# Base d'algèbre

## Chapitre 5. Les applications linéaires

Nicolas Delanoue

Polytech Angers - Université d'Angers

## Définition

Soit $E \subset \mathbb{R}^m$ un sous-espace vectoriel et soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est une *application linéaire* si :

1. pour tous $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$, $f(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = f(\mathbf{u}) + f(\mathbf{v})$,
2. pour tout $\mathbf{u} \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda \mathbf{u}) = \lambda f(\mathbf{u})$.

## Proposition

- Si $f$ est linéaire alors $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.
- La composée de deux applications linéaires est linéaire.

## Proposition

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est linéaire si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax$.

*Preuve* :

- $\Rightarrow$
  Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaire.
  On pose $a = f(1)$.
  On a $x = x.1$
  d'où $f(x) = xf(1) = xa = ax$.
- $\Leftarrow$
  Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ linéaire avec $f(x) = ax$.
  alors
  1. pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, $f(u+v) = au + av = f(u) + f(v)$,
  2. pour tout $u \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda u) = \lambda au = \lambda f(u)$.

$\square$

## Exemples

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$.
   ($f$ est la projection sur l'axe des abscisses).
2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$.
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x - y$.
4. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + y \\ y - z \end{pmatrix}$.

## Exemples

5. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
   L'application $F \to F$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}$ est linéaire. On la note $Id_F$ (identité de $F$).
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'application $F \to F$, $\mathbf{x} \mapsto \lambda\mathbf{x}$ est linéaire. C'est l'homothétie de rapport $\lambda$.
6. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$.
7. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}$.

## Contre-exemples

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x^2 - y$.
2. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2xy \\ x + 3y - z \end{pmatrix}$.
3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x + 3y + 5z + 7 \\ x - 2y + z \end{pmatrix}$.
4. Soit $F$ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. Soit $\mathbf{v}$ un vecteur non-nul de $F$.
   L'application $F \to F$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} + \mathbf{v}$ n'est pas linéaire.

## Définition

Soit $F \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel. On dit que $G \subset F$ un sous-espace vectoriel de $F$ si :

- pour tous $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in G$, on a $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in G$,
- pour tout $\mathbf{v} \in G$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lambda \mathbf{v} \in G$.

## Remarques

1. Si $G \subset F$ est un sous-espace vectoriel de $F$ alors c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Si $G \subset F$ et $G$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ alors $G$ est un sous-espace vectoriel de $F$.
3. Si $G$ est un sous-espace vectoriel de $F$ alors $\dim\, G \leq \dim\, F$. De plus, $\dim\, G = \dim\, F$ si et seulement si $F = G$.

## Exemples

- Dans $\mathbb{R}^3$, soit $P$ un plan passant par $\mathbf{0}$ et soit $D \subset P$ une droite passant par $\mathbf{0}$. Alors $D$ est un sous-espace vectoriel de $P$.
- Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y - z + t = 0 \right\}$ et soit
  $$G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \mid x + y - z + t = 0 \text{ et } x - y + 4t = 0 \right\}.$$
  Alors $G$ est un sous-espace vectoriel de $F$.

## Définition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Le *noyau de f*, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des antécédents du vecteur $\mathbf{0}$, i.e.

$$\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{x} \in E \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\}\,.$$

## Exemples

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = x + y$. On a

$$\mathrm{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x + y = 0 \right\}.$$

C'est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

## Exemples

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ 2x-2y \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Ker}(f) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. En effet, on voit que $x = y = 0$ est l'unique solution du système $\begin{cases} x+y=0 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$ (à vérifier !).

## Théorème

Pour toute application linéaire $f : E \to F$, $\mathrm{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $E$.

**Définition**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. L'*image de* $f$, notée $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble suivant :

$$\mathrm{Im(f)} = \{\mathbf{y} \in F \mid \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \text{ où } \mathbf{x} \in E\}\,.$$

## Exemples

1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x + y$.

   $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$ car pour tout $a \in \mathbb{R}$, $a = a + 0 = f(\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix})$.

2. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$.

   $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ car pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = f(\begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix})$.

3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$.

   $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}(f)$ si et seulement $b = -a$. Donc $\mathrm{Im}(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$.

