# Garantir le type d'homotopie d'un ensemble défini par des inégalités.

N. Delanoue

Séminaires de Mathématiques - Université d'Angers - LISA

Vendredi 5 novembre 2004

Objectif :

Construire une triangulation homotope à :

$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n ; f_{i,j}(x) \leq 0\} \text{ où } f_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\mathbb{S} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + xy - 2 & \leq & 0 \\ -x^2 - y^2 - xy + 1 & \leq & 0 \end{array} \right. \right\}$$

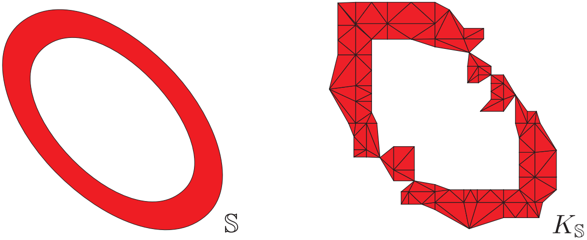



Fig.: Exemple d'un ensemble $\mathbb{S}$ et d'une triangulation générée par l'algorithme `Homotopy via Interval Analysis`.

1. Créer un recouvrement $\{\mathbb{S}_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{S}$ tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est étoilé ou vide}$$

1. Créer un recouvrement $\{\mathbb{S}_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{S}$ tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est étoilé ou vide}$$

2. Utiliser le calcul par intervalle pour montrer qu'un ensemble est étoilé.

# Plan de l'exposé

3. Discrétisation

# Plan de l'exposé

# Plan de l'exposé

1. L'arithmétique des intervalles
2. Condition suffisante pour "Etoilé"
3. Discrétisation

# Remplacer les réels par des intervalles

## Notation

Soient $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$,

# Remplacer les réels par des intervalles

## Notation

Soient $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$,

## Définition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles compacts de $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}, \ \ \underline{x} \leq \overline{x}\}$$

# Remplacer les réels par des intervalles

## Notation

Soient $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$,

## Définition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles compacts de $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R},\ \ \underline{x} \leq \overline{x}\}$$

## Exemple

- $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$

# Remplacer les réels par des intervalles

## Notation

Soient $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$,

## Définition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles compacts de $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}, \;\; \underline{x} \leq \overline{x}\}$$

## Exemple

- $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$
- $[2; 1] \notin \mathbb{IR}$

# Remplacer les réels par des intervalles

## Notation

Soient $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$,

## Définition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles compacts de $\mathbb{R}$ :

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}, \quad \underline{x} \leq \overline{x}\}$$

## Exemple

- $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$
- $[2; 1] \notin \mathbb{IR}$
- $[1; \infty[ \notin \mathbb{IR}$

## Relations sur $\mathbb{IR}$

En tant que parties de $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{IR}$ héritent des relations $=$ et $\subset$

## Relations sur $\mathbb{IR}$

En tant que parties de $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{IR}$ héritent des relations $=$ et $\subset$

Avec $[a], [b], \in \mathbb{IR}$, si $\overline{a} < \underline{b}$ alors

$$[\underline{a}, \overline{a}] \cup [\underline{b}, \overline{c}] \notin \mathbb{IR}$$

## Relations sur $\mathbb{IR}$

En tant que parties de $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{IR}$ héritent des relations $=$ et $\subset$

Avec $[a], [b], \in \mathbb{IR}$, si $\overline{a} < \underline{b}$ alors

$$[\underline{a}, \overline{a}] \cup [\underline{b}, \overline{c}] \notin \mathbb{IR}$$

## Opérations sur $\mathbb{IR}$

- $[a] \sqcup [b] := [\min(\underline{a}, \underline{b}); \max(\overline{a}, \overline{b})]$
- $[a] \cap [b] := \begin{cases} \emptyset & \text{if } \overline{a} < \underline{b} \text{ or } \overline{b} < \underline{a} \\ [\max(\underline{a}, \underline{b}); \min(\overline{a}, \overline{b})] & \text{autrement} \end{cases}$

## Topologie sur $\mathbb{IR}$

Soient $[a], [b] \in \mathbb{IR}$, la distance de Hausdorff $d$

$$d([a],[b]) = \max(|\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}|)$$

munit $\mathbb{IR}$ d'une topologie.

# Remplacer les réels par des intervalles

## Définition

Si $\star \in \{+, -, \times, \div\}$ et $[a], [b] \in \mathbb{IR}$ alors :

$$[a] \star [b] = \{a \star b, a \in [a] \text{ et } b \in [b]\}$$

Remarque : si $0 \in [b]$ alors $[a] \div [b]$ n'est pas définie.

R. C. Young (1931), M. Warmus (1956), T. Sunaga (1958), R. E. Moore (1959) Interval Analysis (1966).

# Remplacer les réels par des intervalles

## Définition

Si $\star \in \{+, -, \times, \div\}$ et $[a], [b] \in \mathbb{IR}$ alors :

$$[a] \star [b] = \{a \star b, a \in [a] \text{ et } b \in [b]\}$$

Remarque : si $0 \in [b]$ alors $[a] \div [b]$ n'est pas définie.

$$\begin{aligned}
[a] + [b] &= [\underline{a} + \underline{b}; \overline{a} + \overline{b}] \\
[a] - [b] &= [\underline{a} - \overline{b}; \overline{a} - \underline{b}] \\
[a] \times [b] &= [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}; \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}, \}] \\
[a] \div [b] &= [a] \times [1/\overline{b}; 1/\underline{b}]
\end{aligned}$$

R. C. Young (1931), M. Warmus (1956), T. Sunaga (1958), R. E. Moore (1959) Interval Analysis (1966).

# Propriétés de l'arithmétique des intervalles

1. $+$ et $\times$ sont deux lois de compositions *associatives* et *commutatives*.

De même, on a des éléments neutres pour l'addition et la

# Propriétés de l'arithmétique des intervalles

1. $+$ et $\times$ sont deux lois de compositions *associatives* et *commutatives*.
2. $\times$ n'est pas *distributive* par rapport à $+$ :

$$\begin{array}{rcl} [-1;1]\times([-1;0]+[3;4]) & = & [-1;1]\times[2;4] \\ & = & [-4,4] \\ [-1;1]\times[-1;0]+[-1;1]\times[3;4] & = & [-1;1]+[-4;4] \\ & = & [-5,5] \end{array}$$

