

# Identification sur un système quantique bruité : Théorie et démonstration expérimentale sur un processeur quantique.

Nicolas DELANOUE, François CHAPEAU-BLONDEAU,  
Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS),  
Université d'Angers, 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.

## Résumé

Nous traitons une tâche d'identification de système par estimation paramétrique à partir d'un signal de mesure bruité – une problématique standard de l'automatique – qui est ici toutefois traitée dans le domaine quantique. Nous présentons, de façon pédagogique, la formulation théorique, avec les notions de signal quantique, de système quantique, de bruit quantique et de mesure quantique. Nous réalisons également une démonstration expérimentale sur un processeur quantique accessible librement sur Internet.

## 1 Introduction

Les technologies quantiques suscitent un intérêt grandissant et présentent de larges potentialités, à la fois pour les applications, la recherche et l'enseignement [1]. Les concepts de l'automatique, des signaux-systèmes, sont de nature à contribuer utilement aux développements des technologies quantiques [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]. Nous proposons ici une démonstration de cette démarche, en traitant une tâche d'identification, qui est une problématique standard de l'automatique, toutefois abordée ici dans le domaine quantique [9, 10, 11, 12]. Nous traitons un problème d'identification sur un système quantique via une tâche d'estimation paramétrique à partir d'un signal quantique bruité, avec à la fois une formalisation théorique et une démonstration expérimentale sur un processeur quantique.

## 2 Signaux et systèmes quantiques

Nous considérons, dans le domaine quantique, une tâche pouvant se décrire, au moyen de concepts standards des signaux-systèmes, comme une tâche d'identification sur un système quantique à partir d'un signal de mesure bruité. Cette problématique standard des signaux-systèmes constituée par l'identification, va ici nous servir de guide pour présenter des concepts clés de la formalisation en information quantique. La situation abordée est illustrée par la Fig. 1.

Sur la Fig. 1, un signal quantique d'entrée, noté  $\rho$ , excite un processus quantique (un système)  $U_\xi$  caractérisé par un paramètre  $\xi$ . Le signal quantique délivré en sortie du processus  $U_\xi$  se trouve affecté par un bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$ . Le signal de sortie bruité fait alors l'objet d'une mesure quantique, et à partir du résultat de mesure il s'agit d'estimer (efficacement) la valeur du paramètre  $\xi$  caractérisant le processus sondé. On peut reconnaître ici une tâche familière d'identification, par estimation paramétrique ; toutefois les éléments clés y sont quantiques, et doivent donc être traités conformément à cette nature, comme nous allons l'expliquer à présent.

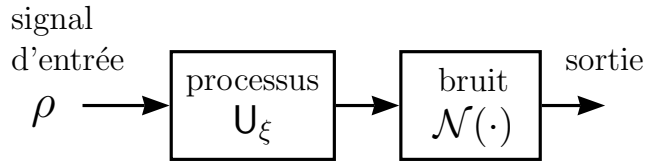


FIGURE 1 – Le signal quantique d’entrée constitué par un opérateur densité  $\rho$ , interagit avec le processus quantique  $U_\xi$  affecté par un bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$ . Le signal en sortie est mesuré pour servir dans une tâche d’identification sur le processus  $U_\xi$ .

## 2.1 Signal quantique

Ce qui peut utilement tenir lieu de signal quantique est fourni par l’état  $|\psi\rangle$  d’un objet quantique (par exemple, un photon, un électron). Il s’agit d’un vecteur  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  qui existe dans un espace vectoriel de Hilbert complexe  $\mathcal{H}$  associé à l’objet quantique considéré [13]. En dimension  $N$ , on peut référer l’espace  $\mathcal{H}$  à une base orthonormée naturelle  $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle\}$  et exprimer le vecteur d’état  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  comme la combinaison linéaire

$$|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N \alpha_n |n\rangle, \quad (1)$$

avec les coordonnées  $\alpha_n \in \mathbb{C}$  qui sont des nombres complexes. En outre, le vecteur d’état  $|\psi\rangle$ , à cause d’un principe ayant trait à la mesure en quantique, est tenu de posséder une norme (carrée) unité, qui se note  $\langle\psi|\psi\rangle = \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 = 1$ , avec le vecteur adjoint  $\langle\psi| = |\psi\rangle^\dagger$ .

La mesure d’un objet quantique [13] réfère son état  $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$  à une base orthonormée de  $\mathcal{H}$ , comme  $\{|n\rangle\}_{n=1}^N$ . Cette base est déterminée par la procédure et l’appareil de mesure. La mesure se produit alors comme une projection aléatoire de l’état  $|\psi\rangle$  sur un état de base  $|n\rangle$ , qui survient avec la probabilité

$$\Pr\{|n\rangle\} = |\alpha_n|^2 = |\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle n|\psi\rangle \langle\psi|n\rangle = \langle\psi|n\rangle \langle n|\psi\rangle. \quad (2)$$

C’est donc le module carré  $|\alpha_n|^2$  de la coordonnée  $\alpha_n \in \mathbb{C}$  de l’état  $|\psi\rangle$  le long de l’état de base  $|n\rangle$  qui détermine la mesure quantique. Les  $|\alpha_n|^2$  constituent donc une distribution de probabilités, d’où leur normalisation à 1. Les  $|\alpha_n|^2$ , avec leur caractère probabiliste, constituent aussi les (seules) propriétés de l’état quantique  $|\psi\rangle$  accessibles par la mesure. En particulier, deux états  $|\psi\rangle$  et  $e^{i\xi}|\psi\rangle$  qui diffèrent par un facteur de phase global  $e^{i\xi}$  sont indistinguables par la mesure, et le paramètre de phase  $\xi$  demeure inaccessible – un paramètre non identifiable dans la terminologie de l’automatique.

