

Éléments de correction

CC3, 2017-2018

Exercice 1

1. On écrit la matrice-compagnon de A :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

On effectue les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

puis on échange les lignes L_2 et L_3 :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right),$$

puis on fait les opérations $L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2$ et $L_3 \leftarrow -\frac{1}{3}L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array} \right),$$

①

ensuite les opérations $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array} \right),$$

et enfin l'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 0 \end{array} \right).$$

On trouve que A est inversible et que

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. On calcule $\det A$:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} \text{développement} \\ \text{suivant} \\ \text{la 1}^{\text{ère}} \text{ ligne} \end{array} \right)$$

$$= 9 - 6 - (-6) = 9.$$

(2)

La transposée de A est :

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

d'où la comatrice de A est :

$$\text{Cof}({}^t A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix},$$

$$\text{Cof}({}^t A) = \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'où :

$$A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 9 & -6 & -6 \\ -3 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3

Exercice 2

1. On a $\det N = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_3 \end{pmatrix}$.

Par multilinéarité du déterminant, on trouve

que $\det N = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_3 \end{pmatrix}$.

On conclut que $\boxed{\det N = \det M}$, car

$$\det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_3 \end{pmatrix} = 0.$$

2. On a $\det P = \det \begin{pmatrix} L_1 - 2L_3 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_3 \end{pmatrix}$.

Par multilinéarité du déterminant, on trouve

que $\det P = \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_3 \end{pmatrix} - 2 \det \begin{pmatrix} L_3 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 - 2L_3 \end{pmatrix}$.

④

On conclut que $\boxed{\det P = \det N = \det M}$.

3. On voit que N est la matrice suivante:

$$N = \begin{pmatrix} 2-m & 0 & -2 & -6 \\ 14m-7 & m & 2-4m & 6-12m \\ 4 & 0 & -m & -3 \\ 0 & 0 & -2+2m & -m+1 \end{pmatrix} /$$

puis que P est la matrice suivante

$$P = \begin{pmatrix} 1-m & 0 & -2+2m & 0 \\ 14m-7 & m & 2-4m & 6-12m \\ 4 & 0 & -m & -3 \\ 0 & 0 & -2+2m & -m+1 \end{pmatrix}.$$

On calcule le déterminant de P :

$$\det P = m \begin{vmatrix} 1-m & -2+2m & 0 \\ 4 & -m & -3 \\ 0 & -2+2m & -m+1 \end{vmatrix}$$

(développement suivant la 2^{ème} colonne).

⑤

En faisant l'opération $C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1$, on obtient:

$$\det P = m \begin{vmatrix} 1-m & 0 & 0 \\ 4 & -m+8 & -3 \\ 0 & -2+2m & -m+1 \end{vmatrix},$$

d'où

$$\det P = m(1-m) \begin{vmatrix} -m+8 & -3 \\ -2+2m & -m+1 \end{vmatrix}$$

$$= m(1-m) \left[(-m+8)(-m+1) + 3(-2+2m) \right]$$

$$= m(1-m) \left[(1-m) \left[(-m+8) + 3(-2) \right] \right]$$

$$= m(1-m)^2(-m+2).$$

On conclut que M est inversible si et seulement si $\det M = \det P = m(1-m)^2(2-m) \neq 0$,
si et seulement si $m \notin \{0, 1, 2\}$.

⑥

Exercice 3

1. On a $f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $f(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

d'où $M_B(f) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

2. (a) On calcule $\det(\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3)$:

$$\det(\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3) = \begin{vmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -10 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & \underline{1} & 0 \end{vmatrix}.$$

↑
($L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$)

En développant suivant la dernière colonne, on trouve que:

$$\det(\vec{v}_1 \vec{v}_2 \vec{v}_3) = - \begin{vmatrix} -10 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -(-10 + 8) = 2 \neq 0.$$

Ainsi la famille B est libre dans \mathbb{R}^3 . Comme elle possède 3 éléments, c'est une base de \mathbb{R}^3 .

(7)

(b) On a

$$P_{B \rightarrow B'} = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(c) On applique la formule:

$$M_{B'}(f) = (P_{B \rightarrow B'})^{-1} \cdot M_B(f) \cdot (P_{B \rightarrow B'}).$$

Il faut inverser $P_{B \rightarrow B'}$.

On sait que $\det(P_{B \rightarrow B'}) = 2$.

La comatrice de $P_{B \rightarrow B'}$ est:

$$\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} /$$

C'est-à-dire:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \\ 3 & -4 & 12 \end{pmatrix}.$$

(8)

On trouve donc :

$$\left(\mathcal{P}_{B \rightarrow B'} \right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3/2 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

D'au :

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3/2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3/2 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(9)