Prouver la connexité d'un ensemble en utilisant le calcul par intervalles

Nicolas Delanoue
nicolas.delanoue@istia.univ-angers.fr
Bertrand Cottenceau & Luc Jaulin

Transparents réalisés dans le cadre du GDR ensembliste

LISALaboratoire d'Ingénierie des systèmes Automatisés

Il existe plusieurs algorithmes qui permettent de mieux connaître un ensemble $\mathbb{S}$ défini par une inversion ensembliste :

$$\mathbb{S} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]) \text{ où } [\mathbf{y}] \text{ est un pavé de } \mathbb{R}^m$$

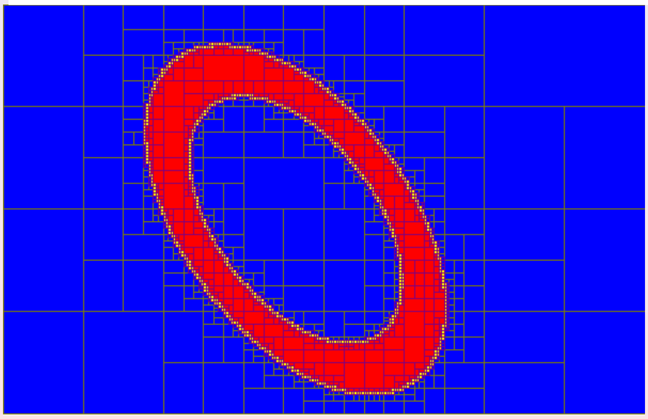
1. `SIVIA` donne deux pavages qui encadrent l'ensemble $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}^- \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{S}^+$).

Il existe plusieurs algorithmes qui permettent de mieux connaître un ensemble $\mathbb{S}$ défini par une inversion ensembliste :

$$\mathbb{S} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]) \text{ où } [\mathbf{y}] \text{ est un pavé de } \mathbb{R}^m$$

Par exemple, `SIVIA` nous permet de trouver deux pavages $\mathbb{S}^-$ et $\mathbb{S}^+$ qui encadre

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 + xy \in [1, 2]\}$$

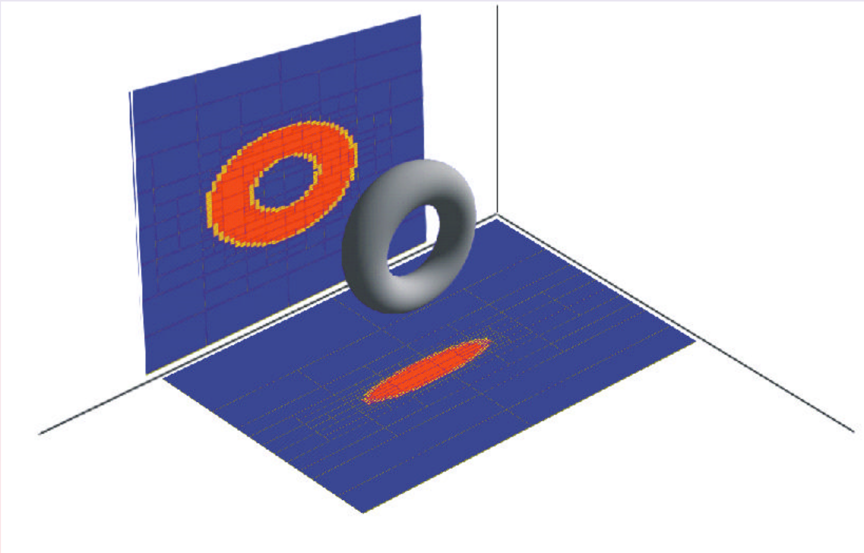


Il existe plusieurs algorithmes qui permettent de mieux connaître un ensemble $\mathbb{S}$ défini par une inversion ensembliste :

$$\mathbb{S} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]) \text{ où } [\mathbf{y}] \text{ est un pavé de } \mathbb{R}^m$$

1. `SIVIA` donne deux pavages qui encadrent l'ensemble $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}^- \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{S}^+$).
2. `SIVIA1` encadre le volume de $\mathbb{S}$ ($Vol(< x^- >) \leq Vol(\mathbb{S}) \leq Vol(< x^+ >)$)
3. $\mathrm{Proj}_{[\mathbf{p}]}(\mathbb{S})$ nous donne la projection de l'ensemble $\mathbb{S}$ sur le pavé $[\mathbf{p}]$.

