

## Devoir maison 2

À rendre la semaine du 8 janvier

**Exercice 1.** On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -20 \\ -10 & 21 & -100 \\ -2 & 4 & -19 \end{pmatrix}$  et le vecteur  $\vec{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

1. Échelonner la matrice augmentée  $(A \mid \vec{\mathbf{b}})$ . Résoudre le système  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{b}}$ .
2. Déterminer le rang de la matrice  $A$  ainsi que le rang de la matrice augmentée  $(A \mid \vec{\mathbf{b}})$ .
3. Calculer  $A^2$ . En déduire que  $A^n = I_3$  si  $n$  est pair, et que  $A^n = A$  si  $n$  est impair.
4. À l'aide des questions 1. et 3., résoudre le système  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{\mathbf{c}}$ , avec cette fois-ci  $\vec{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} -25 \\ -131 \\ -25 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 2.** Soit  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et considérons l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x - y + z \\ -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix}$$

1. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
2. Donner une base et la dimension de  $\text{Ker}(f)$ .
3. Donner une base et la dimension de  $\text{Im}(f)$ .
4. L'application  $f$  est-elle bijective ? (Justifier votre réponse)
5. Montrer que  $f \circ f = f$ . En déduire que pour tout vecteur  $\vec{\mathbf{v}} \in \text{Im}(f)$ , on a  $f(\vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{v}}$ .
6. Soient  $\vec{\mathbf{u}}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\mathbf{u}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{\mathbf{u}}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ . Montrer que ces 3 vecteurs forment une base de  $\mathbb{R}^3$ , notée  $\mathcal{V}$ .
7. Déterminer la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{V}$ .
8. Soit  $\vec{\mathbf{w}} = -2\vec{\mathbf{u}}_1 + \vec{\mathbf{u}}_2 - \vec{\mathbf{u}}_3$ . Déterminer les coordonnées de  $\vec{\mathbf{w}}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
9. Soit  $\vec{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Déterminer les coordonnées de  $\vec{\mathbf{v}}$  dans la base  $\mathcal{V}$ .