

Devoir maison 2

Corrigé.

Exercice 1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Échelonner (suivant les lignes) la matrice augmentée $(A \mid \vec{\mathbf{b}})$. Résoudre le système

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{b}}.$$

Solution : La matrice augmentée est la matrice 3×4 suivante :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -20 & 1 \\ -10 & 21 & -100 & -1 \\ -2 & 4 & -19 & 1 \end{array} \right).$$

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 10L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donnent :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -20 & 1 \\ 0 & -19 & 100 & -11 \\ 0 & -4 & 21 & -1 \end{array} \right).$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{4}{19}L_2$ donne :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 4 & -20 & 1 \\ 0 & -19 & 100 & -11 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{19} & \frac{25}{19} \end{array} \right).$$

En utilisant la matrice échelonnée ci-dessus, on voit que le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{b}}$ est équivalent au système échelonné :

$$\begin{cases} -x + 4y - 20z = 1 \\ -19y + 100z = -11 \\ -\frac{1}{19}z = \frac{25}{19} \end{cases}$$

On trouve que $z = -25$ et, en remontant les calculs que $y = -131$ et $x = -25$.

2. Déterminer le rang de la matrice A ainsi que le rang de la matrice augmentée $(A \mid \vec{\mathbf{b}})$.

Solution : Le rang de la matrice augmentée $(A \mid \vec{\mathbf{b}})$ est 3 car il y a trois pivots. Le rang de la matrice A est également 3 car les trois premières colonnes de la matrice échelonnée ci-dessus fournissent la matrice obtenue par échelonnement de la matrice A .

3. Calculer A^2 . En déduire que $A^n = I_3$ si n est pair, et que $A^n = A$ si n est impair.

Solution : On vérifie par calcul que $A^2 = I_3$. Montrons que $A^n = I_3$ si n est pair. Cela revient à montrer que $A^{2k} = I_3$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (on sait déjà que $A^0 = I_3$). On procède par récurrence. On vient de montrer que $A^2 = I_3$ donc c'est vrai pour $k = 1$.

Supposons que $A^{2k} = I_3$ alors $A^{2(k+1)} = A^{2k+2} = A^{2k}A^2$. Comme $A^2 = I_3$, on trouve que $A^{2(k+1)} = A^{2k} = I_3$ d'après l'hypothèse de récurrence. On a bien montré par récurrence que $A^{2k} = I_3$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Montrons que $A^n = A$ si n est impair. Cela revient à montrer que $A^{2k-1} = I_3$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. On procède par récurrence. On sait que $A^1 = A$ donc c'est vrai pour $k = 1$. Supposons que $A^{2k-1} = I_3$ alors $A^{2(k+1)-1} = A^{2k+1} = A^{2k-1}A^2$. Comme $A^2 = I_3$, on trouve que $A^{2(k+1)-1} = A^{2k-1} = A$ d'après l'hypothèse de récurrence. On a bien montré par récurrence que $A^{2k-1} = A$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4. À l'aide des questions 1. et 3., résoudre le système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{c}$, avec cette fois-ci $\vec{c} =$

$$\begin{pmatrix} -25 \\ -131 \\ -25 \end{pmatrix}.$$

Solution : On sait que A est inversible car $A^2 = I_3$, donc le système a une unique solution. De plus, d'après la question 1, $A\vec{c} = \vec{b}$. En multipliant chaque membre de cette égalité par A , on obtient $A^2\vec{c} = A\vec{b}$ et donc $\vec{c} = A\vec{b}$. Donc \vec{b} est l'unique solution du système $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{c}$.

Exercice 2. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 et considérons l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - y + z \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{B} .

Solution : On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . On a $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_2) =$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ donc :}$$

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Donner une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$

Solution : Un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est dans $\text{Ker}(f)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y + z = 0 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

et donc si et seulement si

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x - y = 0 \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y = 0 \\ z = 0 \end{cases},$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} x = 2y \\ z = 0 \end{cases},$$

autrement dit, si et seulement si

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\text{Ker}(f)$ est la droite engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sa dimension est donc 1 et une

base de $\text{Ker}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.

3. Donner une base et la dimension de $\text{Im}(f)$.

Solution : Le théorème du rang donne que la dimension de $\text{Im}(f)$ est 2. De plus, on sait que $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$. Il suffit d'en extraire une famille libre à deux éléments pour trouver une base. Par exemple, la famille $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_3))$ est libre car si $a f(\vec{e}_1) + b f(\vec{e}_3) = \vec{0}$ alors a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a + b = 0 \\ -\frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b = 0 \\ b = 0 \end{cases},$$

et donc $a = b = 0$. Une base de $\text{Im}(f)$ est donc $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

4. L'application f est-elle bijective ? (Justifier votre réponse)

Solution : Comme $\text{Ker}(f)$ n'est pas de dimension 0, f n'est pas injective et donc elle n'est pas bijective non plus.

