Résumé : Méthodes itératives de résolution d'un système algébrique linéaire : Jacobi, Gauss-Seidel, Successive over-relaxation (SOR)

L'énoncé de ce TP se trouve sur l'intranet : ISTIA\public\enseignant\Jean-Claude Jolly

Exercice 1 (Convergence de la méthode de Jacobi)
On cherche à résoudre le système $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{pmatrix}$$

Pour quelles valeurs de a la méthode de Jacobi est-elle convergente ?

Exercice 2 (Application des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR)
On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & 6 \end{pmatrix} = D - E - F$$

où D est diagonale, E est triangulaire inférieure strice, F est triangulaire supérieure stricte. Dans cet exercice on utilisera le résultat général suivant :

Théorème : Soit C matrice réelle symétrique définie positive admettant une décomposition $C = M - N$ avec M réelle inversible. Supposons de plus que $M^T + N$, qui est symétrique, soit définie positive. Alors la méthode itérative associée converge.

1. Avec Matlab, calculez la matrice de Jacobi J associée à A. Quel est son rayon spectral ? Conclusion.
2. Avec Matlab, calculez la matrice de Gauss-Seidel L_1 associée à A. Quel est son rayon spectral ? Conclusion.
3. Soit $\omega = 1.4$. Avec Matlab, calculez la matrice SOR(ω) L_ω associée à A. Quel est son rayon spectral ? Conclusion.
4. Démontrez l'affirmation " $M^T + N$ est symétrique " du théorème. Examinez la condition " $M^T + N$ est définie positive " pour la méthode SOR(ω) lorsque $0 < \omega < 2$. A-t-on la même conclusion pour la méthode de Jacobi ? Examinez, à l'aide de Matlab, le cas particulier de la matrice A de l'énoncé.
5. Quel théorème permet de conclure pour la convergence de la méthode SOR(ω) dans le cas de C matrice réelle symétrique ? Ce théorème s'applique-t-il dans le cas de la matrice suivante ?

$$C = \begin{pmatrix} -7 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -8 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -4 & -1 \\ 2 & -4 & -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Exercice 3 (Comparaison des méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel, SOR et directe)
Voici un script Matlab de la méthode de Jacobi qui s'applique aux matrices A et b de l'énoncé :

```
% Jacobi
erp = 1e-4 ; % précision demandée
kmax = 1e5 ; % nombre maximum d'itérations
x0 = zeros(4,1) ; % initialisation
x1 = x0 ; % dimensionnement de x1 par x0
for k = 1 :kmax
    for i = 1 :4
        s = 0 ;
        for j = 1 :4
            if j == i, continue
            else s = s + A(i,j)*x0(j) ;
            end
        end
        x1(i) = (b(i)-s)/A(i,i) ;
    end
    if norm(x1-x0,Inf) < erp, break
    else x0 = x1 ;
    end
end
```

1. Complétez ce script pour qu'il produise l'affichage du numéro kJ de la dernière itération et de la solution xJ. Transformez-le en une fonction $[kJ, xJ] = fJ(A, b, x0)$.
2. Modifiez ce script pour qu'il donne une solution par la méthode de Gauss-Seidel. Transformez-le en une fonction $[kGS, xGS] = fGS(A, b, x0)$.
3. Modifiez ce scrip pour qu'il donne une solution par la méthode SOR(w). Transformez-le en une fonction $[kSOR, xSOR] = fSOR(A, b, x0, w)$.
4. Résolvez le système $Ax = b$ avec Matlab selon une méthode directe en précisant le conditionnement cA de la méthode (voir l'instruction *linsolve*).
5. Affichez un tableau qui donne pour les méthodes itératives (Jacobi, Gauss-Seidel,SOR(1.4)) : la solution, la dernière itération, le rayon spectral de la matrice associée, et pour la méthode directe : la solution, le conditionnement associé, le rayon spectral de A. Conclusion ?
6. Tracez une figure (1) qui donne kGS en fonction de w pour $0 < w < 2$. Conclusion ?
7. Le problème de Poisson est une équation aux dérivées partielles de la forme $\Delta x\,(u, v) = f\,(u, v)\,,\, x\,(u, b)|_{\partial D} = x_{\partial D}\,(u, v)$ où $x_{\partial D}$ est une fonction donnée sur ∂D qui est le bord du domaine plan D où elle s'applique. On admet qu'elle peut être résolue selon un schéma aux différences finies qui la ramène à un système de la forme $A_n x_n = b_n$. L'instruction *full(gallery('poisson' ,n))* de Matlab donne un exemple d'une telle matrice A_n pour un domaine D carré discrétisé selon un maillage de $n \times n$ points et pour une certaine fonction $x_{\partial D}$. On choisit $f = 0$ qui donne $b = 0$ et dont la solution est évidemment $x = 0$. En conservant une précision de 10^{-4} pour les calculs et en partant de la solution initiale $x0 = 1$, tracez sur une même figure (2) les courbes de kJ, kGS et $kSOR$ (pour $w = 1.4$) fonctions de $n = 2, \ldots, 10$, en représentation semi-logarithmique (*semilogy*). Conclusion ? Comment pourrait-on faire pour améliorer encore la performance de la méthode SOR ?
8. Que montre l'instruction *spy* appliquée à la matrice A_{10} ?