Sur le calcul de la topologie d'objets en utilisant seulement de l'arithmétique d'intervalles.

RAIM'09: 3es Rencontres Arithmétique de l'Informatique Mathématique

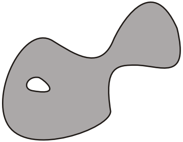
N. Delanoue

Université d'Angers - LISA

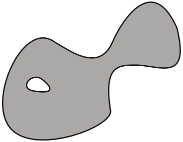
Mardi 27 octobre 2009

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ f_2(\mathbf{x}) & \leq & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ f_2(\mathbf{x}) & \leq & 0 \end{cases}$$

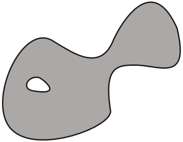


$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ f_2(\mathbf{x}) & \leq & 0 \end{cases}$$

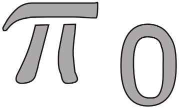


$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ g_2(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ g_3(\mathbf{x}) & \leq & 0 \end{cases}$$

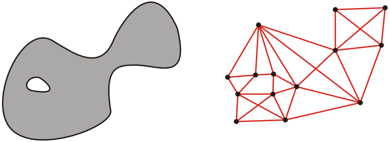
$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ f_2(\mathbf{x}) & \leq & 0 \end{cases}$$



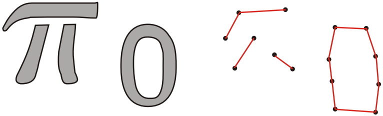
$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ g_2(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ g_3(\mathbf{x}) & \leq & 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} f_1(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ f_2(\mathbf{x}) & \leq & 0 \end{cases}$$



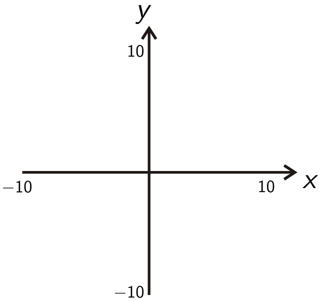
$$\begin{cases} g_1(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ g_2(\mathbf{x}) & \leq & 0 \\ g_3(\mathbf{x}) & \leq & 0 \end{cases}$$



Plan

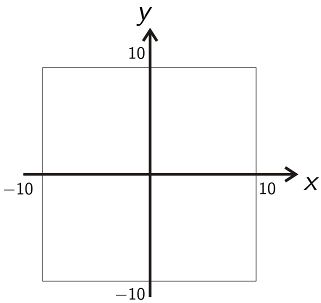
Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



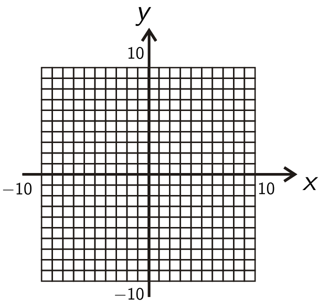
Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



Exemple 1

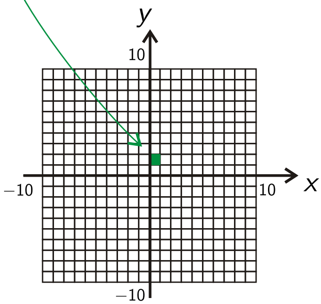
$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$x \in [\ 0\ ;\ 1\ ]$
$y \in [\ 1\ ;\ 2\ ]$

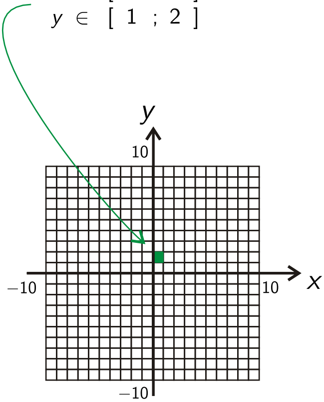


Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$x \in [\ 0\ ;\ 1\ ]$ $\Rightarrow$ $x^2 \in [\ 0\ ;\ 1\ ]$

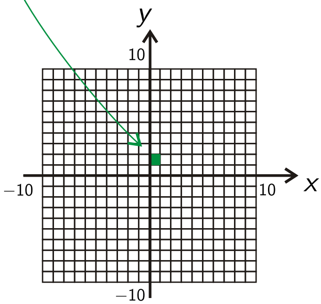
$y \in [\ 1\ ;\ 2\ ]$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

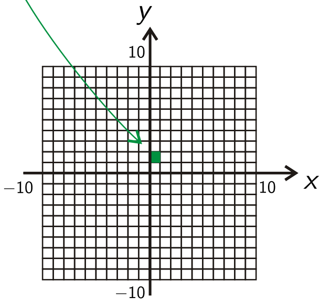
$$x \in [\,0\ ;\ 1\,] \quad \Rightarrow \quad x^2 \in [\,0\ ;\ 1\,]$$
$$y \in [\,1\ ;\ 2\,] \quad \Rightarrow \quad y^2 \in [\,1\ ;\ 4\,]$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

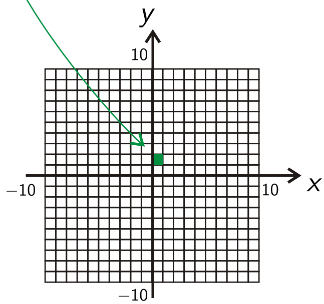
$$\begin{array}{lllll} x \in [\ 0\ ;\ 1\ ] & \Rightarrow & x^2 & \in & [\ 0\ ;\ 1\ ] \\ y \in [\ 1\ ;\ 2\ ] & \Rightarrow & y^2 & \in & [\ 1\ ;\ 4\ ] \\ & \Rightarrow & xy & \in & [\ 0\ ;\ 2\ ] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \le 0\}$$

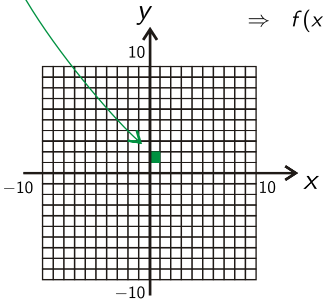
$$\begin{array}{lll} x \in [\,0\,;\,1\,] & \Rightarrow & x^2 \in [\,0\,;\,1\,] \\ y \in [\,1\,;\,2\,] & \Rightarrow & y^2 \in [\,1\,;\,4\,] \\ & \Rightarrow & xy \in [\,0\,;\,2\,] \\ & \Rightarrow & -30 \in [-30\,;\,-30\,] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

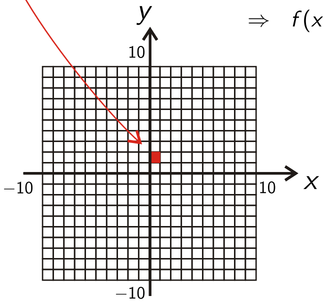
$$\begin{array}{lcl} x \in [\,0\,;\,1\,] & \Rightarrow & x^2 \in [\,0\,;\,1\,] \\ y \in [\,1\,;\,2\,] & \Rightarrow & y^2 \in [\,1\,;\,4\,] \\ & \Rightarrow & xy \in [\,0\,;\,2\,] \\ & \Rightarrow & -30 \in [-30\,;\,-30] \\ \hline & \Rightarrow & f(x,y) \in [-29\,;\,-27] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

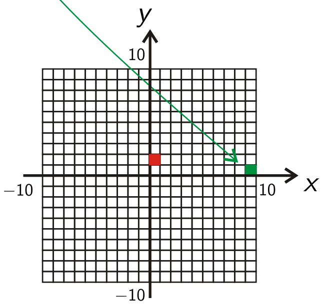
$$\begin{array}{lcl}
x \in [\,0\,;\,1\,] & \Rightarrow & x^2 \in [\,0\,;\,1\,] \\
y \in [\,1\,;\,2\,] & \Rightarrow & y^2 \in [\,1\,;\,4\,] \\
 & \Rightarrow & xy \in [\,0\,;\,2\,] \\
 & \Rightarrow & -30 \in [-30\,;\,-30\,] \\
\hline
 & \Rightarrow & f(x,y) \in [-29\,;\,-27\,]
\end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

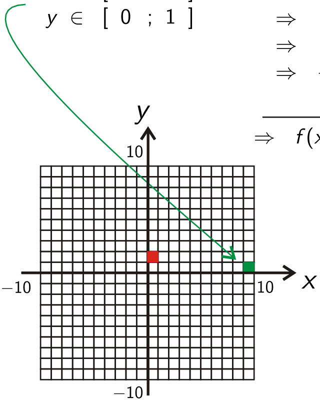
$$\begin{array}{lllll} x & \in & [\ 9 & ; 10 &] \\ y & \in & [\ 0 & ;\ 1 &] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

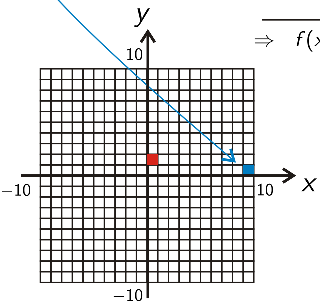
$$\begin{array}{lll}
x \in [\ 9 \ ; 10\ ] & \Rightarrow & x^2 \in [\ 81\ ;\ 100\ ] \\
y \in [\ 0\ ;\ 1\ ] & \Rightarrow & y^2 \in [\ 0\ ;\ 1\ ] \\
 & \Rightarrow & xy \in [\ 0\ ;\ 10\ ] \\
 & \Rightarrow & -30 \in [-30\ ;\ -30\ ] \\
\hline
 & \Rightarrow & f(x, y) \in [\ 51\ ;\ 81\ ]
\end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

