Base d'algèbre

Chapitre 3. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Nicolas Delanoue

Polytech Angers - Université d'Angers

Définition

Dans le plan $\mathcal{P}$, on note par $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

Structure algébrique

On définit deux opérations sur les vecteurs :

- Addition des vecteurs $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{w}$,
  de sorte que $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$, $\mathbf{v} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{w} = \overrightarrow{OM}$ et $OAMB$ est un parallélogramme.
- Multiplication d'un vecteur $\mathbf{u}$ par un réel α : $\alpha\mathbf{u} = \mathbf{v}$
  de sorte que
  - $\mathbf{v}$ a la même direction que $\mathbf{u}$,
  - si $\alpha > 0$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ sont de même sens,
  - si $\alpha < 0$, $\mathbf{v}$ et $\mathbf{u}$ sont de sens opposé,
  - $\|\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{u}\|$.

On pose $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. C'est l'ensemble des couples de nombres réels.

Désormais, on utilisera la notation (sous forme de colonne) suivante :

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Si on munit $\mathcal{P}$ d'un repère orthonormé $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j})$, on peut identifier $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\mathbb{R}^2$ à l'aide des coordonnées dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$:

$$\mathbf{u} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \in \overrightarrow{\mathcal{P}} \leftrightsquigarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Par analogie, on appelle les éléments de $\mathbb{R}^2$ des *vecteurs*.

Opérations avec les coordonnées

On peut également exprimer l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un réel dans la base $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$.
On obtient deux opérations sur $\mathbb{R}^2$:

- Addition de deux vecteurs :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

- Multiplication d'un vecteur par un réel

$$\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \mathbf{u} \\ \alpha y \end{pmatrix}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux opérations est un *espace vectoriel*.

Remarque

De la même manière, on peut identifier $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ (l'ensemble des vecteurs de l'espace) et

$$\mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \right\},$$

et munir $\mathbb{R}^3$ d'une addition et d'une multiplication par les réels.
On dit que $\mathbb{R}^3$ est un *espace vectoriel* et on appelle ses éléments des *vecteurs*.

Question

Pourquoi s'arrêter là ?

Définition

On appelle *vecteur réel* de dimension n une colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de n nombres réels.

Notations

- On note par $\mathbb{R}^n$ l'ensemble de ces vecteurs.
- On utilise $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $\mathbf{a}$ ..., pour désigner ces vecteurs.

Voici quelques vecteurs "spéciaux" (avec leurs noms "réservés").

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \cdots, \mathbf{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice

Si on liste en colonne les notes d'un élève au Bac, c'est un vecteur en quelle dimension ?

Matière	Note
Maths	17
Physique Chimie	16
SVT	14
Histoire Géo	12
Français	11
Philosophie	10
LV 1	14
LV 2	16
EPS	19

Réponse : en dimension 9

Opérations dans $\mathbb{R}^n$

- Addition des vecteurs :

  Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$, alors $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + u_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$.

- Multiplication par un réel :

  Si $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha x = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ \alpha + 5 \\ \beta - 7 \end{pmatrix}$, et $-3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -3\alpha \\ -3\beta \end{pmatrix}$.

Proposition

- $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (commutatif),
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ (associatif),
- $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ (élément neutre),
- $(\alpha + \beta)\mathbf{u} = \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{u}$, (distributif)
- $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$,
- $\alpha(\beta\mathbf{u}) = (\alpha\beta)\mathbf{u}$,
- $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$.

Proposition

L'ensemble que $\mathbb{R}^n$ muni de ces deux opérations est un espace vectoriel réel de dimension n.

Définition

Soit F un sous-ensemble (non vide) de $\mathbb{R}^n$. On dit que F est un *sous-espace vectoriel* de $\mathbb{R}^n$ si :

- pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in F$, on a $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in F$,
- pour tout $\mathbf{v} \in F$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \mathbf{v} \in F$.

Exemples triviaux

1. Dans $\mathbb{R}^2$, $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ est un sous-espace vectoriel.
2. $\mathbb{R}^2$ est un sous-espace vectoriel.

3. toute droite passant par $\mathbf{0}$ est un sous espace vectoriel.

En effet, soit D une droite d'équation $ax + by = 0$.

- Si $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ appartiennent à D alors $v_1 + v_2 \in D$ car

$$a(x_1 + x_2) + b(y_1 + y_2) = ax_1 + by_1 + ax_2 + by_2 = 0.$$

- Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in D$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda v \in D$ car

$$a(\lambda x) + b(\lambda y) = \lambda(ax + by) = 0.$$

$\square$

Théorème

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont

- $\{\mathbf{0}\}$,
- les droites passant par $\mathbf{0}$,
- $\mathbb{R}^2$.

