

Éléments de correction

CC 1 (2019-2020)

Exercice 1

1. On calcule les distances OA , OB

et AB : $OA = \sqrt{(x_A - x_0)^2 + (y_A - y_0)^2} = \sqrt{2^2} = 2$

$$OB = \sqrt{(x_B - x_0)^2 + (y_B - y_0)^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + \sqrt{3}^2} = 2.$$

les trois distances sont égales, donc le triangle est équilatéral.

2. Un point $M(x, y)$ appartient à (OA)

si et seulement si \vec{OA} et \vec{OM} sont colinéaires,

si et seulement si $\det(\vec{OA}, \vec{OM}) = 0$,

si et seulement si $\begin{vmatrix} x_A & x \\ y_A & y \end{vmatrix} = 0$

si et seulement si $\begin{vmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{vmatrix} = 0$, c'est-à-dire $2y = 0$.

Une équation cartésienne de (OA) est $\boxed{y = 0}$

Un point $M(x, y)$ appartient à (OB)
 si et seulement si $\det(\vec{OB}, \vec{OM}) = 0$,
 si et seulement si $\begin{vmatrix} x_B & x \\ y_B & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x \\ \sqrt{3} & y \end{vmatrix} = 0$,
 si et seulement si $\boxed{\sqrt{3}x - y = 0.}$

Un point $M(x, y)$ appartient à (AB)
 si et seulement si $\det(\vec{AB}, \vec{AM}) = 0$,
 si et seulement si $\begin{vmatrix} x_B - x_A & x - x_A \\ y_B - y_A & y - y_A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & x - 2 \\ \sqrt{3} & y \end{vmatrix} = 0$,
 si et seulement si $\boxed{\sqrt{3}x + y - 2\sqrt{3} = 0}$

3. On applique la formule du cours :

$$d(O, (AB)) = \frac{|\sqrt{3} \times 0 + 0 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + 1}} = \frac{|-2\sqrt{3}|}{2} = \sqrt{3}$$

$$d(A, (OB)) = \frac{|\sqrt{3} \cdot 2 - 0|}{\sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2}} = \frac{|2\sqrt{3}|}{2} = \sqrt{3}$$

$$d(B, (OA)) = \frac{|\sqrt{3}|}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = \sqrt{3}.$$

On a bien $\boxed{d(O, (AB)) = d(A, (OB)) = d(B, (OA))}$

Exercice 2

1. Le vecteur $\vec{n}(1, -1, 1)$ est un vecteur normal à P . Le vecteur $\vec{n}'(1, 7, 3)$ est un vecteur normal à P' . Ils ne sont pas colinéaires donc P et P' ne sont pas parallèles.

Soit d la droite d'intersection de P et P' .

Un point $M(x, y, z)$ appartient à d

si et seulement si
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 2x + 2y + 3z = 4 \end{cases} \quad /$$

si et seulement si
$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y + 2z = 2 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

si et seulement si
$$\begin{cases} x = 2 + y - z = 2 + y - 1 + \frac{3}{2}y = 1 + \frac{5}{2}y \\ z = 1 - \frac{3}{2}y \end{cases}$$

si et seulement si
$$\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{2}t \\ y = t \\ z = 1 - \frac{3}{2}t \end{cases}$$
 Système
d'équations
paramétriques
de d

2. On voit que le vecteur $\vec{u}(5, 2, -3)$ est un vecteur directeur de d .

Un point $M(x, y, z)$ appartient à \mathcal{P}''

si et seulement si $\vec{AM} \perp \vec{u}$

si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$

si et seulement si $5(x-1) + 2(y-0) - 3(z+1) = 0$

si et seulement si $\boxed{5x + 2y - 3z - 8 = 0}$

3. On a $M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' \Leftrightarrow M \in d \cap \mathcal{P}''$

D'où $M(x, y, z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{2}t \\ y = t \\ z = 1 - \frac{3}{2}t \end{cases}$

$$\text{et } 5x + 2y - 3z - 8 = 0$$

$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{2}t \\ y = t \\ z = 1 - \frac{3}{2}t \end{cases}$

$$\text{et } 5(1 + \frac{5}{2}t) + 2t - 3(1 - \frac{3}{2}t) - 8 = 0$$

$M(x, y, z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = 1 + \frac{5}{2}t \\ y = t \\ z = 1 - \frac{3}{2}t \end{cases}$

$$\text{et } 5 + \frac{25}{2}t + 2t - 3 + \frac{9}{2}t - 8 = 0$$

$$\text{Donc } M(x, y, z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \cap \mathcal{P}'' \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 1 + \frac{5}{2}t \\ y = t \\ z = 1 - \frac{3}{2}t \end{cases}$$

$$\text{et } 38t = 12$$

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = 1 + \frac{5}{2}t \\ y = t \\ z = 1 - \frac{3}{2}t \end{cases}$$

$$t = \frac{12}{38} = \frac{6}{19}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{5}{2} \times \frac{6}{19} = \frac{38 + 30}{38} = \frac{68}{38} = \frac{34}{19} \\ y = \frac{6}{19} \\ z = 1 - \frac{3}{2} \times \frac{6}{19} = \frac{38 - 18}{38} = \frac{20}{38} = \frac{10}{19} \end{cases}$$

Les ~~plans~~ $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ et \mathcal{P}'' ont pour unique point commun
le point $B\left(\frac{34}{19}, \frac{6}{19}, \frac{10}{19}\right)$.

Exercice 3

1. On utilise le produit vectoriel :

$$\vec{u}_1 = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2, 2, 1)$$

est directeur de \mathcal{D}_1 ,

$$\vec{u}_2 = \left(\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (5, -2, -3)$$

est directeur de \mathcal{D}_2 .

les vecteurs \vec{u}_1 et \vec{u}_2 ne sont pas colinéaires,
donc les droites D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

2. On résout le système formé des deux systèmes :

$$J: \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ y - 2z - 3 = 0 \\ x + y + z - 1 = 0 \\ x - 2y + 3z - a = 0 \end{cases}$$

On l'échelonne :

$$J: \begin{cases} x + y = 2 \\ y - 2z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = a \end{cases}$$

$$J: \begin{cases} x + y = 2 \\ y - 2z = 3 \\ z = -1 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ -3y + 3z = a - 2 & L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{cases}$$

$$J: \begin{cases} x + y = 2 \\ y - 2z = 3 \\ z = -1 \\ -3z = a + 3 & L_4 \leftarrow L_4 + 3L_2 \end{cases}$$

$$J: \begin{cases} x + y = 2 \\ y - 2z = 3 \\ z = -1 \\ 0 = a + 4 \end{cases} \quad L_4 \leftarrow L_4 + 3L_3.$$

On voit que le système est compatible si et seulement si $a = -4$. Dans ce cas, il a pour unique solution

$$\begin{cases} x = 2 - y = 1 \\ y = 3 + 2z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Donc les droites D_1 et D_2 ont un unique point d'intersection si et seulement si $a = -4$, et ce point est le point de coordonnées $(1, 1, -1)$.