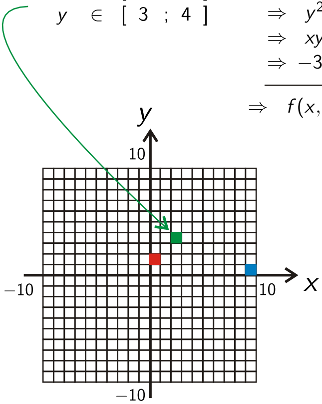
$$\begin{array}{lcl}
x & \in & [\ 9\ ;\ 10\ ] \\
y & \in & [\ 0\ ;\ 1\ ]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccc}
\Rightarrow & x^2 & \in & [\ 81\ ;\ 100\ ] \\
\Rightarrow & y^2 & \in & [\ 0\ ;\ 1\ ] \\
\Rightarrow & xy & \in & [\ 0\ ;\ 10\ ] \\
\Rightarrow & -30 & \in & [-30\ ;\ -30\ ] \\
\hline
\Rightarrow & f(x,y) & \in & [\ 51\ ;\ 81\ ]
\end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$\begin{array}{lll} x \in [\,2\,;\,3\,] & \Rightarrow x^2 & \in [\,4\,;\,9\,] \\ y \in [\,3\,;\,4\,] & \Rightarrow y^2 & \in [\,9\,;\,16\,] \\ & \Rightarrow xy & \in [\,6\,;\,12\,] \\ & \Rightarrow -30 & \in [\,-30\,;\,-30\,] \\ \hline & \Rightarrow f(x,y) & \in [\,-11\,;\,7\,] \end{array}$$

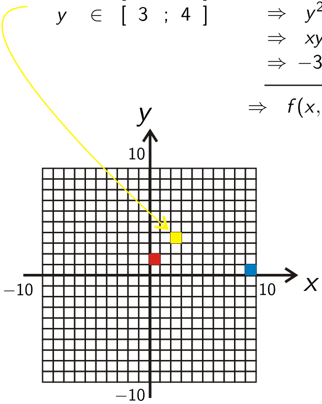


Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

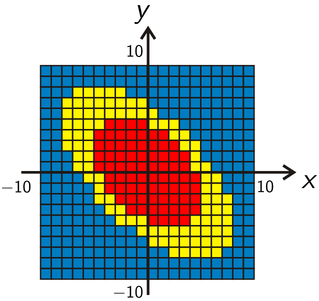
$$\begin{array}{lcl}
x & \in & [\ 2\ ;\ 3\ ] \\
y & \in & [\ 3\ ;\ 4\ ]
\end{array}$$

$$\begin{array}{clcc}
\Rightarrow & x^2 & \in & [\ 4\ ;\ 9\ ] \\
\Rightarrow & y^2 & \in & [\ 9\ ;\ 16\ ] \\
\Rightarrow & xy & \in & [\ 6\ ;\ 12\ ] \\
\Rightarrow & -30 & \in & [\ -30\ ;\ -30\ ] \\
\hline
\Rightarrow & f(x,y) & \in & [\ -11\ ;\ 7\ ]
\end{array}$$



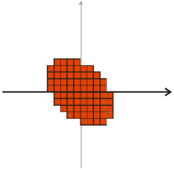
Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

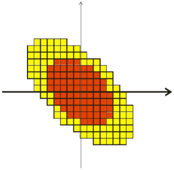


Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



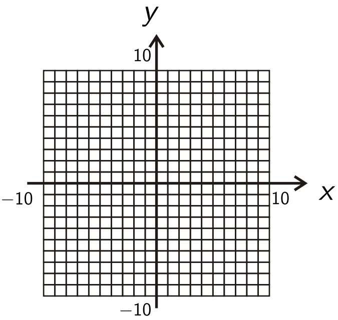
$\subset \mathbb{S} \subset$



Démontrer qu'une équation n'admet aucune solution

Exemple 2

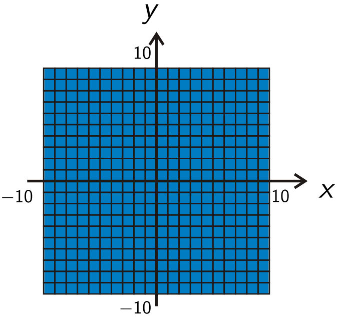
$$\mathbb{S}' = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f'(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 10 \leq 0\}$$



Démontrer qu'une équation n'admet aucune solution

Exemple 2

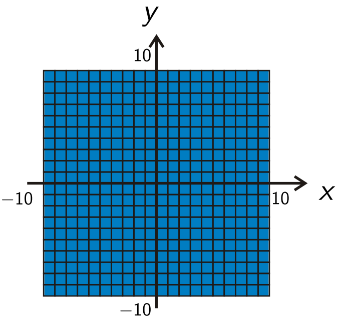
$$\mathbb{S}' = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f'(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 10 \leq 0\}$$



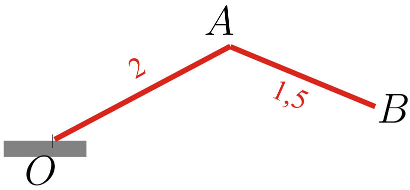
Démontrer qu'une équation n'admet aucune solution

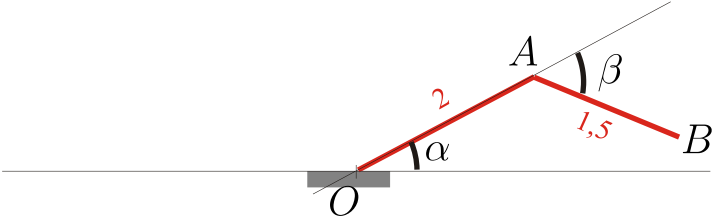
Exemple 2

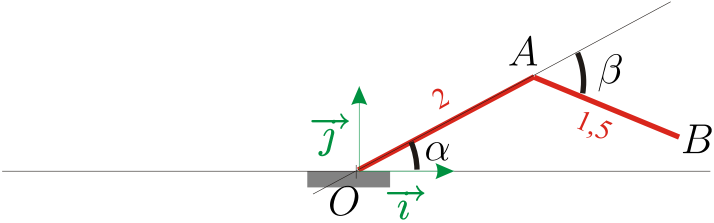
$$\mathbb{S}' = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f'(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 10 \leq 0\}$$

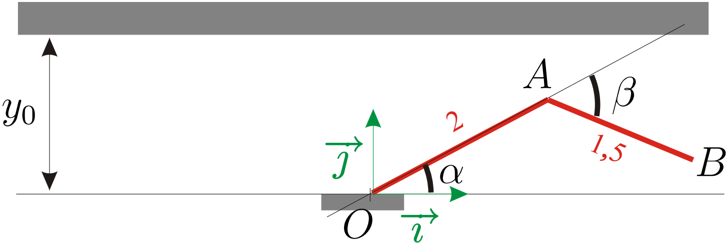


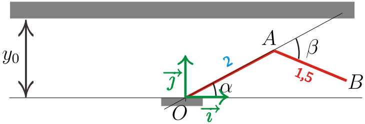
$$\Rightarrow \mathbb{S}' = \emptyset$$

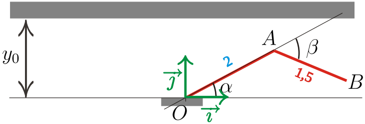

A
2
1,5
B
O


A
β
2
1,5
B
α
O


A
β
2
1,5
B
α
O

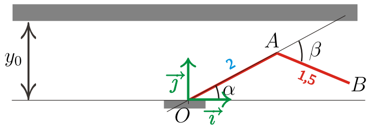

y_0
A
β
2
1,5
B
$\vec{j}$
α
O
$\vec{i}$


y_0
A
β
2
1,5
B
$\vec{j}$
α
O
$\vec{i}$



Coordonnées de A

$$\begin{cases} x_A = 2\cos(\alpha) \\ y_A = 2\sin(\alpha) \end{cases}$$

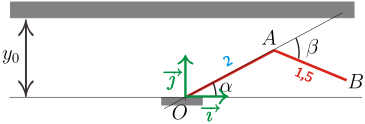


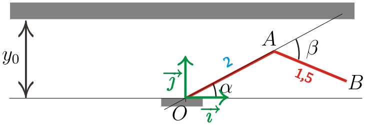
Coordonnées de A

$$\begin{cases} x_A = 2\cos(\alpha) \\ y_A = 2\sin(\alpha) \end{cases}$$

Coordonnées de B

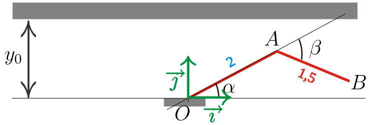
$$\begin{cases} x_B = 2\cos(\alpha) + 1.5\cos(\alpha+\beta) \\ y_B = 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) \end{cases}$$


y_0
A
β
2
1,5
B
$\vec{j}$
α
O
$\vec{i}$



Contraintes sur A

$$y_A \in [0, y_0]$$



Contraintes sur A

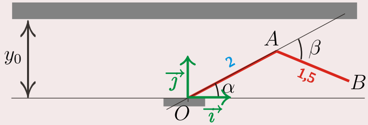
$$y_A \in [0, y_0]$$

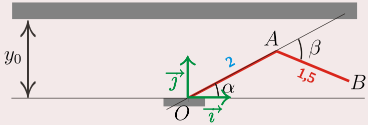
Contraintes sur B

$$y_B \in]-\infty, y_0]$$

Contraintes sur α et β

$$\alpha \in [-\pi, \pi], \beta \in [-\pi, \pi]$$


y_0
A
β
2
1,5
B
$\vec{j}$
α
O
$\vec{i}$



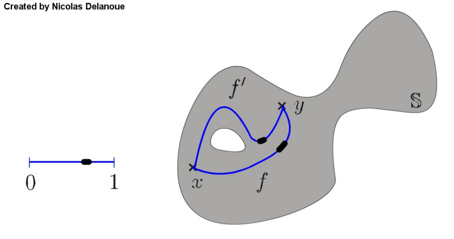
Espace des configurations admissibles

$(\alpha, \beta) \in [-\pi, \pi]^2$ /

$$\begin{cases} f_1(\alpha,\beta) = 2\sin(\alpha) - y_0 & \leq & 0 \\ f_2(\alpha,\beta) = -2\sin(\alpha) & \leq & 0 \\ f_3(\alpha,\beta) = 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) - y_0 & \leq & 0 \end{cases}$$

Definition (*Espace connexe par arcs*)

Un espace topologique $\mathbb{S}$ est *connexe par arcs* si :
$\forall x, y \in \mathbb{S},\ \exists f$ continue,
$f : [0,1] \rightarrow \mathbb{S}$ vérifiant $f(0) = x$ et $f(1) = y$.