Par contre, on a la sous-distributivité :

$$[a]\times([b]+[c])\subset[a]\times[b]+[a]\times[c]$$

De même, on a des éléments neutres pour l'addition et la

# Propriétés de l'arithmétique des intervalles

1. $+$ et $\times$ sont deux lois de compositions *associatives* et *commutatives*.
2. $\times$ n'est pas *distributive* par rapport à $+$ :
$$\begin{array}{rcl} [-1;1]\times([-1;0]+[3;4]) & = & [-1;1]\times[2;4] \\ & = & [-4,4] \\ [-1;1]\times[-1;0]+[-1;1]\times[3;4] & = & [-1;1]+[-4;4] \\ & = & [-5,5] \end{array}$$
Par contre, on a la sous-distributivité :
$$[a]\times([b]+[c])\subset[a]\times[b]+[a]\times[c]$$
3. $[0;0]$ et $[1;1]$ sont les éléments neutres de $+$ et de $\times$. En général,
$$[a]-[a]\neq[0;0] \text{ et } [a]\div[a]\neq[1;1]$$

De même, on a des éléments neutres pour l'addition et la

## Définition

Soit $f$ une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
$[f] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$ est une fonction d'inclusion pour $f$ si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}, f([x]) \subset [f]([x])$$

## Définition

Soit $f$ une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
$[f] : \mathbb{IR} \longrightarrow \mathbb{IR}$ est une fonction d'inclusion pour $f$ si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}, f([x]) \subset [f]([x])$$

## Exemple

Si $f$ est une fonction réelle continue définie sur $\mathbb{R}$.
L'image directe **f** : $\mathbb{IR} \longrightarrow \mathbb{IR}$ est une fonction d'inclusion pour $f$.

## Exemples

1. $\exp([x]) = [\exp(\underline{x}); \exp(\overline{x})]$

## Exemples

1. $\exp([x]) = [\exp(\underline{x}); \exp(\overline{x})]$
2. $\sqrt{([x])} = [\sqrt{\underline{x}}; \sqrt{\overline{x}}]$ si $0 \leq \underline{x}$

## Exemples

1. $\exp([x]) = [\exp(\underline{x}); \exp(\overline{x})]$
2. $\sqrt{([x])} = [\sqrt{\underline{x}}; \sqrt{\overline{x}}]$ si $0 \leq \underline{x}$
3. $([x])^2 = \begin{cases} [\underline{x}^2; \overline{x}^2] & \text{si} \quad 0 \leq \underline{x} \\ [0; \max\{\underline{x}^2, \overline{x}^2\}] & \text{si} \quad 0 \in [x] \\ [\overline{x}^2; \underline{x}^2] & \text{si} \quad \overline{x} \leq 0 \end{cases}$

## Exemple

$$\begin{array}{rccc} \sin: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

## Exemple

$$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

## La fonction $\sin$ étendue aux intervalles :

$$\begin{array}{rccc} [\sin_1] : & \mathbb{IR} & \longrightarrow & \mathbb{IR} \\ & [x] & \longmapsto & [-1;1] \end{array}$$

$[\sin_1]$ est une fonction d'inclusion pour $\sin$.

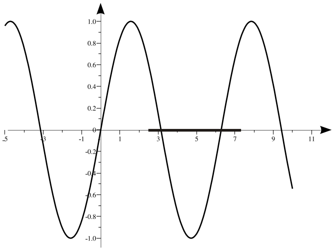



FIG.: $[\sin]([x])$

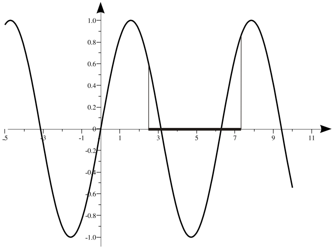



Fig.: $[\sin]([x])$

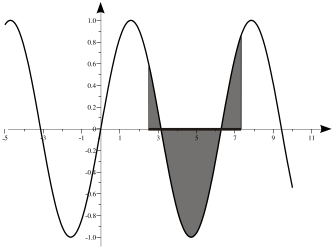



FIG.: $[\sin]([x])$

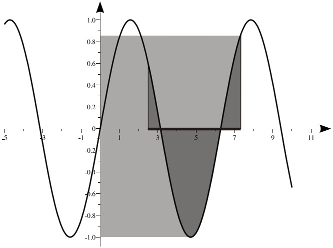



FIG.: $[\sin]([x])$

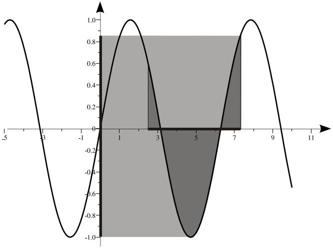



Fig.: $[\sin]([x])$

# Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

## Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\sin x - x^2 + 1)\cos x$. Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

# Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

## Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\sin x - x^2 + 1)\cos x$. Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit $\left\{ \begin{array}{rccc} [f] : & \mathbb{IR} & \longrightarrow & \mathbb{IR} \\ & [x] & \longmapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1)\cos[x] \end{array} \right.$

# Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

## Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\sin x - x^2 + 1)\cos x$. Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit $\left\{ \begin{array}{cccc} [f]: & \mathbb{IR} & \longrightarrow & \mathbb{IR} \\ & [x] & \longmapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1)\cos[x] \end{array} \right.$

$$[f]([0; \tfrac{1}{2}]) \quad = \quad (\sin[0; \tfrac{1}{2}] - [0; \tfrac{1}{2}]^2 + 1)\cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

# Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

## Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\sin x - x^2 + 1)\cos x$. Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit $\left\{ \begin{array}{llll} [f] : & \mathbb{IR} & \longrightarrow & \mathbb{IR} \\ & [x] & \longmapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1)\cos[x] \end{array} \right.$

$$\begin{aligned} [f]([0; \tfrac{1}{2}]) &= (\sin[0; \tfrac{1}{2}] - [0; \tfrac{1}{2}]^2 + 1)\cos[0; \tfrac{1}{2}] \\ &= (\sin[0; \tfrac{1}{2}] - [0; \tfrac{1}{4}] + 1)\cos[0; \tfrac{1}{2}] \end{aligned}$$

$$= \quad (\sin[0; \tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad ([0; \sin \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4}; 1])[\cos \tfrac{1}{2}; 1]$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sin[0; \tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \tfrac{1}{2}] \\
&= ([0; \sin \tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4}; 1])[\cos \tfrac{1}{2}; 1] \\
&= [\tfrac{3}{4}; 1 + \sin \tfrac{1}{2}] \times [\cos \tfrac{1}{2}; 1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sin[0;\tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4};0] + 1\right)\cos[0;\tfrac{1}{2}] \\
&= \left([0;\sin\tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4};1]\right)[\cos\tfrac{1}{2};1] \\
&= [\tfrac{3}{4};1+\sin\tfrac{1}{2}] \times [\cos\tfrac{1}{2};1] \\
&= [\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{2};1+\sin\tfrac{1}{2}]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sin[0;\tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4};0] + 1)\cos[0;\tfrac{1}{2}] \\
&= ([0;\sin\tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4};1])[\cos\tfrac{1}{2};1] \\
&= [\tfrac{3}{4};1+\sin\tfrac{1}{2}] \times [\cos\tfrac{1}{2};1] \\
&= [\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{2};1+\sin\tfrac{1}{2}]
\end{aligned}
$$

