

Bases d'algèbre - CC 1

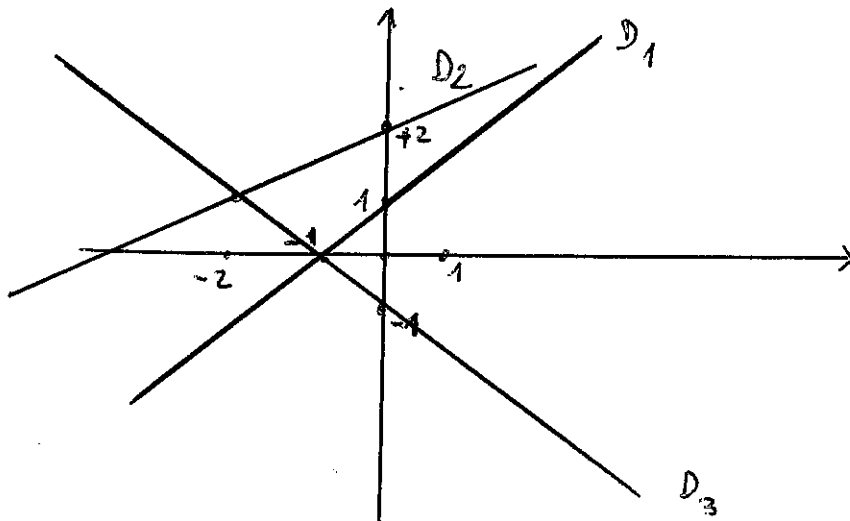
Éléments de correction.

Exercice 1

1. La droite D_1 a pour équation $y = x + 1$.

La droite D_2 a pour équation $y = \frac{1}{2}x + 2$

La droite D_3 a pour équation $y = -x - 1$



2. La droite D_1 a pour équation $ax - 2y - bc = 0$.

Le vecteur $\vec{v}_1(2, a)$ en est un vecteur directeur.

La droite D_2 a pour équation $bx - 2y - ac = 0$.

Le vecteur $\vec{v}_2(2, b)$ en est un vecteur directeur.

La droite D_3 a pour équation $cx - 2y - ab = 0$.

Le vecteur $\vec{v}_3(2, c)$ en est un vecteur directeur.

Les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ne sont pas colinéaires car $a \neq b$.

Les droites D_1 et D_2 sont sécantes. On conclut de même que D_1 et D_3 sont sécantes, ainsi que D_2 et D_3 .

Soit $A(x_A, y_A)$ le point d'intersection de D_1 et D_2 .

Les réels x_A et y_A sont les solutions du système :

$$\begin{cases} y = \frac{ax - bc}{2} \\ y = \frac{bx - ac}{2} \end{cases}$$

On a donc $ax_A - bc = bx_A - ac$

d'où $(a-b)x_A = -c(a-b)$ et $x_A = -c$.

En reportant dans la première équation du système,

on trouve $y_A = \frac{a(-c) - bc}{2} = -c \frac{a+b}{2}$.

D'où $A \left(-c, -c \frac{a+b}{2} \right)$.

La même méthode donne :

$B \left(-b, -b \frac{a+c}{2} \right)$ et $C \left(-a, -a \frac{b+c}{2} \right)$

3. On calcule les coordonnées du vecteur \vec{AB} .

On a $\vec{AB} \left(-b+c, -b \frac{a+c}{2} + c \frac{a+b}{2} \right)$

d'où $\vec{AB} \left(-b+c, \frac{a(-b+c)}{2} \right)$.

De même, $\vec{AC} \left(-a+c, b \frac{-a+c}{2} \right)$.

Soit \mathcal{I} l'aire du triangle ABC . On a :

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} \left| (-b+c)b \frac{-a+c}{2} - (-a+c)a \frac{-b+c}{2} \right|$$

$$= \frac{1}{2} |-b+c| |-a+c| \left| \frac{b}{2} - \frac{a}{2} \right|$$

D'où $\boxed{\mathcal{I} = \frac{1}{4} |-b+c| |-a+c| |b-a|}$

Exercice 2

1. Les vecteurs $\vec{u} (1, 2, -1)$ et $\vec{v} (2, 1, -1)$ dirigent \mathcal{P} . Le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est donc un vecteur normal à \mathcal{P} .