## Théorème

Pour toute application linéaire $f : E \to F$, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $F$.
De plus, pour toute base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ de $E$, $\mathrm{Im}(f)$ est le sous-espace vectoriel de $F$ engendré par $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k)$, c'est-à-dire :

$$\mathrm{Im}(f) = \langle f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_k) \rangle.$$

## Exemple

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$.

On a vu que $\mathrm{Im}(f) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle$. Or $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On trouve bien que $\langle f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2) \rangle = \mathrm{Im}(f)$.

### Définition

On appelle *rang* de l'application linéaire $f$, noté $\mathrm{rg}(f)$, la dimension de l'image de $f$ : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

### Théorème du rang

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a :

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$$

### Exemple

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix}$.

On sait que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 1$.

De plus, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $x = 0$.

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \langle \mathbf{e}_2 \rangle$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

On commence par quelques notions sur la théorie des ensembles.

## Définition

Soient $A$ et $B$ deux ensembles et soit $f : A \to B$ une application. On dit que :

1. $f$ est *injective* si deux éléments distincts de $A$ ont des images distinctes,
2. $f$ est *surjective* si tout élément de $B$ admet un antécédent par $f$,
3. $f$ est *bijective* si $f$ est injective et surjective, autrement dit si tout élément de $B$ admet un unique antécédent par $f$.

## Illustration

## Exemples et contre-exemples

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1)$. Elle n'est pas surjective car $-1$ n'a pas d'antécédent. Elle n'est pas bijective.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est injective, surjective et donc bijective.
3. Soit $f$ la fonction
$$\begin{array}{cccccc} f & : & \{1,2,3,4\} & \to & \{1,2,3\} \\ & & 1 & \mapsto & 1 \\ & & 2 & \mapsto & 3 \\ & & 3 & \mapsto & 2 \\ & & 4 & \mapsto & 1 \end{array}$$
f est surjective mais pas injective.

## Exemple

$$\begin{array}{cccc} f & : & \{1,2,3\} & \to & \{1,2,3,4\} \\ & & 1 & \mapsto & 1 \\ & & 2 & \mapsto & 3 \\ & & 3 & \mapsto & 2 \end{array}$$

est injective mais pas surjective.

## Remarque

Si $f$ est bijective, on peut définir une application réciproque :

$$\begin{array}{ccccc} f^{-1} & : & B & \to & A \\ & & y & \mapsto & x \end{array}$$

où $f(x) = y$. L'application $f^{-1}$ est bijective, $f \circ f^{-1}(y) = y$ et $f^{-1} \circ f(x) = x$.

Dans les cas des applications linéaires, on dispose de critères "simples" pour vérifier si une application linéaire est injective, surjective ou bijective.

**Théorème**

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. On a :

1. $f$ est injective $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$,
2. $f$ est surjective $\Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = F \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F)$.

## Corollaire

Soit $f : E \to F$ une application linéaire avec $\dim(E) = \dim(F)$. On suppose que $\dim(E) = \dim(F)$. On a : $f$ injective $\Leftrightarrow$ $f$ surjective $\Leftrightarrow$ $f$ bijective.

*Preuve* Par le théorème du rang,

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

Donc

$$\dim(F) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)).$$

D'où les équivalences :

$f$ injective $\Leftrightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Leftrightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(F) \Leftrightarrow f$ surjective.

$\square$

### Exemple

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + 2y \\ -3x + y \end{pmatrix}$. On voit que $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$, donc $f$ est bijective.

Soient $E$ et $F$ deux sous-espaces vectoriels.

On pose $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$.

Soit $f : E \to F$ une application linéaire.

Soient $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ une base de $E$ et $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ une base de $F$.

On écrit $f(\mathbf{u}_1), \dots, f(\mathbf{u}_n)$ dans la base $\mathcal{V}$ :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f(\mathbf{u}_1) & = & a_{11}\mathbf{v}_1 + a_{21}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{p1}\mathbf{v}_p, \\ f(\mathbf{u}_2) & = & a_{12}\mathbf{v}_1 + a_{22}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{p2}\mathbf{v}_p, \\ & \vdots & \\ f(\mathbf{u}_n) & = & a_{1n}\mathbf{v}_1 + a_{2n}\mathbf{v}_2 + \cdots + a_{pn}\mathbf{v}_p. \end{array} \right.$$

## Définition

On appelle matrice de $f$ dans les bases $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$, notée $M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$, dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n)$ dans la base $\mathcal{V}$ :

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

## Cas particulier

Si $E = F$ et $\mathcal{U} = \mathcal{V}$, on note simplement $M_{\mathcal{U}}(f)$ au lieu de $M_{\mathcal{U},\mathcal{U}}(f)$.

## Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x-y \\ z-y \end{pmatrix}$.

Soient $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_3$ celle de $\mathbb{R}^3$.

On a $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc

$$M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Exemple 2

$E$ de dimension $n$ et $id_E : E \to E$, $x \mapsto x$.
Soit $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$. On a $id_E(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i$ donc

$$M_{\mathcal{U}}(Id_E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n.$$

## Exemple 3

$E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique. Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $p(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1$ et $p(\mathbf{e}_2) = \mathbf{0}$.
Donc :

$$M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

## Exemple 4

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n.$$

On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_1$ celle de $\mathbb{R}$. On a

$$M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_1}(f) = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

## Exemple 5

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}.$$

On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_p$ celle de $\mathbb{R}^p$. On a

$$M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de $E$ et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ de E :

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n.$$

## Définition

On appelle *matrice de* $\mathbf{x}$ *dans la base* $\mathcal{U}$ la matrice colonne suivante :

$$M_{\mathcal{U}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

De même, si $f(\mathbf{x}) = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_p \mathbf{v}_p$, on pose

$$M_{\mathcal{V}}(f(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}.$$

## Proposition

Matriciellement, on a :

$$M_{\mathcal{V}}(f(\mathbf{x})) = M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)M_{\mathcal{U}}(\mathbf{x}).$$

## Exemple 1

$E$ de dimension $n$ et $id_E : E \to E$, $x \mapsto x$.
Soit $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$, $M_{\mathcal{U}}(Id_E) = I_n$.

Soit $\mathbf{x} \in E$, $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u}_1 + \cdots + x_n\mathbf{u}_n$, $M_{\mathcal{U}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

$M_{\mathcal{U}}(Id_E(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

On a bien :

$$M_{\mathcal{U}}(Id_E(\mathbf{x})) = M_{\mathcal{U}}(Id_E)M_{\mathcal{U}}(\mathbf{x}).$$

## Exemple 2

$E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique.

Soit $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. On a $M_{\mathcal{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$, $M_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{B}}(p(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a bien

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

## Exemple 3

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x - y \\ z - y \end{pmatrix}$.

Soient $\mathcal{B}_2$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}_3$ celle de $\mathbb{R}^3$.

On a

$$M_{\mathcal{B}_3,\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$, $M_{\mathcal{B}_3}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et

$M_{\mathcal{B}_2}(f(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix}$. On a bien

$$\begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_3 - x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

## Exemple 4

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ une application linéaire. On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_p$ celle de $\mathbb{R}^p$. On écrit

$$M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(f) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_p}(f(\mathbf{x}))$.

On a

$$f(\mathbf{x}) = M_{\mathcal{B}_n,\mathcal{B}_p}(f) M_{\mathcal{B}_n}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

d'où la forme générale d'une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ :

$$f(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{pmatrix}.$$

## Proposition

Soient $E, F$ et $G$ trois sous-espaces vectoriels. Soient $\mathcal{U}$ une base de $E$, $\mathcal{V}$ une base de $F$ et $\mathcal{W}$ une base de $G$.
Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications linéaires. Alors

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{W}}(g \circ f) = M_{\mathcal{V},\mathcal{W}}(g) M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$$

## Proposition

Soient $E$ et $F$ deux espaces vectoriels de même dimension. Soient $\mathcal{U}$ une base de $E$ et $\mathcal{V}$ une base de $F$.
Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Alors $f$ est bijective si et seulement si $M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)$ est inversible.

De plus, si $f$ est bijective alors

$$M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(f^{-1}) = M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)^{-1}$$

## Exemple

(déjà vu au Chapitre 4)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$.

$M_{\mathcal{B}_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $M_{\mathcal{B}_2}(f)$ est inversible et

$M_{\mathcal{B}_2}(f)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

D'où $f$ est bijective et

$$f^{-1}(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 3y_1 - 2y_2 \\ -y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

## Remarque

La matrice d'une application linéaire dépend du choix des bases dans l'espace de départ et dans l'espace d'arrivée. On va voir comment sont reliées deux matrices qui représentent la même application dans des bases distinctes.