3. $\mathrm{Proj}_{[\mathbf{p}]}(\mathbb{S})$ nous donne la projection de l'ensemble $\mathbb{S}$ sur le pavé $[\mathbf{p}]$.



Il existe plusieurs algorithmes qui permettent de mieux connaître un ensemble $\mathbb{S}$ défini par une inversion ensembliste :

$$\mathbb{S} = \mathbf{f}^{-1}([\mathbf{y}]) \text{ où } [\mathbf{y}] \text{ est un pavé de } \mathbb{R}^m$$

1. `SIVIA` donne deux pavages qui encadrent l'ensemble $\mathbb{S}$ ($\mathbb{S}^- \subset \mathbb{S} \subset \mathbb{S}^+$).

2. `SIVIA1` encadre le volume de $\mathbb{S}$ ($Vol(< x^- >) \leq Vol(\mathbb{S}) \leq Vol(< x^+ >)$)

3. $\mathrm{Proj}_{[\mathbf{p}]}(\mathbb{S})$ nous donne la projection de l'ensemble $\mathbb{S}$ sur le pavé $[\mathbf{p}]$.

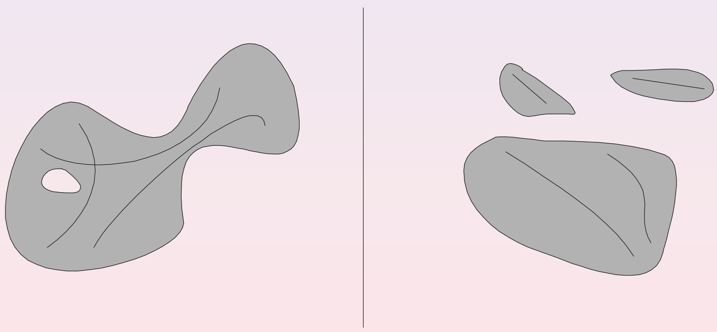
4. `CIA` nous indique le nombre de composantes connexes par arc de $\mathbb{S}$.

Plan

Rappels topologiques
Prouver qu'un ensemble est étoilé via le calcul par intervalles.
Discrétisation
Un nouvel algorithme CIA : *L'ensemble est-il connexe par arc ?*

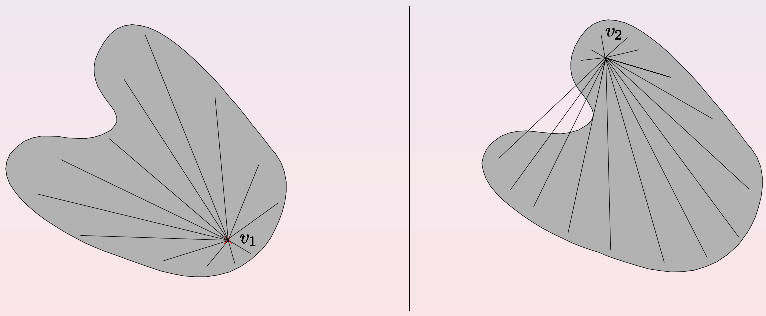
Définition 1.1 (*connexe par arcs*)
Un espace topologique X est *connexe par arc* si et seulement si pour tout couple $x, y \in X$, il existe une fonction continue f de $[0,1]$ à valeur dans X telle que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

$$\forall x, y \in X, \exists f \in \mathcal{C}([0,1], X) \text{ telle que } f(0) = x \text{ et } f(1) = y$$

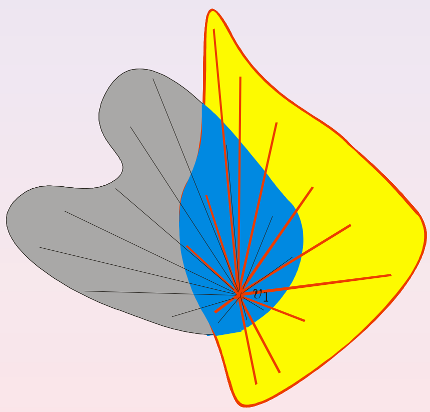


Définition 1.2 (*Etoile*, espace v^*-*étoilé*)
Le point v^* est une étoile pour le sous ensemble X de $\mathbb{R}^n$ si X contient tous les segments $[x, v^*]$ avec x dans X. On dit aussi que X est v^*-étoilé.

