Introduction au calcul par intervalles
Prouver qu'un ensemble est connexe via l'analyse par intervalles

Nicolas Delanoue - Journée des doctorants de mathématiques

PIRIAC - le 4 mai 2004

Plan

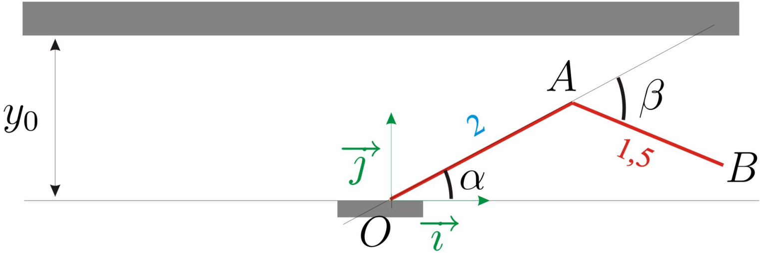
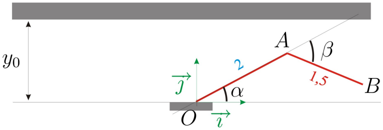
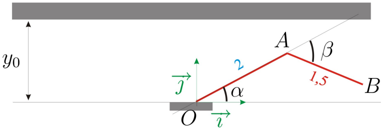


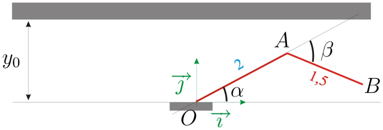
FIG.: Un robot en mouvement


y_0
A
β
2
1,5
B
$\vec{j}$
α
O
$\vec{i}$

Coordonnées de A



$$\begin{cases} x_A = 2\cos(\alpha) \\ y_A = 2\sin(\alpha) \end{cases}$$

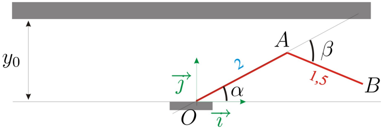


Coordonnées de A

$$\begin{cases} x_A = 2\cos(\alpha) \\ y_A = 2\sin(\alpha) \end{cases}$$

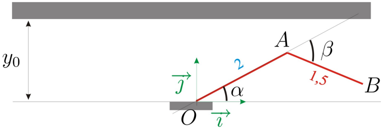
Coordonnées de B

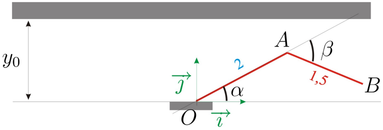
$$\begin{cases} x_B = 2\cos(\alpha) + 1.5\cos(\alpha+\beta) \\ y_B = 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) \end{cases}$$


y_0
A
β
2
1,5
B
$\vec{j}$
α
O
$\vec{i}$

Contraintes sur A

$$y_A \in [0, y_0]$$





Contraintes sur A

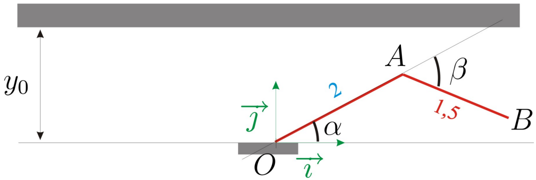
$$y_A \in [0, y_0]$$

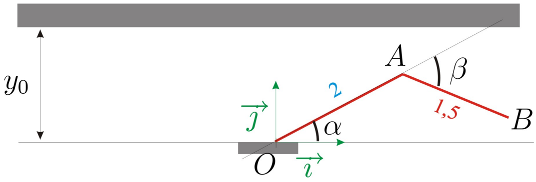
Contraintes sur B

$$y_B \in]-\infty, y_0]$$

Contraintes sur α et β

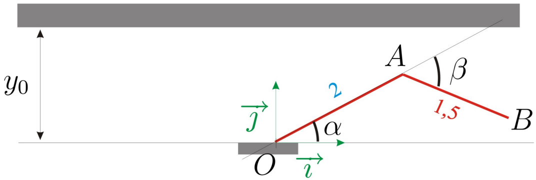
$$\alpha \in]-\pi, \pi[\text{ et } \beta \in]-\pi, \pi[$$


y_0
A
β
2
1,5
B
$\vec{j}$
α
O
$\vec{i}$



Ensemble recherché

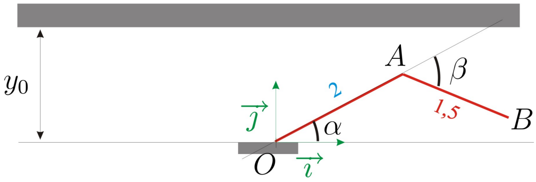
$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha,\beta) \in]-\pi,\pi[^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$



Ensemble recherché

$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha,\beta) \in]-\pi,\pi[^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{S} = f^{-1}([0,y_0] \times [-2,y_0]),$$



