

Éléments de correction

CC1, 2020-2021

Exercice 1

1. On voit que \vec{AB} a pour coordonnées $(1, -1, -1)$ et que \vec{AC} a pour coordonnées $(2, -5, -3)$. Ils ne sont pas colinéaires, donc les points A, B et C ne sont pas alignés.

2 (a) On calcule $\vec{n} \cdot \vec{AB}$ et $\vec{n} \cdot \vec{AC}$. On a

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 2(1) - 1(-1) + 3(-1) = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$\text{et } \vec{n} \cdot \vec{AC} = 2(2) - 1(-5) + 3(-3) = 4 + 5 - 9 = 0.$$

Donc \vec{n} est orthogonal à \vec{AB} et à \vec{AC} , qui dirigent le plan (ABC), si bien que \vec{n} est normal à (ABC).

Comme \vec{n} est un vecteur directeur de Δ , Δ est orthogonale au plan (ABC).

(b) Un point $M(x, y, z)$ est sur (ABC) si et seulement

si $\vec{AM} \perp \vec{n}$, si et seulement si $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$,

si et seulement si $2(x-0) - 1(y-4) + 3(z-1) = 0$,

si et seulement si $2x - y + 3z + 1 = 0$

Une équation cartésienne de (ABC) est

$$\boxed{2x - y + 3z + 1 = 0.}$$

(c) Un point $M(x, y, z)$ est sur Δ si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{DM} = t \cdot \vec{n}$,
 si et seulement si il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} x-7=2t \\ y+1=-t \\ z-4=3t \end{cases}.$$

Un système d'équations paramétriques de Δ

est donc
$$\begin{cases} x=7+2t \\ y=-1-t \\ z=4+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(d) Soit $H(x_H, y_H, z_H)$ le point d'intersection de Δ et (ABC) . On a $2x_H - y_H + 3z_H + 1 = 0$.

De plus il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que
$$\begin{cases} x_H = 7+2t \\ y_H = -1-t \\ z_H = 4+3t \end{cases}.$$

On reporte dans l'équation de (ABC) et on trouve:

$$2(7+2t) - (-1-t) + 3(4+3t) + 1 = 0$$

d'où $14t + 28 = 0$, $t = -2$.

On trouve donc que $x_H = 3, y_H = 1, z_H = -2$.

(e) On a $d(D, (ABC)) = DH$ car H est le projeté orthogonal de D sur (ABC) .

$$\text{Donc } d(D, (ABC)) = \sqrt{(3-7)^2 + (1-(-1))^2 + (-2-4)^2} = \sqrt{4^2 + 2^2 + 6^2},$$