$$\exists v^* \in X, \forall \mathbf{x} \in X, [\mathbf{x}, v^*] \subset X$$



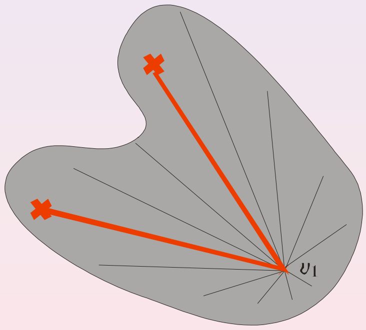
Proposition 1.2 *Si X et Y sont deux ensembles v^*-étoilés, alors $X \cap Y$ est aussi v^*-étoilé.*



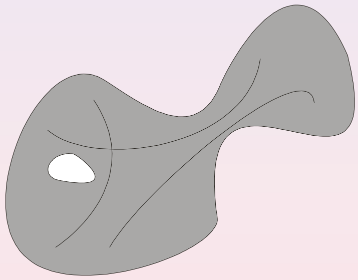
Proposition 1.2 *Si X et Y sont deux ensembles v^*-étoilés, alors $X \cap Y$ est aussi v^*-étoilé.*

Proposition 1.1 *Un ensemble étoilé est un ensemble connexe par arc.*

Exemple :



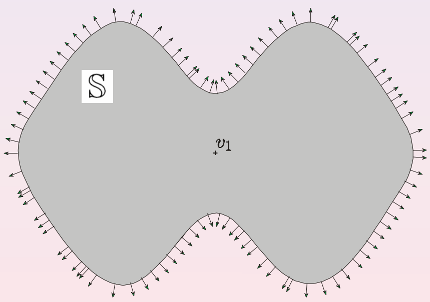
La réciproque est en général fausse



Proposition 3.1 *[Pour prouver que v^* est une étoile].*
Soit $\mathbb{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\boldsymbol{x}) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.
Soit v^* un point de $\mathbb{S}$. Si

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\boldsymbol{x}) = 0, \text{ on a } Df(\boldsymbol{x}).(\boldsymbol{x} - v^*) > 0 \quad (1)$$

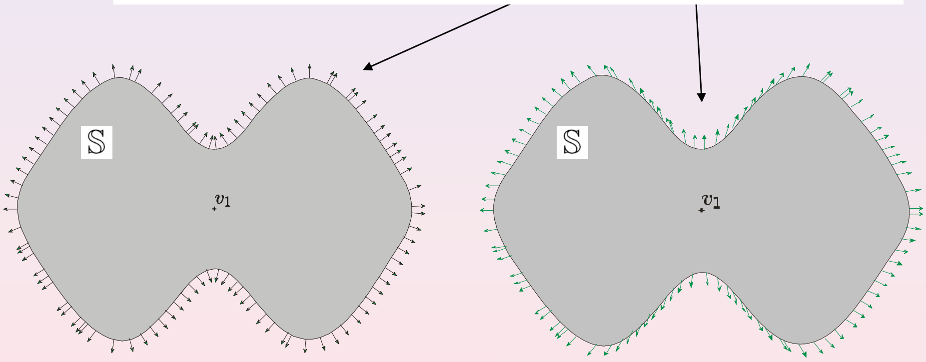
alors v^* est étoile pour $\mathbb{S}$.



Proposition 3.1 *[Pour prouver que v^* est une étoile].*
Soit $\mathbb{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\boldsymbol{x}) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Soit v^* un point de $\mathbb{S}$. Si

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\boldsymbol{x}) = 0, \text{ on a } Df(\boldsymbol{x}).(\boldsymbol{x} - v^*) > 0 \quad (1)$$

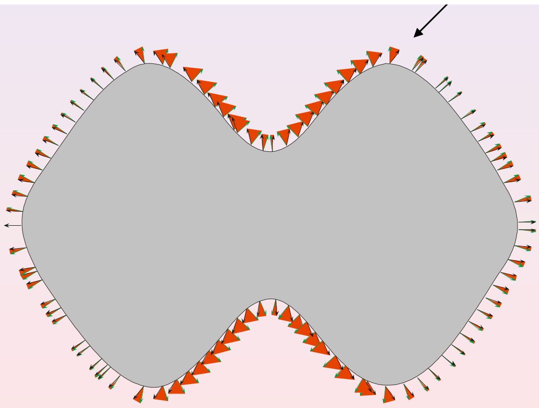
alors v^* est étoile pour $\mathbb{S}$.