Ensemble recherché

$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha,\beta) \in]-\pi,\pi[^2 \;/\; \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{S} = f^{-1}([0, y_0] \times [-2, y_0]),$$

$$\text{où } f(\alpha,\beta) = \left\{ \begin{array}{l} f_1(\alpha,\beta) = 2\sin(\alpha) \\ f_2(\alpha,\beta) = 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) \end{array} \right.$$

$$\left\{ (\alpha,\beta) \in]-\pi,\pi[^2 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

$$\left\{(\alpha,\beta)\in]-\pi,\pi[^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0,y_0] \\ 2\sin(\alpha)+1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2,y_0] \end{array}\right.\right\}$$

Montrons que $[\frac{\pi}{2},\pi[\times[\frac{\pi}{2},\pi[\subset \mathbb{S}$ $(y_0 = 2.5)$

$\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[$

$$\left\{ (\alpha, \beta) \in]-\pi, \pi[^2 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

Montrons que $[\frac{\pi}{2}, \pi[\times [\frac{\pi}{2}, \pi[\subset \mathbb{S}$ $(y_0 = 2.5)$

$\alpha \in [\frac{\pi}{2}, \pi[$

$\Rightarrow \sin(\alpha) \in [0, 1]$

$$\left\{ (\alpha,\beta) \in]-\pi,\pi[^2 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

Montrons que $[\frac{\pi}{2},\pi[\times[\frac{\pi}{2},\pi[\subset \mathbb{S}$ $(y_0 = 2.5)$

$\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[$

$\Rightarrow \sin(\alpha) \in [0,1]$

$\Rightarrow 2\sin(\alpha) \in [0,2]$

$$\left\{(\alpha,\beta)\in]-\pi,\pi[^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0,y_0] \\ 2\sin(\alpha)+1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2,y_0] \end{array}\right.\right\}$$

Montrons que $[\frac{\pi}{2},\pi[\times[\frac{\pi}{2},\pi[\subset \mathbb{S}$ $(y_0 = 2.5)$

$$\alpha\in[\tfrac{\pi}{2},\pi[,\beta\in[\tfrac{\pi}{2},\pi[$$

$\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[$

$\Rightarrow \sin(\alpha)\in[0,1]$

$\Rightarrow 2\sin(\alpha)\in[0,2]$

$$\left\{ (\alpha,\beta) \in]-\pi,\pi[^2 \text{ tel que } \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0,y_0] \\ 2\sin(\alpha)+1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2,y_0] \end{array} \right. \right\}$$

Montrons que $[\frac{\pi}{2},\pi[\times[\frac{\pi}{2},\pi[\subset \mathbb{S}$ $(y_0 = 2.5)$

$\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[$

$\Rightarrow \sin(\alpha) \in [0,1]$

$\Rightarrow 2\sin(\alpha) \in [0,2]$

$\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[, \beta \in [\frac{\pi}{2},\pi[$

$\Rightarrow \alpha+\beta \in [\pi,2\pi]$

$$\left\{(\alpha,\beta)\in]-\pi,\pi[^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0,y_0] \\ 2\sin(\alpha)+1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2,y_0] \end{array}\right.\right\}$$

Montrons que $[\frac{\pi}{2},\pi[\times[\frac{\pi}{2},\pi[\subset \mathbb{S}$ $(y_0 = 2.5)$

$\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[$

$\Rightarrow \sin(\alpha) \in [0,1]$

$\Rightarrow 2\sin(\alpha) \in [0,2]$

$\alpha \in [\frac{\pi}{2},\pi[, \beta \in [\frac{\pi}{2},\pi[$

$\Rightarrow \alpha+\beta \in [\pi, 2\pi]$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) \in [-1,0]$

$$\left\{(\alpha,\beta)\in]-\pi,\pi[^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0,y_0] \\ 2\sin(\alpha)+1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2,y_0] \end{array}\right.\right\}$$

Montrons que $[\frac{\pi}{2},\pi[\times[\frac{\pi}{2},\pi[\subset \mathbb{S}$ $(y_0 = 2.5)$

$$\alpha\in[\tfrac{\pi}{2},\pi[,\beta\in[\tfrac{\pi}{2},\pi[$$

$\alpha\in[\frac{\pi}{2},\pi[$

$\Rightarrow \sin(\alpha)\in[0,1]$

$\Rightarrow 2\sin(\alpha)\in[0,2]$

$\Rightarrow \alpha+\beta\in[\pi,2\pi]$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)\in[-1,0]$

$\Rightarrow 1.5\sin(\alpha+\beta)\in[-1.5,0]$

$$\left\{(\alpha,\beta)\in]-\pi,\pi[^2 \text{ tel que } \left\{\begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0,y_0] \\ 2\sin(\alpha)+1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2,y_0] \end{array}\right.\right\}$$

Montrons que $[\frac{\pi}{2},\pi[\times[\frac{\pi}{2},\pi[\subset \mathbb{S}$ $(y_0=2.5)$

$$\alpha\in[\tfrac{\pi}{2},\pi[,\beta\in[\tfrac{\pi}{2},\pi[$$

$\alpha\in[\frac{\pi}{2},\pi[$

$\Rightarrow \sin(\alpha)\in[0,1]$

$\Rightarrow 2\sin(\alpha)\in[0,2]$

$\Rightarrow \alpha+\beta\in[\pi,2\pi]$

$\Rightarrow \sin(\alpha+\beta)\in[-1,0]$

$\Rightarrow 1.5\sin(\alpha+\beta)\in[-1.5,0]$

$\Rightarrow 2\sin(\alpha)+1.5\sin(\alpha+\beta)\in[-1.5,2]$

Definition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles de $\mathbb{R}$, et donc par $\mathbb{IR}^n$ l'ensemble des pavés (produits cartésiens) de $\mathbb{R}^n$.

Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$. $(f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$.
On dit que $[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}$ est une fonction d'inclusion pour f si

$$\forall x \in X, X \in \mathbb{IR}^n, f(x) \in [f](X)$$

Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$. ($f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$) .
On dit que $[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}$ est une fonction d'inclusion pour f si

$$\forall x \in X, X \in \mathbb{IR}^n, f(x) \in [f](X)$$

Addition

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x + y \end{array}$$

Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$. ($f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) .
On dit que $[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}$ est une fonction d'inclusion pour f si

$$\forall x \in X, X \in \mathbb{IR}^n, f(x) \in [f](X)$$

Addition

$$+ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

Addition étendue aux intervalles

$$[+] : \begin{array}{ccc} \mathbb{IR}^2 & \rightarrow & \mathbb{IR} \\ ([x^-, x^+], [y^-, y^+]) & \mapsto & [x^- + y^-, x^+ + y^+] \end{array}$$

Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}$. $(f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$.
On dit que $[f] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}$ est une fonction d'inclusion pour f si

$$\forall x \in X, X \in \mathbb{IR}^n, f(x) \in [f](X)$$

Addition

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x + y \end{array}$$

Addition étendue aux intervalles

$$\begin{array}{cccc} [+] : & \mathbb{IR}^2 & \to & \mathbb{IR} \\ & ([x^-, x^+], [y^-, y^+]) & \mapsto & [x^- + y^-, x^+ + y^+] \end{array}$$

$[+]$ est une fonction d'inclusion pour $+$

Arithmétique par intervalles

Si $\diamond \in \{+, -, ., /, \max, \min\}$, et si $[x]$ et $[y]$ sont deux intervalles, on définie :

$$[x] \diamond [y] \triangleq [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}] .$$

Arithmétique par intervalles

Si $\diamond \in \{+, -, ., /, \max, \min\}$, et si $[x]$ et $[y]$ sont deux intervalles, on définie :

$$[x] \diamond [y] \triangleq [\{x \diamond y \mid x \in [x], y \in [y]\}] .$$

C'est à dire

$$\begin{aligned}
[x^-, x^+] + [y^-, y^+] &= [x^- + y^-, x^+ + y^+] \\
[x^-, x^+] \cdot [y^-, y^+] &= [\min(x^-y^-, x^+y^-, x^-y^+, x^+y^+), \\
&\quad \max(x^-y^-, x^+y^-, x^-y^+, x^+y^+)] \\
\max([x^-, x^+], [y^-, y^+]) &= [\max(x^-, y^-), \max(x^+, y^+)]
\end{aligned}$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
[-1,3]+[2,5] &= [1,8],\\
[-1,3].[2,5] &= [-5,15],\\
[-1,3]/[2,5] &= [-\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}],\\
\max\left([-1,3],[2,5]\right) &= [2,5].
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \longmapsto & (x+y).z \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} [f]: & \mathbb{IR}^3 & \longrightarrow & \mathbb{IR} \\ & ([x],[y],[z]) & \longmapsto & ([x]+[y]).[z] \end{array}$$

$$\begin{aligned} [f]([1,2],[-3,4],[-1,5]) &= ([1,2]+[-3,4]).[-1,5] \\ &= [-2,6].[-1,5] \\ &= [-10,30] \end{aligned}$$

$$(1,1,2) \in [1,2]\times[-3,4]\times[-1,5], \quad f(1,1,2) = (1+1).2 = 4 \in [-10,30]$$

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R} \\
 & (x,y,z) & \mapsto & (x+y).z
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccc}
[f]: & \mathbb{IR}^3 & \rightarrow & \mathbb{IR} \\
 & ([x],[y],[z]) & \mapsto & ([x]+[y]).[z]
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
[f]([1,2],[-3,4],[-1,5]) &= ([1,2]+[-3,4]).[-1,5] \\
&= [-2,6].[-1,5] \\
&= [-10,30]
\end{aligned}
$$

$$(1,1,2) \in [1,2]\times[-3,4]\times[-1,5], \quad f(1,1,2) = (1+1).2 = 4 \in [-10,30]$$

Remarque

$$[1,2]-[1,2] \neq [0,0]$$

$$[1,2]-[1,2] = [1,2]+[-2,-1] = [-1,1]$$

Fonction élémentaire

Si $f \in \{\cos, \sin, \text{sqr}, \text{sqrt}, \log, \exp, \ldots\}$, on définie sa fonction d'inclusion :

$$[f]([x]) \triangleq [\{f(x) \mid x \in [x]\}].$$

Par exemple,

$$\begin{aligned}
[\sin]([0,\pi]) &= [0,1], \\
[\text{sqr}]([-1,3]) &= [-1,3]^{[2]} = [0,9], \\
[\text{abs}]([-7,1]) &= [0,7], \\
[\text{sqrt}]([2,4]) &= \sqrt{[2,4]} = [\sqrt{2},2],
\end{aligned}$$