$$
[f]([0;\tfrac{1}{2}]) \subset [0.65818;1.4795]
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sin[0;\tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4};0] + 1\right)\cos[0;\tfrac{1}{2}] \\
&= \left([0;\sin\tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4};1]\right)[\cos\tfrac{1}{2};1] \\
&= [\tfrac{3}{4};1+\sin\tfrac{1}{2}] \times [\cos\tfrac{1}{2};1] \\
&= [\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{2};1+\sin\tfrac{1}{2}]
\end{aligned}
$$

$$[f]([0;\tfrac{1}{2}]) \quad \subset \quad [0.65818;1.4795]$$

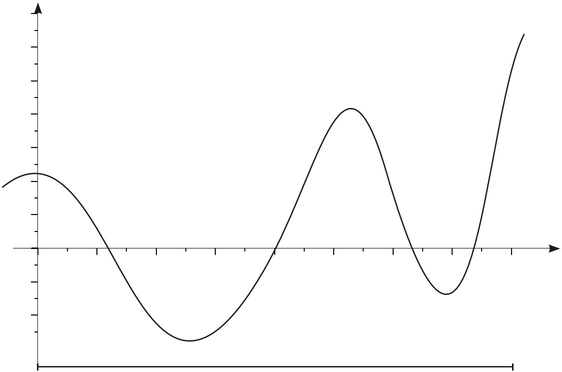
## Conclusion

$0 \notin [f]([0;\frac{1}{2}])$ or $\forall x \in [0;\frac{1}{2}],\ f(x) \in [f]([0;\frac{1}{2}])$ donc $\mathbb{S} = \emptyset$

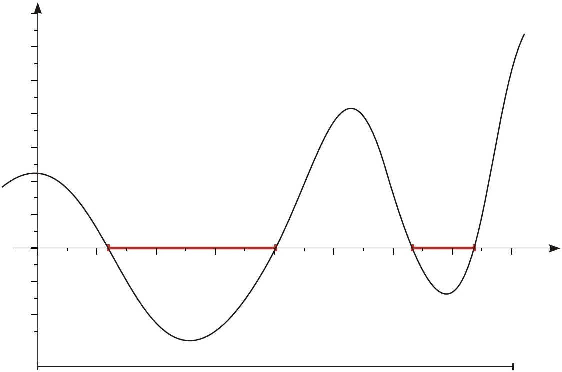
## Définition

Une collection finie $\{p_i\}_{i\in I}$ d'intervalles telle que $i \neq j \Rightarrow p_i \cap p_j$ est de mesure nulle, est appelée un pavage.

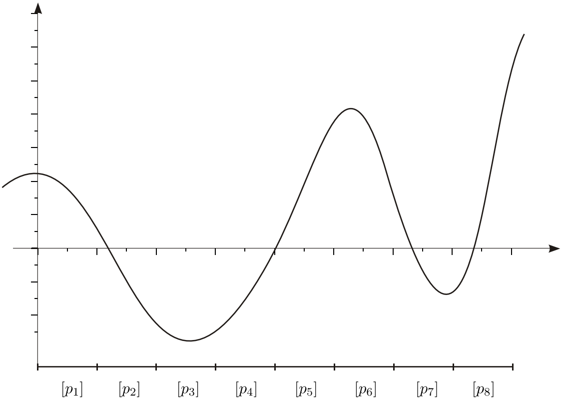
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



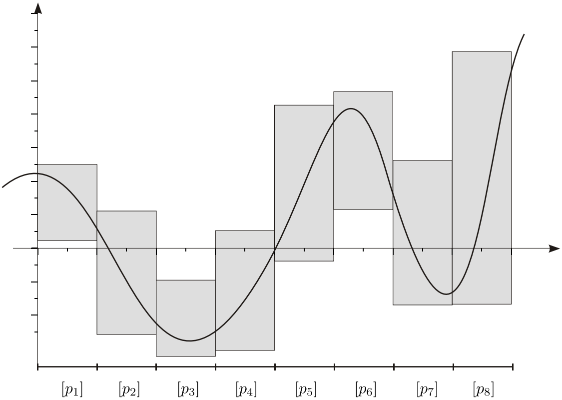
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



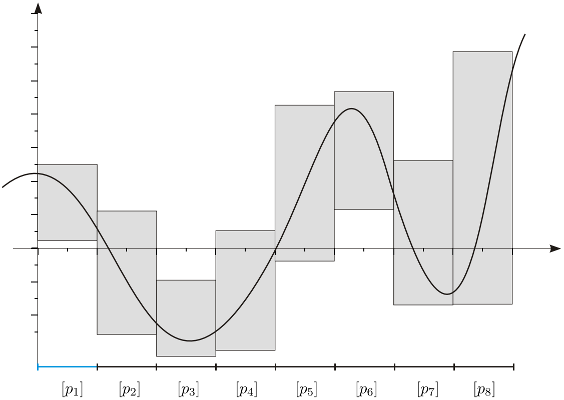
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



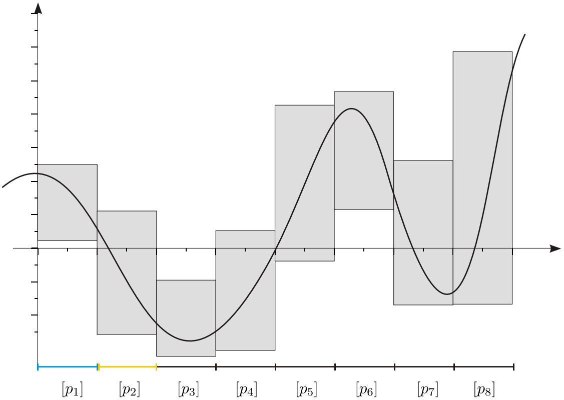
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



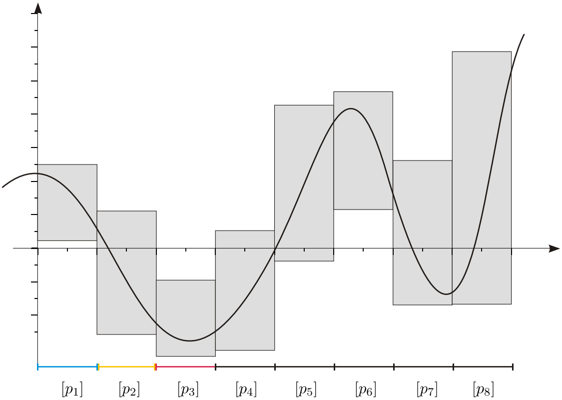
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



