

## Corrigé.

**Exercice 1.** Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les points  $A(1, 2, 2)$ ,  $B(3, 2, 1)$  et  $C(1, 3, 3)$ .

1. Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés. Donner une équation cartésienne du plan passant par ces 3 points.

**Solution.** On calcule que  $\overrightarrow{AB}$  est le vecteur de coordonnées  $(2, 0, -1)$  et que  $\overrightarrow{AC}$  est le vecteur de coordonnées  $(0, 1, 1)$ .

Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  sont colinéaires alors, comme  $\overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ , il existe un réel  $k$  tel que  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ . En considérant la première coordonnée des vecteurs, cette égalité implique que  $2 = k0$ , ce qui est impossible. Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  ne sont donc pas colinéaires et les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas alignés.

Soit  $P$  le plan passant par ces trois points. Un vecteur normal à  $P$  est donné par le produit vectoriel  $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ . Posons  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ . Le vecteur  $\vec{n}$  est le vecteur de coordonnées :

$$\left( \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1, -2, 2).$$

Un point  $M(x, y, z)$  appartient à  $P$  si et seulement si  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ , c'est-à-dire si et seulement si

$$(x - 1) - 2(y - 2) + 2(z - 2) = 0,$$

ce qui est équivalent à :

$$x - 2y + 2z - 1 = 0.$$

Une équation cartésienne de  $P$  est donc :  $x - 2y + 2z - 1 = 0$ .

2. On considère les plans  $P_1$  et  $P_2$  d'équations cartésiennes respectives :

$$P_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0,$$

$$P_2 : x - 3y + 2z + 2 = 0.$$

- (a) Montrer que les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants.

**Solution.** Le vecteur  $\vec{n}_1$  de coordonnées  $(1, -2, 2)$  est un vecteur normal à  $P_1$ . Le vecteur  $\vec{n}_2$  de coordonnées  $(1, -3, 2)$  est un vecteur normal à  $P_2$ . Si ces vecteurs sont colinéaires alors, comme  $\vec{n}_2 \neq \vec{0}$ , il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{n}_1 = k\vec{n}_2$ . En traduisant cette égalité en termes de coordonnées, on obtient les égalités :

$$1 = k, \quad -2 = k(-3) \text{ et } 2 = k2.$$

On voit que c'est impossible et donc les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. On en déduit que  $P_1$  et  $P_2$  ne sont pas parallèles et donc qu'ils sont sécants.

On notera  $\Delta$  leur droite d'intersection.

- (b) Montrer que le point  $C$  appartient à la droite  $\Delta$ .

**Solution.** On a  $1 - 2(3) + 2(3) - 1 = 0$  donc  $C \in P_1$  et  $1 - 3(3) + 2(3) + 2 = 0$  donc  $C \in P_2$ . Comme  $\Delta = P_1 \cap P_2$ , on conclut que  $C$  appartient à  $\Delta$ .

- (c) Démontrer que le vecteur  $\vec{u}(2, 0, -1)$  est un vecteur directeur de la droite  $\Delta$ .

**Solution.** Le produit vectoriel  $\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ . Ce produit vectoriel est le vecteur de coordonnées :

$$\left( \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \right) = (2, 0, -1).$$

On reconnaît les coordonnées du vecteur  $\vec{u}$ . Donc  $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$  et  $\vec{u}$  est un vecteur directeur de  $\Delta$ .

- (d) En déduire un système d'équations paramétriques de la droite  $\Delta$ .

**Solution.** La droite  $\Delta$  passe par  $C$  et  $\vec{u}$  en est un vecteur directeur. Un point  $M(x, y, z)$  appartient à  $\Delta$  si et seulement s'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que  $\overrightarrow{CM} = t\vec{u}$ , c'est-à-dire si et seulement s'il existe  $t \in \mathbb{R}$  tel que

$$\begin{cases} x - 1 = 2t \\ y - 3 = 0 \\ z - 3 = -t \end{cases}.$$

Un système d'équations paramétriques de  $\Delta$  est donc

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 \\ z = 3 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

**Exercice 2.** Déterminer la solution générale du système :

$$\begin{cases} 2x + y + z + 3w = 1 \\ x + y + z + 2w = 0 \\ 3x + 2y - w = 1 \\ 2z + 6w = 0 \end{cases}$$

**Solution.** L'opération  $L_1 \leftrightarrow L_2$  donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 0 \\ 2x + y + z + 3w = 1 \\ 3x + 2y - w = 1 \\ 2z + 6w = 0 \end{cases}.$$

Les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$  donnent le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 0 \\ -y - z - w = 1 \\ -y - 3z - 7w = 1 \\ 2z + 6w = 0 \end{cases}$$

L'opération  $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$  donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 0 \\ -y - z - w = 1 \\ -2z - 6w = 0 \\ 2z + 6w = 0 \end{cases}$$

Enfin l'opération  $L_4 \leftarrow L_4 + L_3$  donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 0 \\ -y - z - w = 1 \\ -2z - 6w = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

On peut enlever la dernière équation du système pour obtenir le système équivalent :

$$\begin{cases} x + y + z + 2w = 0 \\ -y - z - w = 1 \\ -2z - 6w = 0 \end{cases}$$

C'est un système échelonné. La variable  $w$  est libre et on peut exprimer  $z$  puis  $y$  et enfin  $x$  en fonction de  $w$ . On obtient :

$$\begin{cases} x = 1 - w \\ y = -1 + 2w \\ z = -3w \end{cases}$$

Ainsi les solutions du système initial sont les quadruplets de la forme  $(1 - w, -1 + 2w, -3w, w)$  où  $w \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** Déterminer les valeurs de  $a$  pour lesquelles le système :

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ -x + (a-2)y + z = -1 \\ 2x + 2y + (a-2)z = 1 \end{cases}$$

a) n'ait pas de solution, b) ait une infinité de solutions, c) ait une solution unique.

**Solution.** On échelonne tout d'abord le système. Les opérations  $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$  et  $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$  donnent le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ (2a-2)y = 0 \\ (2-2a)y + az = -1 \end{cases}$$

L'opération  $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$  donne le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x + ay - z = 1 \\ (2a-2)y = 0 \\ az = -1 \end{cases}$$

Si  $2a - 2 \neq 0$  et  $a \neq 0$ , c'est-à-dire si  $a \neq 1$  et  $a \neq 0$ , alors le système équivalent obtenu est échelonné avec trois pivots. Il admet donc une solution unique.

Si  $a = 1$  la deuxième équation devient  $0 = 0$  et on peut l'enlever pour obtenir le système

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

C'est un système échelonné avec deux pivots et  $y$  est une variable libre. Il admet donc une infinité de solutions.

Si  $a = 0$  la troisième équation devient  $0 = -1$ . Le système est alors incompatible. Il n'admet pas de solution.

On récapitule les résultats obtenus :

- a) Le système n'a pas de solution si et seulement si  $a = 0$ .
- b) Le système a une infinité de solutions si et seulement si  $a = 1$ .
- c) Le système a une solution unique si et seulement si  $a \neq 0$  et  $a \neq 1$ .