Base d'algèbre

Chapitre 4. Calcul matriciel

Nicolas Delanoue

Polytech Angers - Université d'Angers

Définition

On appelle matrice réelle de taille $p \times n$ (ou à p lignes et n colonnes) un tableau de p lignes et n colonnes de nombres réels.
On note $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
Si $p = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$.

Exemples

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$,
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$,
$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \pi \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$.

On utilise en général des lettres capitales A, B, M etc... pour désigner des matrices.

Cas particuliers :

1. Un vecteur de $\mathbb{R}^n$ est une matrice à n lignes et une colonne, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.

Écriture indicielle d'une matrice

Pour un vecteur, on écrit $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Comment faire pour une matrice ?

Ecriture indicielle d'une matrice

On utilise deux indices : un pour la ligne et un pour la colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix},$$

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}} = (a_{ij}).$$

On dit que $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ est la i-ème ligne de la matrice A

et que $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix}$ est la j-ème colonne de A.

Notation par lignes

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} \text{ où } L_i = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R}).$$

Notation par vecteurs colonnes

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_1 & \mathbf{c}_2 & \dots & \mathbf{c}_n \end{pmatrix} \text{ où } \mathbf{c}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{pi} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

Exemple

Avec $A = \begin{pmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}$ où $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v} = 2\mathbf{e}_2$.

Sous forme matricielle, $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition

La *matrice nulle* est matrice dont tous les coefficients a_{ij} sont nuls.

Exemple : dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, la matrice nulle est $0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Définition

Une *matrice-ligne* est matrice qui n'a qu'une seule ligne.

Exemple : $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

Définition

Une *matrice-colonne* est une matrice qui n'a qu'une seule colonne.

Exemple : $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Définition

Une *matrice carrée* est une matrice avec autant de lignes que de colonnes, c'est-à-dire matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Définition

Une *matrice diagonale* est matrice vérifiant $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $m_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}$.

Définition

Avec n fixé, la *matrice identité*, notée I_n, matrice diagonale telle que $m_{ii} = 1$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Exemple : $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Définition

Une *matrice triangulaire supérieure* est une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $m_{ij} = 0$ pour $i > j$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Définition

Une *matrice symétrique* est une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ véréfiant $m_{ij} = m_{ji}$ pour tous i et j.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 14 \\ 14 & 7 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 \\ 11 & 4 & 12 \\ 10 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

Définition

Si $M \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, la matrice transposée de M, notée ${}^{\mathbf{t}}M$, est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les lignes sont les colonnes de M.
Si $M = (m_{ij})$ alors ${}^{\mathbf{t}}M = (q_{ij})$ avec $q_{ij} = m_{ji}$.

Exemple : ${}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, ${}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

${}^{\mathbf{t}}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarques

- ${}^{\mathbf{t}}({}^{\mathbf{t}}A) = A$.
- A matrice carrée est symétrique si et seulement si ${}^{\mathbf{t}}A = A$.

Addition

Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$.
La matrice $A + B$ est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $p \times n$ telle que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 7 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Remarques

- $A + 0 = 0 + A = A$,
- $A + (-A) = 0$ où $-A = (-a_{ij})$ (matrice opposée).

Multiplication par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note λA la matrice de taille $p \times n$ obtenue en multipliant les coefficients de A par λ, c'est-à-dire $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

Exemple

$$5 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -5 & 0 & 15 \\ 5 & 10 & 5 & -5 \end{pmatrix}.$$

Multiplication de deux matrices

Soient $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$. On définit le produit $A \times B = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}, \tag{1}$$

avec $i \in \{1, \ldots, p\}, j \in \{1, \ldots, q\}$.
On note aussi $A \times B$.

Remarque

Pour que le produit existe, il faut que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$AB \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $AB = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ -6 & -4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.

Exemples

- $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

  $AB \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ et $AB = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = aa' + bb'$
- $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \end{pmatrix}$ n'est pas défini.
- $\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a & a'b \\ b'a & b'b \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$

Remarque

Si A et B sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors les produits $AB \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $BA \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont toujours définis.
Mais en général, $AB \neq BA$.

En effet, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Proposition

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ alors $I_n A = A I_n = A$.

La matrice identité I_n est l'élément neutre de la multiplication matricielle.

Propriétés

1. Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{R})$ alors
$$A(BC) = (AB)C.$$
On note ABC ce produit.
2. Si $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, et $B, C \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ alors
$$A(B+C) = AB + AC.$$
3. Si $A, D \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, et $B \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ alors
$$(A+D)B = AB + DB.$$

Définition

Une matrice est *échelonnée* si le premier coefficient non-nul de la i-ème ligne est strictement à droite du premier coefficient non-nul de la $(i-1)$-ème ligne.