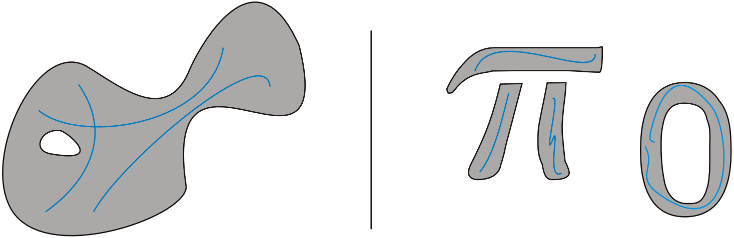
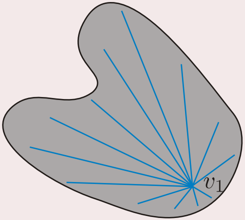


FIG.: Exemples.

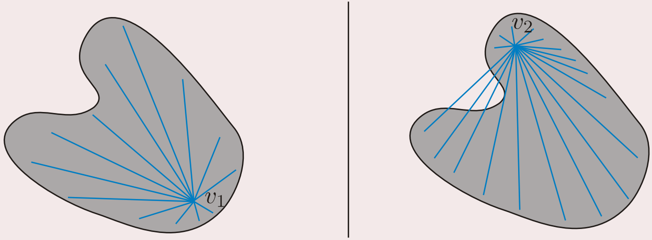
Definition (*Etoile*)

Le point v^* est une *étoile* pour le sous-espace X de $\mathbb{R}^n$ si $\forall x \in X$, le segment $[x, v^*]$ est inclus dans X.



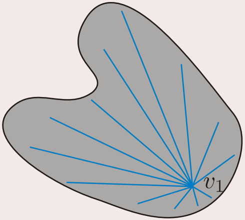
Definition (*Etoile*)

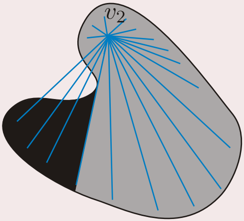
Le point v^* est une *étoile* pour le sous-espace X de $\mathbb{R}^n$ si $\forall x \in X$, le segment $[x, v^*]$ est inclus dans X.



Definition (*Etoile*)

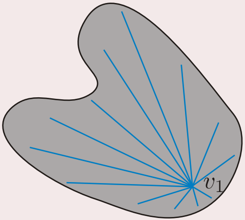
Le point v^* est une *étoile* pour le sous-espace X de $\mathbb{R}^n$ si $\forall x \in X$, le segment $[x, v^*]$ est inclus dans X.





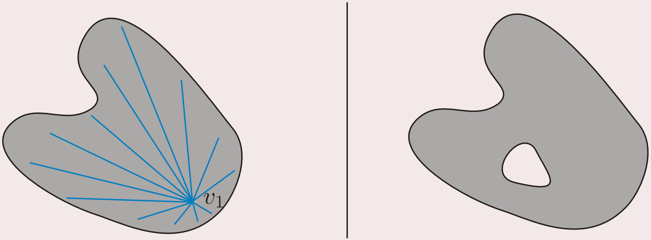
Definition (*Espace étoilé*)

S'il existe $v^* \in X$ tel que v^* est une étoile pour X, alors on dit que X est *étoilé*.



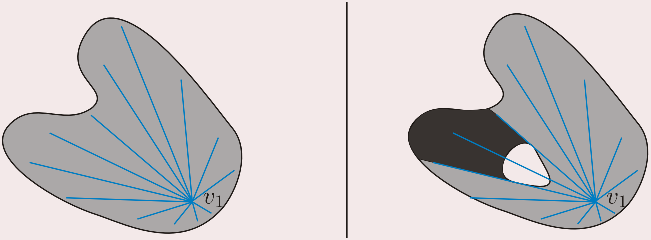
Definition (*Espace étoilé*)

S'il existe $v^* \in X$ tel que v^* est une étoile pour X, alors on dit que X est *étoilé*.



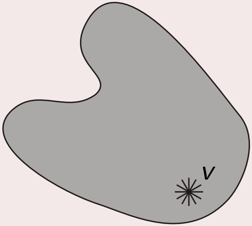
Definition (*Espace étoilé*)

S'il existe $v^* \in X$ tel que v^* est une étoile pour X, alors on dit que X est *étoilé*.



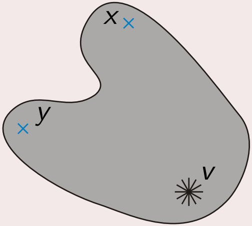
Proposition 1

Un ensemble étoilé est connexe par arcs.



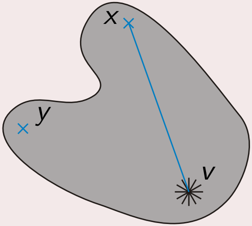
Proposition 1

Un ensemble étoilé est connexe par arcs.



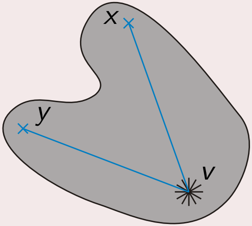
Proposition 1

Un ensemble étoilé est connexe par arcs.



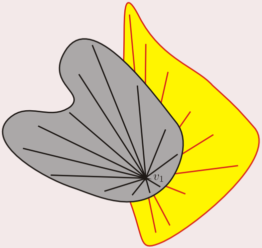
Proposition 1

Un ensemble étoilé est connexe par arcs.



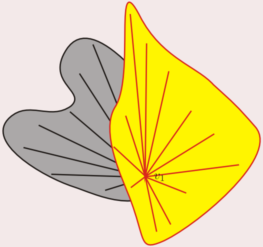
Proposition 2

Si X et Y sont deux ensembles v^*-étoilés, alors $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont aussi v^*-étoilé.



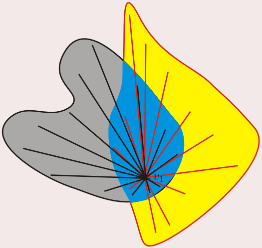
Proposition 2

Si X et Y sont deux ensembles v^*-étoilés, alors $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont aussi v^*-étoilé.



Proposition 2

Si X et Y sont deux ensembles v^*-étoilés, alors $X \cap Y$ et $X \cup Y$ sont aussi v^*-étoilé.

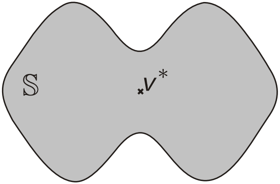


Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ \partial f(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.



Idée de preuve - interpretation géometrique

Prouvons que $v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble défini par

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

Prouvons que $v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble défini par

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

$$\Leftarrow \left\{ \begin{array}{l} f(\mathbf{x}) = 0 \\ \partial f(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{array} \right. \quad \text{n'admet aucune solution}$$

Prouvons que $v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble défini par

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \text{tel que } f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 \\ \partial f(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'admet aucune solution}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ \partial_x f(x,y).(x-0.6) + \partial_y f(x,y).(y+0.5) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'admet aucune solution}$$

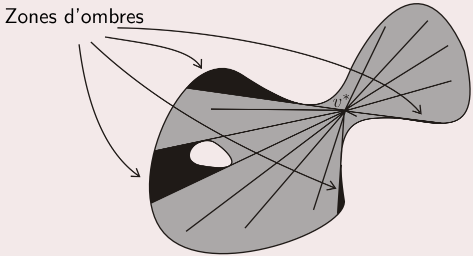
Prouvons que $v^* = (0.6, -0.5)$ est une étoile pour l'ensemble défini par

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

$$\Leftarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 \\ \partial f(\mathbf{x}).(\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{cases} \text{ n'admet aucune solution}$$

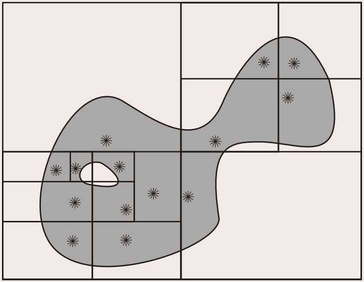
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ \partial_x f(x, y).(x - 0.6) + \partial_y f(x, y).(y + 0.5) \leq 0 \end{cases} \text{ n'admet aucune solution}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ (2x + y)(x - 0.6) + (2y + x)(y + 0.5) \leq 0 \end{cases} \text{ n'admet aucune solution}$$


Zones d'ombres
v^*

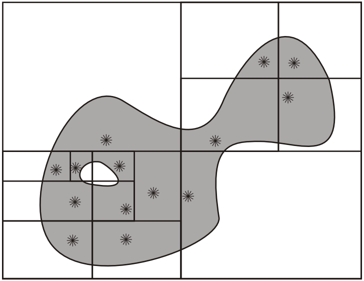
L'idée

Diviser $\mathbb{S}$ avec un pavage $\mathcal{P}$ tel que, sur chaque partie p, $\mathbb{S} \cap p$ est étoilé.