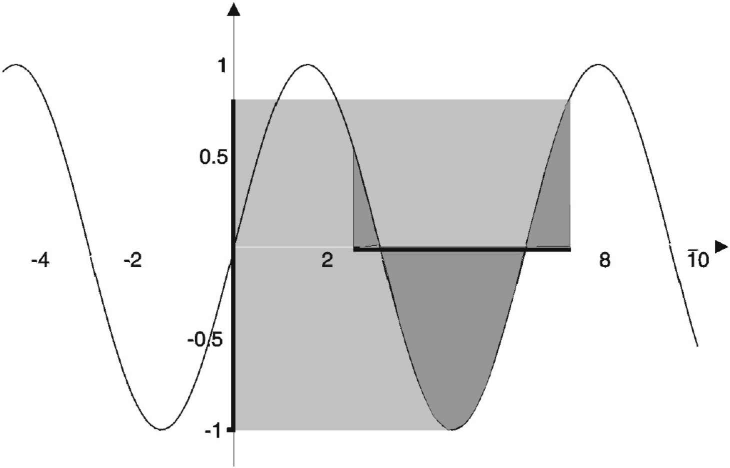


FIG.: $[\sin]([x])$

Solveur SIVIA - basé sur le calcul par interval

$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha, \beta) \in]-\pi, \pi[^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

Solveur SIVIA - basé sur le calcul par interval

$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha, \beta) \in]-\pi, \pi[^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha + \beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{S} = f^{-1}([0, y_0] \times [-2, y_0]),$$

Solveur SIVIA - basé sur le calcul par interval

$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha, \beta) \in]-\pi, \pi[^2 \;/\; \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{S} = f^{-1}([0, y_0] \times [-2, y_0]),$$

$$\text{où } f(\alpha, \beta) = \left(\begin{array}{l} f_1(\alpha, \beta) = 2\sin(\alpha) \\ f_2(\alpha, \beta) = 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) \end{array} \right)$$

Solveur SIVIA - basé sur le calcul par interval

$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha, \beta) \in]-\pi, \pi[^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

$$\mathbb{S} = f^{-1}([0, y_0] \times [-2, y_0]),$$

$$\text{où } f(\alpha, \beta) = \left(\begin{array}{l} f_1(\alpha, \beta) = 2\sin(\alpha) \\ f_2(\alpha, \beta) = 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) \end{array} \right)$$

Soit $[f] : \mathbb{IR}^2 \to \mathbb{IR}^2$

$$[f]([\alpha], [\beta]) = \left(\begin{array}{lcl} [f_1]([\alpha], [\beta]) & = & 2.[\sin]([\alpha]) \\ [f_2]([\alpha], [\beta]) & = & 2.[\sin]([\alpha]) + 1.5.[\sin]([\alpha] + [\beta]) \end{array} \right)$$

Théorème du point fixe de Brouwer

Soit D homéomorphe à la boule fermée unité de $\mathbb{R}^n$, et une fonction continue $f : D \to D$ alors f admet un point fixe.

Le théorème du point fixe de Brouwer combiné avec le calcul par intervalles permet à des calculs numériques de prouver l'existence de solutions pour des systèmes linéaires ou non.

La plus simple des applications est la méthode de Newton par intervalle.
Supposons que $f : [x] = [\underline{x}; \overline{x}] \to \mathbb{R}$ soit continue et dérivable sur $[x]$,. On se donne un point $\hat{x} \in [x]$ et $[f']([x])$ un intervalle qui contient l'image de $[x]$ par f'. Alors on note $N_{f,\hat{x}}$ l'opérateur

$$\begin{aligned} N_{f,\hat{x}} : \mathbb{IR} & \to \mathbb{IR} \\ [x] & \mapsto \hat{x} - \frac{f(\hat{x})}{[f']([x])} \end{aligned}$$

Théorème utilisé en pratique

Si $N_{f,\hat{x}}([x]) \subset [x]$, alors $f(x) = 0$ admet une unique solution.

Conjecture de Kepler

(1611) : Johannes Kepler "Les cristaux de neige à six branches". Il construit l'empilement cubique à faces centrées et affirme "qu'il est le plus serré, de sorte qu'aucun autre arrangement ne pourrait mettre plus de boules dans le même volume".

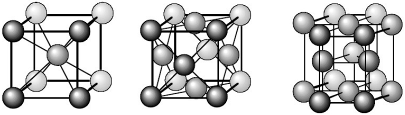


FIG.: Exemples d'empilement de sphères

Conjecture de Kepler

Tout empilement de sphères dans l'espace euclidien de dimension 3 a une densité au plus égale a la densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

Conjecture de Kepler

Tout empilement de sphères dans l'espace euclidien de dimension 3 a une densité au plus égale a la densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$.