Un état quantique  $|\psi\rangle$  constitue ce qui est appelé un état pur. On doit toutefois étendre la notion d’état quantique pour englober la notion d’état mélangé. Ceci est notamment motivé par l’effet du bruit ou de la décohérence quantique, qui manifeste l’influence de causes incontrôlées entraînant une incertitude sur l’état quantique. Dans de telles circonstances, on introduit un ensemble statistique  $\{(p_j, |\psi_j\rangle)\}$  qui exprime que l’objet quantique peut se trouver dans l’état  $|\psi_j\rangle$  avec une probabilité  $p_j$ .

Sur l’objet quantique, lors d’une mesure dans la base  $\{|n\rangle\}$ , on obtient l’état projeté  $|n\rangle$  avec la probabilité conditionnelle  $\Pr\{|n\rangle| |\psi_j\rangle\} = \langle n|\psi_j\rangle \langle\psi_j|n\rangle$  lorsque l’état préalable à la mesure est  $|\psi_j\rangle$ . La probabilité totale lors de la mesure de projeter sur  $|n\rangle$  est alors  $\Pr\{|n\rangle\} = \sum_j p_j \Pr\{|n\rangle| |\psi_j\rangle\}$ , qui est

$$\Pr\{|n\rangle\} = \sum_j p_j \langle n|\psi_j\rangle \langle\psi_j|n\rangle = \langle n| \left( \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| \right) |n\rangle \quad (3)$$

$$= \langle n|\rho|n\rangle, \quad (4)$$

où l'on a introduit l'opérateur  $\rho$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  défini par

$$\rho = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j| . \quad (5)$$

Il s'agit de l'opérateur densité  $\rho$  associé à l'ensemble statistique  $\{(p_j, |\psi_j\rangle)\}$ . À lui seul, l'opérateur densité  $\rho$  de l'Éq. (5) possède la faculté de décrire, via l'Éq. (4), l'ensemble des résultats (leur statistique) accessibles lors de la mesure sur l'objet quantique dans un état incertain, dit état mélangé [13]. De par sa définition de l'Éq. (5) il découle que l'opérateur densité  $\rho$  est un opérateur positif de trace unité. Un état pur  $|\psi\rangle$  se décrit aussi bien par l'opérateur densité  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ . L'opérateur densité, offrant une représentation générale d'un état quantique, constitue ainsi une notion appropriée pour tenir lieu de **signal quantique**.

## 2.2 Système quantique

L'évolution d'un état quantique  $|\psi\rangle$  peut se décrire [13] au moyen de l'équation de Schrödinger

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -\frac{i}{\hbar} \mathbf{H} |\psi(t)\rangle . \quad (6)$$

L'opérateur  $\mathbf{H}$  est le hamiltonien, un opérateur hermitique ( $\mathbf{H}^\dagger = \mathbf{H}$ ) représentant une traduction opératorielle de l'énergie de l'objet quantique d'état  $|\psi\rangle$ . Pour l'équation différentielle de l'Éq. (6), une solution formelle peut être écrite [3] pour exprimer l'évolution de l'état quantique entre un instant initial  $t_0$  et un instant final  $t > t_0$  prenant la forme

$$|\psi(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathbf{H} dt'\right) |\psi(t_0)\rangle = \mathbf{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle . \quad (7)$$

Dans l'Éq. (7), l'opérateur

$$\mathbf{U}(t, t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \mathbf{H} dt'\right) \quad (8)$$

constitue l'opérateur d'évolution de l'état quantique entre les instants  $t_0$  et  $t > t_0$ . Comme  $\mathbf{H}$  est hermitique,  $\mathbf{U}(t, t_0)$  résulte comme un opérateur unitaire ( $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^\dagger$ ).

La formulation  $|\psi(t)\rangle = \mathbf{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$  de l'Éq. (7) peut être considérée comme une description de type "bloc fonctionnel" de l'évolution de l'état quantique, entre un état initial lorsqu'un certain traitement commence, jusqu'à un état final où il est accompli. Il s'agit d'une formulation très commune en théorie des signaux-systèmes, qui donc peut se transposer naturellement en quantique, où l'on pourra représenter un système ou processus quantique par un opérateur unitaire  $\mathbf{U}$  faisant évoluer un état ou signal quantique  $|\psi\rangle$  par une transformation entrée-sortie  $|\psi\rangle \mapsto \mathbf{U} |\psi\rangle$ . Par conjugaison hermitique on dispose aussi de l'évolution  $\langle \psi| \mapsto \langle \psi| \mathbf{U}^\dagger$ , si bien qu'un opérateur densité d'état pur  $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$  évolue selon  $\rho \mapsto \mathbf{U} \rho \mathbf{U}^\dagger$ ; et pour le cas plus général d'un état mélangé  $\rho$  selon l'Éq. (5), par linéarité on dispose de la même évolution

$$\rho \mapsto \mathbf{U} \rho \mathbf{U}^\dagger . \quad (9)$$

C'est notamment ce type de transformation entrée-sortie  $\rho \mapsto \mathbf{U}_\xi \rho \mathbf{U}_\xi^\dagger$  que réalise le bloc fonctionnel noté  $\mathbf{U}_\xi$  sur la Fig. 1.