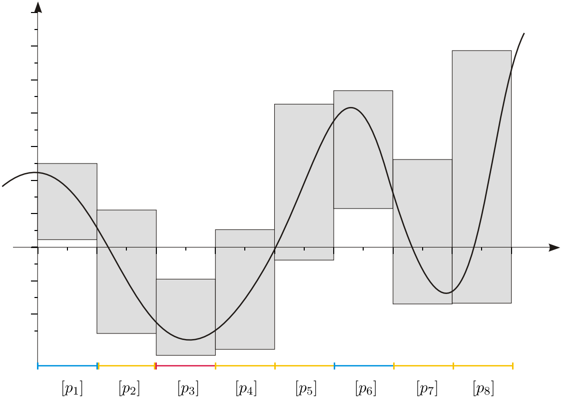
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



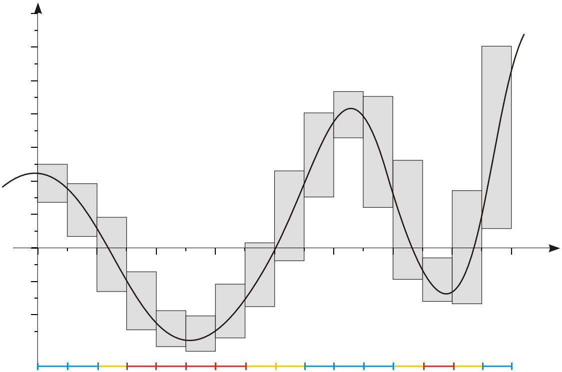
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



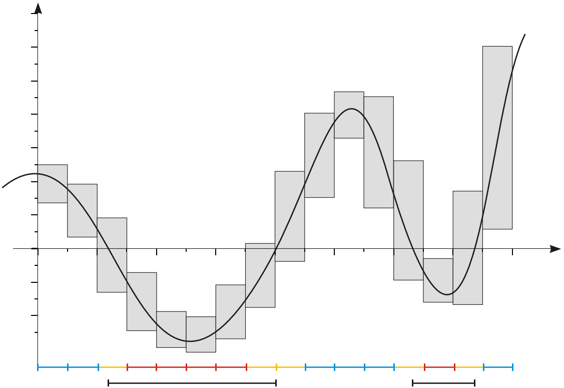
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



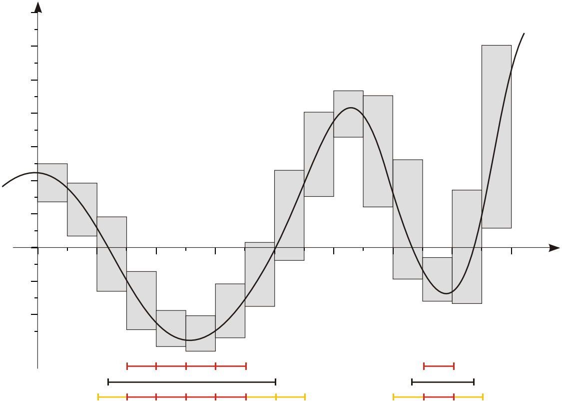
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



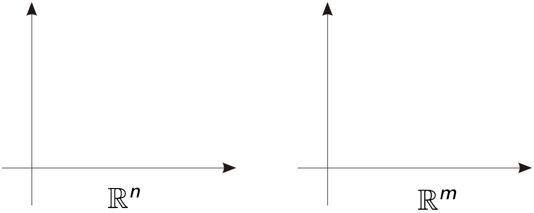
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour $f$.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



## Definition

Soit $f$ une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.
$[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$ est une fonction d'inclusion pour $f$ si

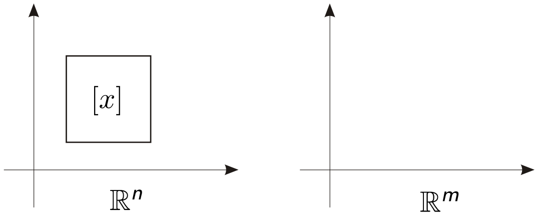
$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



## Definition

Soit $f$ une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.
$[f] : \mathbb{IR}^n \longrightarrow \mathbb{IR}^m$ est une fonction d'inclusion pour $f$ si

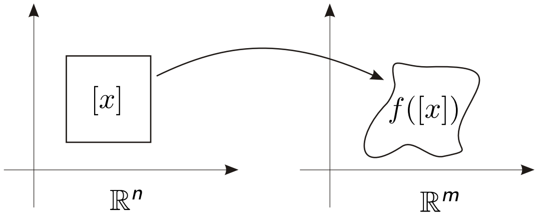
$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



## Definition

Soit $f$ une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.
$[f] : \mathbb{IR}^n \longrightarrow \mathbb{IR}^m$ est une fonction d'inclusion pour $f$ si

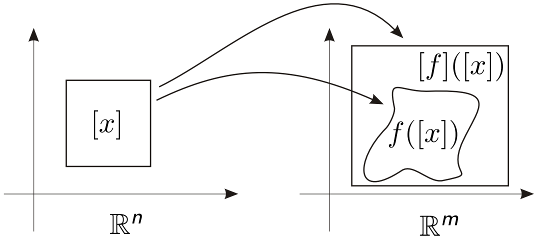
$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



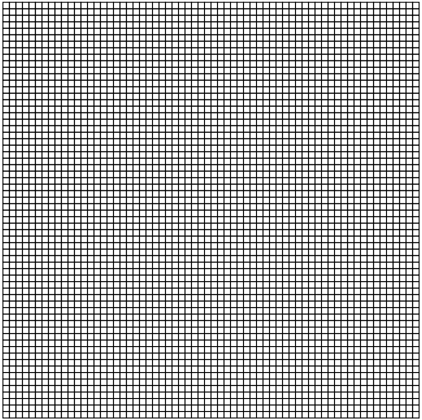
## Definition

Soit $f$ une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.
$[f] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$ est une fonction d'inclusion pour $f$ si

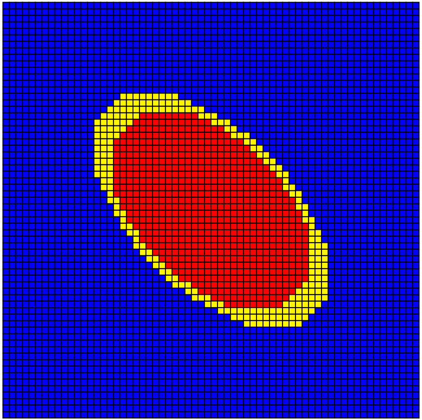
$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-3; 3]^2 | f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$



$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-3; 3]^2 | f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$



# Autres utilisations du calcul par intervalles

## Analyse numérique

1. Optimisation globale : E.R. Hansen, Méthode de Newton par intervalles ...
2. Approximation des solutions d'un système d'équations, A. Neumaier ...
3. Résolution garantie d'ODE. Corliss, Moore ...

