Base d'algèbre

Géométrie dans le plan et l'espace

Nicolas Delanoue

Polytech Angers - Université d'Angers

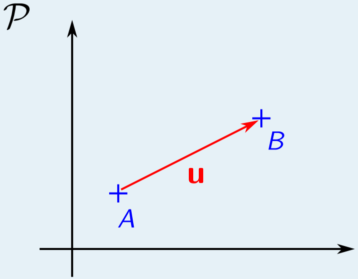
On travaille dans le plan $\mathcal{P}$ orienté.

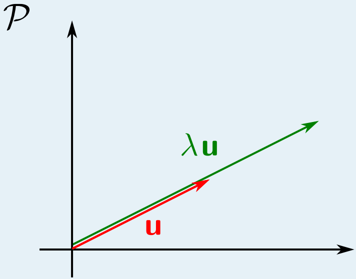
Définition

Soit $\mathbf{u}$ un vecteur et deux points A et B tel que $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$. La *norme* de $\mathbf{u}$ est la distance AB.

On la note $\|\mathbf{u}\|$, i.e. $\|\mathbf{u}\| = AB$.

Illustration





Proposition

- $\|\mathbf{u}\| = 0$ est équivalent à $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$.

Définition

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs non nuls. On dit que $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont *orthogonaux* si l'angle $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \frac{\pi}{2} \mod \pi$.
Dans ce cas, on note $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$.

Définition

On munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, c'est-à-dire $\|\mathbf{i}\| = \|\mathbf{j}\| = 1$ et $\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$.
Avec $\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$, on dit que (x, y) sont les *coordonnées* de $\mathbf{u}$ dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Proposition

$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Preuve

Proposition (Inégalité triangulaire)

Pour tout $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$, on a $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$.

Définition

On appelle *produit scalaire* de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ le nombre réel noté $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ et défini par

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2}\left(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2\right).$$

On note aussi parfois $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ par $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$.

Propriétés immédiates

- Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ alors $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$,
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$,
- $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$.

Théorème

$\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ si et seulement $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

Expression dans une base orthonormée

Si $\mathbf{u}(x, y)$ et $\mathbf{v}(x', y')$ alors $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = xx' + yy'$

Propriétés élémentaires

- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$
- $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$.

Expression géométrique

Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont non nuls alors $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$.

Corollaire : Inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

On travaille dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

On définit la norme et le produit scalaire de la même manière que dans le plan $\mathcal{P}$.

Tout ce qu'on a dit dans le plan reste vrai dans l'espace. Les seules différences sont les expressions analytiques :

Si $\mathbf{u}(x, y, z)$ et $\mathbf{v}(x', y', z')$ alors

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

et

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = xx' + yy' + zz'.$$

On travaille dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Définition

Soit $\mathcal{D}$ une droite. On dit que $\mathbf{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ s'il existe deux points distincts A et B de $\mathcal{D}$ tels que $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$.

Remarque : nécessairement $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ car $A \neq B$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(a, b)$ et de vecteur directeur $\mathbf{u}(\alpha, \beta)$.

Un point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\mathbf{u}$ colinéaires, i.e. $\overrightarrow{AM} = t\mathbf{u}$ où $t \in \mathbb{R}$. En écrivant cette égalité dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, on obtient

$$\begin{cases} x - a = t\alpha, \\ y - b = t\beta. \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Définition

Le système (1) est un *système d'équations paramétriques* de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque. Un tel système n'est pas unique.

Réciproque

Tout système $\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ où $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ est un système d'équations paramétriques de la droite passant par $A(a, b)$ et de vecteur directeur $\mathbf{u}(\alpha, \beta)$.

Définition

On dit que $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ est un vecteur normal à la droite $\mathcal{D}$ si $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ où $\mathbf{u}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

Remarque : Si $\mathbf{u}$ a pour coordonnées (α, β), alors le vecteur $\mathbf{n}(-\beta, \alpha)$ est normal à $\mathcal{D}$.

Le point $M(x, y)$ appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM} \perp \mathbf{n}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$. En écrivant cette égalité dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$, on obtient

$$-\beta(x - a) + \alpha(y - b) = 0,$$

c'est-à-dire

$$-\beta x + \alpha y + \beta a - \alpha b = 0. \tag{2}$$

Définition

L'équation (2) une *équation cartésienne* de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque. Une telle équation n'est pas unique.