4. Dans $\mathbb{R}^3$, tout plan passant par $\mathbf{0}$ est un sous espace vectoriel.

En effet, soit P d'équation $ax + by + cz = 0$.

- Si $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$ appartiennent à P alors
  $v_1 + v_2 \in P$ car

  $$a(x_1+x_2)+b(y_1+y_2)+c(z_1+z_2) = ax_1+by_1+cz_1+ax_2+by_2+cz_2 = 0.$$

- Si $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\lambda v \in P$ car

  $$a(\lambda x) + b(\lambda y) + c(\lambda z) = \lambda(ax + by + cz) = 0.$$

Théorème

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont

- $\{\mathbf{0}\}$,
- les droites passant par $\mathbf{0}$,
- les plans passant par $\mathbf{0}$,
- $\mathbb{R}^3$.

Proposition

Dans $\mathbb{R}^n$, l'ensemble des solutions d'un système linéaire *homogène* à n inconnues est un sous-espace vectoriel.

Proposition

L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, l'intersection de deux plans différents passant par $\mathbf{0}$ est une droite passant par $\mathbf{0}$.

Attention !

L'union de deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ n'est pas généralement un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

En effet, soit D_1 d'équation $y = 0$ et soit D_2 d'équation $x = 0$.
Alors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in D_1 \cup D_2$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in D_1 \cup D_2$ mais $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin D_1 \cup D_2$.

Définition

Soient $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des réels. On dit que le vecteur $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $v_1, \ldots, v_k$.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 4\mathbf{e}_1 + 5\mathbf{e}_2$.
- Tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ est combinaison linéaire de $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$.
- $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, en effet : $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarques

- Dans $\mathbb{R}^n$, une combinaison linéaire de $\mathbf{v}$ est un vecteur de la forme $\alpha\mathbf{v}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{R}^n$, une combinaison linéaire de $\mathbf{v}$ et $\mathbf{w}$ est un vecteur de la forme $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

Proposition

Pour savoir si un vecteur $\mathbf{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$, on est amené à résoudre un système linéaire.

En effet, on cherche à résoudre un système d'équations linéaires de la forme

$$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{v}_k$$

d'inconnues $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$?

Résolvons l'équation d'inconnue (α_1, α_2) :

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{a}. \tag{1}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 2\alpha_1 \\ 3\alpha_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ -\alpha_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 3 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

On en déduit $\mathbf{a} = 2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

Exemple

$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $vecv_2$?

Résolvons l'équation

$$x\mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{c} \tag{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 3 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 1 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + y = 3 \\ y = \frac{5}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Le système est incompatible et donc $\mathbf{c}$ n'est pas combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$ et $\mathbf{v}_2$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ est-il combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$?

Résolvons le système :

$$\left\{ \begin{array}{llllr} x & +y & +z & = & 2 \\ x & -y & +2z & = & -1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = \frac{1}{2} - \frac{3z}{2} \\ y & = \frac{3}{2} + \frac{z}{2} \end{array} \right.$$

Oui, $\mathbf{a}$ est combinaison linéaire de $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{3}{2}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \quad (z = 0),$$

mais aussi

$$\mathbf{a} = -\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 \quad (z = 1).$$

Remarque

L'écriture d'un vecteur comme combinaison linéaire d'autres vecteurs n'est pas forcément unique.

Théorème

Soient $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. L'ensemble des combinaisons linéaires de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Définition

On l'appelle le *sous-espace vectoriel engendré* par $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$. On le note

- $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$,
- $\mathrm{Vect}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$,
- ou bien $\mathrm{span}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$

Exemples avec un seul vecteur

- Supposons $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, alors $\langle \mathbf{v} \rangle = \{\lambda \mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la *droite vectorielle engendrée* par $\mathbf{v}$.
- Dans $\mathbb{R}^4$, $\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda \\ 0 \\ -3\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$.
- Supposons $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors $\langle \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{0}\}$.

Exemples avec deux vecteurs

- Si $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ et non colinéaires , alors $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ est le *plan vectoriel engendré* par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.
- Si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ colinéaires, i.e. alors $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v} \rangle$ et dans ce cas $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u} \rangle$.
- Si $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, alors $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \{\mathbf{0}\}$.

Dessin

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrons que $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \mathbb{R}^2$.

Sans perte de généralité, posons $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$. Montrons que $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$.

On cherche x, y et z tels que $\mathbf{a} = x\mathbf{v}_1 + y\mathbf{v}_2 + z\mathbf{v}_3$.

