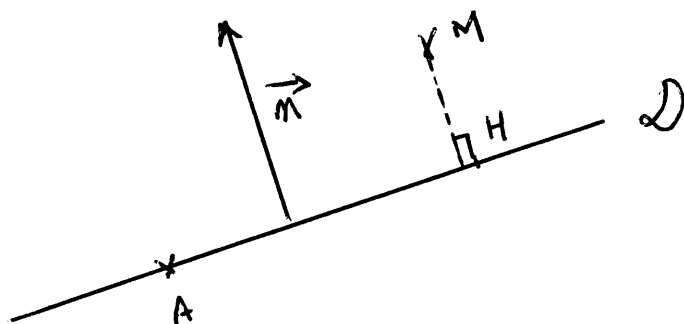


Exercice 1.

1. Le vecteur  $\vec{n}(a, b)$  est un vecteur normal à  $\mathcal{D}$ . Comme  $H$  est le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$ ,  $\vec{HM}$  est aussi normal à  $\mathcal{D}$  (éventuellement nul si  $M \in \mathcal{D}$ ).

Donc  $\vec{HM}$  et  $\vec{n}$  sont colinéaires. Comme  $\vec{n} \neq \vec{0}$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{HM} = \lambda \vec{n}$ .

2.



On a  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = (\vec{AH} + \vec{HM}) \cdot \vec{n} = \vec{AH} \cdot \vec{n} + \vec{HM} \cdot \vec{n}$ .

Or  $\vec{AH} \cdot \vec{n} = 0$  car  $\vec{n}$  est normal à  $\mathcal{D}$ , d'où  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = \vec{HM} \cdot \vec{n}$ .

3. Le vecteur  $\vec{AM}$  a pour coordonnées  $(x_M - x_A, y_M - y_A)$ .

$$\begin{aligned} \text{D'où } \vec{AM} \cdot \vec{n} &= (x_M - x_A) \cdot a + (y_M - y_A) \cdot b \\ &= ax_M + by_M - (ax_A + by_A) \end{aligned}$$

Comme  $A \in \mathcal{D}$ ,  $ax_A + by_A + c = 0$  et donc  $-(ax_A + by_A) = c$ .

Donc  $\vec{AM} \cdot \vec{n} = ax_M + by_M + c$ .

4. On sait que  $d(M, \mathcal{D}) = HM = \|\vec{HM}\|$ .

Comme  $\vec{HM} = \lambda \vec{n}$ , on voit que  $d(M, \mathcal{D}) = |\lambda| \|\vec{n}\|$ .

$$\text{Or } \vec{HM} \cdot \vec{n} = (\lambda \vec{n}) \cdot \vec{n} = \lambda (\vec{n} \cdot \vec{n}) = \lambda \|\vec{n}\|^2,$$

$$\text{et } \vec{HM} \cdot \vec{n} = \vec{AM} \cdot \vec{n} = ax_M + by_M + c.$$

$$\text{On trouve donc que } \lambda = \frac{ax_M + by_M + c}{\|\vec{n}\|^2},$$

$$\text{puis que } d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\|$$

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## Exercice 2

1. Le vecteur  $\vec{n}_1 (2, 2, 1)$  est normal à  $\mathcal{P}_1$ .

Le vecteur  $\vec{n}_2 (3, -4, 0)$  est normal à  $\mathcal{P}_2$ .

Ils ne sont pas colinéaires, donc  $\mathcal{P}_1$  et  $\mathcal{P}_2$  sont sécants.

2. On peut prendre  $\vec{v} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ .

$$\text{On a } \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 \left( \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{d'où } \boxed{\vec{v} (4, 3, -14)}$$

3. (a) Les droites  $D$  et  $D'$  sont sécantes  
si et seulement si  $\exists (t, t') \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$\begin{cases} 2 - 22t = \frac{1}{19}(2t' + 8) \\ t = t' \\ 0 = 0 \end{cases} \quad ,$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} 2 - 22t = \frac{1}{19}(2t + 8) \\ t = t' \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} 38 - 22 \times 19t = 2t + 8 \\ t = t' \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} 2t + 22 \times 19t = 38 - 8 = 30 \\ t = t' \end{cases}$$

$$\text{si et seulement si } \begin{cases} t = \frac{30}{420} = \frac{3}{42} = \frac{1}{14} \\ t = t' \end{cases}$$

Les droites  $D$  et  $D'$  sont donc sécantes au  
point  $I$  de coordonnées  $(2 - 22 \cdot \frac{1}{14}, \frac{1}{14}, 0)$ ,

c'est-à-dire  $(+\frac{3}{7}, \frac{1}{14}, 0)$ .

(b) On sait que  $d(A, P_1) = \frac{|2x+2y-1|}{3}$

et que  $d(A, P_2) = \frac{|3x-4y-1|}{5}$ .

