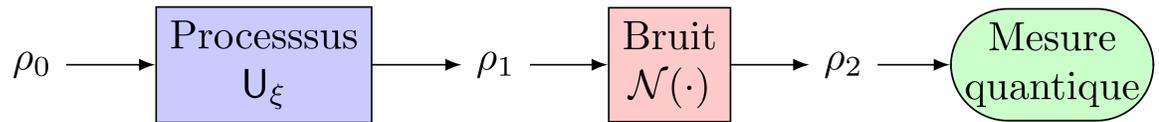


Résumé

Nous traitons une tâche d'identification de système par **estimation paramétrique** à partir d'un **signal de mesure bruité** - une problématique standard de l'automatique - qui est ici toutefois traitée dans le domaine **quantique**.

1. Signaux-systèmes quantiques

Un système quantique bruité :



- **Signal quantique** en entrée : opérateur densité $\rho_0 = \sum_j p_j |\psi_j\rangle \langle \psi_j|$, où chaque $|\psi_j\rangle$ est un vecteur d'état de l'espace de Hilbert \mathcal{H} .
- **Système quantique** U_ξ produit le signal $\rho_1 = U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger$.
- **Bruit quantique** $\mathcal{N}(\cdot)$ produit le signal bruité $\rho_2 = \mathcal{N}(\rho_1)$,
- qui est mesuré pour estimer le paramètre inconnu ξ caractérisant le système U_ξ .

2. Modélisation

- Chaque signal quantique ρ représente un opérateur densité, *i.e.* un élément de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ positif et de trace unité, avec \mathcal{H} l'espace de Hilbert complexe des états quantiques.

- Le système quantique U_ξ transforme le signal ρ_0 et produit un signal ρ_1 selon

$$\rho_0 \mapsto \rho_1 = U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger$$

avec U_ξ un opérateur unitaire de $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ vérifiant $U_\xi^\dagger U_\xi = \text{Id}$.

- L'action du bruit quantique $\mathcal{N}(\cdot)$ se modélise sous la forme

$$\rho_1 \mapsto \rho_2 = \sum_{k=1}^K K_k \rho_1 K_k^\dagger = \mathcal{N}(\rho_1)$$

avec $\{K_k\}_k$ une famille finie d'opérateurs de Kraus vérifiant $\sum_{k=1}^K K_k^\dagger K_k = \text{Id}$.

- La **mesure quantique** projette le signal ρ_2 sur l'un des vecteurs de la base orthonormée $\{|1\rangle, |2\rangle, \dots, |N\rangle\}$ de \mathcal{H} , avec la probabilité $\text{Pr}\{|n\rangle\} = \langle n | \rho_2 | n \rangle$.

3. Identification d'un système quantique

Pour le système de la figure du 1., et à partir du résultat de la mesure, il s'agit d'estimer efficacement la valeur du paramètre ξ caractérisant le processus sondé U_ξ .

La stratégie d'estimation consiste répéter L fois l'expérience suivante :

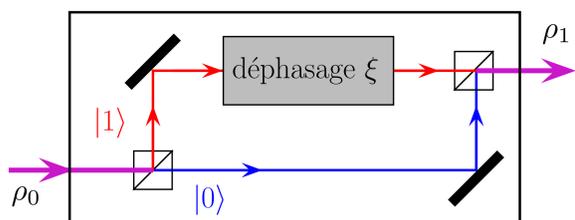
- appliquer un signal quantique d'excitation ρ_0 en entrée,
- puis mesurer le signal quantique bruité ρ_2 en sortie.

Les L résultats de mesure sont ensuite traités afin d'estimer le paramètre ξ .

Le signal d'excitation ρ_0 ainsi que la base de mesure peuvent être choisis en vue d'optimiser un critère d'efficacité de l'estimation, par exemple l'**information de Fisher**. L'estimateur sera celui du **maximum de vraisemblance**.

4. Identification d'un interféromètre optique

- Le système à identifier U_ξ est un interféromètre optique [1] qui agit sur des photons, selon leur état de polarisation.



Chaque photon est alors représenté par un **qubit** avec un espace d'état $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}_2$ de dimension 2, référencé à la base orthonormée canonique $\{|0\rangle, |1\rangle\}$.

- Le modèle paramétrique de l'interféromètre optique $U_\xi \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$ est

$$U_\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\xi} \end{bmatrix} = |0\rangle \langle 0| + e^{i\xi} |1\rangle \langle 1|,$$

où ξ est une phase dans $[0, 2\pi[$.

- Le modèle du bruit quantique considéré est un bruit dépolarisant :

$$\mathcal{N} : \rho_1 \mapsto \rho_2 = (1-p)\text{Id}\rho_1\text{Id}^\dagger + \frac{p}{3}X\rho_1X^\dagger + \frac{p}{3}Y\rho_1Y^\dagger + \frac{p}{3}Z\rho_1Z^\dagger$$

où p est une probabilité et X, Y, Z les opérateurs de Pauli de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$.