Ce type d'évolution selon l'Éq. (9) pour l'état via un opérateur unitaire décrit un phénomène quantique fermé, sans couplage avec un environnement extérieur non contrôlé. On doit toutefois étendre ce type d'évolution unitaire, pour englober la situation des phénomènes quantiques ouverts, impliquant un couplage avec un environnement extérieur non contrôlé. Ceci est de nouveau motivé notamment pour décrire l'effet du bruit ou de la décohérence quantique,

qui manifeste l'influence d'un environnement incontrôlé affectant l'état quantique de l'objet d'intérêt (notre photon ou notre électron). Dans de telles circonstances, on montre [13] qu'il est possible de décrire l'évolution de l'état  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  de l'objet d'intérêt, par une transformation non unitaire de la forme

$$\rho \longmapsto \sum_{k=1}^K \mathbf{K}_k \rho \mathbf{K}_k^\dagger = \rho', \quad (10)$$

où les opérateurs  $\mathbf{K}_k \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  sont les opérateurs de Kraus. Ils ne sont nécessairement ni unitaires ni hermitiques, mais sont tenus de satisfaire la condition de complétude

$$\sum_{k=1}^K \mathbf{K}_k^\dagger \mathbf{K}_k = \text{Id}, \quad (11)$$

décomposant l'identité de  $\mathcal{H}$ , afin que la transformation non unitaire de l'Éq. (10) transforme toujours un opérateur densité valide (positif de trace unité) de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  en un opérateur densité valide de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

On arrive à la forme de l'Éq. (10) en s'appuyant sur un modèle composite élargi incluant l'objet quantique d'intérêt couplé à son environnement. Le modèle composite élargi peut être considéré comme fermé et évolue unitairement. Sur l'état composite évolué unitairement, l'environnement inaccessible à la mesure opère par un effet de trace partielle, conduisant pour l'objet quantique d'intérêt à l'état transformé  $\rho' \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  décrit par l'Éq. (10). L'opération de trace partielle sur l'état composite élargi peut s'apparenter à une opération de marginalisation d'une distribution de probabilité selon des degrés de liberté inobservables. Elle a pour effet, qualitativement, d'éliminer l'influence des détails fins de l'environnement qui n'opèrent que par un effet moyen ou moyenné. Il en découle en particulier que pour des états quantiques dans un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de dimension  $N$ , pas plus de  $N^2$  opérateurs de Kraus suffisent pour représenter toutes les évolutions non unitaires envisageables de l'état quantique, fût-il en interaction avec un très large environnement, avec un très grand nombre de degrés de liberté, comme un bain thermique. Par ailleurs, il est aussi possible de construire des modèles réduits d'environnement, qui dans l'opération de réduction par trace partielle, conduiront à une évolution équivalente selon l'Éq. (10) pour l'objet quantique d'intérêt. En général, un modèle réduit d'environnement d'une dimension n'excédant pas  $N^2$  est toujours possible pour simuler toute évolution non unitaire selon l'Éq. (10) d'un état quantique sur un espace de dimension  $N$ .

Enfin, l'évolution unitaire de l'Éq. (9) constitue un cas particulier de l'évolution plus générale de l'Éq. (10), avec un seul opérateur de Kraus  $\mathbf{K}_1 = \mathbf{U}$ , qui satisfait bien l'Éq. (11). La transformation de l'Éq. (10), offrant une représentation générale pour l'évolution d'un état ou signal quantique, constitue ainsi une notion appropriée pour tenir lieu de **système quantique**. Le modèle de système quantique pourra être défini en spécifiant ses opérateurs de Kraus  $\{\mathbf{K}_k\}$  déterminant la transformation entrée–sortie de l'Éq. (10) sur le signal d'entrée  $\rho$ , comme en théorie classique des signaux-systèmes on recourt par exemple à un modèle de fonction de transfert. C'est notamment ce type de transformation entrée–sortie  $\rho \mapsto \mathcal{N}(\rho)$  que réalise le bloc fonctionnel noté  $\mathcal{N}(\cdot)$  et modélisant le bruit quantique sur la Fig. 1.

### 3 Identification d'un système quantique

Pour préciser davantage notre problème d'identification selon la Fig. 1, nous allons nous appuyer sur la situation du qubit. Le qubit représente [13] un objet quantique associé à un espace de Hilbert  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_2$  de dimension 2, pouvant décrire par exemple un photon avec ses deux états de polarisation ou un électron avec ses deux états de spin. L'espace  $\mathcal{H}_2$  est rapporté à la base orthonormée naturelle  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . La notion de qubit est fréquemment employée en ingénierie

quantique, pour des raisons notamment méthodologiques, où l'on s'appuie d'abord sur des entités de base dimension, facilitant leur maîtrise, pour les associer graduellement et accéder à des dimensions plus élevées. Une démarche comparable se retrouve par exemple en électronique numérique classique, où l'on appuie la conceptualisation sur la notion élémentaire de bit ou signal binaire, pour graduellement progresser dans l'élaboration et atteindre des dispositifs aussi sophistiqués qu'un processeur numérique de traitement du signal ou un téléphone cellulaire.

Les signaux quantiques opérant dans notre tâche d'identification de la Fig. 1, seront donc des vecteurs d'état  $|\psi\rangle$  de  $\mathcal{H}_2$  ou plus généralement des opérateurs densité  $\rho$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ . Le système quantique ou processus quantique  $U_\xi$  est choisi comme l'opérateur unitaire de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  défini par

$$U_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{bmatrix} = |0\rangle\langle 0| + e^{i\xi} |1\rangle\langle 1|. \quad (12)$$

La tâche d'identification consiste alors à estimer [14, 15] la phase  $\xi$  caractérisant le processus quantique  $U_\xi$  de l'Éq. (12).