Proposition 3.1 *[Pour prouver que v^* est une étoile].*
Soit $\mathbb{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\boldsymbol{x}) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$. Soit v^* un point de $\mathbb{S}$. Si

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\boldsymbol{x}) = 0, \text{ on a } Df(\boldsymbol{x}).(\boldsymbol{x} - v^*) > 0 \quad (1)$$

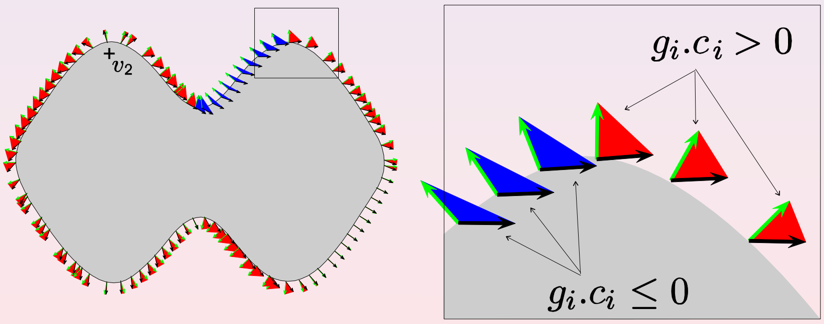
alors v^* est étoile pour $\mathbb{S}$.



Proposition 3.1 *[Pour prouver que v^* est une étoile].*
Soit $\mathbb{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\boldsymbol{x}) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.
Soit v^* un point de $\mathbb{S}$. Si

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\boldsymbol{x}) = 0, \text{ on a } Df(\boldsymbol{x}).(\boldsymbol{x} - v^*) > 0 \qquad (1)$$

alors v^* est étoile pour $\mathbb{S}$.



Proposition 3.1 *[Pour prouver que v^* est une étoile].*
Soit $\mathbb{S} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(\boldsymbol{x}) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.
Soit v^* un point de $\mathbb{S}$. Si

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\boldsymbol{x}) = 0, \text{ on a } Df(\boldsymbol{x}).(\boldsymbol{x} - v^*) > 0 \qquad (1)$$

alors v^* est étoile pour $\mathbb{S}$.

$$(f(\mathbf{x}) = 0) \Rightarrow (Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) > 0) \qquad (5)$$

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \neg(a \text{ et } \neg b)$$

$$(5) \Leftrightarrow \neg(f(\mathbf{x}) = 0 \text{ et } Df(\mathbf{x})(\mathbf{x} - v^*) \leq 0)$$

$$(5) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(x) = 0 \\ Df(x).(x - v^*) \leq 0 \end{array} \right. \text{ est inconsistant}$$

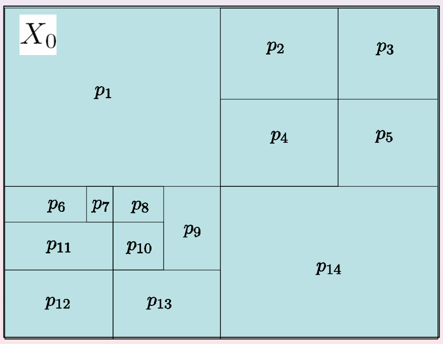
$v^* = (0.6, -0.5)$

$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 + x * y - 2 \leq 0\}$

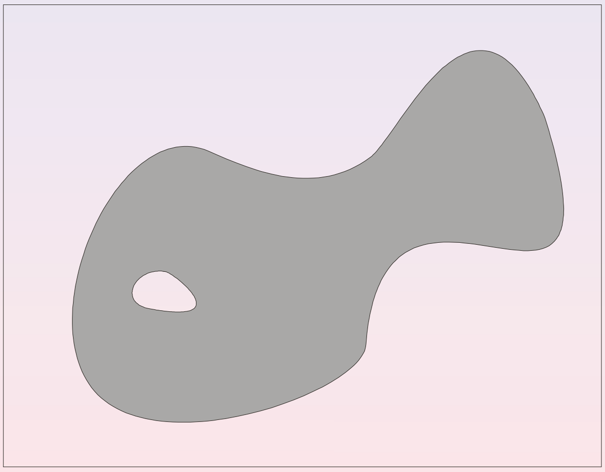
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x * y - 2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x - 0.6) + \frac{\partial f}{\partial y}(y + 0.5) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x * y - 2 = 0 \\ (2x + y)(x - 0.6) + (2y + x)(y + 0.5) \leq 0 \end{cases}$$