$$d(D, (ABC)) = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}$$

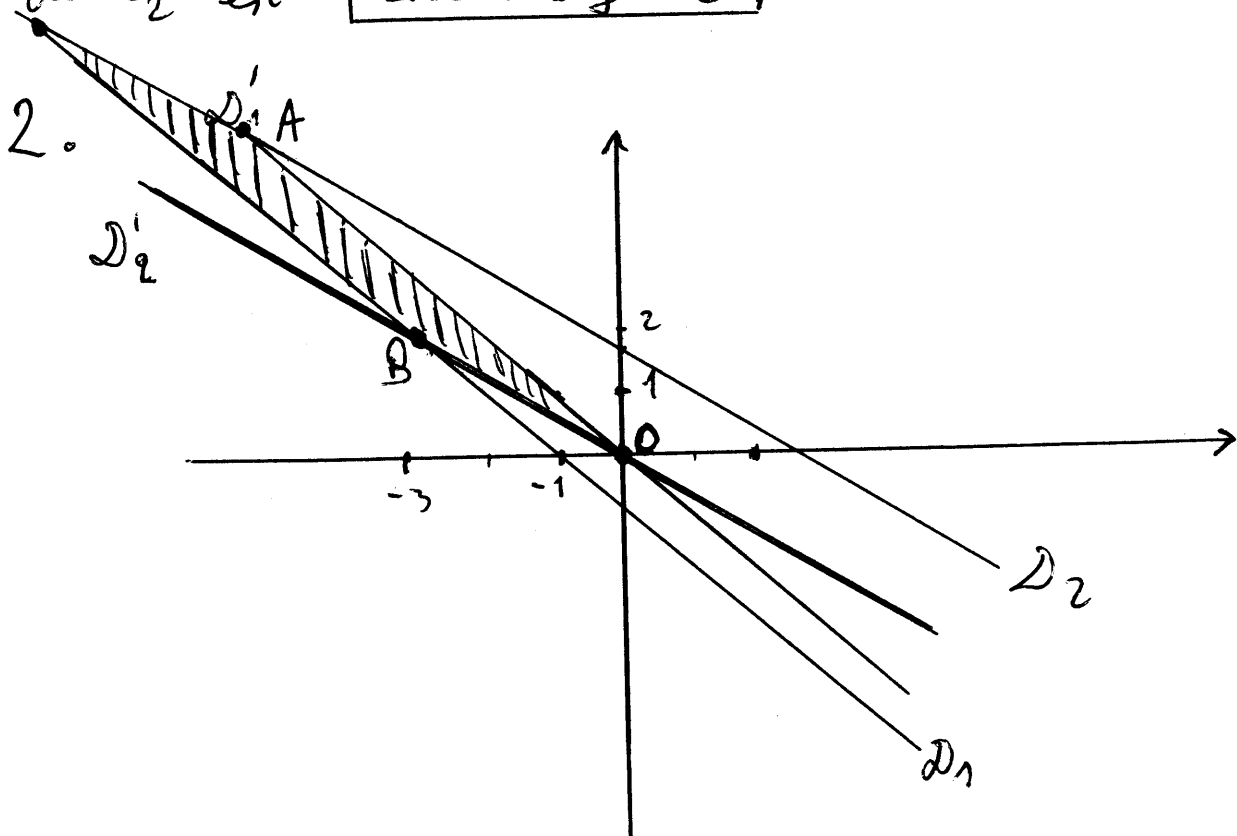
Exercice 2

1. La droite \mathcal{D}_1' est la droite passant par O et de vecteur normal $\vec{n}_1(1, 1)$.

Un point $M(x, y) \in \mathcal{D}_1'$ si et seulement si $\vec{OM} \perp \vec{n}_1$,
si et seulement si $\vec{OM} \cdot \vec{n}_1 = 0$, si et seulement
si $x + y = 0$.

Une équation cartésienne de \mathcal{D}_1' est $\boxed{x + y = 0}$.

La droite \mathcal{D}_2' est la droite passant par O et de vecteur normal $\vec{n}_2(2, 3)$. On conclut par la même méthode qu'une équation cartésienne de \mathcal{D}_2' est $\boxed{2x + 3y = 0}$.



On sait que O est un sommet du parallélogramme.

On cherche les coordonnées des sommets qui lui sont adjacents, c'est-à-dire des points d'intersection de D_2 et D_1' et de D_1 et D_2' .

Soit $A(x_A, y_A)$ le point d'intersection de D_2 et D_1' .

$$\text{On a } \begin{cases} 2x_A + 3y_A - 5 = 0 \\ x_A + y_A = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_A = -y_A \\ y_A = 5 \end{cases}$$

Ainsi $x_A = -5$ et $y_A = 5$.

Soit $B(x_B, y_B)$ le point d'intersection de D_1 et D_2' .

$$\text{On a } \begin{cases} x_B + y_B + 1 = 0 \\ 2x_B + 3y_B = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x_B + y_B + 1 = 0 \\ y_B - 2 = 0 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1) \end{cases}$$

On trouve que $y_B = 2$ et $x_B = -3$.

Soit P l'aire du parallélogramme.

$$\text{On a } P = |\det(\vec{OA}, \vec{OB})| = \left| \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} \right| = |-10 + 15| = 5.$$

L'aire du parallélogramme vaut 5.

Exercice 3

1. On échelonne le système:

$$\begin{cases} x - z = m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \\ y + z = 2m \end{cases} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{cases} x - z = m \\ y + z = 2m \\ -2x + 3y + 4z = 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1} \begin{cases} x - z = m \\ y + z = 2m \\ 3y + 2z = 1 + 2m \end{cases} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{cases} x - z = m \\ y + z = 2m \\ -z = 1 - 4m \end{cases}$$

Le dernier système est échelonné, avec 3 pivots, donc il admet une unique solution.

On trouve que

$$\begin{cases} x = m + z = 5m - 1 \\ y = 2m - z = 1 - 2m \\ z = 4m - 1 \end{cases}$$

D'où l'unique solution de S_m est $x_m = 5m - 1$, $y_m = 1 - 2m$ et $z_m = 4m - 1$.

2. On note $\tilde{F} = \{ A_m \in \mathcal{E} \mid m \in \mathbb{R} \}$.

On voit que $M(x, y, z) \in \tilde{F} \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ tel que $M = A_m$

$$\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = -1 + 5m \\ y = 1 - 2m \\ z = -1 + 4m \end{cases}$$

On reconnaît un système d'équations paramétriques de la droite passant par le point de coordonnées $(-1, 1, -1)$, de vecteur directeur $(5, -2, 4)$.