Concrètement, l'opération de l'Éq. (12) peut être réalisée par un interféromètre optique, agissant sur un photon selon son état de polarisation, comme illustré sur la Fig. 2. À la traversée de l'interféromètre, une polarisation dans l'état de base  $|0\rangle$  reste invariante, alors qu'une polarisation dans état de base  $|1\rangle$  subit un déphasage de  $\xi$ . On s'intéresse donc à un processus d'interférométrie, qui représente un procédé fondamental pour la métrologie et l'instrumentation, et on s'intéresse ici à l'interférométrie au niveau physique ultime des photons individuels.

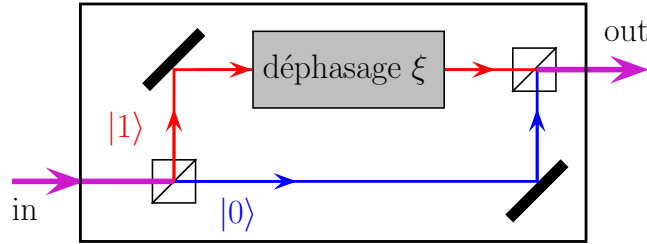


FIGURE 2 – Interféromètre optique agissant sur un photon selon son état de polarisation, offrant une matérialisation du processus  $U_\xi$  de la Fig. 1 et l'Éq. (12), et où l'on cherche à estimer (efficacement) le déphasage  $\xi$  entre les deux bras.

Conformément à la Fig. 1, on considère que le signal en sortie du processus  $U_\xi$  n'est pas directement accessible à la mesure pour l'estimation de la phase  $\xi$ , mais qu'il le devient après l'action du bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$ . Comme on l'a vu à la Section 2.2, l'action du bruit quantique  $\mathcal{N}(\cdot)$  peut se caractériser en spécifiant un ensemble d'opérateurs de Kraus  $\{K_k\}$ . Pour les bruits quantiques pertinents pour le qubit, des ensembles d'opérateurs de Kraus préexistent [13], représentant communément les bruits de bit-flip ou de phase-flip, le bruit dépolarisant, le bruit thermique, comme le ferait en classique un modèle de bruit blanc gaussien par exemple. Nous allons considérer un modèle de bruit quantique dépolarisant, très souvent pertinent pour le photon. Il est défini [13, 16] par 4 opérateurs de Kraus de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ . Pour les exprimer, on introduit pour  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  la base orthogonale de Pauli, définie par l'opérateur identité  $I_2$  de  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$  auquel on adjoint les 3 opérateurs de Pauli  $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $Y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$  et  $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ . Les 4 opérateurs de Kraus définissant le bruit dépolarisant sont alors  $\{\sqrt{1-p}I_2, \sqrt{p/3}X, \sqrt{p/3}Y, \sqrt{p/3}Z\}$  avec une probabilité  $p \in [0, 1]$ . Ils réalisent dans l'Éq. (10) la transformation

$$\rho \mapsto (1-p)\rho + \frac{p}{3}(X\rho X^\dagger + Y\rho Y^\dagger + Z\rho Z^\dagger) = \mathcal{N}(\rho). \quad (13)$$

Selon l'Éq. (13), l'action du bruit dépolarisant est de laisser l'état  $\rho$  du qubit inchangé avec la probabilité  $1-p$ , ou d'appliquer l'un ou l'autre des 3 opérateurs de Pauli avec une probabilité  $p/3$

pour changer aléatoirement l'état  $\rho$ . En s'appuyant sur l'identité  $\rho + X\rho X^\dagger + Y\rho Y^\dagger + Z\rho Z^\dagger = 2I_2$  pour tout  $\rho \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ , on accède pour l'Éq. (13) à la forme alternative

$$\rho \longmapsto \mathcal{N}(\rho) = (1 - q)\rho + q\frac{I_2}{2}, \quad (14)$$

avec  $q = 4p/3$ . Selon l'Éq. (14), l'action du bruit dépolarisant peut alors se décrire comme laissant l'état  $\rho$  du qubit inchangé avec la probabilité  $1 - q$ , ou bien forçant son état  $\rho$  dans l'état maximalelement dépolarisé  $I_2/2$  avec la probabilité  $q$ .

On peut maintenant décrire complètement l'action de notre système quantique bruité de la Fig. 1. À partir d'un signal d'entrée  $\rho_{\text{in}}$  constitué par l'état du qubit d'entrée, le système de la Fig. 1 délivre un signal de sortie  $\rho_{\text{out}}$  constitué par l'état du qubit en sortie, donné par

$$\rho_{\text{out}}(\xi) = \mathcal{N}(U_\xi \rho_{\text{in}} U_\xi^\dagger) = (1 - q)U_\xi \rho_{\text{in}} U_\xi^\dagger + q\frac{I_2}{2}. \quad (15)$$

Le signal de sortie  $\rho_{\text{out}}(\xi)$  doit maintenant être mesuré afin d'estimer la phase  $\xi$ .

On peut alors s'interroger sur le signal d'entrée  $\rho_{\text{in}}$  et sur la mesure quantique en sortie qui conduiraient à une estimation maximalelement efficace. Par exemple, si l'on envisage d'exciter en entrée avec un signal  $\rho_{\text{in}} = |\psi_{\text{in}}\rangle\langle\psi_{\text{in}}|$  d'état pur  $|\psi_{\text{in}}\rangle = |0\rangle$ , ce signal d'excitation reste invariant dans l'interaction  $|0\rangle \mapsto U_\xi |0\rangle = |0\rangle$  avec  $U_\xi$  de l'Éq. (12), et donc n'extrait pas d'information pour estimer la phase  $\xi$ . Si l'on envisage d'exciter en entrée avec un signal  $|\psi_{\text{in}}\rangle = |1\rangle$ , ce signal d'excitation dans l'interaction  $|1\rangle \mapsto U_\xi |1\rangle = e^{i\xi} |1\rangle$  avec  $U_\xi$  de l'Éq. (12) reçoit un facteur de phase global  $e^{i\xi}$  non identifiable, et donc n'apporte pas d'information pour estimer la phase  $\xi$ .