Définition 2.1 (Paving)
Soit X_0 un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. Un pavage de X_0 est un ensemble de boîtes tel que leur réunion est égale à X_0



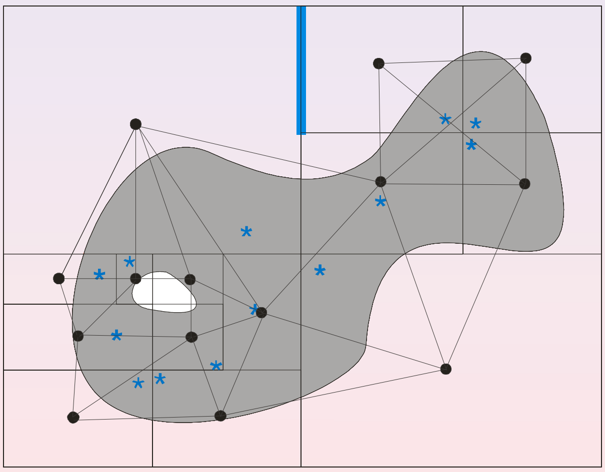
Un espace connexe par arc n'est pas forcément étoilé.



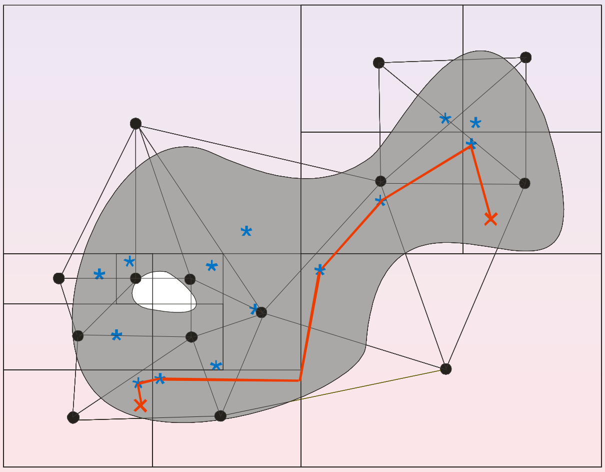
Définition 4.2

Création d'un pavage $\mathcal{P}$ tel que pour chaque pavé $[\mathbf{p}]$ du pavage on a :

$$\mathbb{S} \cap [\mathbf{p}] \text{ est étoilé}$$



Proposition 4.1 *Soit $\mathbb{S}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.*
Soit $\mathcal{P}$ un pavage de $X_0 \subset \mathbb{R}^n$.
Si $\forall [\mathbf{p}] \in \mathcal{P}$, l'ensemble $\mathbb{S} \cap [\mathbf{p}]$ est étoilé et si le graphe $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ associé au pavage $\mathcal{P}$ est connexe alors l'ensemble $\mathbb{S} \cap X_0$ est connexe.



L'idée principale de l'algorithme CIA (p*athwise-Connected using Interval Analysis*) est de construire un pavage qui satisfait les hypothèses de la proposition précédente :

1. Pour chaque boîte $[p]$ du pavage $\mathcal{P}$ on a la propriété : $\mathbb{S} \cap p$ est étoilé.

   On vérifiera que l'un des sommets du pavé $[p]$ est une étoile pour $\mathbb{S} \cap [p]$.

2. On doit être capable de construire le graphe $\mathcal{G}(\mathcal{P})$ associé au pavage $\mathcal{P}$ selon la relation

$$[p]\mathcal{R}[q] \Leftrightarrow \mathbb{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$$

Le principe de l'algorithme est de manipuler trois pavages:

1. Le *pavage étoilé* $\mathcal{P}_*$ ne contient que des pavés vérifiant $\mathbb{S} \cap [p]$ est étoilé. De plus le graphe $\mathcal{G}(\mathcal{P}_*)$ est connu de façon garantie.
2. Le *pavage extérieur* $\mathcal{P}_{out}$ qui ne contient que des boîtes satisfaisant $\mathbb{S} \cap [p]$ est vide.
3. Le *pavage incertain* $\mathcal{P}_\Delta$ pour lequel rien n'est connu à propos de ces boîtes.