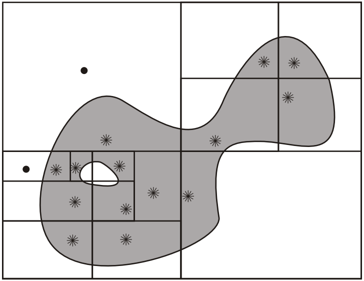
L'idée

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation : $\mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



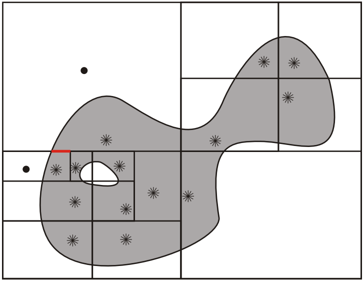
L'idée

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation : $\mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



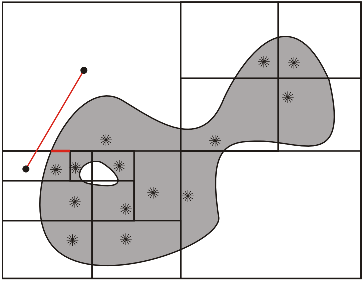
L'idée

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation : $\mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



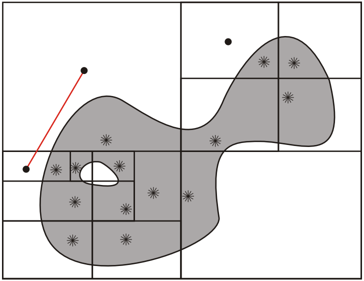
L'idée

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation : $\mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



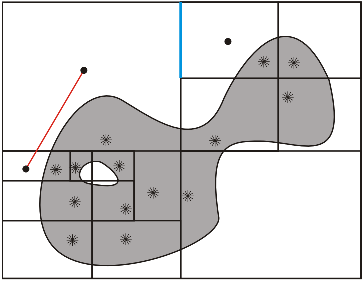
L'idée

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation : $\mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



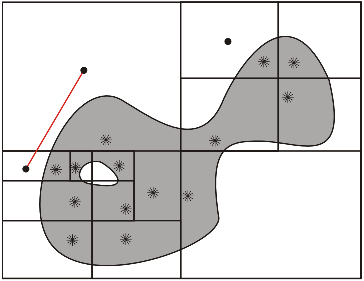
L'idée

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation : $\mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



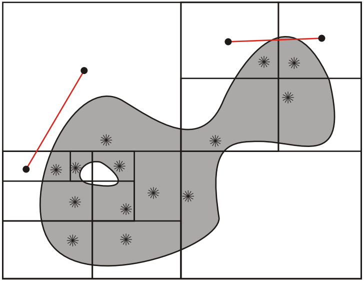
L'idée

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation : $\mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



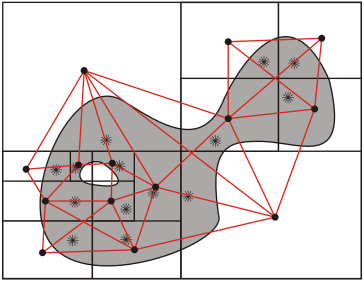
L'idée

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation : $\mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



L'idée

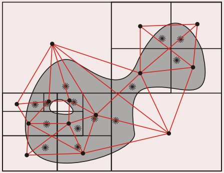
Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation : $\mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



Definition

Un *graphe parsemé d'étoiles* d'un ensemble $\mathbb{S}$, noté $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$, est une relation $\mathcal{R}$ sur un pavage $\mathcal{P}$ où

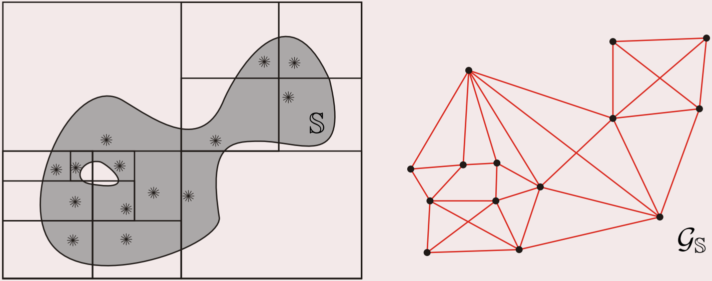
- $\mathcal{P} = (p_i)_{i \in I}$, pour tout p de $\mathcal{P}$, $\mathbb{S} \cap p$ est étoilé, et $\mathbb{S} \subset \bigcup_{i \in I} p_i$
- $\mathcal{R}$ est la relation reflexive et symétrique sur $\mathcal{P}$ définie par $p \,\mathcal{R}\, q \Leftrightarrow \mathbb{S} \cap p \cap q \neq \emptyset$.



Théorème

Soit $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ un graphe parsemé d'étoiles d'un ensemble $\mathbb{S}$.

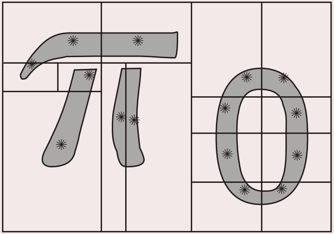
$\mathbb{S}$ est connexe par arcs $\Leftrightarrow$ $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ est connexe .

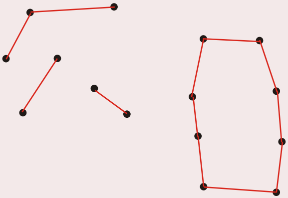


Idée de preuve

Corollaire

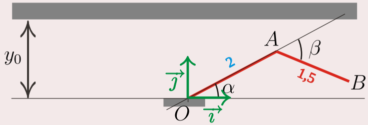
Soit $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ un graphe parsemé d'étoiles d'un ensemble $\mathbb{S}$.
$\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ a le même nombre de composantes connexes que $\mathbb{S}$. i.e. $\pi_0(\mathbb{S}) = \pi_0(\mathcal{G}_{\mathbb{S}})$.





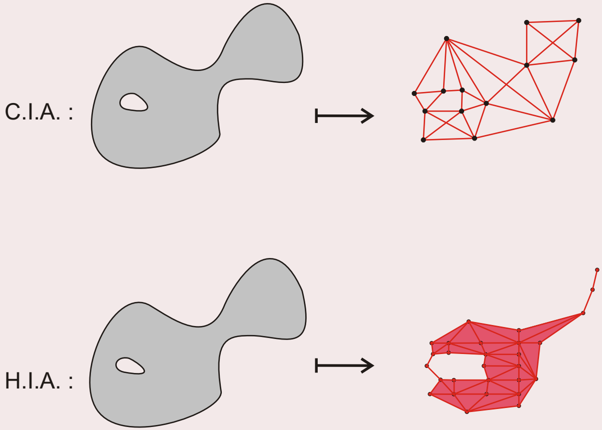
Idée de preuve

Espace des configurations admissibles, $y_0 = 2.3$



$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha, \beta) \in [-\pi, \pi]^2 / \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lcl} f_1(\alpha,\beta) = 2\sin(\alpha) - y_0 & \leq & 0 \\ f_2(\alpha,\beta) = -2\sin(\alpha) & \leq & 0 \\ f_3(\alpha,\beta) = 2\sin(\alpha) + 1.5\sin(\alpha+\beta) - y_0 & \leq & 0 \end{array} \right. \left. \right\}$$


C.I.A. :
H.I.A. :

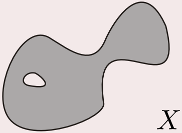
Invariant topologique

Nombre de composantes connexes par arc.

Soit π_0 la fonction suivante :

$$\begin{array}{rccc} \pi_0 : & \{ \text{ Espaces "gentils" } \} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & X & \mapsto & \text{Nombre de composantes} \\ & & & \text{connexes par arcs de } X \end{array}$$

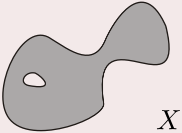
$\pi_0 :$



X

$\mapsto \quad 1$

FIG.: $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$.

$\pi_0 :$  $X \mapsto 1$

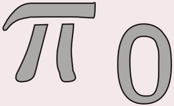
$\pi_0 :$  $Y \mapsto 4$

FIG.: $\pi_0(X)$ et $\pi_0(Y)$.

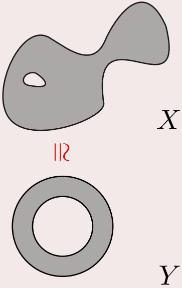


FIG.: $\pi_0(.)$ est un invariant topologique.

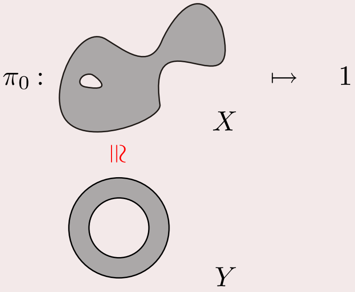


FIG.: $\pi_0(.)$ est un invariant topologique.

