Base d'algèbre

Chapitre 2. Systèmes linéaires

Nicolas Delanoue

Polytech Angers - Université d'Angers

Définition - Equation linéaire

Une *équation linéaire à n inconnues* est une équation du type :

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

où les a_i et b sont des nombres réels donnés.

Les x_i sont appelés les *inconnues* et résoudre l'équation signifie déterminer les nombres réels x_i (s'il y en a) qui vérifie cette équation.

Remarque

On utilise aussi x, y, z, w... pour désigner les inconnues.

Exemples d'équation linéaire

1. $2x = -2$: la solution est $x = -1$.
2. $0x = 5$: il n'y a pas de solution.
3. $2x + y = 4$: l'ensemble des solutions est formé des couples (x, y) tel que $y = 4 - 2x$. Géométriquement, c'est la droite passant par le point $(0, 4)$ et de vecteur directeur $(1, -2)$.

Définition - Système linéaire

Un *système d'équations linéaires* avec p équations à n inconnues est la donnée de p équations linéaires à n inconnues, c'est-à-dire un système du type :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right. ,$$

où les a_{ij} et b_i sont des éléments de $\mathbb{R}$ donnés.

Exemple

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 6 \\ 9x + 7y - 6z = 2 \\ 4x - 9y + 8z = 1 \end{array}\right.$$

Remarques

- On note L_i la i-ème équation :

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i,$$

  et on l'appelle aussi *i-ème ligne* du système.
- Les x_i sont appelés les *inconnues*.
- Résoudre le système signifie déterminer des valeurs pour les variables $x_i \in \mathbb{R}$ (s'il y en a) qui vérifient ces équations.

Exemple - un système triangulaire

$$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=6 \\ y-z=2 \\ z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+y+1=6 \\ y-1=2 \\ z=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+3+1=6 \\ y=3 \\ z=1 \end{array}\right.$$

Ce système admet une unique solution : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{r} 2z = 2 \\ x - 2y + 3z = 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ x - 2y & = & 6 - 3z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 1 \\ x - 2y & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 3 + 2y \\ y & = & y \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

La variable y peut prendre n'importe quelle valeur réelle : il y a une infinité de solutions, tous les triplets de la forme $(3 - 2y, y, 1)$ sont solutions.

suite ...

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+2y \\ y & = & y \\ z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcccc} x & = & 3 & + & 2y \\ y & = & 0 & + & 1y \\ z & = & 1 & + & 0y \end{array}\right.$$

Géométriquement, l'ensemble des solutions est la droite passant par le point $(3, 0, 1)$ et de vecteur directeur $(2, 1, 0)$.

Définition

Deux systèmes linéaires à n inconnues sont équivalents s'ils admettent les mêmes solutions.

Exemple

$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 & = & -7 \\ 2x_1 + x_2 & = & 7 \end{array}\right.$ a pour unique solution $(x_1, x_2) = (2, 3)$.

$\left\{\begin{array}{rcl} 8x_1 - 3x_2 & = & 7 \\ 3x_1 - 2x_2 & = & 0 \\ 10x_1 - 2x_2 & = & 14 \end{array}\right.$ a pour unique solution $(x_1, x_2) = (2, 3)$.

Donc les deux systèmes sont équivalents.

Stratégie

Pour résoudre un système linéaire, on essaie de construire un système linéaire plus "simple" qui lui est équivalent.

Dessin d'un chemin avec des systèmes équivalents qui va vers une zone de facile

Définition.

Un système est échelonné si le premier coefficient (un des a_{ik}) non-nul de la ligne L_i est strictement à droite du premier coefficient non-nul de la ligne L_{i-1}.

Exemples de systèmes échelonnés :

1. $$\left\{\begin{aligned} x+y+z&=3\\ y-z&=1\\ z&=4\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{aligned} 1x+y+z&=3\\ 1y-z&=1\\ 1z&=4\end{aligned}\right.$$

2. $$\left\{\begin{aligned} 2x+y&=1\\ 3y&=5\end{aligned}\right.$$

3. $$\left\{\begin{aligned} 7x+2y+3z&=9\\ 2z&=2\end{aligned}\right.$$

Définition

Pour un système échelonné, on appelle les pivots les premiers coefficients non-nuls de chaque ligne.

Exemples de systèmes non-échelonnés.

1. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 4y & = & 3 \\ 1x - 5y & = & 1 \end{array} \right.$

2. $\left\{ \begin{array}{r} 1x + y + z = 1 \\ 1y + 2z = 4 \\ 2y + 3z = 1 \end{array} \right.$

3. $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x + 3y + 5z + 8t & = & 5 \\ 2z + 3t & = & 9 \\ 6z - 2t & = & 2 \end{array} \right.$

Un système échelonné est particulièrement simple à résoudre.

$$S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1x + y + z = 6 \\ \quad 1y - z = 2 \\ \quad\quad 1z = 1 \end{cases}$$

On "déplace" les variables libres (non-pivotables) "à droite" :

$$S_1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1x = -y - z + 6 \\ 1y = 2 + z \\ 1z = 1 \end{cases}$$

On résout la dernière équation et on remonte de proche en proche :

$$\begin{cases} x = -y - 1 + 6 \\ y = 2 + 1 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y - 1 + 6 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - 1 + 6 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Observation. Un système échelonné est particulièrement simple à résoudre.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2z = 2 \end{cases}$$