Réciproque

Avec $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, l'équation $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ est l'équation cartésienne d'une droite de vecteur normal $\mathbf{n}(\alpha, \beta)$.

Position relative de deux droites

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ du plan sont ou bien :

- sécantes, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \{I\}$
- parallèles :
  - strictement parallèles, $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' = \emptyset$
  - confondues, $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$.

dessin

Algébriquement, pour connaître la position relative de deux droites à partir des équations de ces droites, on résout un système d'équations linéaires.

Exemple 1

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ d'équations cartésiennes respectives $x+y+4=0$, $2x-y+2=0$. On résout le système

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y=-4 & L_1 \\ 2x-y=-2 & L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+y=-4 & L_1 \\ -3y=6 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-2 \\ y=-2 \end{array}\right.$$

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes au point $I(-2,-2)$.

Exemple 2

Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ d'équations cartésiennes respectives $x+y+4=0$, $x+y+5=0$. Pour calculer les coordonnées de l'intersection $\mathcal{D}\cap\mathcal{D}''$, on résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x+y=-4 & L_1 \\ x+y=-5 & L_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+y=-4 & L_1 \\ 0=-1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{array}\right.$$

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}''$ sont strictement parallèles.

On travaille dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Définition

Deux vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont *colinéaires* si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ou s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{v} = k\mathbf{u}$.

Définition

Trois vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont coplanaires si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires ou s'il existe $(k, l) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbf{w} = k\mathbf{u} + l\mathbf{v}$.

Exemple. Les vecteurs $\mathbf{u}(1, 2, 3)$, $\mathbf{v}(0, -1, 1)$ et $\mathbf{w}(2, 3, 7)$ sont coplanaires car $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

FIN DE LA SEANCE 1

Définition.

Soit $\mathcal{P}$ un plan. On dit que $\mathcal{P}$ est dirigé par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ (ou que $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est une base de $\mathcal{P}$) s'il existe A, B et C non-alignés de $\mathcal{P}$ tels que $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\mathbf{v} = \overrightarrow{AC}$.

Remarque. Les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ ne sont pas colinéaires car A, B et C ne sont pas alignés.

Définition

Soit $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$. On dit que $\mathbf{n}$ est un vecteur normal à un plan $\mathcal{P}$ si $\mathbf{n}$ est orthogonal à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ où $\mathcal{P}$ est dirigé par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $A(a, b, c)$ et dirigé par les vecteurs $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\mathbf{v}(\alpha', \beta', \gamma')$.

Un $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont coplanaires, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} = t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$ où $(t, s) \in \mathbb{R}^2$.

En écrivant cette égalité dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on obtient

$$\begin{cases} x - a = t\alpha + s\alpha', \\ y - b = t\beta + s\beta', \\ z - c = t\gamma + s\gamma'. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} x = a + t\alpha + s\alpha' \\ y = b + t\beta + s\beta' \\ z = c + t\gamma + s\gamma' \end{cases}, \ (t, s) \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Définition

L'équation (3) est un *système d'équations paramétriques* du plan $\mathcal{P}$.

Remarque. Un tel système n'est pas unique.

Réciproque

Tout système

$$\begin{cases} x = a + t\alpha + s\alpha' \\ y = b + t\beta + s\beta' \\ z = c + t\gamma + s\gamma' \end{cases}, \ (t,s) \in \mathbb{R}^2,$$

où (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ ne sont pas proportionnels est un système d'équations paramétriques du plan passant par $A(a, b, c)$ et dirigé par $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\mathbf{v}(\alpha', \beta', \gamma')$.

Soit $\mathbf{n}(\alpha, \beta, \gamma)$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$. Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{P}$ ssi $\overrightarrow{AM} \perp \mathbf{n}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AM} \cdot \mathbf{n} = 0$.

En écrivant cette égalité dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, on obtient

$$\alpha(x - a) + \beta(y - b) + \gamma(z - c) = 0,$$

c'est-à-dire

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0, \text{ où } \delta = -(\alpha a + \beta b + \gamma c). \tag{4}$$

Définition

L'équation (4) est une *équation cartésienne* du plan $\mathcal{P}$.

Remarque. Une telle équation n'est pas unique.