# Autres utilisations du calcul par intervalles

## Analyse numérique

1. Optimisation globale : E.R. Hansen, Méthode de Newton par intervalles ...
2. Approximation des solutions d'un système d'équations, A. Neumaier ...
3. Résolution garantie d'ODE. Corliss, Moore ...

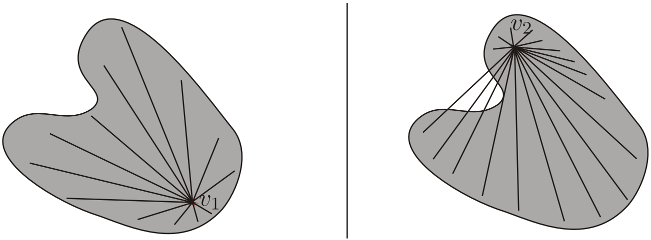
## Preuve assistée par ordinateur

1. Unicité des solutions d'un système d'équations. (Théorème Brouwer).
2. Preuve de la conjecture de Kepler par Hales en 1998.

1. L'arithmétique des intervalles
2. **Condition suffisante pour "Etoilé"**
3. Discrétisation

## Définition

Le point $v$ est une *étoile* pour le sous-espace $X$ de $\mathbb{R}^n$ si $\forall x \in X$, le segment $[x, v]$ est inclus dans $X$.

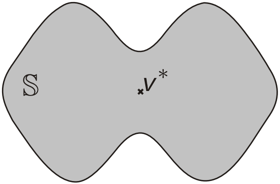


## Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où $f$ est une fonction $C^1$ de $D$ vers $\mathbb{R}$, $D$ un convexe, $v^*$ un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors $v^*$ est une étoile pour $\mathbb{S}$.




▸ Idée de preuve - interpretation géometrique

$v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble
$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-3; 3]^2, \text{ tel que } f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$

$v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble
$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-3;3]^2, \text{ tel que } f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$

$$\Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{x}) = 0 \\ Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

$v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble
$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-3; 3]^2, \text{ tel que } f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$

$$\Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{x}) = 0 \\ Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ \partial_x f(x, y).(x - 0.6) + \partial_y f(x, y).(y + 0.5) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

$v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble
$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-3;3]^2, \text{ tel que } f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$

$$\Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{x}) = 0 \\ Df(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

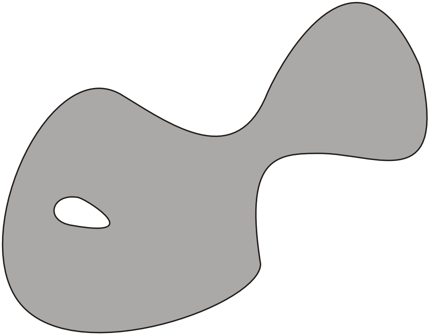
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ \partial_x f(x,y).(x - 0.6) + \partial_y f(x,y).(y + 0.5) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ (2x + y)(x - 0.6) + (2y + x)(y + 0.5) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

1. L'arithmétique des intervalles
2. Condition suffisante de "Etoilé"
3. **Discrétisation**

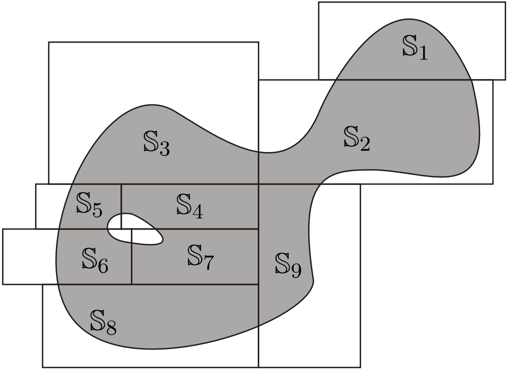
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i\in I}$, ($\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$) tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est étoilé ou vide}$$



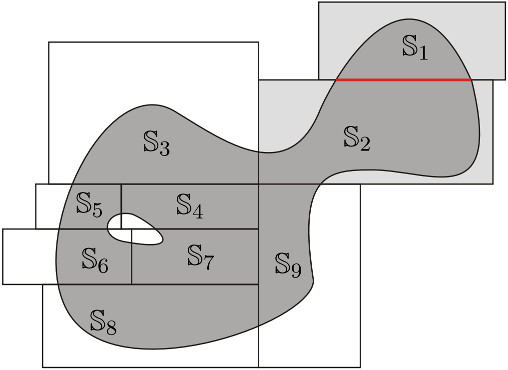
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i\in I}$, $(\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i)$ tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est étoilé ou vide}$$



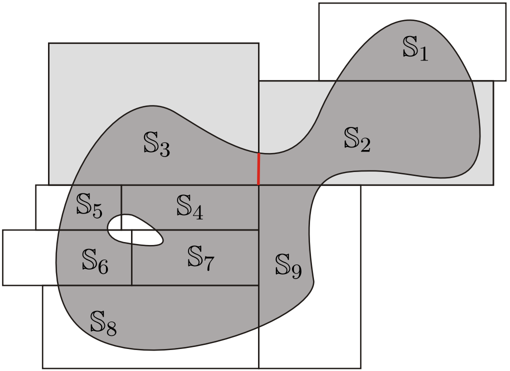
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i\in I}$, ($\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$) tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est étoilé ou vide}$$



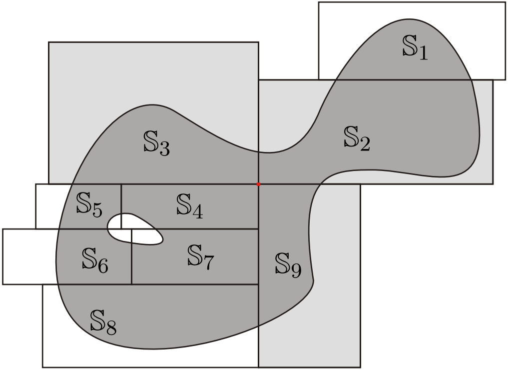
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i\in I}$, ($\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$) tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est étoilé ou vide}$$

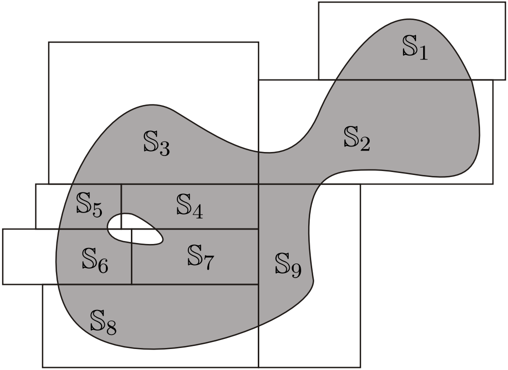


Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i\in I}$, $(\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i)$ tel que