5. Montrer que $f \circ f = f$. En déduire que pour tout vecteur $\vec{v} \in \text{Im}(f)$, on a $f(\vec{v}) = \vec{v}$.

Solution : La matrice de $f \circ f$ dans la base \mathcal{B} est $M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(f)$. On calcule que

$$M_{\mathcal{B}}(f) \times M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Donc pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$f \circ f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - y + z \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right).$$

On conclut que $f \circ f = f$.

Si $\vec{v} \in \text{Im}(f)$ alors il existe $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, tel que $\vec{v} = f(\vec{u})$. On a donc

$$f(\vec{v}) = f(f(\vec{u})) = f \circ f(\vec{u}) = f(\vec{u}) = \vec{v}.$$

6. Soient $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que ces 3 vecteurs forment une base de \mathbb{R}^3 , notée \mathcal{V} .

Solution : Montrons que \vec{u}_1 , \vec{u}_2 et \vec{u}_3 sont linéairement indépendants. Soient a , b et c des réels tels que $a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2 + c\vec{u}_3 = \vec{0}$. Alors a , b et c sont solutions du système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2a + 2c = 0 \\ b + c = 0 \\ a + b = 0 \end{cases}.$$

On vérifie aisément que $a = b = c = 0$ et donc la famille $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ est libre et c'est donc une base de \mathbb{R}^3 , car \mathbb{R}^3 est de dimension 3.

7. Déterminer la matrice de f dans la base \mathcal{V} .

Solution : Soit $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}}$ la matrice de passage de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{V} . D'après le cours, on sait que $M_{\mathcal{V}}(f) = P^{-1}M_{\mathcal{B}}(f)P$. On a

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il faut calculer P^{-1} . Formons la matrice-compagnon de P :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

L'opération $L_1 \leftrightarrow L_3$ donne la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ donne la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right).$$

L'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$ donne la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 & -2 \end{array} \right).$$

L'opération $L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3$ donne la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_3$ donne la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Finalement, l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$ donne la matrice :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array} \right).$$

Donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On trouve donc que

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{V}}(f) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu conclure plus rapidement en remarquant que $\vec{\mathbf{u}}_1 = 2f(\vec{\mathbf{e}}_1) + f(\vec{\mathbf{e}}_3)$ et $\vec{\mathbf{u}}_2 = f(\vec{\mathbf{e}}_2) + f(\vec{\mathbf{e}}_3)$, et donc que $\vec{\mathbf{u}}_1$ et $\vec{\mathbf{u}}_2$ sont dans $\text{Im}(f)$. D'après la question 5, $f(\vec{\mathbf{u}}_1) = \vec{\mathbf{u}}_1$ et $f(\vec{\mathbf{u}}_2) = \vec{\mathbf{u}}_2$. D'autre part, on a vu que $\vec{\mathbf{u}}_3 \in \text{Ker}(f)$ et donc $f(\vec{\mathbf{u}}_3) = \vec{\mathbf{0}}$.

8. Soit $\vec{\mathbf{w}} = -2\vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_2 - \vec{\mathbf{u}}_3$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\mathbf{w}}$ dans la base \mathcal{B} .

Solution : Soit $M_{\mathcal{B}}(\vec{\mathbf{w}})$ la matrice de $\vec{\mathbf{w}}$ dans \mathcal{B} et soit $M_{\mathcal{V}}(\vec{\mathbf{w}})$ la matrice de $\vec{\mathbf{w}}$ dans \mathcal{V} .

On a $M_{\mathcal{V}}(\vec{\mathbf{w}}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. D'après le cours, on a :

$$M_{\mathcal{B}}(\vec{\mathbf{w}}) = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{V}} M_{\mathcal{V}}(\vec{\mathbf{w}}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\vec{\mathbf{w}} = -6\vec{\mathbf{e}}_1 - \vec{\mathbf{e}}_3$.

9. Soit $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{\mathbf{v}}$ dans la base \mathcal{V} .

Solution : D'après le cours, on a :

$$M_{\mathcal{V}}(\vec{\mathbf{v}}) = P_{\mathcal{V} \rightarrow \mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(\vec{\mathbf{v}}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\vec{\mathbf{v}} = \frac{3}{4}\vec{\mathbf{u}}_1 + \frac{1}{4}\vec{\mathbf{u}}_2 - \frac{1}{4}\vec{\mathbf{u}}_3$.