Pour se guider dans ces problématiques d'estimation et optimiser les conditions et la performance, on dispose en théorie des signaux-systèmes de l'outil constitué par l'information de Fisher, qui existe dans une forme classique et également dans une forme quantique [17, 18, 19, 20]. L'information de Fisher permet de caractériser les meilleures performances envisageables, et leurs conditions d'obtention, dans une tâche d'estimation paramétrique. En se guidant sur l'information de Fisher, on détermine [21, 15] que le signal optimal en entrée est nécessairement un état pur  $\rho_{\text{in}} = |\psi_{\text{in}}\rangle\langle\psi_{\text{in}}|$ . De plus, l'état pur optimal en entrée est la superposition équilibrée des deux états de base  $|\psi_{\text{in}}\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2} = |+\rangle$ . Et une mesure quantique optimale en sortie peut être choisie comme la mesure projective dans la base orthonormale  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  avec  $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$ . La mesure du signal de sortie  $\rho_{\text{out}}(\xi)$  projette alors sur  $|+\rangle$  ou  $|-\rangle$  avec les probabilités qui, conformément à l'Éq. (4), s'établissent comme

$$P_\pm = \Pr\{|\pm\rangle\} = \langle\pm|\rho_{\text{out}}(\xi)|\pm\rangle = \frac{1}{2}[1 \pm (1 - q)\cos(\xi)]. \quad (16)$$

À partir de ce résultat de mesure binaire sur le qubit en sortie, la stratégie d'estimation de la phase  $\xi$  consiste alors à répéter l'expérience  $L$  fois, où l'on prépare le signal d'entrée dans l'état  $|\psi_{\text{in}}\rangle = |+\rangle$  et l'on mesure le signal de sortie  $\rho_{\text{out}}(\xi)$  dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ . On va collecter alors  $L_+$  résultats de mesure projetant sur  $|+\rangle$  et  $L - L_+$  projetant sur  $|-\rangle$ . On a ainsi accès [15, 22] à l'estimateur du maximum de vraisemblance

$$\widehat{P}_+ = \frac{L_+}{L} \quad (17)$$

pour la probabilité  $P_+$  de l'Éq. (16), et à l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\widehat{\xi}$  pour la phase  $\xi$  comme  $\widehat{\xi} = \arccos[(2\widehat{P}_+ - 1)/(1 - q)]$ , soit

$$\widehat{\xi} = \arccos\left[\frac{1}{1 - q}\left(2\frac{L_+}{L} - 1\right)\right]. \quad (18)$$

On dispose en particulier des propriétés d'optimalité attachées à l'estimateur du maximum de vraisemblance, qui atteint une erreur quadratique moyenne d'estimation minimale, dans le régime où  $L$  est assez grand.

## 4 Démonstration sur un processeur quantique

Nous effectuons maintenant une mise en œuvre expérimentale de cette tâche d'identification sur un système quantique bruité. Nous utilisons les processeurs quantiques accessibles librement en ligne sur Internet depuis [23]. Il s'agit de processeurs quantiques exploitant des qubits supraconducteurs, refroidis à une très basse température proche de 1 kelvin. Ils rendent accessibles des portes quantiques élémentaires, à un qubit comme la transformation  $U_\xi$  de l'Éq. (12) ou les portes de Pauli X, Y, Z, ou à deux qubits, à l'instar des portes de la logique booléenne de l'électronique numérique classique. Les portes quantiques disponibles offrent un jeu de portes universel, qui par assemblage permet, en principe, de réaliser toute évolution unitaire sur un nombre arbitraire de qubits, à l'instar des portes NOT à un bit, OR et AND à deux bits, de la logique booléenne classique. Une interface graphique permet de composer en ligne un circuit quantique, en assemblant les portes quantiques élémentaires disponibles, puis de lancer l'exécution du circuit quantique sur le processeur quantique, et enfin de récupérer les résultats des mesures quantiques programmées. Le circuit quantique pour notre tâche d'identification est représenté sur la Fig. 3; il inclut la production du signal d'entrée optimisé, la simulation du processus quantique unitaire à identifier, un générateur de bruit quantique de niveau contrôlé, et la mesure du signal de sortie. Le signal quantique principal, qui sonde le processus à identifier et se trouve mesuré en sortie, est constitué par le qubit noté **q0** sur la Fig. 3; les qubits **q1**, **q2** et **q3** sont trois qubits auxiliaires destinés à simuler un générateur de bruit quantique de propriétés contrôlées.