Soit $E \subset \mathbb{R}^m$ un sous-espace vectoriel de dimension $n$.

Soient $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ et $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ deux bases de $E$.

On écrit les $\mathbf{v}_i$ dans la base $\mathcal{U}$ :

$$\mathbf{v}_1 = p_{11}\mathbf{u}_1 + p_{21}\mathbf{u}_2 + \cdots + p_{n1}\mathbf{u}_n,$$

$$\mathbf{v}_2 = p_{12}\mathbf{u}_1 + p_{22}\mathbf{u}_2 + \cdots + p_{n2}\mathbf{u}_n,$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{v}_n = p_{1n}\mathbf{u}_1 + p_{2n}\mathbf{u}_2 + \cdots + p_{nn}\mathbf{u}_n.$$

## Définition

On appelle *matrice de passage de la base* $\mathcal{U}$ *à la base* $\mathcal{V}$ la matrice de taille $n \times n$, notée $P_{\mathcal{U}\to\mathcal{V}}$, dont les colonnes sont les coordonnées des $\mathbf{v}_i$ dans la base $\mathcal{U}$ :

$$P_{\mathcal{U}\to\mathcal{V}} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

## Remarques

- $P_{\mathcal{U}\to\mathcal{V}}$ est inversible et $(P_{\mathcal{U}\to\mathcal{V}})^{-1} = P_{\mathcal{V}\to\mathcal{U}}$.
- $P_{\mathcal{U}\to\mathcal{V}} = M_{\mathcal{V},\mathcal{U}}(Id_E)$.

### Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, où $\mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$, est une base.

On a $P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

d'où $P_{\mathcal{V} \to \mathcal{B}_2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc : $\mathbf{e}_1 = 3\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ et $\mathbf{e}_2 = -2\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$.

## Question

Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de $E$.
On écrit :

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_n \mathbf{u}_n = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_n \mathbf{v}_n.$$

Quel est le lien entre les $\alpha_i$ et les $\beta_j$ ? Autrement dit, quel est le lien entre $M_{\mathcal{U}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ et $M_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$ ?

## Proposition

$$M_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = P_{\mathcal{V} \to \mathcal{U}} M_{\mathcal{U}}(\mathbf{x}) = (P_{\mathcal{U} \to \mathcal{V}})^{-1} M_{\mathcal{U}}(\mathbf{x})$$

*Preuve* On sait que $\mathbf{x} = Id_E(\mathbf{x})$ et que $P_{\mathcal{V} \to \mathcal{U}} = M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(Id_E)$. Donc $M_{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) = P_{\mathcal{V} \to \mathcal{U}} M_{\mathcal{U}}(\mathbf{x})$.

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B}_2 = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ la base canonique et $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ définie par $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$. On cherche $\alpha$ et $\beta$ tels que $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2$.

On a $P_{\mathcal{B}_2 \to \mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On calcule $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

On a $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = M_{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = M_{\mathcal{B}_2}(\mathbf{x})$, d'où

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

## Proposition

Soient $E$ et $F$ deux sous-espaces vectoriels, $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$, et $f : E \to F$ une application linéaire.
Soient $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ et $\mathcal{U}' = (\mathbf{u}'_1, \dots, \mathbf{u}'_n)$ deux bases de $E$.
Soient $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p)$ et $\mathcal{V}' = (\mathbf{v}'_1, \dots, \mathbf{v}'_p)$ deux bases de $F$.

$$M_{\mathcal{U}',\mathcal{V}'}(f) = (P_{\mathcal{V}\to\mathcal{V}'})^{-1} M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f) P_{\mathcal{U}\to\mathcal{U}'}$$

## Corollaire

Si $E = F$ et donc $f : E \to E$, alors

$$M_{\mathcal{U}'}(f) = (P_{\mathcal{U}\to\mathcal{U}'})^{-1} M_{\mathcal{U}}(f) P_{\mathcal{U}\to\mathcal{U}'}$$

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 + x_3 \\ 2x_2 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$.