On a $\vec{n} \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right)$

d'où $\vec{n} (-1, -1, -3)$

De même, les vecteurs $\vec{u}'(3, 3, -2)$ et $\vec{v}'(-1, 1, 0)$ dirigent P' . Le vecteur $\vec{n}' = \vec{u}' \wedge \vec{v}'$ est normal à P' . On a $\vec{n}'(13-2, -13-0, 13-1)$
 $\vec{n}'(2, 2, 6)$.

On s'aperçoit que $\vec{n}_1(1, 1, 3)$ est un vecteur normal commun à P et P' , car $\vec{n}_1 = -\vec{n}$ et $\vec{n}_1 = \frac{1}{2} \vec{n}'$.

Le point $A(2, 2, 1)$ appartient à P .

Un point $M(x, y, z)$ appartient à P si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{n}_1 = 0$, si et seulement si
 $(x-2) + (y-2) + 3(z-1) = 0$.

Une équation cartésienne de P est donc
 $x + y + 3z - 7 = 0$

Le point $B(1, 3, 1)$ est sur P' . On a donc :

$$M(x, y, z) \in P' \Leftrightarrow \vec{BM} \cdot \vec{n}_1 = 0$$

$$(\Leftrightarrow) (x-1) + (y-3) + 3(z-1) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) x + y + 3z - 7 = 0$$

Une équation cartésienne de P est donc

$$\underline{x + y + 3z - 7 = 0}.$$

2. Les plans P et P' sont confondus car ils admettent une équation cartésienne commune.

Exercice 3

On applique la méthode du pivot de Gauss pour échelonner le système.

$$\begin{cases} ax - 2y + z = 1 \\ x - 2ay + z = -2 \\ x - 2y + az = 1 \end{cases} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x - 2y + az = 1 \\ x - 2ay + z = -2 \\ ax - 2y + z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} x - 2y + az = 1 \\ (-2a+2)y + (1-a)z = -3 \\ (-2+2a)y + (1-a^2)z = 1-a \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{cases} x - 2y + az = 1 \\ (-2a+2)y + (1-a)z = -3 \\ (2-a^2-a)z = -2-a \end{cases}$$

On a $(2-a^2-a) = -(a^2+a-2) = -(a-1)(a+2)$.

et $-2a+2 = -2(a-1)$.

Donc si $a \notin \{1, -2\}$, le système est échelonné avec trois pivots. Donc il admet une

unique solution.

Si $a = 1$, le dernier système devient

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 0 = -3 \\ 0 = -3 \end{cases}$$

Il est incompatible, donc il n'y a pas de solution.

Si $a = -2$, le dernier système devient:

$$\begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 6y + 3z = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}, \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x - 2y - 2z = 1 \\ 2y + z = -1 \end{cases}$$

Il est échelonné avec 2 pivots et une variable libre. Il admet une infinité de solutions.

D'où la réponse:

a) $a = 1$	b) $a = -2$	c) $a \notin \{-2, 1\}$
------------	-------------	-------------------------

Exercice 4: On échelonne le système.

Tant d'abord, on réordonne les lignes pour obtenir le système équivalent suivant:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3x + 2z = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ 2x - y + z - t = 0 \end{cases}$$

les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 2L_1$ donnent le système

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ -3y - z - 3t = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \\ -3y - z - 3t = 0 \end{cases}$$

On voit tout de suite que ce système est équivalent au système

$$\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ 3y + z + 3t = 0 \end{cases}$$

Il est échelonné avec 2 pivots et 2 variables libres.

On exprime y en fonction de z et t :

$$y = -\frac{1}{3}z - t$$

puis x en fonction de z et t :

$$x = -y - z - t = \frac{1}{3}z + t - z - t = -\frac{2}{3}z.$$

L'ensemble des solutions est l'ensemble suivant :

$$\left\{ \left(-\frac{2}{3}\lambda, -\frac{1}{3}\lambda - \mu, \lambda, \mu \right); (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$