

Éléments de conection,

CC3, 2018-2019.

Exercice 1

1. On calcule A^2 :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} ;$$

puis A^3 :

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} .$$

①

On trouve:

$$A^3 - A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

2. On a calculé que $A^3 - A = 4I_3$,

$$\text{d'où } A(A^2 - I_3) = 4I_3.$$

On en déduit que A est inversible et

que $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3)$, c'est-à-dire:

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. La transposée de A est:

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2)

La comatrice de A est donc :

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} /$$

c'est-à-dire :

$$\begin{pmatrix} +2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

On calcule $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{développement} \\ \text{suivant la} \\ 1^{\text{ère}} \text{ colonne} \end{array} \right)$$

$$= 2 + 2 = 4.$$

On trouve que

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

1. On cherche le noyau de f . On a les équivalences suivantes:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \text{Ker } f \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x - 7y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

On trouve que $\text{Ker } f = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$, d'où $\boxed{\dim \text{Ker } f = 0}$.

D'après le théorème du rang:

$$\dim \mathbb{R}^2 = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f.$$

$$\text{D'où } \boxed{\dim \text{Im } f = 2}$$

2. $\text{Im } f$ est l'espace vectoriel engendré par $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$. On a

$$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille

(4)

génératrice de $\text{Im}(f)$. Comme $\dim \text{Im}(f) = 2$,
c'est aussi une base de $\text{Im}(f)$.

3. Comme $\ker f = \{0\}$, f est injective.

Comme $\dim \text{Im} f = 2 < 4$, f n'est pas
surjective. Elle n'est donc pas bijective.

Exercice 3

1. On a $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} -11 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix}$ et

$$f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}. \quad \text{D'où :}$$

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

2. (a) On calcule $\det(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3)$.

$$\text{On a } \det(\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

(5)

On développe suivant la première colonne :

$$\det(\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3) = 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 2(6) - 3(5) + 2 = -1.$$

Donc la famille B' est libre dans \mathbb{R}^3 . Comme elle a 3 éléments, c'est une base de \mathbb{R}^3 .

(b) On a

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

La matrice $P_{B' \rightarrow B}$ vaut $(P_{B \rightarrow B'})^{-1}$.

Il faut calculer la comatrice de $P_{B \rightarrow B'}$.

C'est la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

⑥

c'est à dire :

$$\begin{pmatrix} 6 & -5 & 2 \\ -4 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

On a vu que $\det P_{B \rightarrow B'} = -1$ d'où

$$P_{B' \rightarrow B} = \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) On applique la formule :

$$M_{B'}(f) = P_{B' \rightarrow B} M_B(f) P_{B \rightarrow B'}.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} M_{B'}(f) &= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & 5 & -2 \\ 4 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & +3 \\ 3 & 8 & +6 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement, on obtient:

$$M_B(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$