Exemples

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Définition

Pour une matrice échelonnée, on appelle les pivots les premiers coefficients non-nuls de chaque ligne.

Exemples de matrice non-échelonnée

- $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \end{pmatrix}$

Soit $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ une matrice à n lignes et p colonnes.

Définition

Une opération élémentaire sur les lignes de M est une des opérations suivantes :

1. Échanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$ $(i \neq j)$.
2. Multiplier une ligne par une constante non nulle : $L_i \leftarrow aL_i$ $(a \neq 0)$.
3. Ajouter à une ligne un multiple d'une autre : $L_i \leftarrow L_i + aL_j$.

Théorème

Par un nombre fini d'opérations élémentaires, on peut toujours transformer une matrice donnée en une matrice échelonnée.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\Leftrightarrow}{\begin{matrix} L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \underset{\Leftrightarrow}{L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Définition

On appelle *rang* de la matrice M le nombre de pivots de la matrice échelonnée obtenue après les opérations élémentaires.

Lien avec les systèmes linéaires

On considère un système linéaire de p équations à n inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right. .$$

On peut l'écrire sous forme d'égalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}.$$

Définition

On appelle *matrice augmentée* du système la matrice à p lignes et $n+1$ colonnes suivante :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right).$$

Remarque

Réciproquement, à toute matrice à p lignes et $n+1$ colonnes, on associe un système linéaire de p équations à n inconnues :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n & = & b_p \end{array}\right.$$

Donc pour résoudre un système, on peut utiliser la matrice augmentée, l'échelonner et résoudre le système associé à la matrice échelonnée.

Exemple

$$\begin{cases} 2y + z = 1 \\ x + 2z = -1 \\ x + y + 3z = 6 \end{cases}$$

1. Matrice augmentée : $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 6 \end{array}\right)$.
2. On l'échelonne : $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 13 \end{array}\right)$.
3. Retour à un système : $\begin{cases} x + 2z & = -1 \\ 2y + z & = 1 \\ z & = 13 \end{cases}$.
4. Solution : $x = -27$, $y = -6$, $z = 13$

Définition

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *inversible* s'il existe une matrice $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA' = A'A = I_n$.
On la note A^{-1} et on l'appelle *matrice inverse* de A.

Proposition - Unicité de l'inverse

Si $AA' = I_n$ alors $A'A = I_n$ et donc A est inversible, $A' = A^{-1}$.

Commentaire

Pour trouver l'inverse d'une matrice A, il suffit de résoudre une des deux équations matricielles d'inconnue A' suivantes :

$$A'A = I_n \text{ ou } AA' = I_n.$$

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible, en effet $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On cherche $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AM = I_2$.

On a $AM = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix}$.

Donc $AM = I_2$ si et seulement si $\begin{cases} a+2c = 1 \\ a+3c = 0 \end{cases}$ et $\begin{cases} b+2d = 0 \\ b+3d = 1 \end{cases}$

Donc $AM = I_2$ si et seulement si $\begin{cases} a+2c = 1 \\ c = -1 \end{cases}$ et $\begin{cases} b+2d = 0 \\ d = 1 \end{cases}$

On trouve bien $a = 3, b = -2, c = -1, d = 1$.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

On cherche $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tel que $AM = I_2$. On doit avoir

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

d'où $a = 1$, $b = 0$, $0 = 0$, $0 = 1$. C'est impossible.

On considère un système linéaire de n équations à n inconnues :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}\right. .$$

On l'écrit sous forme matricielle : $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Si A est inversible alors

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \Leftrightarrow A^{-1}(A\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow (A^{-1}A)\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

$$\Leftrightarrow I_n\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \Leftrightarrow \mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

La solution du système est unique. Elle est donnée par les coordonnées du vecteur $A^{-1}\mathbf{b}$.

Comment calculer l'inverse d'une matrice ?

1° méthode : On résout le système $AM = I_n$ (ou le système $MA = I_n$), en considérant les coefficients de M comme des inconnues.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarque

C'est une méthode peu efficace car il faut résoudre n systèmes linéaires de n équations à n inconnues.

2° méthode : On forme la matrice de taille $n \times 2n$ suivante :

$$\left(\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array} \right) \qquad \text{(matrice compagnon).}$$

En effectuant des opérations élémentaires, on essaie de la transformer en une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array} \right).$$

Si c'est possible, A est inversible et $A^{-1} = B$.

Considérons $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

La matrice compagnon est

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

On retrouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice compagnon est

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$ donne

$$\left(\begin{array}{ccr|crc} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

L'opération $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|crc} 1 & 0 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

L'opération $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3$ donne

$$\left(\begin{array}{ccc|crr} 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.