Démonstraton à l'aide du calcul par intervalles

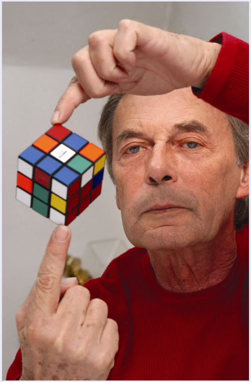
Nicolas Delanoue

Laris - Angers

Mars 2014

Plan

Définition - Histoire



Définition - Histoire

Quel est le nombre maximum de mouvements qui sépare une configuration donnée de la solution ?

Histoire - http://www.cube20.org/

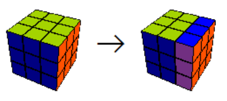
Date	Lower bound	Upper bound	Gap
July, 1981	18	52	34
December, 1990	18	42	24
May, 1992	18	39	21
May, 1992	18	37	19
January, 1995	18	29	11
January, 1995	20	29	9
December, 2005	20	28	8.
April, 2006	20	27	7
May, 2007	20	26	6
March, 2008	20	25	5
April, 2008	20	23	3
August, 2008	20	22	2
July, 2010	20	20	0

Théorème

God number est 20.

Modélisation - Théorie des graphes

1. Chaque configuration *a* est un noeud α.
2. Quand il est possible de passer d'une configuration *a* à une configuration *b*, on relie les noeuds α et β par un arc.



Preuve par brute force

1. 43,252,003,274,489,856,000 noeuds
2. un peu de symétrie pour ne pas traiter tous les cas : 19,508,428,800 configurations
3. 35 annnée de temps CPU . . .

Coloration de carte

Coloration de carte

Modélisation - Théorie des graphes

1. Chaque pays *a* est un noeud α.
2. Si deux pays *a* et *b* ont une frontière commune, on relie les noeuds α et β par un arc.

Thèorème des 4 couleurs

Quatre couleurs suffisent pour colorier une carte géographique *plane* sans que deux pays ayant une frontière en commun ne soient de la même couleur.

Preuve par récurrence

1. Initialisation : Cas avec un pays, OK,
2. Hérédite : On suppose que l'on sait colorier toutes cartes avec k pays.
    1. Etant donné une carte avec $k+1$ pays, on prend 2 pays adjacents et on les fusionne ...
    2. Ca fait une carte avec k pays que l'on sait colorier.
    3. Reste à corriger le problème des deux pays qui n'en font qu'un ...
    4. A cause de considérations géométriques, il n'y a que 1478 de cas à traiter.
    5. Brute force en 1976 par Kenneth Appel et Wolfgang Haken.

Empilement de sphères

Kepler a conjecturé en 1611 que la meilleure façon d'empiler des sphères est la suivante :

Empilement de sphères - 18ième problème de Hilbert

Démontré en 1998 par Thomas Hales

Modélisation - Optimisation combinatoire et continue

$$\max_{x \in X} \rho(x)$$

où X est l'ensemble des empilement de sphères possibles et $\rho(x)$ la densité d'un empilement x.

Preuve l'aide du calcul par intervalles et brute force

Les détails de la preuve ont été publié en 2006.

Algébriser le raisonnement sur les inégalités

$0 \leq x \leq 1$ et $2 \leq y \leq 3$, donc $2 \leq x + y \leq 4$ devient :

$$[0; 1] + [2; 3] = [2; 4]$$

$0 \leq x \leq 1$ et $2 \leq y \leq 3$, donc $0 \leq xy \leq 3$ devient :

$$[0; 1] \times [2; 3] = [2; 3]$$

Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

Exemple

Soit

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\sin x - x^2 + 1)\cos x \end{array}$$

Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

Exemple

Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\sin x - x^2 + 1)\cos x \end{array}$$

Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit $\left\{ \begin{array}{rccc} [f]: & \mathbb{IR} & \to & \mathbb{IR} \\ & [x] & \mapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1)\cos[x] \end{array} \right.$

Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

Exemple

Soit

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\sin x - x^2 + 1)\cos x \end{array}$$

Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit $\left\{ \begin{array}{rccc} [f]: & \mathbb{IR} & \to & \mathbb{IR} \\ & [x] & \mapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1)\cos[x] \end{array} \right.$

$$[f]([0; \tfrac{1}{2}]) = (\sin[0; \tfrac{1}{2}] - [0; \tfrac{1}{2}]^2 + 1)\cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

Exemple

Soit

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\sin x - x^2 + 1)\cos x \end{array}$$

Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit $\left\{ \begin{array}{cccc} [f]: & \mathbb{IR} & \to & \mathbb{IR} \\ & [x] & \mapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1)\cos[x] \end{array} \right.$

$$[f]([0; \tfrac{1}{2}]) = (\sin[0; \tfrac{1}{2}] - [0; \tfrac{1}{2}]^2 + 1)\cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

$$= (\sin[0; \tfrac{1}{2}] - [0; \tfrac{1}{4}] + 1)\cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad (\sin[0; \tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad ([0; \sin \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4}; 1])[\cos \tfrac{1}{2}; 1]$$

$$= \quad (\sin[0; \tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad ([0; \sin \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4}; 1])[\cos \tfrac{1}{2}; 1]$$

$$= \quad [\tfrac{3}{4}; 1 + \sin \tfrac{1}{2}] \times [\cos \tfrac{1}{2}; 1]$$

$$= \quad (\sin[0;\tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4};0] + 1)\cos[0;\tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad ([0;\sin\tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4};1])[\cos\tfrac{1}{2};1]$$

$$= \quad [\tfrac{3}{4};1+\sin\tfrac{1}{2}] \times [\cos\tfrac{1}{2};1]$$

$$= \quad [\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{2};1+\sin\tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad (\sin[0; \tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad ([0; \sin \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4}; 1])[\cos \tfrac{1}{2}; 1]$$

$$= \quad [\tfrac{3}{4}; 1 + \sin \tfrac{1}{2}] \times [\cos \tfrac{1}{2}; 1]$$

$$= \quad [\tfrac{3}{4} \cos \tfrac{1}{2}; 1 + \sin \tfrac{1}{2}]$$

$$[f]([0; \tfrac{1}{2}]) \quad \subset \quad [0.65818; 1.4795]$$

$$= \quad (\sin[0;\tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4};0] + 1)\cos[0;\tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad ([0;\sin\tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4};1])[\cos\tfrac{1}{2};1]$$

$$= \quad [\tfrac{3}{4};1+\sin\tfrac{1}{2}] \times [\cos\tfrac{1}{2};1]$$

$$= \quad [\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{2};1+\sin\tfrac{1}{2}]$$

$$[f]([0;\tfrac{1}{2}]) \quad \subset \quad [0.65818;1.4795]$$

Conclusion

$0 \notin [f]([0;\frac{1}{2}])$, donc $\mathbb{S} = \emptyset$

Equations différentielles ordinaires et méthodes numériques

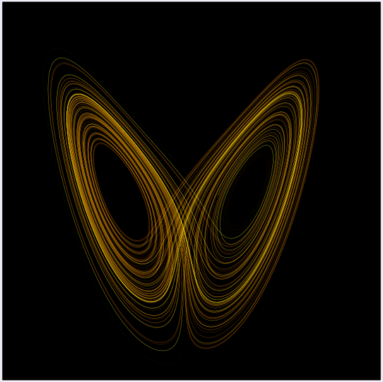
7 min 42 de la vidéo `http://perso-laris.univ-angers.fr/~delanoue/video/chaos/Chaos7_Attracteurs_etranges___L_effet_papillon.mp4`

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & \sigma(y - x) \\ \dot{y} & = & \rho x - y - xz \\ \dot{z} & = & xy - \beta z \end{array} \right.$$

Conjecture

En 1963, le météorologue Edward Lorenz est le premier à mettre en évidence le caractère vraisemblablement chaotique de la météorologie.

Preuve



Il a cependant fallu attendre 2001 pour avoir une démonstration rigoureuse de l'existence de l'attracteur de Lorentz par Warwick Tucker

1. Calcul de la topologie de l'espace des configurations d'un robot (problème du déménageur de piano),
2. Démonstration de la stabilité de certains systèmes dynamiques,
3. Etude rigoureuse du comportement des robots 3R.