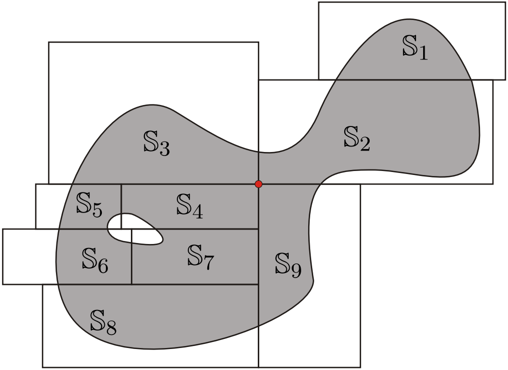
$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est étoilé ou vide}$$



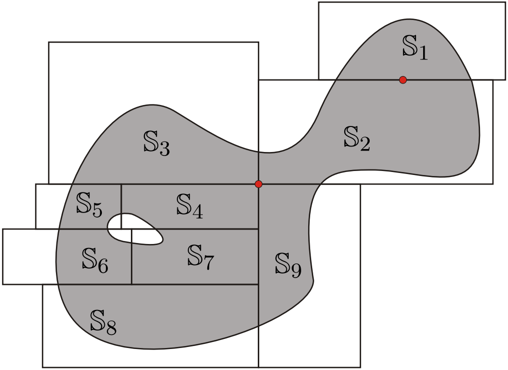
# Construction d'une triangulation



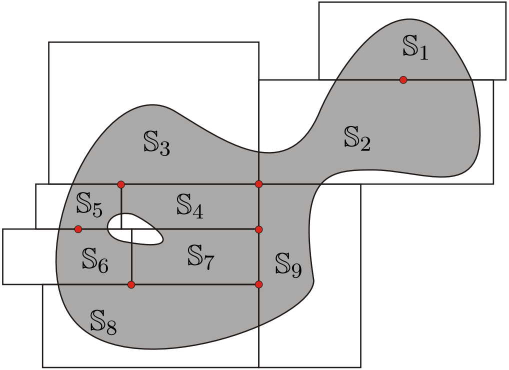
# Construction d'une triangulation



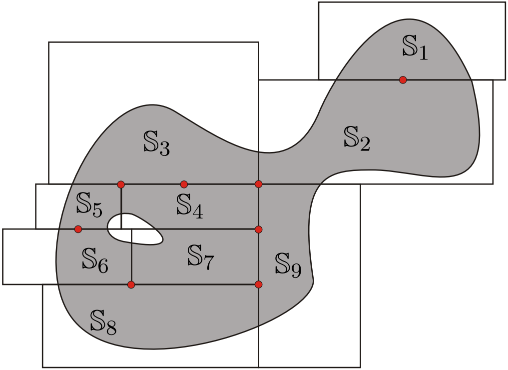
# Construction d'une triangulation



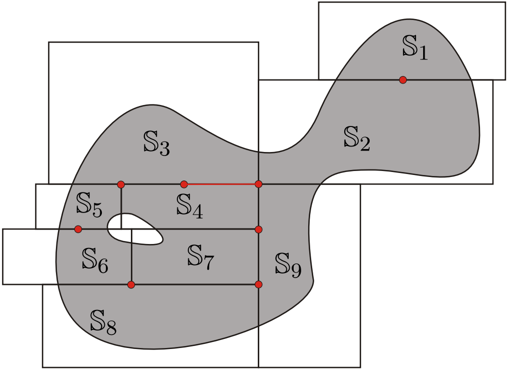
# Construction d'une triangulation



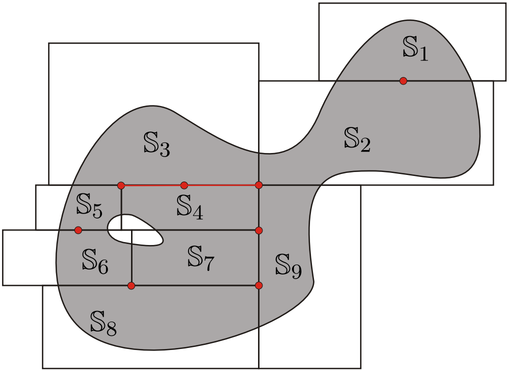
# Construction d'une triangulation



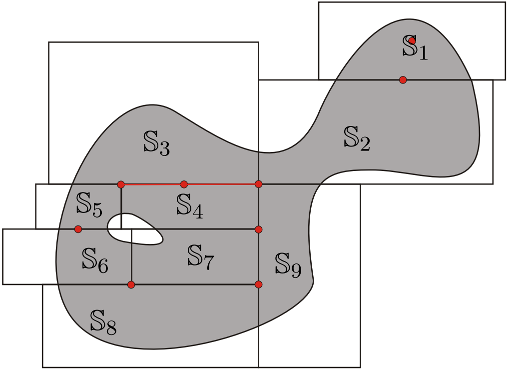
# Construction d'une triangulation



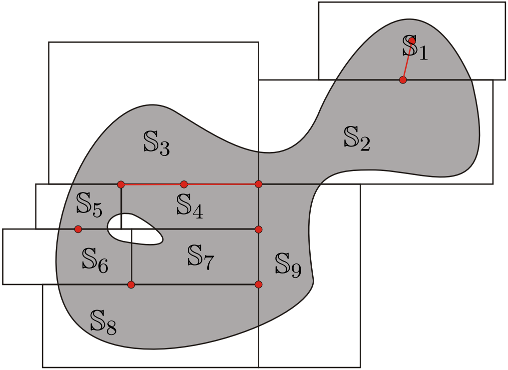
# Construction d'une triangulation



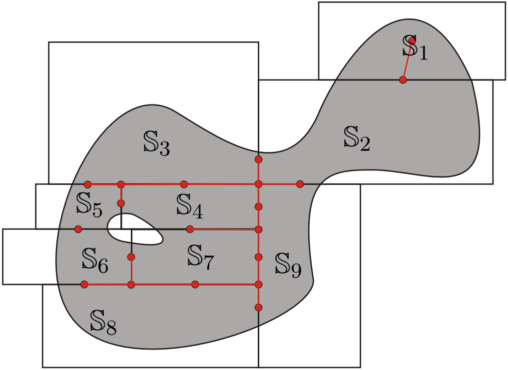
# Construction d'une triangulation



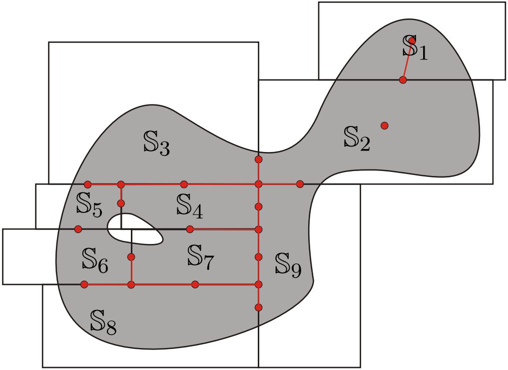
# Construction d'une triangulation



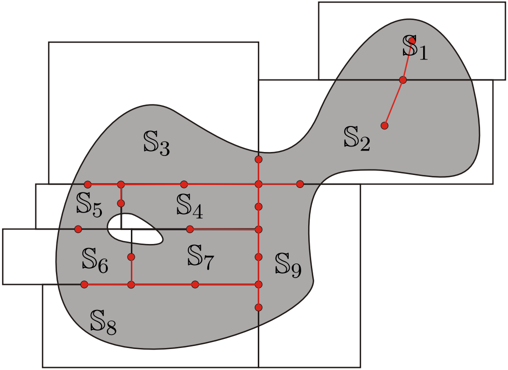
# Construction d'une triangulation



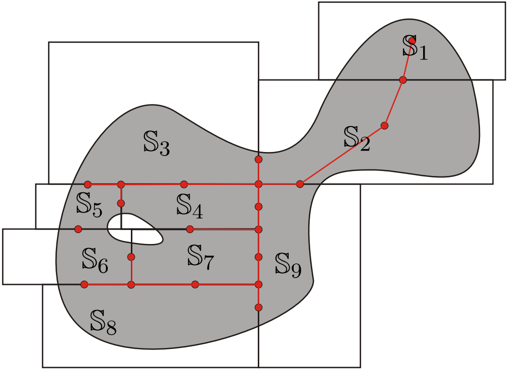
# Construction d'une triangulation



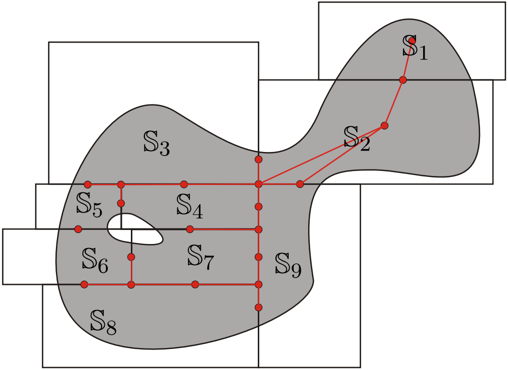
# Construction d'une triangulation



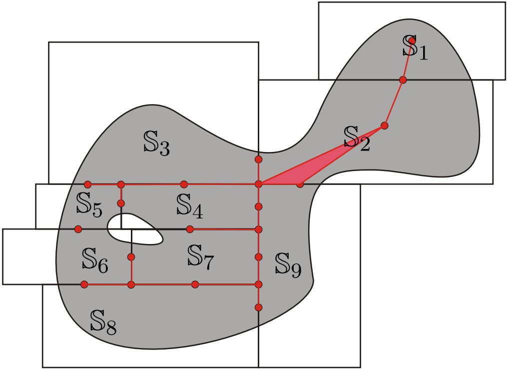
# Construction d'une triangulation



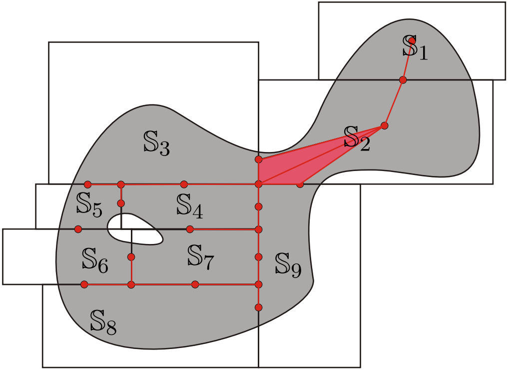
# Construction d'une triangulation



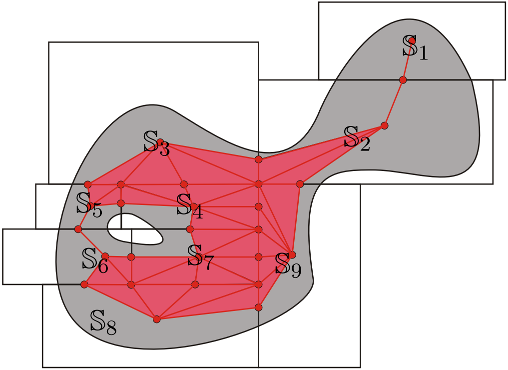
# Construction d'une triangulation



# Construction d'une triangulation



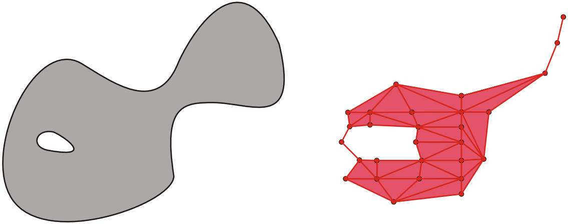