- 1831, Carl Friedrich Gauss démontre que tous empilement de sphères données par des réseaux satisferont à la conjecture de Kepler.
- 1958, C.A. Rogers démontre que la densité d'un empilement de sphères est au plus égale à la portion de volume d'un tétrahèdre régulier de longueur 2 recouverte par des boules de rayon 1centrées en ses sommets. Malheuresement, la borne ainsi obtenue vaut $\simeq 0.7796...$ et est donc moins bonne que celle de Kepler $\simeq 0.7404...$
- 1943, Fejer Toth conjecture que la densité d'un empilement de sphères est au plus égale $\frac{4}{3}\frac{\pi}{10\sqrt{130-58\sqrt{5}}} = 0.7547...$

Conjecture de Kepler - Démontré par Hales (1998) :Tout empilement de sphères dans l'espace euclidien de dimension 3 a une densité au plus égale à la densité $\frac{\pi}{3\sqrt{2}}$ (La densité du réseaux face cubique centrée).

Idée de démonstration

292 pages pour montrer que ce problème est équivalent à un problème d'optimisation :

- environ 100 000 fonctions coût non linéaires.
- chacunes dépendant de 100 à 200 variables.
- chacun de ses paquets de variables étant contraintes par de 1000 à 2000 relations.

Problème des méthodes habituelles

La plupart des méthodes d'optimisation converge vers un minimum local.

$$\text{Trouver } u \in D, \ / \ f(u) = \inf_{x \in D} f(x)$$

Les méthodes sont interessantes lorsque f est une fonction convexe et D un ensemble convexe, dans ce cas, elles nous permettent de fournir un minimum global.(ou tout au moins une approximation...)

Problème des méthodes habituelles

La plupart des méthodes d'optimisation converge vers un minimum local.

$$\text{Trouver } u \in D, \ / \ f(u) = \inf_{x \in D} f(x)$$

Les méthodes sont interessantes lorsque f est une fonction convexe et D un ensemble convexe, dans ce cas, elles nous permettent de fournir un minimum global.(ou tout au moins une approximation...)