- Initialisation $\mathcal{P}_\Delta = \{X_0\}$, $\mathcal{P}_* = \emptyset$ et $\mathcal{P}_{out} = \emptyset$ -
- Tant que $\mathcal{P}_\Delta \neq \emptyset$
  Pour tout pavé $[p]$ de $\mathcal{P}_\Delta$
  Si $\mathbb{S} \cap [p]$ est prouvé étoilé, on range $[p]$ dans $\mathcal{P}_*$,
  Si $\mathbb{S} \cap [p]$ est prouvé vide, on range $[p]$ dans $\mathcal{P}_{out}$,
  Sinon, on bissecte $[p]$ et on place les deux pavés résultants dans $\mathcal{P}_\Delta$

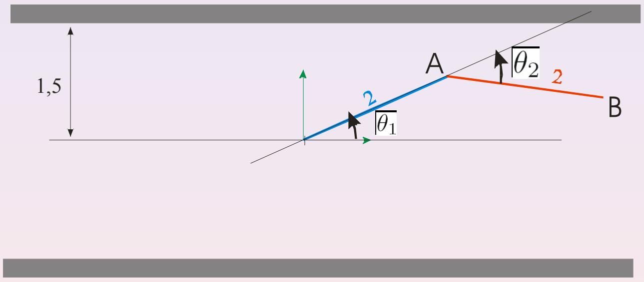
Un exemple, soit $\mathbb{S}$

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-2.5, 2.5] \times [-2.3, 2.3], f(x, y) \leq 0\}$$

où

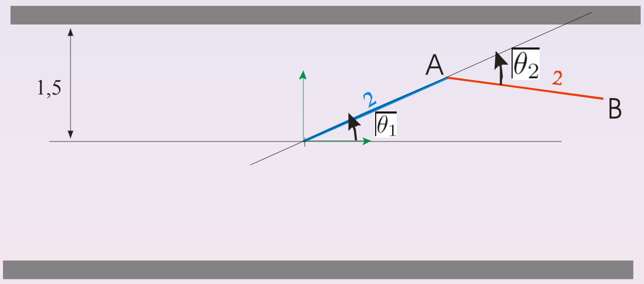
$$f(x, y) = -x^2 - y^2 - xy + 2$$

Un problème de robotique :



$$A \begin{pmatrix} A_x = 2cos(\theta_1) \\ A_y = 2sin(\theta_1) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} B_x = 2cos(\theta_1) + 2cos(\theta_1 + \theta_2) \\ B_y = 2sin(\theta_1) + 2sin(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$



Contraintes articulaires :

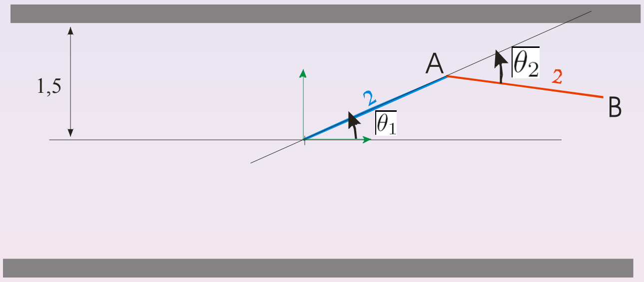
$$\theta_1 \in [0, \pi]$$

$$\theta_2 \in [-3.14, 3.14]$$

Contraintes opérationnelles :