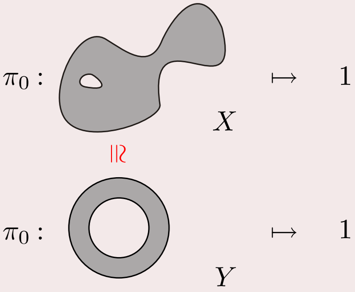


Fig.: $\pi_0(.)$ est un invariant topologique.

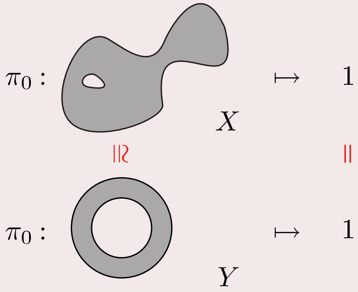


FIG.: $\pi_0(.)$ est un invariant topologique.

$\pi_0(.)$ est un invariant topologique car

$$\text{Si } X \cong Y \text{ alors } \pi_0(X) = \pi_0(Y)$$

$\pi_0(.)$ est un invariant topologique car

$$\text{Si } X \cong Y \text{ alors } \pi_0(X) = \pi_0(Y)$$

Si X et Y deux espaces topologiques, tels que $\pi_0(X) \neq \pi_0(Y)$ alors $X \ncong Y$.

Il existe des ensembles topologiques tels que

$$X \ncong Y \text{ et } \pi_0(X) = \pi_0(Y)$$

Il existe des ensembles topologiques tels que

$$X \not\cong Y \text{ et } \pi_0(X) = \pi_0(Y)$$

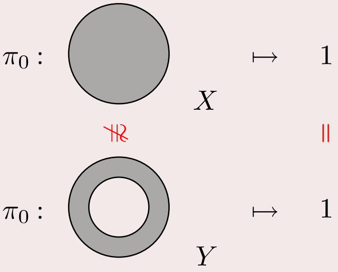


FIG.: $\pi_0(.)$ n'est pas un invariant assez fort.

Définition - Homéomorphisme

Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme si

1. f est continue.

Définition - Homéomorphisme

Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme si

1. f est continue.
2. f est bijective.

Définition - Homéomorphisme

Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme si

1. f est continue.
2. f est bijective.
3. f^{-1} est continue.

Définition - Homéomorphisme

Soient X et Y des espaces topologiques. On dit que $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme si

1. f est continue.
2. f est bijective.
3. f^{-1} est continue.

Définition - Espaces homéomorphes

Deux espaces topologiques X et Y sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme $f : X \longrightarrow Y$.

Exemples d'homéomorphismes

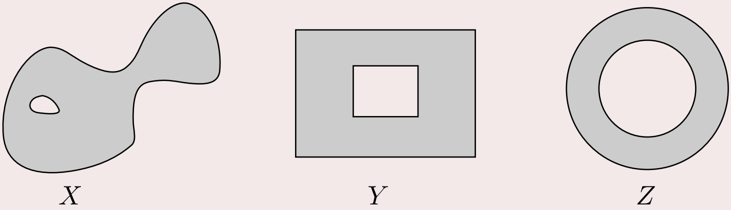
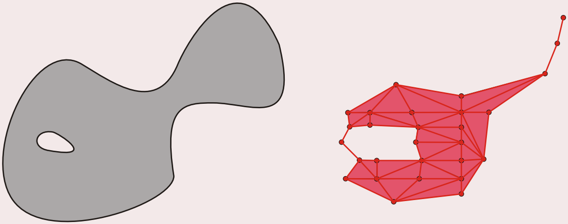
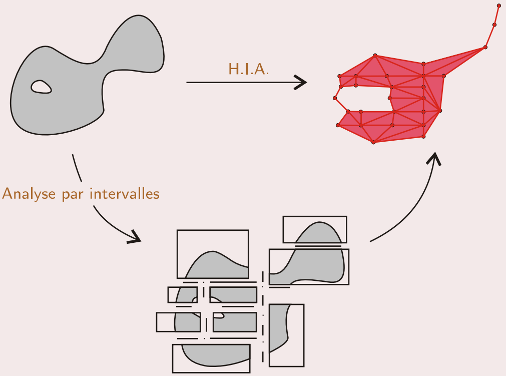


FIG.: Exemple d'ensembles homéomorphes.

- Construire une triangulation pour obtenir plus de propriétés topologiques.
  - type homotopie, groupe fondamental ($\pi_1(\mathbb{S})$).
  - groupes d'homologie ($H_1(\mathbb{S}), H_2(\mathbb{S}), \dots$).
  - nombres de Betti.

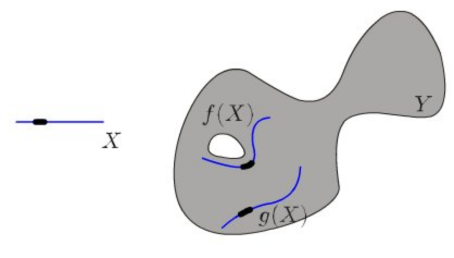



H.I.A.
Analyse par intervalles

Définition - Fonctions homotopes

Deux fonctions continues $f, g : X \to Y$ sont *homotopes*, $f \sim g$ s'il existe une fonction continue $F : X \times [0,1] \to Y$, telle que :

$$F(x,0) = f(x) \text{ et } F(x,1) = g(x), \ \forall x \in X.$$



Définition

Deux espaces X et Y ont le *même type d'homotopie* s'il existe des applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$. On notera $X \simeq Y$.

Définition

Deux espaces X et Y ont le *même type d'homotopie* s'il existe des applications continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ telles que $g \circ f \sim 1_X$ et $f \circ g \sim 1_Y$. On notera $X \simeq Y$.

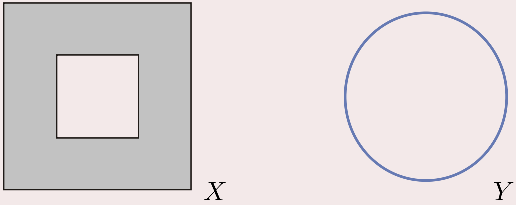
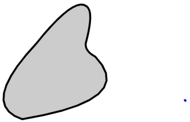


FIG.: $X \simeq Y$

Définition

Un espace X est *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point.



$$X \simeq Y.$$

Proposition

Deux ensembles homéomorphes sont du même type d'homotopie.

$$X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$$

Proposition

Deux ensembles homéomorphes sont du même type d'homotopie.

$$X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$$

Remarque

La plupart des invariants topologiques ne permettent pas de différencier deux ensembles du même type d'homotopie.

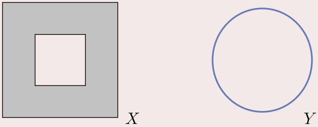
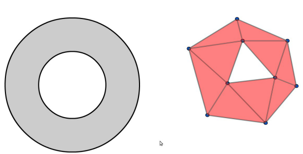


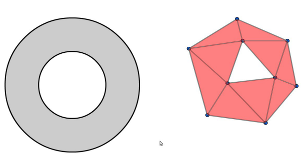
FIG.: $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) = \pi_1(Y)$

Une triangulation



Définition d'une triangulation abstraite

Soit $\mathcal{N}$ un ensemble fini de symboles $\{(a^0), (a^1), \ldots, (a^n)\}$
Une triangulation abstraite $\mathcal{K}$ est une famille des parties de $\mathcal{N}$ qui vérifie : $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \forall \sigma_0 \subset \sigma, \sigma_0 \in \mathcal{K}$



$$\begin{aligned}\mathcal{K} \quad = \quad & \{(a^0), (a^1), (a^2), (a^3), (a^4), \\ & (a^0, a^1), (a^1, a^2), (a^0, a^2), (a^3, a^4), \\ & (a^0, a^1, a^2)\}\end{aligned}$$

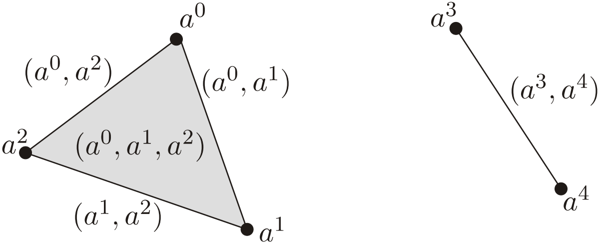


FIG.: Une réalisation de $\mathcal{K}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{K} = & \{(a^0),(a^1),(a^2),(a^3),(a^4),\\ & (a^0,a^1),(a^1,a^2),(a^0,a^2),(a^3,a^4),\\ & (a^0,a^1,a^2)\}\end{aligned}$$

On le notera par : $a^0a^1a^2 + a^3a^4$

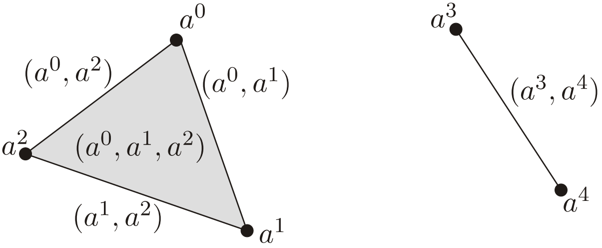
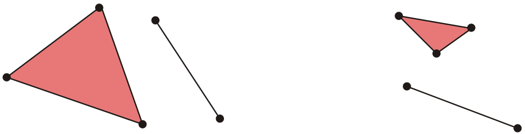


FIG.: Une réalisation de $\mathcal{K}$.