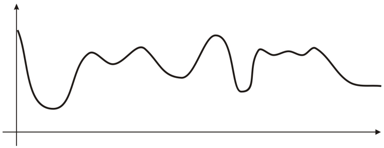


FIG.: Optimisation

Toutes les méthodes dite de descente converge vers un minimum local

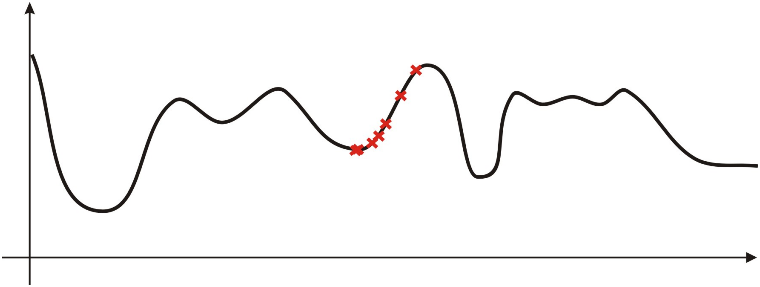


Fig.: Optimisation locale

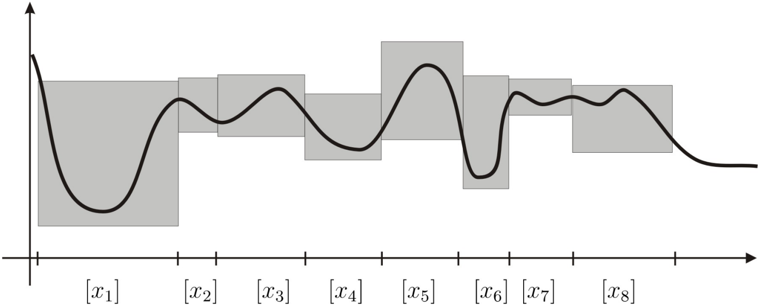


FIG.: Optimisation globale - Hansen

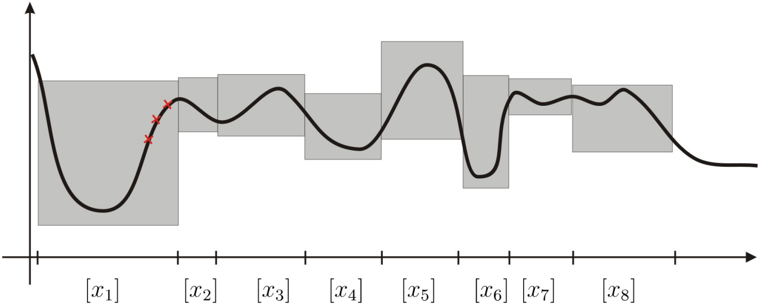


FIG.: Optimisation globale - Hansen

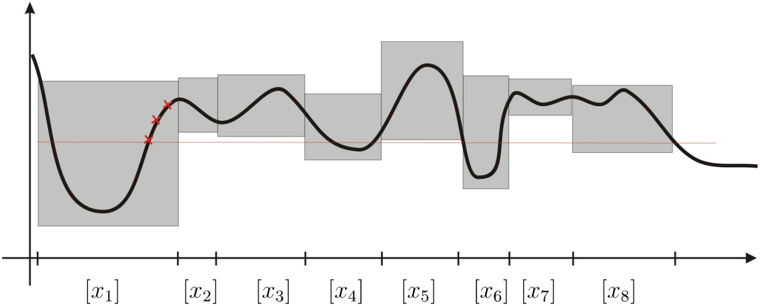


FIG.: Optimisation globale - Hansen

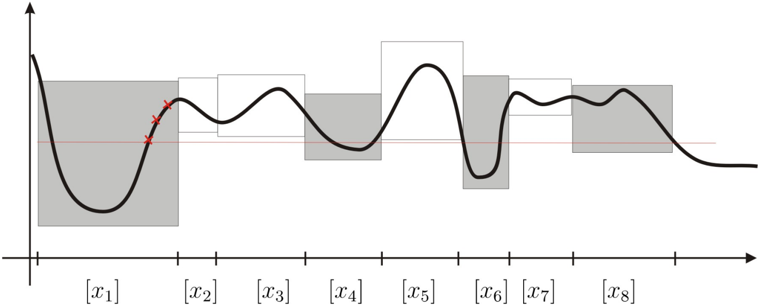
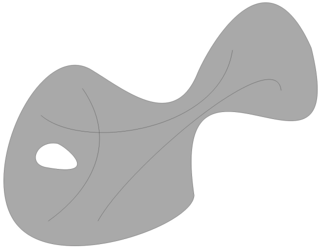


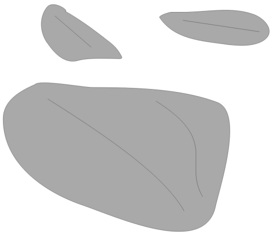
FIG.: Optimisation

Definition

(Connexe par arcs) Un espace topologique X est *connexe par arc* si et seulement si pour tout couple $x, y \in X$, il existe une fonction continue f de $[0,1]$ à valeur dans X tel que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.

$$\forall x, y \in X, \exists f \in \mathcal{C}([0,1], X) \ / \ f(0) = x \text{ et } f(1) = y$$

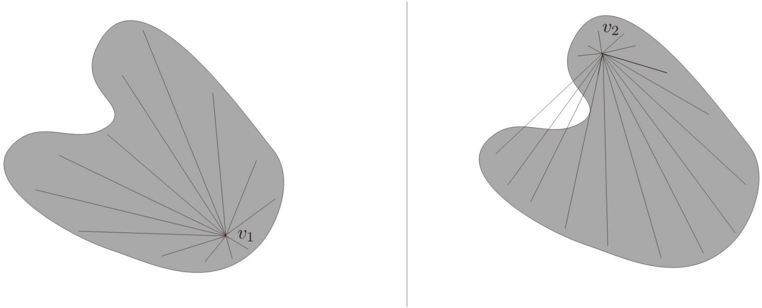




Definition

(Etoilé, espace $\mathbf{v}^*$-*étoilé*) Le point v^* est une étoile pour le sous ensemble X de $\mathbb{R}^n$ si X contient tous les segments $[\mathbf{x}, \mathbf{v}^*]$ avec $\mathbf{x}$ dans X. On dit aussi que X est $\mathbf{v}^*$-étoilé.

$$\exists v^* \in X, \forall \mathbf{x} \in X, [\mathbf{x}, v^*] \subset X$$



Propriété 1

Un ensemble étoilé est un ensemble connexe par arc.

Propriété 2

Si X et Y sont deux ensembles v^*-étoilés, alors $X \cap Y$ est aussi v^*-étoilé.

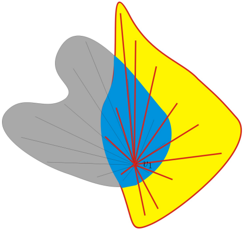


FIG.: Intersection de deux ensembles v^*-étoilé

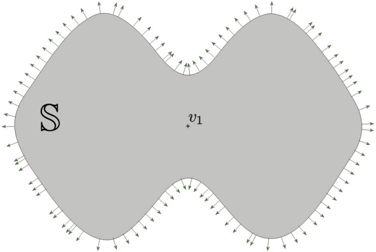
Condition suffisante pour que v^* soit une étoile

Soit $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(\mathbf{x}) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.

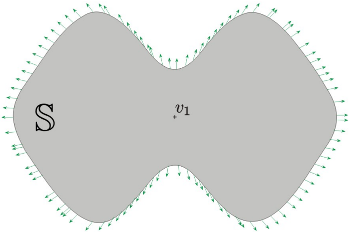
Soit v^* un point de $\mathbb{S}$. Si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\mathbf{x}) = 0, \text{ on a } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) > 0 \qquad (1)$$

alors v^* est étoile pour $\mathbb{S}$.