# Construction d'une triangulation



# Equivalence d'homotopie

## Proposition

Soit $\mathbb{S}$ une partie de $\mathbb{R}^n$, si $\{p_i\}_{i\in I}$ est un pavage tel que $\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j$ est étoilé ou vide, et $K$ la triangulation construite précédemment, alors $\mathbb{S}$ et $K$ sont homotopes.

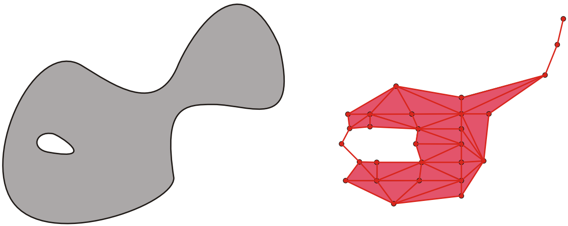


▸ Idée de preuve

# Un exemple avec le solver `Homotopy Via Interval Analysis`

$$\mathbb{S} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + xy - 2 & \leq & 0 \\ -x^2 - y^2 - xy + 1 & \leq & 0 \end{array} \right. \right\}$$

# Conclusion



# Travaux futurs

- Agrandir la classe des ensembles que le solveur peut traiter.
- Trouver une condition suffisante qui assurerait que l'algorithme termine.
- Donner une complexité.

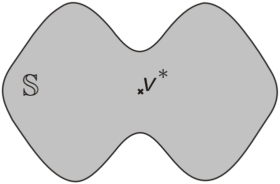
## Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où $f$ est une fonction $C^1$ de $D$ vers $\mathbb{R}$, $D$ un convexe, $v^*$ un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors $v^*$ est une étoile pour $\mathbb{S}$.

$(1)$ is inconsitent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$



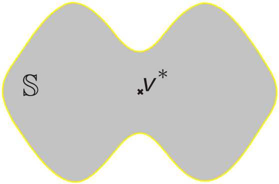
## Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où $f$ est une fonction $C^1$ de $D$ vers $\mathbb{R}$, $D$ un convexe, $v^*$ un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors $v^*$ est une étoile pour $\mathbb{S}$.