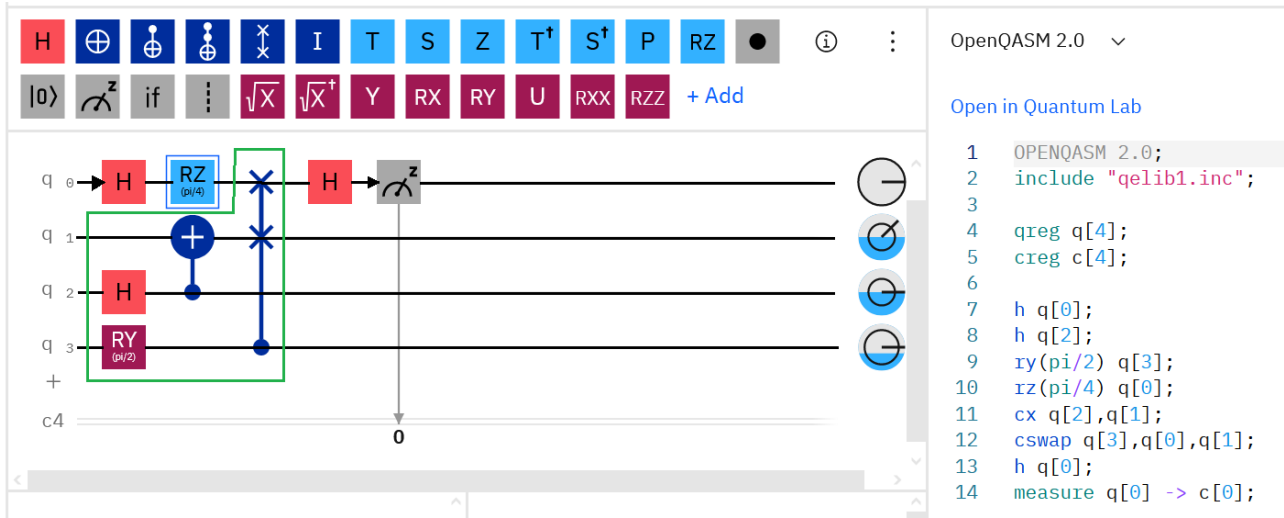


FIGURE 3 – Circuit quantique mettant en œuvre de façon contrôlée le schéma de la Fig. 1 réalisant un tâche d'identification sur un système quantique bruité.

Dans le circuit quantique de la Fig. 3, le bloc bleu encadré et noté RZ implémente la porte quantique  $RZ(\xi)$  qui réalise le processus unitaire  $U_\xi$  de l'Éq. (12) dont on veut estimer la phase  $\xi$ , laquelle peut être fixée à une valeur quelconque dans le circuit. La partie de circuit encerclée en vert sur la Fig. 3 est le générateur de bruit quantique dépolarisant, qui constitue un modèle d'environnement [13] à 3 qubits (notés **q1**, **q2** et **q3** sur la Fig. 3) qui évolue unitairement avec le qubit de signal noté **q0**. Les 3 qubits d'environnement ne sont pas mesurés, réalisant sur le qubit de signal **q0** la transformation du bruit de l'Éq. (14). La probabilité  $q$  du bruit dépolarisant est réglée au moyen du qubit **q3** via le bloc noté RY qui implémente la porte quantique de rotation  $RY(\beta) = \begin{bmatrix} \cos(\beta/2) & -\sin(\beta/2) \\ \sin(\beta/2) & \cos(\beta/2) \end{bmatrix}$  délivrant en sortie l'état  $\cos(\beta/2)|0\rangle + \sin(\beta/2)|1\rangle$  en réponse au qubit **q3** initialisé par défaut dans l'état  $|0\rangle$ . Le simulateur de bruit dépolarisant au niveau  $q$  requiert un signal de contrôle  $\sqrt{1-q}|0\rangle + \sqrt{q}|1\rangle$  qui s'obtient en réglant  $\beta =$

$2 \arcsin(\sqrt{q}) \Leftrightarrow \sqrt{q} = \sin(\beta/2)$ . Le qubit de signal  $q_0$  est initialisé par défaut dans l'état  $|0\rangle$ . La porte de Hadamard  $H$  permet d'obtenir l'état optimal d'excitation  $|\psi_{\text{in}}\rangle = |+\rangle = H|0\rangle$ . Le qubit de signal  $q_0$  après transformation par  $U_\xi \equiv RZ(\xi)$  puis par le bruit dépolarisant, termine dans l'état de sortie  $\rho_{\text{out}}$  de l'Éq. (15), lequel doit être mesuré dans la base  $\{|+\rangle, |-\rangle\}$  pour l'estimation de la phase  $\xi$ . Dans le processeur quantique, les qubits se mesurent dans la base naturelle  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Toutefois, avec un prétraitement unitaire sur le qubit à mesurer, sa mesure dans une base orthonormée quelconque se ramène à une mesure de l'état transformé unitairement dans la base naturelle  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ . Sur le qubit  $q_0$  en sortie, la porte de Hadamard  $H$  accomplit ce prétraitement, suivi d'une mesure dans la base  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  sur la Fig. 3.

Ainsi sur le processeur quantique ont été lancés des lots de  $L = 10^4$  expériences d'estimation de la phase  $\xi$ . À l'issue de l'exécution d'un lot, on récupère le nombre  $L_+$  de fois où le qubit de signal  $q_0$  en sortie a été mesuré sur  $|0\rangle$  parmi les  $L = 10^4$  mesures. Typiquement, un lot de  $L = 10^4$  expériences (incluant la mesure quantique finale) s'exécute en quelques secondes sur le processeur quantique. Auparavant les lots provenant de différents utilisateurs sont mis en file d'attente, où ils restent typiquement quelques minutes (ou parfois jusqu'à quelques heures). Nous avons utilisé depuis [23] le processeur quantique "ibmq-manila" à 5 qubits, essentiellement en février–mars 2022. Les résultats expérimentaux obtenus sur le processeur quantique sont présentés, et confrontés à la théorie, sur la Fig. 4 pour un bruit dépolarisant de faible niveau  $q = 0.1$ , et sur la Fig. 5 pour un bruit plus fort de  $q = 0.5$ .