Théorème

Si $|K_1|$ et $|K_2|$ deux réalisations d'une triangulation abstraite $\mathcal{K}$, alors $|K_1|$ et $|K_2|$ sont homéomorphes.



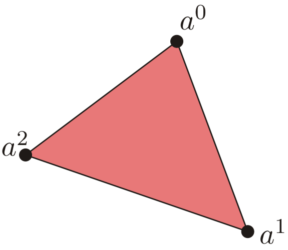
$|K_1|$ $\qquad$ $|K_2|$

Définition

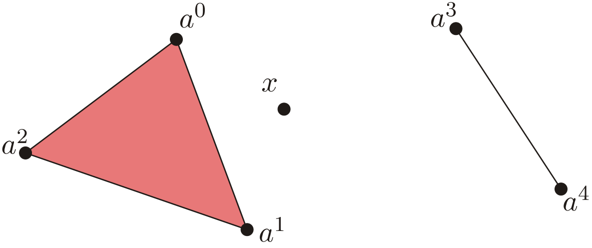
Soit $\mathcal{K}$ un triangulation abstraite, et (x) un symbole. On note $\mathcal{C}(x, \mathcal{K})$ l'ensemble :

$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (x, \sigma).$$

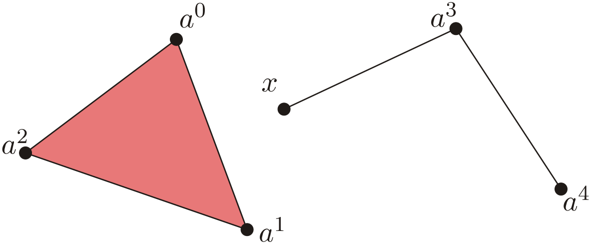
où $(x, \sigma) := (x, a^1, \ldots, a^n)$ avec $\sigma = (a^1, \ldots, a^n) \in \mathcal{K}$.
$\mathcal{C}(x, \mathcal{K})$ est le *cône* de sommet x et de base $\mathcal{K}$.



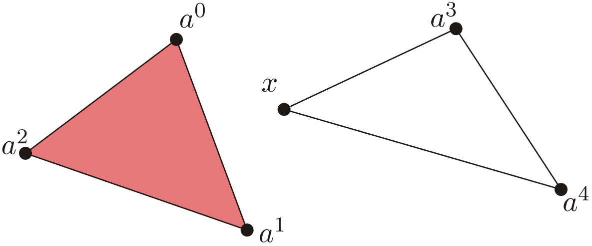
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) \quad = \quad & \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ & (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\,.\end{aligned}$$



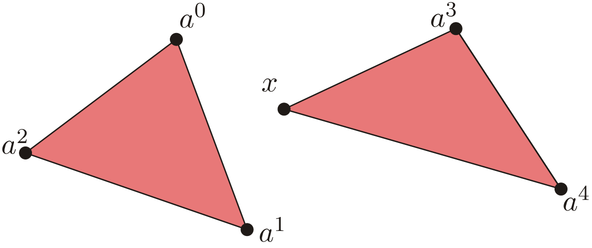
$$\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) = \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),$$
$$(x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\}.$$



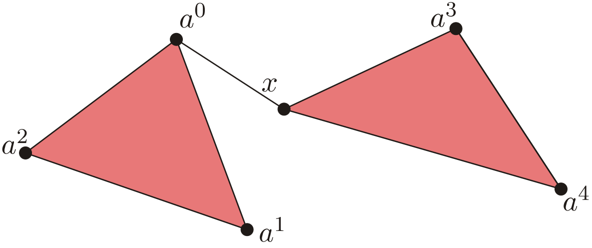
$$\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) = \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\}\,.$$



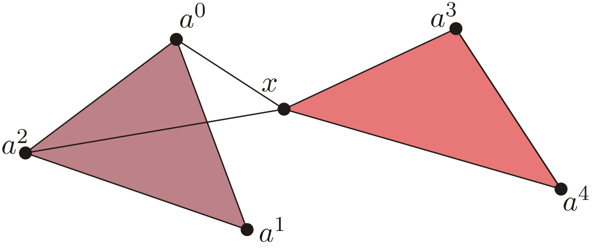
$$\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) = \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4), (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\,.$$



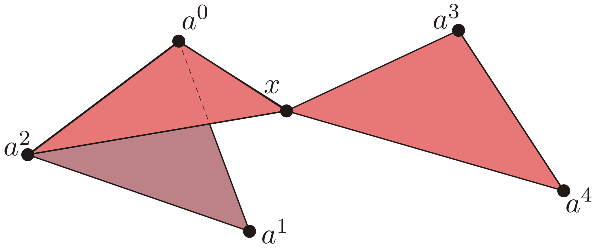
$$\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) = \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),$$
$$(x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\}.$$



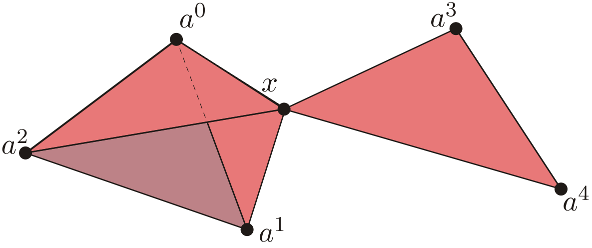
$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) &= \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ &\quad (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\}.\end{aligned}$$



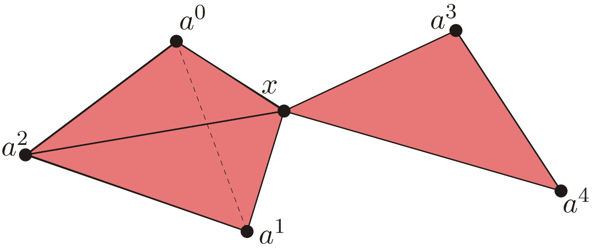
$$\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) = \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),$$
$$(x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\}.$$



$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) = & \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ & (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\}.\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) \;=\; & \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ & (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}\,.\end{aligned}$$

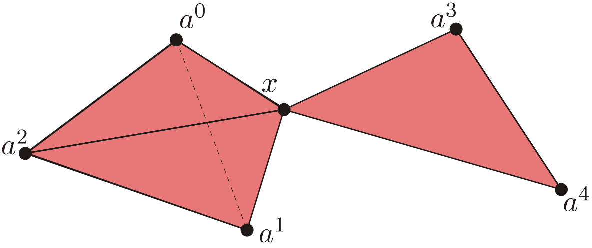


$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) &= \{(x)\} \cup \mathcal{K} \cup \big\{(x,a^0),(x,a^1),(x,a^2),(x,a^3),(x,a^4),\\ &\quad (x,a^0,a^1),(x,a^1,a^2),(x,a^0,a^2),(x,a^3,a^4),(x,a^0,a^1,a^2)\big\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(x,\mathcal{K}) &= x(a^0a^1a^2 + a^3a^4)\\ &= xa^0a^1a^2 + xa^3a^4\end{aligned}$$

Propriété d'un cône

Un cône est contractile.



Objectif :

Construire une triangulation du même type d'homotopie que :

$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n ; f_{i,j}(x) \leq 0\} \text{ où} f_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

$$\mathbb{S} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 + xy - 2 & \leq & 0 \\ -x^2 - y^2 - xy + 1 & \leq & 0 \end{array} \right. \right\}$$

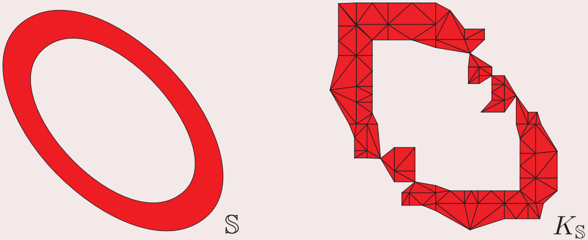


Fig.: Exemple d'un ensemble $\mathbb{S}$ et d'une triangulation générée par l'algorithme `Homotopy via Interval Analysis`.

1. Créer un recouvrement $\{\mathbb{S}_i\}_{i \in I}$ de $\mathbb{S}$ tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$

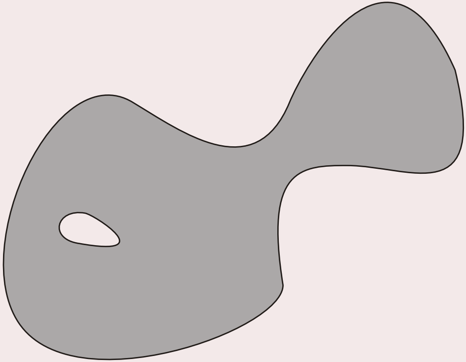
1. Créer un recouvrement $\{\mathbb{S}_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{S}$ tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$

2. Créer un triangulation du même type d'homotopie que $\mathbb{S}$.

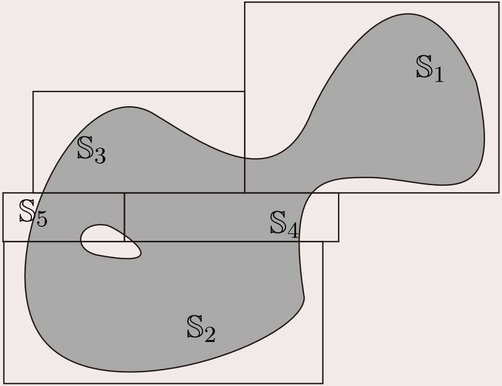
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i \in I}$, ($\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$) tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$