$(1) \text{ is inconsitent} \Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$



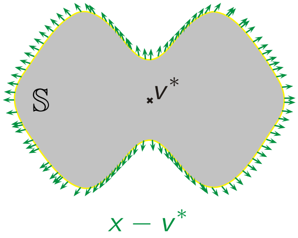
## Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où $f$ est une fonction $C^1$ de $D$ vers $\mathbb{R}$, $D$ un convexe, $v^*$ un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors $v^*$ est une étoile pour $\mathbb{S}$.

$$\text{(1) is inconsitent} \Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$$



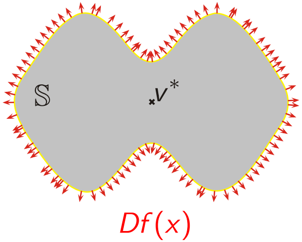
## Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où $f$ est une fonction $C^1$ de $D$ vers $\mathbb{R}$, $D$ un convexe, $v^*$ un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors $v^*$ est une étoile pour $\mathbb{S}$.

$(1)$ is inconsitent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$



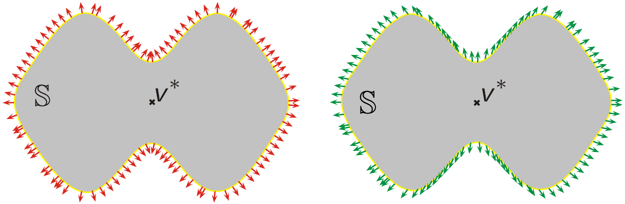
## Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où $f$ est une fonction $C^1$ de $D$ vers $\mathbb{R}$, $D$ un convexe, $v^*$ un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors $v^*$ est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) is inconsitent $\Leftrightarrow \forall x \in D$, $f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$




$Df(x)$ $\qquad$ $x - v^*$

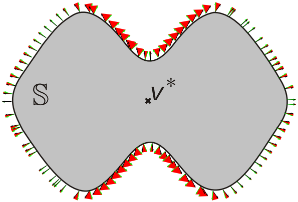
## Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où $f$ est une fonction $C^1$ de $D$ vers $\mathbb{R}$, $D$ un convexe, $v^*$ un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors $v^*$ est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) is inconsitent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow Df(x).(x - v^*) > 0$

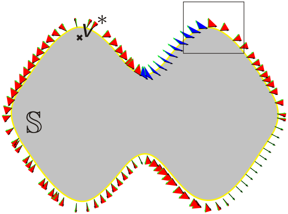


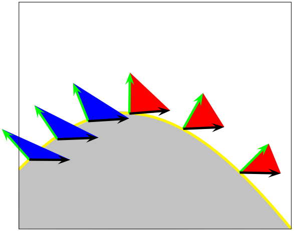
## Proposition

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où $f$ est une fonction $C^1$ de $D$ vers $\mathbb{R}$, $D$ un convexe, $v^*$ un point de $\mathbb{S}$, si

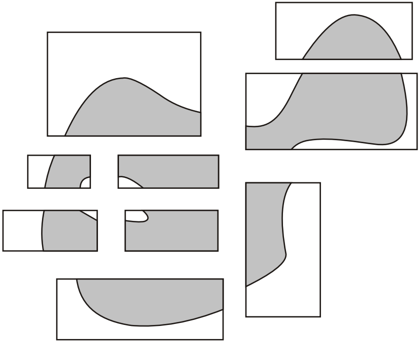
$$f(x) = 0, \ Df(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors $v^*$ est une étoile pour $\mathbb{S}$.

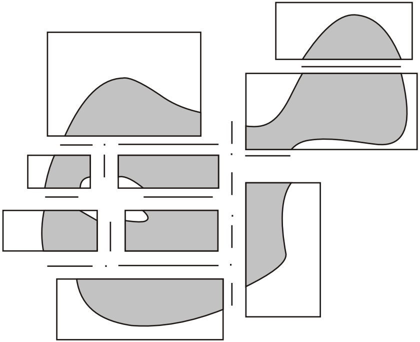


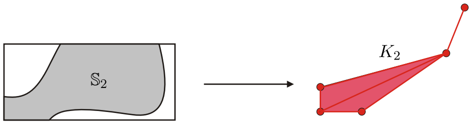
Montrer que sous ces hypothèses, $\mathbb{S}$ est un CW-complexe et que les $\mathbb{S}_i$ sont des sous-CW-complexes de $\mathbb{S}$, qui forment une décomposition de $\mathbb{S}$.



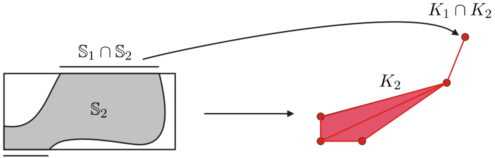
Montrer que sous ces hypothèses, $\mathbb{S}$ est un CW-complexe et que les $\mathbb{S}_i$ sont des sous-CW-complexes de $\mathbb{S}$, qui forment une décomposition de $\mathbb{S}$.



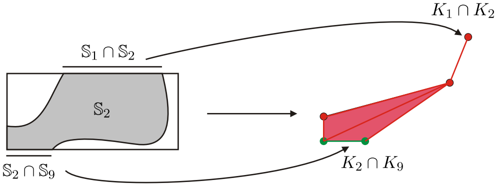
Pour chacun des $J \subset I$ tel que $\bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j$ est étoilé, construire une équivalence d'homotopie de $\bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \to \bigcap_{j \in J} K_j$.



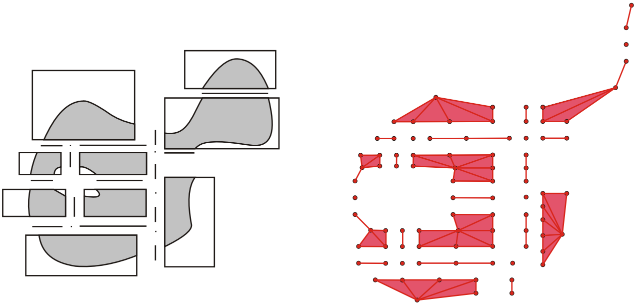
Pour chacun des $J \subset I$ tel que $\bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j$ est étoilé, construire une équivalence d'homotopie de $\bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \to \bigcap_{j \in J} K_j$.



Pour chacun des $J \subset I$ tel que $\bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j$ est étoilé, construire une équivalence d'homotopie de $\bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \to \bigcap_{j \in J} K_j$.



Utiliser un résultat de topologie algébrique (Hatcher 2002): Avec $\mathbb{S}$ et $K$ deux CW-complexes, $f : \mathbb{S} \to K$ est une équivalence d'homotopie si elle se restreint à des équivalences d'homotopie $\mathbb{S}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathbb{S}_{i_k} \to K_{i_1} \cap \cdots \cap K_{i_k}$ avec $f(\mathbb{S}_i) \subset K_i$



▸ Retour