$Df(\mathbf{x})$



$\mathbf{x} - v^*$

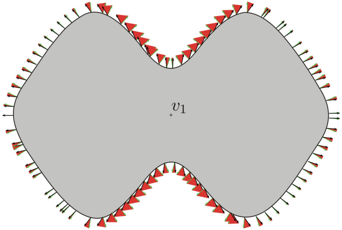
Condition suffisante pour que v^* soit une étoile

Soit $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(\mathbf{x}) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.

Soit v^* un point de $\mathbb{S}$. Si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\mathbf{x}) = 0, \text{ on a } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) > 0$$

alors v^* est étoile pour $\mathbb{S}$.



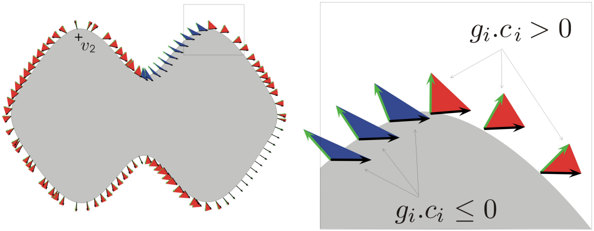
Condition suffisante pour que v^* soit une étoile

Soit $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(\mathbf{x}) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.

Soit v^* un point de $\mathbb{S}$. Si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\mathbf{x}) = 0, \text{ on a } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) > 0$$

alors v^* est étoile pour $\mathbb{S}$.



Condition suffisante pour que v^* soit une étoile

Soit $\mathbb{S} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } f(\mathbf{x}) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$.

Soit v^* un point de $\mathbb{S}$. Si

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\mathbf{x}) = 0, \text{ on a } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) > 0$$

alors v^* est étoile pour $\mathbb{S}$.

$$(1) \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\mathbf{x}) = 0, \text{ on a } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\mathbf{x}) = 0, \text{ on a } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) > 0$$

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \neg(a \text{ et } \neg b)$$

$$(1) \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\mathbf{x}) = 0, \text{ on a } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) > 0$$

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \neg(a \text{ et } \neg b)$$

$$(1) \Leftrightarrow \neg(f(\mathbf{x}) = 0 \text{ et } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \text{ satisfaisant } f(\mathbf{x}) = 0, \text{ on a } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) > 0$$

$$(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow \neg(a \text{ et } \neg b)$$

$$(1) \Leftrightarrow \neg(f(\mathbf{x}) = 0 \text{ et } Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0)$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 \\ Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{cases} \text{ n'a pas de solution}$$

Un exemple

Montrons que $v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

Un exemple

Montrons que $v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{tel que } x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 \\ Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution}$$

Un exemple

Montrons que $v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{tel que } x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 \\ Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ \partial_x f(x, y).(x - 0.6) + \partial_y f(x, y).(y + 0.5) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution}$$

Un exemple

Montrons que $v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

$$\begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 \\ Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ \partial_x f(x, y).(x - 0.6) + \partial_y f(x, y).(y + 0.5) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ (2x + y)(x - 0.6) + (2y + x)(y + 0.5) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'a pas de solution}$$

Definition (Pavage)

Soit X_0 un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$. Un pavage de X_0 est un ensemble de pavés finis $(p_i)_{i \in I}$ tel que

- leurs réunions est égal à X_0.
- $i \neq j \Rightarrow p_i \cap p_j$ est de mesure nulle

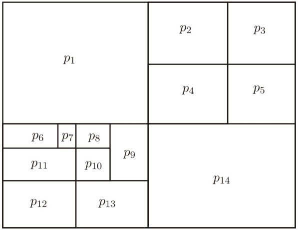
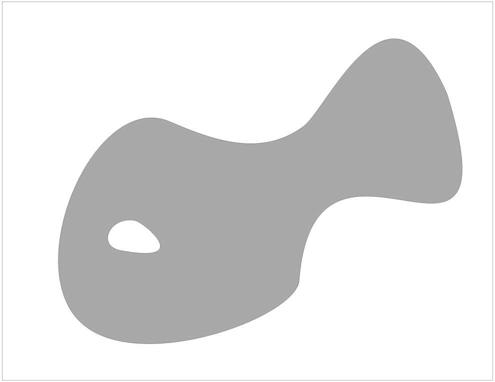
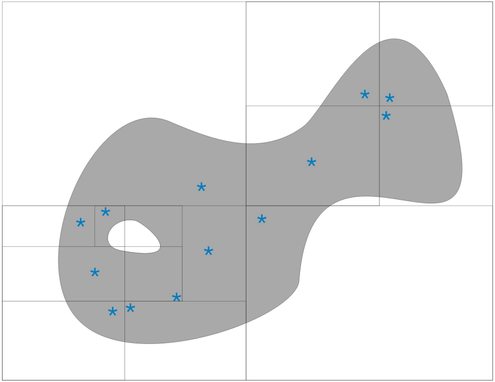