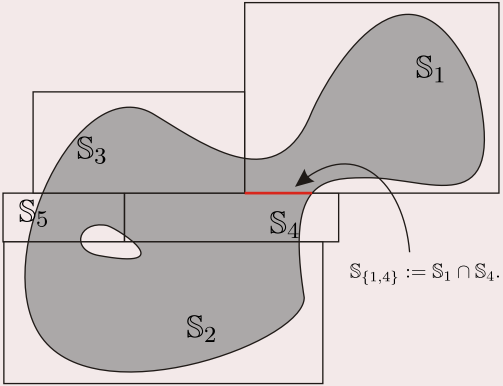
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i\in I}$, $(\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i)$ tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$



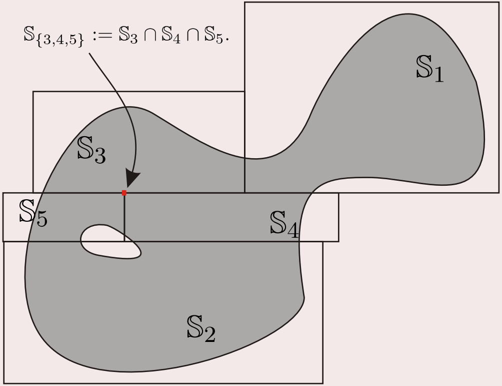
Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i\in I}$, ($\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$) tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j\in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$

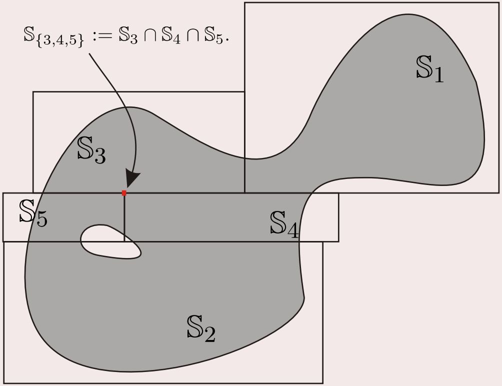


Découper $\mathbb{S}$ avec un pavage $\{p_i\}_{i \in I}$, ($\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$) tel que

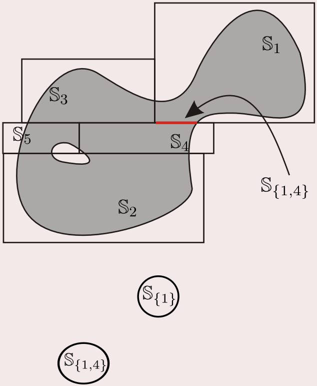
$$\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$



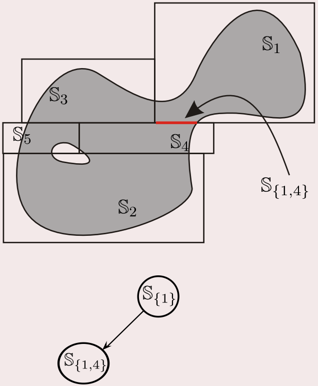
Soit $\mathcal{F} = \{\mathbb{S}_J, J \subset I, \text{ tel que } \mathbb{S}_J \text{ est contractile } \}$.



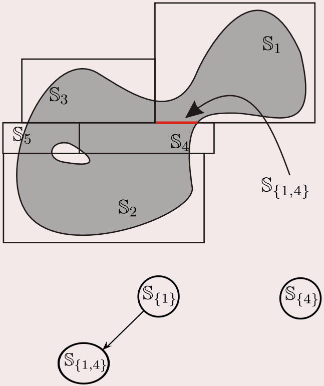
Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :



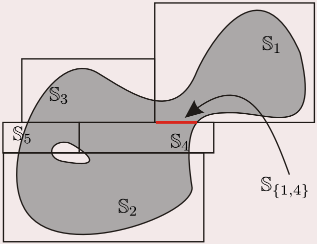
Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :

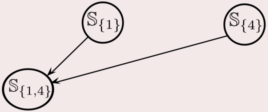


Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :

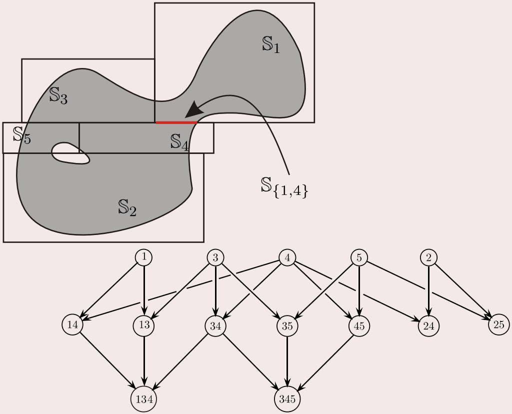


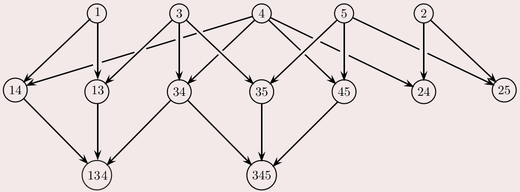
Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :

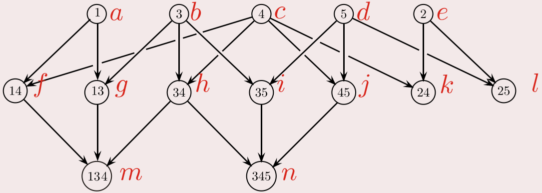


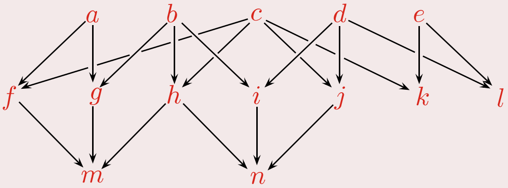


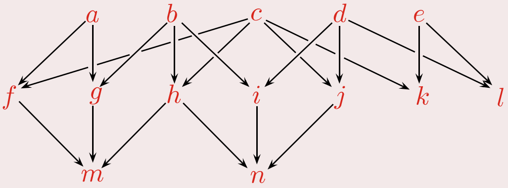
Ordonner $\mathcal{F}$ avec l'inclusion :




1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345

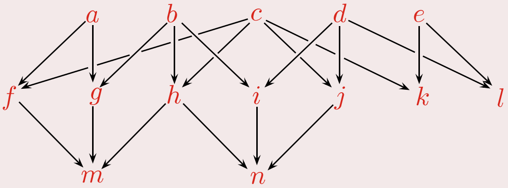

1
a
3
b
4
c
5
d
2
e
14
f
13
g
34
h
35
i
45
j
24
k
25
l
134
m
345
n


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n

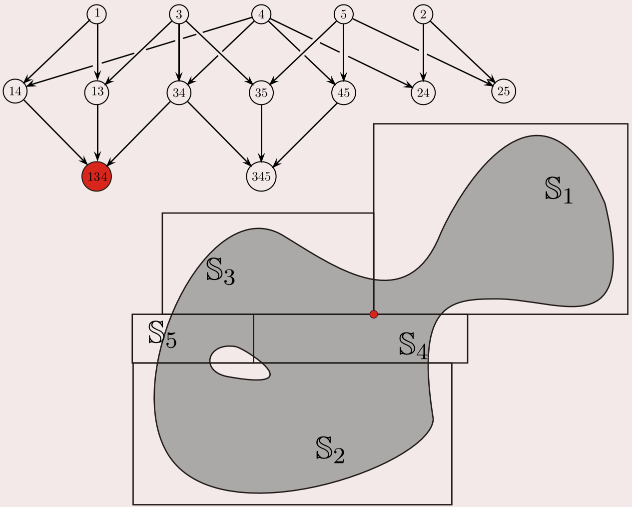


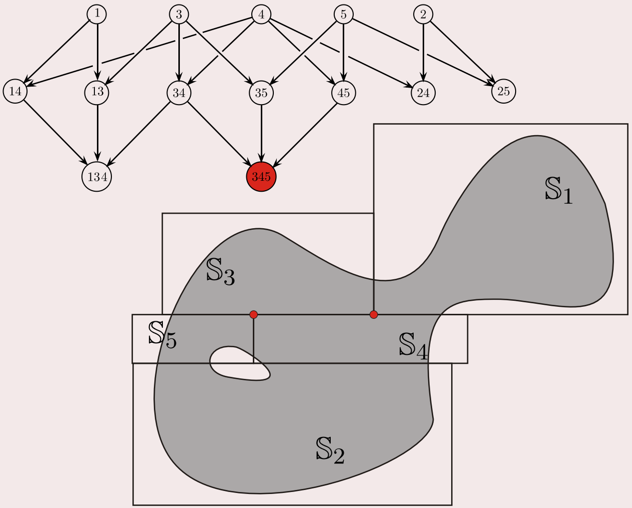
$$a(fm+gm)+b(gm+h(m+n)+in)+$$

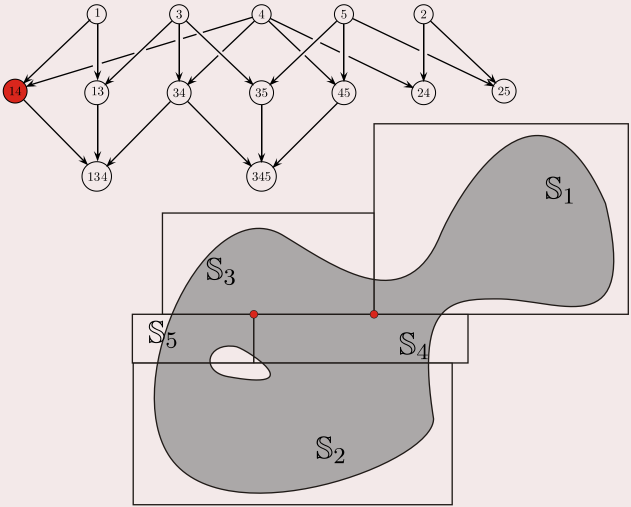
$$+c(fm+h(m+n)+jn+k)+d(in+jn+l)+e(k+l)$$