Réciproque

Toute équation $\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, est une équation cartésienne d'un plan de vecteur normal $\mathbf{n}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Position relative de deux plans

Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'espace sont :

- soit sécants (suivant une droite), $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{D}$
- soit parallèles :
  - strictement parallèles, $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$
  - confondus, $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$.

Dessin

Proposition

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans d'équation respective $ax + by + cz + d = 0$ et $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles si seulement si (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels.

Exemple.

Soit $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2y + z + d = 0$ et $\mathcal{P}'$ d'équation $-2x + 4y - 2z + e = 0$. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.
On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & -d \\ -2x + 4y - 2z & = & -e \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & -d \\ 0 & = & -e - 2d \end{array}\right.$$

Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus si $e = -2d$, sinon ils sont strictement parallèles.

Définition

La définition d'un *vecteur directeur* d'une droite de l'espace est la même que pour une droite du plan.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(a, b, c)$ et de vecteur directeur $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Un point $M(x, y, z)$ appartient à $\mathcal{D}$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\mathbf{u}$ sont colinéaires, i.e. $\overrightarrow{AM} = t\mathbf{u}$ où $t \in \mathbb{R}$. Dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ cette égalité s'écrit

$$\left\{\begin{array}{l} x = a + t\alpha, \\ y = b + t\beta, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = c + t\gamma, \end{array}\right. \tag{5}$$

Définition

L'équation (5) est un *système d'équations paramétriques* de la droite $\mathcal{D}$.

Remarque. Un tel système n'est pas unique.

Réciproque

Tout système $\begin{cases} x = a + t\alpha \\ y = b + t\beta \\ z = c + t\gamma \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$ est un système d'équations paramétriques de la droite passant par $A(a, b, c)$ et de vecteur directeur $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Toute droite de l'espace est l'intersection de deux plans sécants. Donc toute droite $\mathcal{D}$ admet *un système d'équations cartésiennes* de la forme

$$\begin{cases} ax + by + cz + d & = & 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' & = & 0 \end{cases}$$

où (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels.

Position relative d'une droite et d'un plan

Une droite $\mathcal{D}$ et un plan $\mathcal{P}$ sont :

- soit sécants (en un point), $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \{I\}$
- soit parallèles :
  - soit strictement parallèles, $\mathcal{D} \cap \mathcal{P} = \emptyset$
  - soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$.

Pour connaître la position relative d'une droite et d'un plan, on résout un système de trois équations linéaires à trois inconnues.

Exemple

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $\left\{\begin{array}{l} x+y+z-1=0 \\ x-y+z+1=0 \end{array}\right.$ et

$\mathcal{P}$ le plan d'équation $2x-y+3z-2=0$.

On résout le système :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x+y+z & = & 1 \\ x-y+z & = & -1 \\ 2x-y+3z & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrl} x+y+z & = & 1 & L_1 \\ -2y & = & -2 & L_2-L_1 \\ -3y+z & = & 0 & L_3-2L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x & = & -3 \\ y & = & 1 \\ z & = & 3 \end{array}\right.$$

La droite $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants et s'intersectent au point de coordonnées $(-3,1,3)$.

On travaille dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Soit $\mathcal{D}$ une droite et soit M un point de $\mathcal{P}$.

Définition

On appelle *distance du point M à la droite $\mathcal{D}$* la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. On la note $d(M, \mathcal{D})$.

Dessin

Calcul de $d(M, \mathcal{D})$. On suppose que $M(x', y')$ et que $\mathcal{D}$ a pour équation $ax + by + c = 0$. Alors on a

$$\boxed{d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax' + by' + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Exemple. Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $2x - 2 = 0$. On a

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|2x' - 2|}{\sqrt{4}} = \frac{2|x' - 1|}{2} = |x' - 1|.$$

On travaille dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

On considère $\mathcal{P}$ un plan et soit M un point de $\mathcal{E}$.

Définition

On appelle *distance du point M au plan $\mathcal{P}$* la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
On la note $d(M, \mathcal{P})$.

Calcul de $d(M, \mathcal{P})$

On suppose que $M(x', y', z')$ et que $\mathcal{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$. Alors on a

$$d(M, \mathcal{P}) = \frac{|ax' + by' + cz' + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

On travaille dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$.