FIG.: Un pavage (p_i) constitué de 14 pavés

Pour montrer qu'un ensemble est connexe

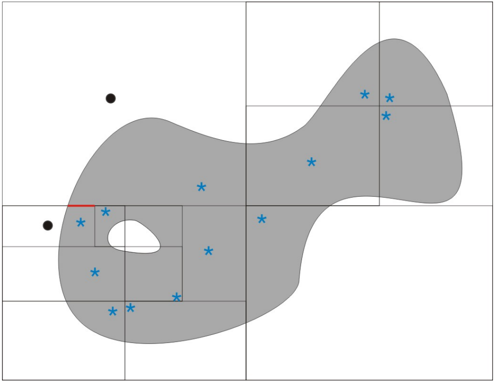


Recherche d'un pavage $(p_i)_{i \in I}$ tel que chaque $p_i \cap \mathbb{S}$ est étoilé



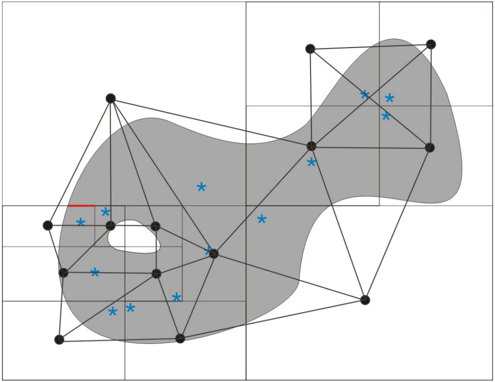
Création d'un graphe topologique

On associe à chaque pavé étoilé une 0-cell ou un noeud



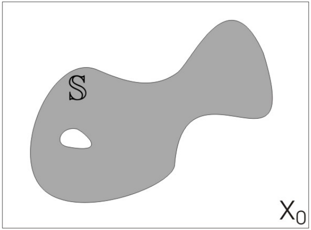
Création d'un graphe topologique

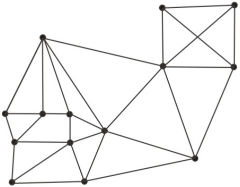
On associe à chaque couple de pavés (p_i, p_j) une 1-cell ou un arc ssi $p_i \cap p_j \cap \mathbb{S} \neq \emptyset$

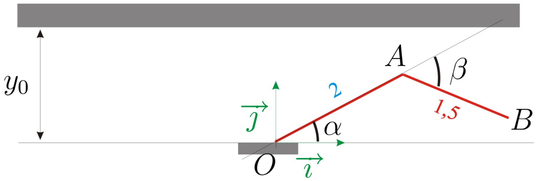


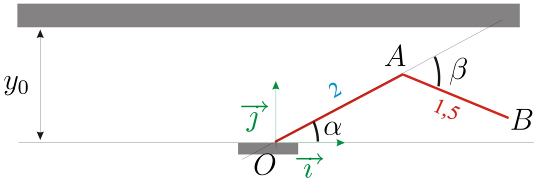
Proposition

Soit $\mathbb{S}$ un sous ensemble de $\mathbb{R}^n$.
Soit $(p_i)_{i\in I}$ un pavage de $X_0 \subset \mathbb{R}^n$.
Si $\forall p_i \in (p_i)_{i\in I}$, l'ensemble $\mathbb{S} \cap p_i$ est étoilé et si le graphe associé au pavage est connexe alors l'ensemble $\mathbb{S} \cap X_0$ est connexe.






y_0
A
β
2
1,5
B
$\vec{j}$
α
O
$\vec{i}$



Ensemble recherché

$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha, \beta) \in]-\pi, \pi[^2 \ / \ \left\{ \begin{array}{lcl} 2\sin(\alpha) & \in & [0, y_0] \\ 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) & \in & [-2, y_0] \end{array} \right. \right\}$$

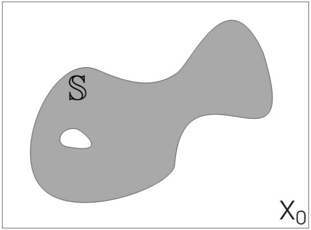
Ensemble recherché

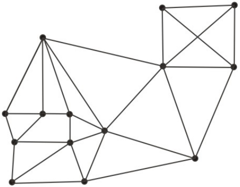
$$(\alpha,\beta) \in]-\pi,\pi[^2 \ /$$

$$\begin{cases} f_1(\alpha,\beta) = 2\sin(\alpha) - y_0 & \leq & 0 \\ f_2(\alpha,\beta) = -2\sin(\alpha) & \leq & 0 \\ f_3(\alpha,\beta) = 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) - y_0 & \leq & 0 \\ f_4(\alpha,\beta) = -2\sin(\alpha) - 1.5\sin(\alpha+\beta) - 2 & \leq & 0 \end{cases}$$

Conclusion -

- Comment à un ensemble on peut associer un autre ensemble dans le but de prouver sa connexité ou de compter son nombres de composantes connexes.





Perspective

- Associer à un ensemble un CW-complexe homéomorphe (ou une triangulation) dans le but de mieux caractériser la topologie de cette ensemble ...
  - groupes d'homotopie
  - groupes d'homologie
  - nombres de Betti