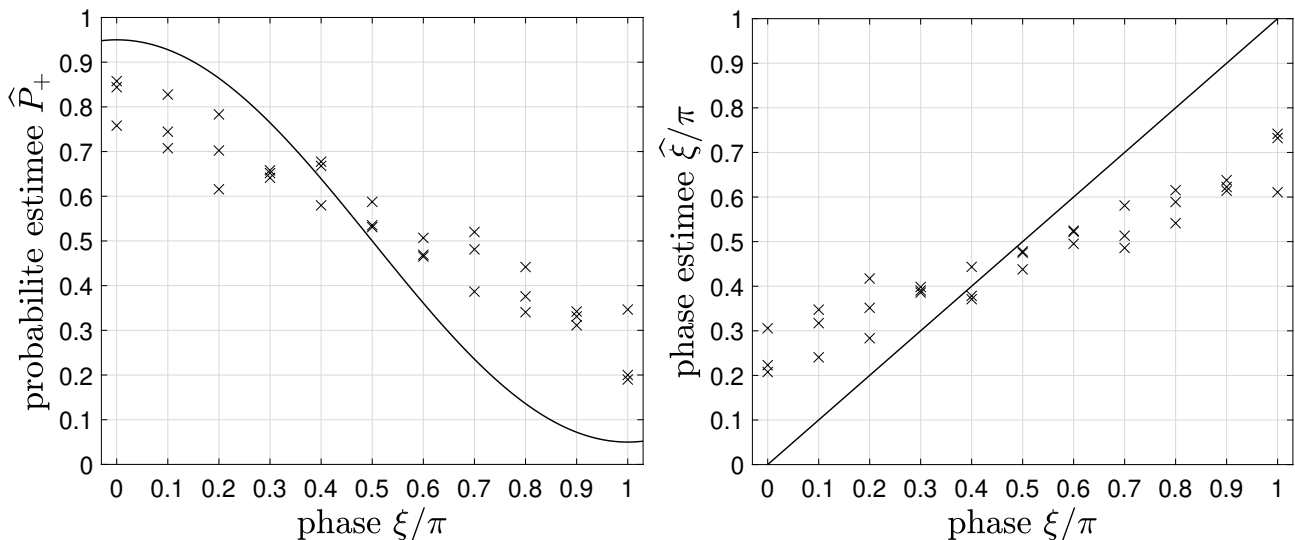


FIGURE 4 – En fonction de la phase  $\xi$  à estimer, les points expérimentaux ( $\times$ ) issus de l'exécution sur le processeur quantique, à un niveau de bruit  $q = 0.1$ . À gauche : la probabilité  $\hat{P}_+$  de l'Éq. (17) estimée expérimentalement ; le trait plein est la probabilité théorique  $P_+$  de l'Éq. (16). À droite : la phase  $\hat{\xi}$  de l'Éq. (18) estimée expérimentalement ; le trait plein est la première bissectrice de la phase théorique  $\xi$ . Chaque estimé ( $\times$ ) est issu de  $L = 10^4$  expériences répétées.

Les résultats expérimentaux des Figs. 4 et 5 sont bien en rapport avec la théorie. Toutefois, l'estimation paramétrique sur  $L = 10^4$  expériences peut être associée à une précision statistique escomptée de l'ordre de  $1/\sqrt{L} \sim 10^{-2}$ . Les écarts significativement plus grands observés sur les Figs. 4 et 5 peuvent être attribués aux imperfections de fonctionnement demeurant dans ces processeurs quantiques, connus pour être des dispositifs avancés encore très sujets aux bruits et perturbations, quoique représentant des dispositifs à la pointe de la recherche et actuellement en développement et progrès permanents.



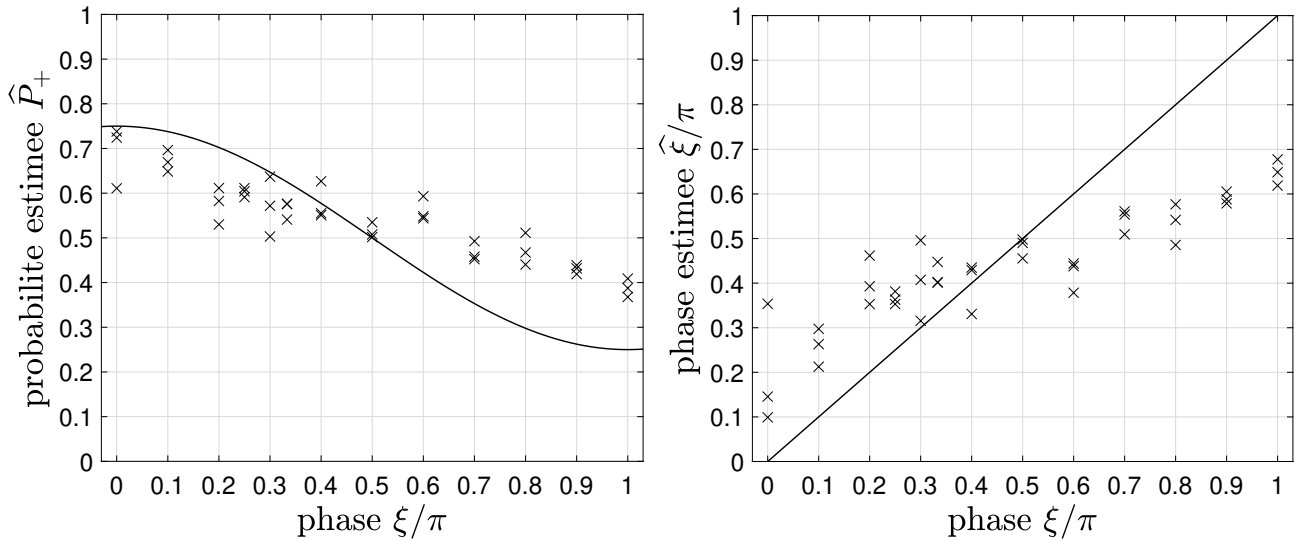


FIGURE 5 – Comme sur la Fig. 4, mais à un niveau de bruit quantique plus élevé  $q = 0.5$ .