Définition

Soient $\mathbf{u}(\alpha, \beta)$ et $\mathbf{v}(\alpha', \beta')$ deux vecteurs. On appelle *déterminant des vecteurs* **u** *et* **v** l'aire algébrique du parallélogramme engendré par **u** et **v**. On le note $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}$ ou aussi $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v})$.

Dessin

Définition

Algébriquement, on a $\det(\mathbf{v},\mathbf{u}) = \alpha\beta' - \beta\alpha'$.

Remarque. $\det(\mathbf{v},\mathbf{u}) = -\det(\mathbf{u},\mathbf{v})$

Proposition

Les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires ssi $\det(\mathbf{u},\mathbf{v}) = 0$.

Exemple. Soient $\mathbf{u}(1,2)$ et $\mathbf{v}(4,8)$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 1 \times 8 - 2 \times 4 = 0.$$

Donc $\mathbf{u}(1,2)$ et $\mathbf{v}(4,8)$ sont colinéaires.

Interprétation géométrique

Soient **u** et **v** deux vecteurs non nuls et soit $\alpha = (\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$ l'angle orienté des vecteurs **u** et **v**. On a

$$\cos\alpha = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{\det(\mathbf{u},\mathbf{v})}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}.$$

Application 1 : détermination de l'angle de vecteurs $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})$

Soit $\mathbf{u} = (1, \sqrt{3})$ et $\mathbf{v} = (0, -3)$.
On a $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = -3\sqrt{3}$, $\|\mathbf{u}\| = 2$, $\|\mathbf{v}\| = 3$ et $\det(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -3$.
D'où

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \frac{-3\sqrt{3}}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = \frac{-3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit $(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}}) = -\frac{5\pi}{6}$.

On travaille dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé direct $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Définition.

Soient $\mathbf{u}(\alpha, \beta, \gamma)$, $\mathbf{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ et $\mathbf{w}(\alpha", \beta", \gamma")$. On appelle produit mixte (ou déterminant) des vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ le réel

$$\alpha" \begin{vmatrix} \beta & \beta' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix} - \beta" \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma' \end{vmatrix} + \gamma" \begin{vmatrix} \alpha & \alpha' \\ \beta & \beta' \end{vmatrix}.$$

On le note $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ ou $\text{dét}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ ou $\begin{vmatrix} \alpha & \alpha' & \alpha" \\ \beta & \beta' & \beta" \\ \gamma & \gamma' & \gamma" \end{vmatrix}$.

Proposition

Les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ sont coplanaires si et seulement si $\det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$.

Exemple

Soient $\mathbf{u}(1,2,3)$, $\mathbf{v}(0,-1,1)$ et $\mathbf{w}(2,3,7)$. On a

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(5) - 3(1) + 7(-1) = 0.$$

Calcul de volume

Soit un parallélepipède $\mathbf{P}$ engendré par les vecteurs $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$.

$$\boxed{\text{Volume}(\mathbf{P}) = |det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})|}$$

On travaille dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé direct $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Définition

Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{E}$. Notons par $\mathbf{w}$ le vecteur unitaire normal à $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ tel que la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ soit directe.
Le produit vectoriel de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est le vecteur

$$\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| |\sin(\widehat{\mathbf{u}, \mathbf{v}})| \mathbf{w}.$$

Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont colinéaires, on pose $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Exemples. $\mathbf{k} = \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$, $\mathbf{j} = \mathbf{k} \wedge \mathbf{i}$ ...

Théorème

Si $\mathbf{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\mathbf{v}(\alpha',\beta',\gamma')$ alors $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}$ a pour coordonnées :

$$\left(\begin{vmatrix}\beta & \beta' \\ \gamma & \gamma'\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}\alpha & \alpha' \\ \gamma & \gamma'\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\alpha & \alpha' \\ \beta & \beta'\end{vmatrix}\right) \tag{6}$$

Proposition

- $det(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) = (\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}$,
- $\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} = -\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}$,
- $(\mathbf{u}+\mathbf{v})\wedge\mathbf{w} = \mathbf{u}\wedge\mathbf{w}+\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$,
- $\mathbf{u}\wedge(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{u}\wedge\mathbf{v}+\mathbf{u}\wedge\mathbf{w}$,
- $(\lambda\mathbf{u})\wedge\mathbf{v} = \mathbf{u}\wedge(\lambda\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$.