- Finalement, la relation entrée-sortie (avant mesure projective) est donnée par :

$$\rho_2 = \mathcal{N}(U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger) = (1-q)U_\xi \rho_0 U_\xi^\dagger + q \frac{\text{Id}}{2} \quad \text{avec } q = \frac{4p}{3}.$$

5. Optimisation de l'estimation

- Au sens de l'information de Fisher, on peut montrer [2] que le signal d'entrée le plus efficace pour estimer ξ se calcule comme :

$$\rho_0 = |+\rangle \langle +| \quad \text{avec } |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle,$$

- et que la base de mesure qui permet de maximiser l'efficacité de l'estimation est la base orthonormée $\{|+\rangle, |-\rangle\}$.

- Lors de la mesure, la probabilité de projeter sur l'état de base $|+\rangle$ est

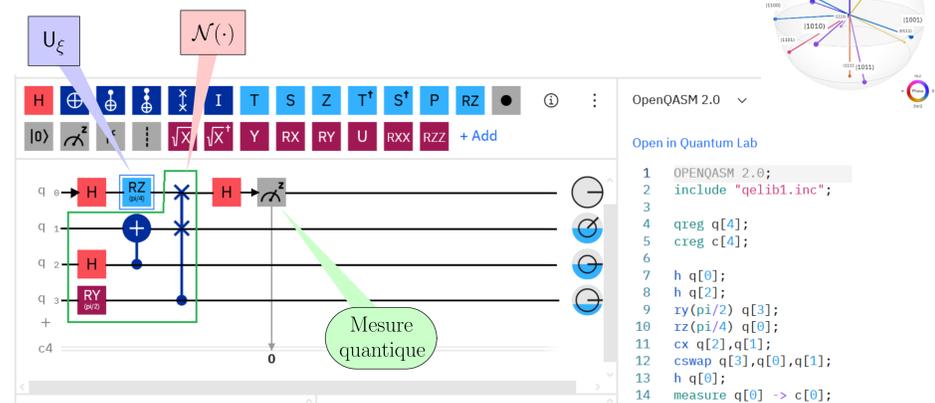
$$P_+(\xi) = \text{Pr}\{|+\rangle\} = \langle + | \rho_2 | + \rangle = \frac{1}{2}[1 + (1-q)\cos(\xi)].$$

- On démontre que l'estimateur du maximum de vraisemblance de la probabilité P_+ est $\hat{P}_+ = L_+/L$ avec L_+ le nombre de fois où la mesure a projeté sur $|+\rangle$.

- On en déduit l'estimateur du maximum de vraisemblance de la phase ξ :

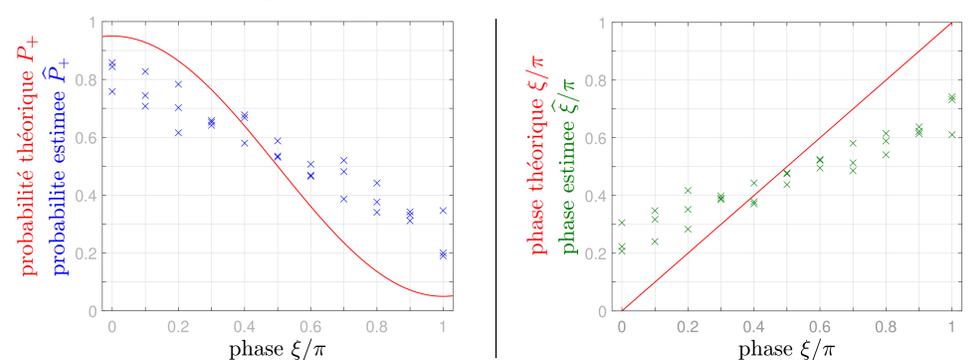
$$\hat{\xi} = \arccos\left[\frac{1}{1-q}\left(2\frac{L_+}{L} - 1\right)\right].$$

6. Démonstration sur un processeur quantique



L'interface de programmation et le processeur sont accessibles en ligne via [3].

7. Résultats expérimentaux



Pour différentes valeurs de la phase ξ à estimer, les valeurs estimées (\times) issus de l'exécution sur le processeur quantique, à un niveau de bruit $q = 0.1$, de 3 lots ($L = 10^4$ par lot).

[1] F. Chapeau-Blondeau, E. Belin, "Quantum signal processing for quantum phase estimation: Fourier-transform versus maximum-likelihood approaches", *Annals of Telecommunications*, vol. 75, pp. 641-653, 2020.

[2] F. Chapeau-Blondeau, "Optimizing qubit phase estimation", *Physical Review A*, vol. 94, pp. 022334, 1-14, 2016.

[3] "IBM Quantum Computing Platform." <https://quantum-computing.ibm.com> (2022).