## 5 Conclusion

Cette étude propose une démonstration d’une tâche d’identification sur un système bruité – une tâche standard de l’automatique – menée toutefois dans le domaine quantique. Nous avons exposé comment en quantique on peut effectuer la modélisation d’une telle tâche, avec les notions de signal quantique, de système quantique, de bruit quantique. Une démonstration expérimentale de cette tâche d’identification a été réalisée sur un processeur quantique de l’état de l’art. L’ensemble établit et illustre la faisabilité, avec théorie et expérience, d’une démarche pertinente pour les signaux et systèmes dans le domaine quantique. Beaucoup de pistes de travail demeurent ouvertes pour appliquer les concepts des signaux et systèmes afin de contribuer aux développements des technologies quantiques.

## Références

- [1] W. P. Schleich, *et al.*, “Quantum technology : From research to application,” *Applied Physics B*, vol. 122, pp. 130,1–31, 2016.
- [2] P. Rouchon, “Quantum systems and control,” *ARIMA*, vol. 9, pp. 325–357, 2008 (hal.inria.fr/hal-01277779).
- [3] C. Altafini, F. Ticozzi, “Modeling and control of quantum systems : An introduction,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, pp. 1898–1917, 2012.
- [4] J. Zhang, Y.-X. Liu, R.-B. Wu, J. Kurt, F. Nori, “Quantum feedback : Theory, experiments, and applications,” *Physics Reports*, vol. 679, pp. 1–60, 2017.
- [5] D. D’Alessandro, *Introduction to Quantum Control and Dynamics*. New York : Chapman and Hall, 2021.
- [6] Y. C. Eldar, A. V. Oppenheim, “Quantum signal processing,” *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 19, pp. 12–32, Nov. 2002.
- [7] S. Imre, L. Gyongyosi, *Advanced Quantum Communications : An Engineering Approach*. New York : Wiley-IEEE Press, 2012.
- [8] F. Chapeau-Blondeau, E. Belin, “Quantum signal processing for quantum phase estimation : Fourier-transform versus maximum-likelihood approaches,” *Annals of Telecommunications*, vol. 75, pp. 641–653, 2020.

- [9] S. Bonnabel, M. Mirrahimi, P. Rouchon, “Observer-based Hamiltonian identification for quantum systems,” *Automatica*, vol. 45, pp. 1144–1155, 2009.
- [10] Z. Leghtas, G. Turinici, H. Rabitz, P. Rouchon, “Hamiltonian identification through enhanced observability utilizing quantum control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, pp. 2679–2683, 2012.
- [11] Y. Wang, D. Dong, B. Qi, J. Zhang, I. R. Petersen, H. Yonezawa, “A quantum Hamiltonian identification algorithm : Computational complexity and error analysis,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 63, pp. 1388–1403, 2018.
- [12] Y. Wang, Q. Yin, D. Dong, B. Qi, I. R. Petersen, Z. Hou, H. Yonezawa, G.-Y. Xiang, “Quantum gate identification : Error analysis, numerical results and optical experiment,” *Automatica*, vol. 101, pp. 269–279, 2019.
- [13] M. A. Nielsen, I. L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge : Cambridge University Press, 2000.
- [14] M. G. A. Paris, “Quantum estimation for quantum technology,” *International Journal of Quantum Information*, vol. 7, pp. 125–137, 2009.
- [15] F. Chapeau-Blondeau, “Optimizing qubit phase estimation,” *Physical Review A*, vol. 94, pp. 022334,1–14, 2016.
- [16] F. Chapeau-Blondeau, “Optimization of quantum states for signaling across an arbitrary qubit noise channel with minimum-error detection,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 61, pp. 4500–4510, 2015.
- [17] A. Fujiwara, H. Nagaoka, “Quantum Fisher metric and estimation for pure state models,” *Physics Letters A*, vol. 201, pp. 119–124, 1995.
- [18] O. E. Barndorff-Nielsen, R. D. Gill, “Fisher information in quantum statistics,” *Journal of Physics A*, vol. 33, pp. 4481–4490, 2000.
- [19] P. Facchi, R. Kulkarni, V. I. Man’ko, G. Marmo, E. C. G. Sudarshan, F. Ventriglia, “Classical and quantum Fisher information in the geometrical formulation of quantum mechanics,” *Physics Letters A*, vol. 374, pp. 4801–4803, 2010.
- [20] F. Chapeau-Blondeau, “Entanglement-assisted quantum parameter estimation from a noisy qubit pair : A Fisher information analysis,” *Physics Letters A*, vol. 381, pp. 1369–1378, 2017.
- [21] F. Chapeau-Blondeau, “Optimized probing states for qubit phase estimation with general quantum noise,” *Physical Review A*, vol. 91, pp. 052310,1–13, 2015.
- [22] N. Gillard, E. Belin, F. Chapeau-Blondeau, “Estimation quantique en présence de bruit améliorée par l’intrication,” *Actes 26è Colloque GRETSI sur le Traitement du Signal et des Images*, Juan-les-Pins, France, 5–8 sep. 2017.
- [23] “IBM Quantum Computing Platform.” <https://quantum-computing.ibm.com> (2022).