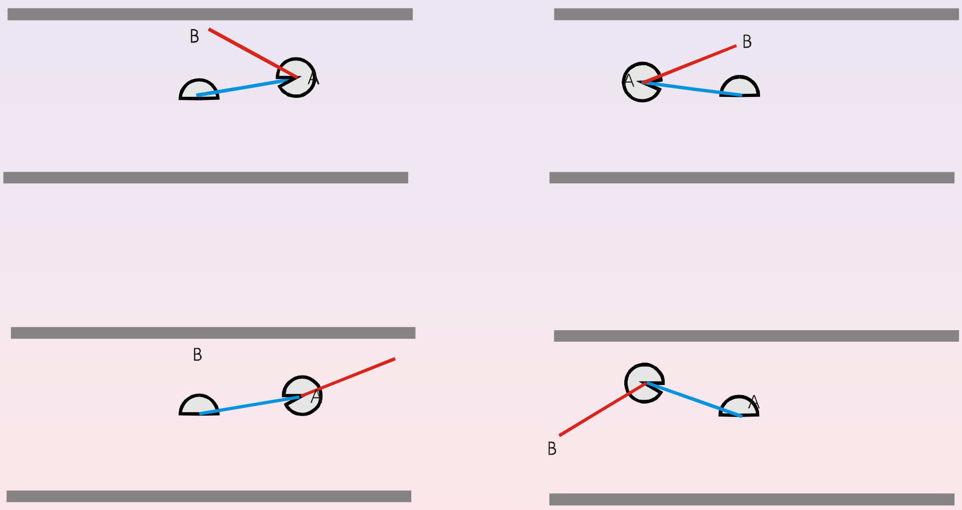
$$A_y \in [-1.5, 1.5]$$

$$B_y \in [-1.5, 1.5]$$

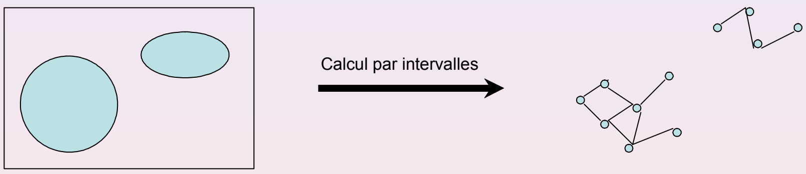


$\mathbb{S}$ est l'ensemble $(\theta_1, \theta_2) \in [0, \pi] \times [-3.14; 3.14]$ tel que

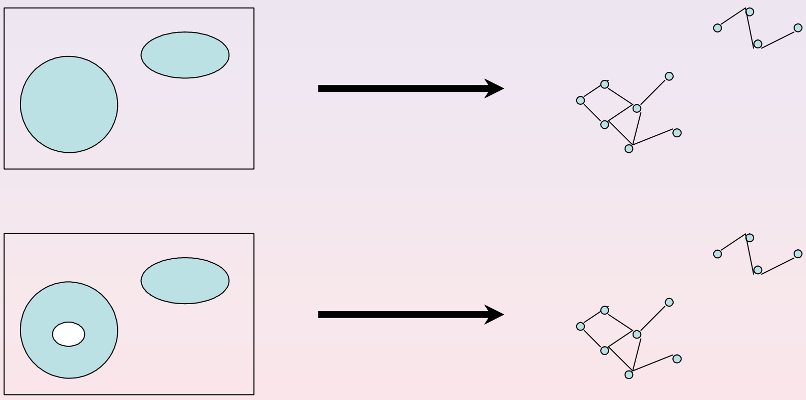
$$\begin{cases} 2sin(\theta_1) + 2sin(\theta_1 + \theta_2) - 1.5 \leq 0 \\ -2sin(\theta_1) - 2sin(\theta_1 + \theta_2) - 1.5 \leq 0 \\ 2sin(\theta_1) - 1.5 \leq 0 \\ -2sin(\theta_1) - 1.5 \leq 0 \end{cases}$$



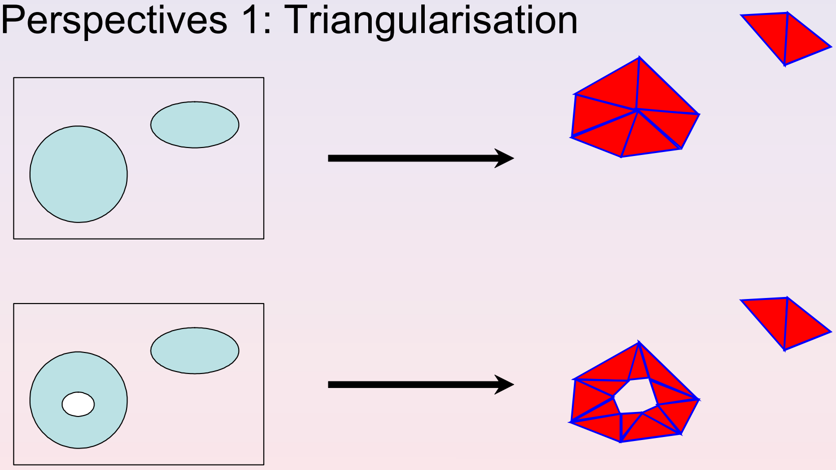
Conclusion



Perspectives



Perspectives 1: Triangularisation



Perspectives 2: Aspects d'une fonction

Perspectives 3:

- Efficacité en incorporant les contracteurs. (Interval Peeler - *Xavier Baguenard*)
- Incorporer l'outward-rounding (GucoLib, *Pau Herrero*)
- Compter le nombre d'aspects d'une fonction
- Optimisation globale