement si $-4a + b + c - 3d = 0$, c'est-à-dire $\vec{w} \in W$ si et seulement si $-4a + b + c - 3d = 0$, autrement dit si et

seulement si $b = 4a - c + 3d$. Ainsi $\vec{w} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ appartient à W si et seulement si

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est donc génératrice de W . Il faut vérifier qu'elle est libre. C'est

immédiat car si $\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0}$ alors

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 4\alpha - \beta + 3\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

On conclut que W est de dimension 3 et qu'une base de W est

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$