

Tous les documents sont interdits, ainsi que les calculatrices et téléphones portables.

Le barème est donné à titre indicatif.

**Exercice 1.** (7 points) Soit  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que  $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$ .

**Solution :** On a

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que

$$A^2 - 3A + 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ 3 & -6 & 3 \\ -3 & 3 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire que  $A$  est inversible et déterminer l'inverse  $A^{-1}$  de  $A$ .

**Solution :** On a  $A^2 - 3A = -2I_3$  d'où  $A(A - 2I_3) = -2I_3$  et  $A\frac{1}{2}(3I_3 - A) = I_3$ . On en déduit que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} = \frac{3}{2}I_3 - \frac{1}{2}A$ . On trouve que

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Vérifier le résultat en calculant  $A^{-1}$  à partir de la comatrice de  $A$ .

**Solution :** La transposée de  $A$  est la matrice suivante :

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On calcule les cofacteurs :

$$\text{cof}_{1,1}({}^tA) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \text{cof}_{1,2}({}^tA) = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -1, \text{cof}_{1,3}({}^tA) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\text{cof}_{2,1}({}^tA) = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{cof}_{2,2}({}^tA) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \text{cof}_{2,3}({}^tA) = -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\text{cof}_{3,1}({}^tA) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \text{cof}_{3,2}({}^tA) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1, \text{cof}_{3,3}({}^tA) = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

On calcule ensuite le déterminant de  $A$ . On développe suivant la première ligne :

$$\det A = -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2.$$

D'où

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 2.** (6 points) Soit l'application linéaire  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + z \\ -x + y \\ y + z \\ x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la dimension et une base du noyau de  $f$ .

**Solution :** On voit que  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  appartient à  $\text{Ker}(f)$  si et seulement si

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} x = -z \\ y = x = -z \\ y = -z \\ -z - z + 2z = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire si et seulement si

$$\begin{cases} x = -z \\ y = -z \\ z = z. \end{cases}$$

On conclut que  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  appartient à  $\text{Ker}(f)$  si et seulement si  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi

$\text{Ker}(f)$  est la droite vectorielle engendrée par  $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Une base de  $\text{Ker}(f)$  est  $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$  et

$\dim \text{Ker}(f) = 1$ .

2. Déterminer la dimension et une base de l'image de  $f$ .

**Solution :** Par le théorème du rang, on sait que  $3 = \dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f)$  et donc  $\text{Im}(f)$  est de dimension 2. De plus  $\text{Im}(f)$  est le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  engendré par

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}. \text{ On voit que la famille } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

est libre (les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), donc c'est une base de  $\text{Im}(f)$ .

3. L'application  $f$  est-elle injective ? surjective ? bijective ?

**Solution :** L'application  $f$  n'est pas injective car son noyau n'est pas réduit au vecteur nul, elle n'est pas surjective car son image est strictement incluse dans  $\mathbb{R}^4$ . Elle n'est pas bijective, car sinon elle serait injective et surjective.

**Exercice 3.** (7 points) Soit  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et considérons l'application linéaire

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x - 2y \\ -2x - y \\ 2x + 2y + z \end{pmatrix}.$$

1. Donner la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Solution :** On a

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et donc

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On considère la famille  $\mathcal{B}' = (\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  où  $\vec{u}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ,  $\vec{u}_2 = \vec{e}_3$ ,  $\vec{u}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$ .

- (a) Vérifier que la famille  $\mathcal{B}'$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Solution :** On a  $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On calcule  $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Ce déterminant n'est pas nul donc la famille  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$  est libre et c'est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

- (b) Donner la matrice de passage  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$  et calculer la matrice de passage  $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$  de la base  $\mathcal{B}'$  à la base  $\mathcal{B}$ .

**Solution :** On a

$$P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de passage  $P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$  est l'inverse de  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ . On inverse  $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  à l'aide de la matrice compagnon :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

On fait l'opération  $L_2 \leftrightarrow L_3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

puis  $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

puis  $L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right),$$

puis  $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$  et  $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$  :

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \right).$$

On trouve que

$$P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) En déduire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}'$ .

**Solution :** On applique la formule :

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} M_{\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'},$$

d'où

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

et

$$M_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$