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y + z = \alpha \\ x - y + 2z = \beta \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x = \alpha - y - z = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} - \frac{3z}{2} \\ y = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} + \frac{z}{2} \end{array} \right.$$

$$\mathbf{a} = \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \right) \mathbf{v}_1 + \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} \right) \mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3.$$

Donc $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$. On en déduit $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \mathbb{R}^2$.

Remarque

Dans l'exemple précédent, on a aussi montré que $\mathbf{a} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, donc $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.
En effet, $\mathbf{v}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$.

Définition

On dit que la famille des vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est *liée* si l'un des vecteurs de la famille peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Exemple

La famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ du précédent exemple est liée.

Proposition

Une famille de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est *liée* si et seulement s'il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ non tous nuls tels que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Une telle relation s'appelle *relation de dépendance linéaire*.

Preuve

...

Remarque

- On dit aussi que les vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sont linéairement dépendants.
- Si une famille de vecteurs n'est pas liée, on dit que cette famille est *libre*.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ sont liés.

En effet,

$$2\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3,$$

i.e.

$$2\mathbf{v}_1 + 1\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0},$$

i.e. il existe α_1, α_2 et α_3 non tous nuls tel que

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Proposition

Une famille de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est libre si et seulement

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0} \Rightarrow (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = (0, \ldots, 0)$$

Preuve

Commentaire

En pratique, pour savoir si une famille de vecteurs $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est libre ou bien liée, on résout le système linéaire homogène suivant

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

- Si ce système admet d'autres solutions que la solution triviale alors la famille est liée.
- Sinon, elle est libre.

Exemple pratique

Dans $\mathbb{R}^3$, considérons $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Résolvons $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \alpha_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$.

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 & = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & = 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}.$$

On en déduit que la famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est libre.

Proposition

- Dans $\mathbb{R}^2$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ est liée si et seulement si $\text{dét}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$.
- Dans $\mathbb{R}^3$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est liée si et seulement si $\text{dét}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 0$.

Définition

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On dit que la famille $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est une *famille génératrice* de F si

$$F = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle.$$

Autrement dit, tout vecteur de F est une combinaison linéaire des vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^n$, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, P le plan d'équation $x - y + 2z = 0$ est un sous-espace vectoriel.

On a $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow x - y + 2z = 0 \Leftrightarrow x = y - 2z$,

d'où $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Finalement, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire de

$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Donc $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est une famille génératrice de P.

Définition

Soit F sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On dit que $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ est une *base* de F si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est une famille génératrice de F,
- $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est une famille libre.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^3$, le plan P d'équation $x - y + 2z = 0$ est un sous-espace vectoriel.

On sait déjà que $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une famille génératrice de P. Est-elle libre ?

$$\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

Réponse : oui.
Donc $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est une base de P.

Exemple

- Dans $\mathbb{R}^n$, soit $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ et soit $D = \langle \mathbf{u} \rangle$ la droite vectorielle engendrée par $\mathbf{u}$. Alors $(\mathbf{u})$ est une base de D.
- Dans $\mathbb{R}^n$, soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs non-colinéaires et soit $P = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ le plan vectoriel engendré par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$. Alors $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ est une base de P.
- Dans $\mathbb{R}^n$, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Théorème

Si $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F, tout vecteur a de F s'exprime comme combinaison linéaire des $\mathbf{v}_i$:

$$a = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

De plus cette écriture est unique.

Définition

On dit que $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sont les *coordonnées* de a dans la base $(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k)$.

Théorème

Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Alors toutes les bases de F ont le même nombre d'éléments.

Définition

On appelle ce nombre la *dimension* de F. On la note $\dim F$.

Exemples

1. La dimension d'une droite vectorielle est 1.
2. La dimension d'un plan vectoriel est 2.
3. La dimension de $\mathbb{R}^n$ est n.
4. Par convention, on pose $\dim \{\mathbf{0}\} = 0$.

Exemple

Dans $\mathbb{R}^4$, soit F défini par $x+y+z+t=0$. On voit que

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in F \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = y\mathbf{v}_1 + z\mathbf{v}_2 + t\mathbf{v}_3.$$

Donc la famille $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ est génératrice de F.
Vérifions que c'est une famille libre. On a

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Donc $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ est donc base de F. Ainsi $\dim F = 3$.

Définition

Dans $\mathbb{R}^n$, un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ est appelé un *hyperplan*.

Proposition

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension k.

- Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\}$ est une famille libre de vecteurs de F alors $l \leq k$.
- Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l\}$ est une famille génératrice de F alors $l \geq k$.
- Si $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_l)$ est une base de F alors $l = k$.
- Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est une famille libre de vecteurs de F alors c'est une base de F.
- Si $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ est une famille génératrice de F alors c'est une base de F.