On a $M_{\mathcal{B}_3}(f) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ la base donnée par :

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a

$$P_{\mathcal{B}_3 \to \mathcal{V}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule $(P_{\mathcal{B}_3\to\mathcal{V}})^{-1}$ et on trouve :

$$(P_{\mathcal{B}_3\to\mathcal{V}})^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ (à vérifier !).}$$

D'où

$$M_{\mathcal{V}}(f) = (P_{\mathcal{B}_3\to\mathcal{V}})^{-1} M_{\mathcal{B}_3}(f) P_{\mathcal{B}_3\to\mathcal{V}}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier : $f(\mathbf{v}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_1$, $f(\mathbf{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{v}_2$ et

$f(\mathbf{v}_3) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\mathbf{v}_3$.

## Remarque

On a déjà rencontré par deux fois la notion de rang :

1. le rang d'une matrice : nombre de pivots de la matrice obtenue après échelonnement,
2. le rang d'une application linéaire : dimension de l'espace vectoriel image.

En voici une troisième :

## Définition

Soit $E$ un espace vectoriel et soit $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ une famille de vecteurs de $E$. On appelle rang de la famille, la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ :

$$\operatorname{rg}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \dim(\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle).$$

## Remarques

1. Comme $\dim(\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle) \leq k$, on a nécessairement :

$$\mathrm{rg}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \leq k,$$

   avec égalité si et seulement si la famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ est libre.

2. Comme $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle \subset E$, on a $\mathrm{rg}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \leq \dim(E)$ et donc :

$$\mathrm{rg}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \leq \min\{k, \dim(E)\}.$$

## Exemples

1. Soit $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ un vecteur de $E$. Alors $\mathrm{rg}(\mathbf{v}) = 1$.
2. Soit $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une base de $E$ où $n = \dim(E)$, alors $\mathrm{rg}(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n) = n$.

## Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, $\operatorname{rg}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}) = 1$ et $\operatorname{rg}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}) = 2$.

## Exemple

4) Dans $\mathbb{R}^3$, soient $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ et $\mathbf{v}_3$ sont liés car

$$2\mathbf{v}_1 + 3\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Donc $\operatorname{rg}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) \leq 2$. Comme $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ est libre (à vérifier !), on a $\dim\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 2$ et comme $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \subset \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, on a $\dim\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \geq 2$. On conclut que $\operatorname{rg}(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = 2$.

## Proposition (Liens entre les trois notions de rang)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une base de $E$. Alors $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(f(\mathbf{u}_1), \ldots, f(\mathbf{u}_n))$.

## Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2x + 3y + 13z \\ x + y + 5z \end{pmatrix},$$

et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a $f(\mathbf{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f(\mathbf{e}_2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f(\mathbf{e}_3) = \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 5 \end{pmatrix}$. Donc $\mathrm{rg}(f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), f(\mathbf{e}_3)) = 2$ et $\mathrm{rg}(f) = 2$.

## Proposition

Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Soit $\mathcal{U} = (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ une base de $E$ et soit $\mathcal{V} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p)$ une base de $F$. Alors

$$\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f)).$$

## Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x - y - z \\ 2x + 3y + 13z \\ x + y + 5z \end{pmatrix},$$

et soit $\mathcal{B} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 13 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

On échelonne $M_{\mathcal{B}}(f)$.

Les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donnent la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Les opérations $L_2 \leftarrow \frac{1}{5}L_2$ et $L_3 \leftrightarrow \frac{1}{2}L_3$ donnent la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

En faisant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$, on obtient la matrice échelonnée suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il y a deux pivots donc $\mathrm{rg}(M_{\mathcal{B}}(f)) = 2$ et $\mathrm{rg}(f) = 2$.

## Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ une matrice. On l'écrit sous forme de vecteurs colonnes : $A = (\mathbf{c}_1 \cdots \mathbf{c}_k)$ où $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^p$. Alors

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_k).$$

## Remarques

- On sait déjà que $\mathrm{rg}(A) \leq p$ (car il y a au plus $p$ pivots dans la matrice échelonnée), donc $\mathrm{rg}(A) \leq \min(p, k)$.
- De même, si on considère une famille $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^p$ et qu'on forme la matrice $(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k) \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{rg}(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) = \mathrm{rg}(\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_k).$$

## Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_{p,k}(\mathbb{R})$ une matrice. On a :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}({}^{\mathbf{t}}A).$$

## Application

Donc si on écrit $A$ sous forme de vecteurs lignes :

$$A = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix},$$

alors le rang de $A$ est la rang de la famille $(L_1, \ldots, L_p)$, où $L_i$ est vu comme un vecteur de $\mathbb{R}^k$.