Etape 1 : aligner les variables

$$\begin{cases} 1x + 2y + 3z = 6 \\ 0x + 0y + 2z = 2 \end{cases}$$

Etape 2 : repérer les pivots

$$\begin{cases} {\color{red}1}x + 2y + 3z = 6 \\ 0x + 0y + {\color{red}2}z = 2 \end{cases}$$

Etape 3 : déplacer les variables libres (non-pivotables) à droite

$$\begin{cases} 1x + 3z = 6 - 2y \\ 2z = 2 \end{cases}$$

Etape 4 : on résout la dernière équation et on remonte de proche en proche

$$\begin{cases} x = 6 - 2y - 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 3 - 2y \\ y & = & y \\ z & = & 1 \end{cases}$$

Géométriquement, l'ensemble des solutions est la droite passant par le point $(3, 0, 1)$ et ayant pour vecteur directeur $(-2, 1, 0)$.

Idée. Construire à partir d'un système linéaire S_0 donné un système S_1 *équivalent* et *échelonné*.

Propriétés

1. Comme S_0 et S_1 sont équivalents, ils ont les même solutions.
2. Comme S_1 est échelonné, S_1 est facile à résoudre.

Théorème

Les actions suivantes créent des systèmes linéaires équivalents :

1. Échanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$.
2. Multiplier une ligne par une constante α non nulle : $L_i \leftarrow \alpha L_i$.
3. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre : $L_i \leftarrow L_i + \beta L_j$.

Résultat. Par un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut toujours transformer un système donné en un système échelonné.

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -\ x_2 & +1x_3 & +1x_4 & = 1 & L_1 \\ x_1 & & +2x_3 & -1x_4 & = 2 & L_2 \\ x_1 & +\ x_2 & +2x_3 & +6x_4 & = 5 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +1x_4 & = 1 & \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = 1 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & 2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -x_2 & +x_3 & +x_4 & = 1 & \\ & x_2 & +x_3 & -2x_4 & = 1 & \\ & & -x_3 & +9x_4 & = 2 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rrrll} & 2x_2 & +x_3 & = 1 & L_1 \\ x_1 & & +2x_3 & = 2 & L_2 \\ x_1 & +1x_2 & +3x_3 & = 5 & L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrll} x_1 & +0x_2 & +2x_3 & = 2 & L_1 \leftarrow L_2 \\ & 2x_2 & +x_3 & = 1 & L_2 \leftarrow L_1 \\ x_1 & +1x_2 & +3x_3 & = 5 & \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrll} x_1 & +0x_2 & +2x_3 & = 2 & \\ & 2x_2 & +x_3 & = 1 & \\ & 1x_2 & +x_3 & = 3 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrll} x_1 & +0x_2 & +2x_3 & = 2 & \\ & 2x_2 & +x_3 & = 1 & \\ & & x_3 & = 5 & L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Récapitulatif de la méthode

1. En échangeant (éventuellement) des lignes, s'assurer que la première ligne commence par un coefficient non-nul (ce coefficient est le premier pivot).
2. En faisant des opérations élémentaires de type 2. ou 3., annuler tous les coefficients situés en-dessous de la variable du premier pivot.
3. Recommencer avec le sous-système situé en bas à droite du pivot.
4. On s'arrête quand on a un système échelonné.

Remarque

Au cours de la procédure d'échelonnage, on peut tomber sur une équation du type :

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = b \text{ avec } b \neq 0.$$

Il n'y a pas de solution. Le système est dit *incompatible*.

Exemple. $\begin{cases} x + y = 4 \\ -2x - 2y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 4 \\ 0 = 15 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$

Remarque

Si on tombe sur une équation du type :

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0,$$

on l'enlève du système.

Exemple.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} x + y & = & 4 \\ -2x - 2y & = & -8 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 4 \\ 0 & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \ x + y = 4 \right.$$

Remarque

Une fois enlevées toutes les équations redondantes ($0 = 0$), on obtient un système échelonné équivalent au système initial.

- S'il n'y a pas de variable libre, alors le système a une unique solution.
- S'il y a des variables libres, alors le système a une infinité de solutions.

Exemple.

$$\begin{cases} x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 2x + 4y - 3z + 4w = 5 \\ 5x + 10y - 8z + 11w = 12 \end{cases}$$

est équivalent au système échelonné :

$$\begin{cases} 1x + 2y - 2z + 3w = 2 \\ 1z - 2w = 1 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{r} 1x+2y-2z+3w=2 \\ 1z-2w=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} 1x= & 2-2y+2z-3w \\ 1z= & 1+2w \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x= & 2-2y+2(1+2w)-3w \\ z= & 1+2w \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} x= & 4-2y+w \\ z= & 1+2w \end{array}\right.$$

D'où les solutions sont de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2\lambda+\mu \\ \lambda \\ 1+2\mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. On dit que λ et μ sont les paramètres de l'ensemble des solutions.

Définition - système homogène

On dit qu'un système est *homogène* si tous les seconds membres des équations sont nuls :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & 0 \end{array}\right. .$$

Remarques

1. Un tel système est toujours compatible car $(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0)$ est toujours solution (solution triviale).
2. Si $u = (u_1, \ldots, u_n)$ et $v = (v_1, \ldots, v_n)$ sont deux solutions alors $u + v$ est solution, ainsi que λu pour tout réel λ.

Remarque

La pivot de pivot de Gauss est aussi valable avec pour les systèmes linéaires à données complexes et où les solutions peuvent prendre des valeurs complexes.