D'où  $d(A, P_1) = d(A, P_2) \Leftrightarrow \frac{|2x+2y-1|}{3} = \frac{|3x-4y-1|}{5}$

$\Leftrightarrow 5|2x+2y-1| = 3|3x-4y-1|$

$\Leftrightarrow 5(2x+2y-1) = 3(3x-4y-1)$

ou  
 $5(2x+2y-1) = -3(3x-4y-1)$

$\Leftrightarrow x + 22y - 2 = 0$

ou  
 $19x - 2y - 8 = 0$

$\Leftrightarrow x = 2 - 22y$

ou  
 $x = \frac{1}{19}(2y + 8)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 22t \\ y = t \end{cases}$

ou  
 $\begin{cases} x = \frac{1}{19}(2t + 8) \\ y = t \end{cases}$

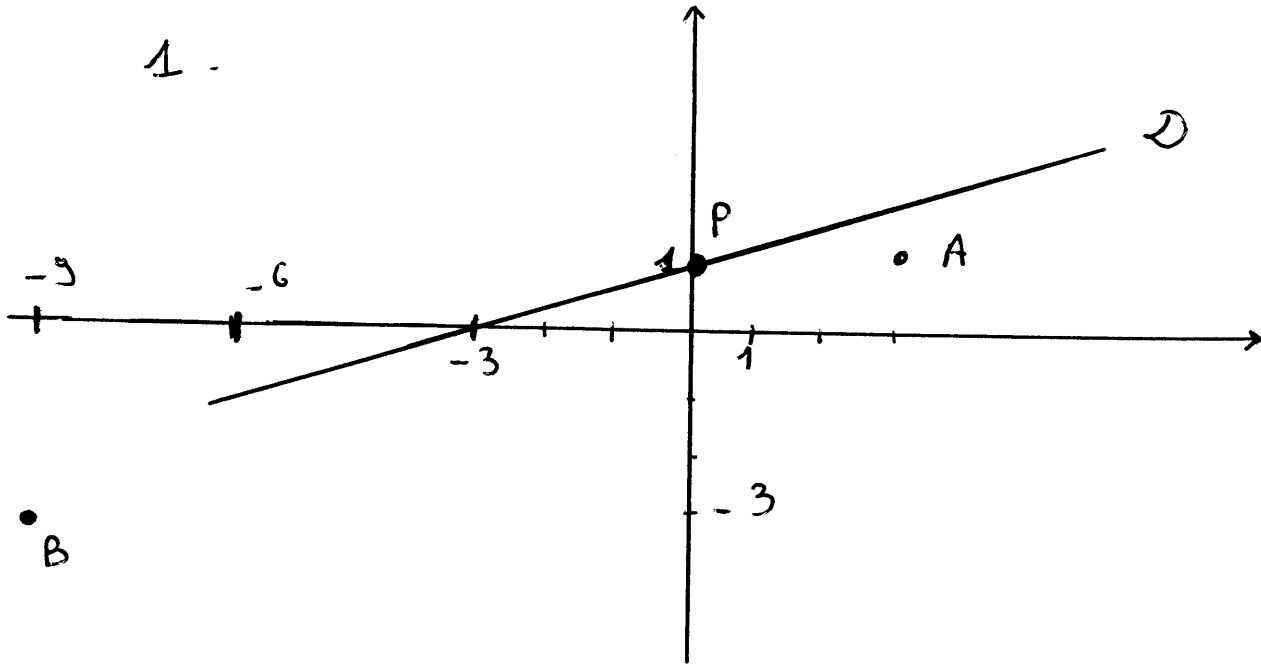
De plus comme on sait que la dernière coordonnée de A est nulle, on voit que  $\begin{cases} x = 2 - 22t \\ y = t \end{cases}$  équivaut à  $A \in \mathcal{D}$

et  $\begin{cases} x = \frac{1}{19}(2t + 8) \\ y = t \end{cases}$  équivaut à  $A \in \mathcal{D}'$ . On

conclut donc que  $d(A, P_1) = d(A, P_2) \Leftrightarrow A \in \mathcal{D} \text{ ou } A \in \mathcal{D}' \Leftrightarrow A \in \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$ .

### Exercice 3

1.



On a  $\vec{AP} = (-3, 0)$  et  $\vec{AB} = (-12, -4)$ .

$$\text{D'où } \text{Aire}(ABP) = \left| \frac{1}{2} \det(\vec{AP}, \vec{AB}) \right| = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -3 & -12 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} \right| = 6.$$

2. Soit  $P(x_P, y_P)$  un point de  $D$ .

$$\text{On a donc } 3y_P - 3 = x_P.$$

$$\text{D'où } \vec{AP} = (3y_P - 6, y_P - 1). \text{ Ainsi,}$$

$$\begin{aligned} \text{Aire}(ABP) &= \left| \frac{1}{2} \det(\vec{AP}, \vec{AB}) \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 3y_P - 6 & -12 \\ y_P - 1 & -4 \end{vmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| -4(3y_P - 6) + 12(y_P - 1) \right| = \frac{1}{2} |12| = 6. \end{aligned}$$

On conclut que pour tout point  $P$  de  $D$ , l'aire du triangle  $ABP$  vaut 6.