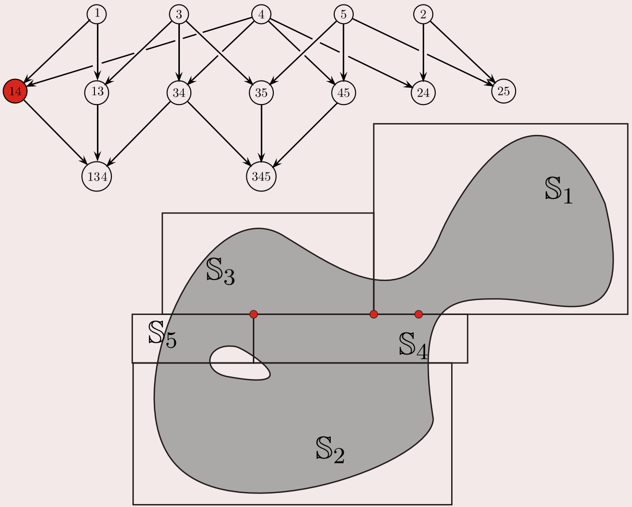


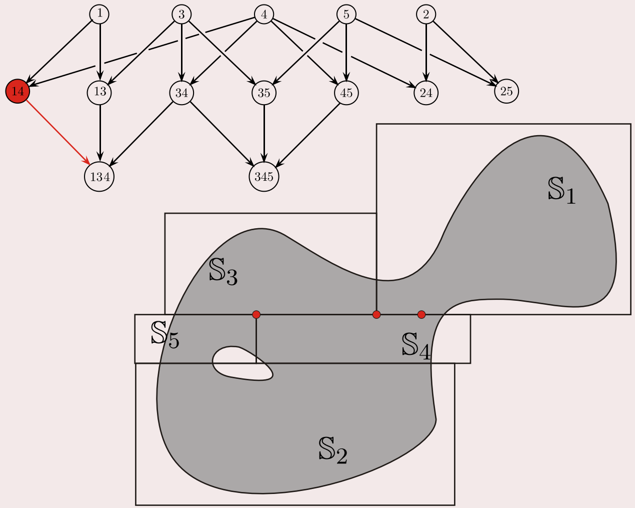
$$a(fm+gm)+b(gm+h(m+n)+in)+$$
$$+c(fm+h(m+n)+jn+k)+d(in+jn+l)+e(k+l)$$
$$=$$
$$afm+agm+bgm+bhm+bhn+bin+$$
$$+cfm+chm+chn+cjn+ck+din+djn+dl+ek+el$$

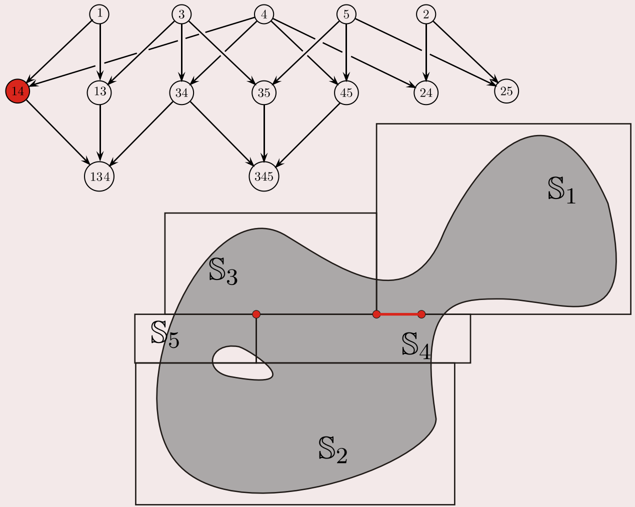

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

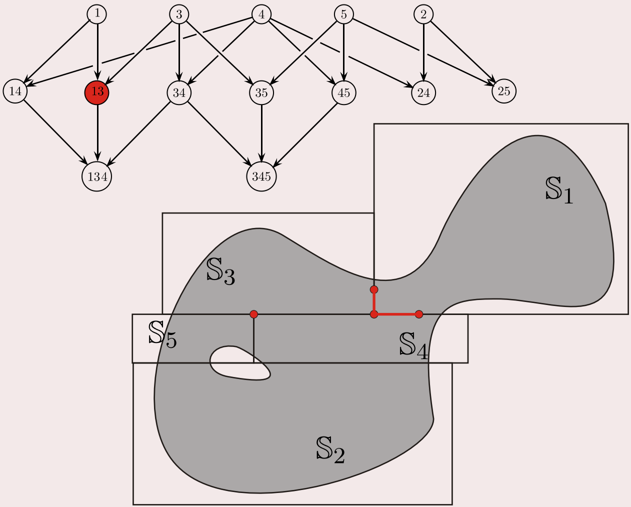

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

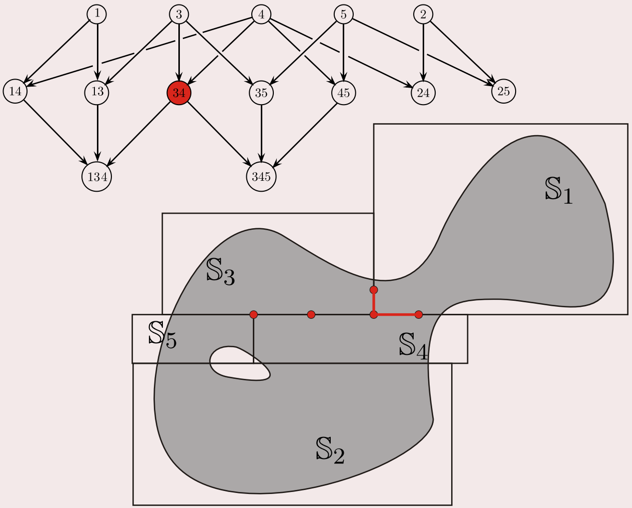

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

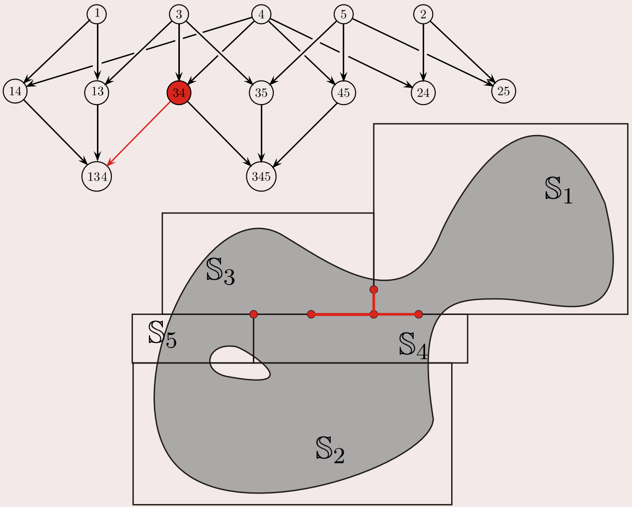

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

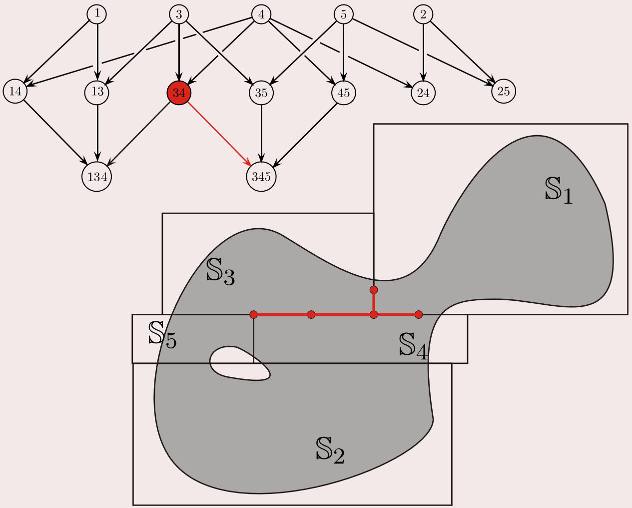

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

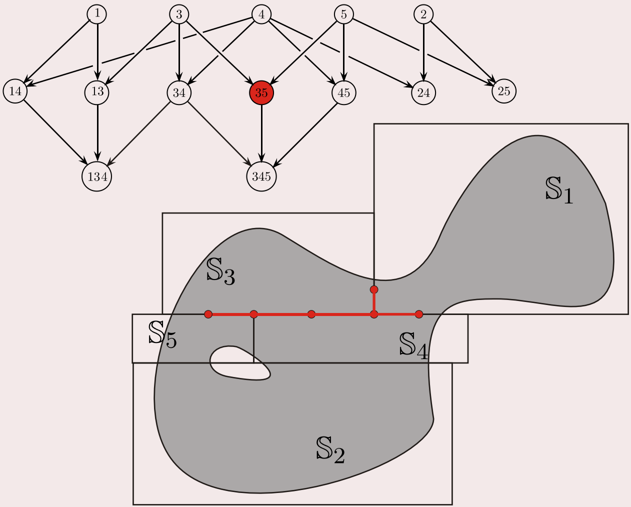

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

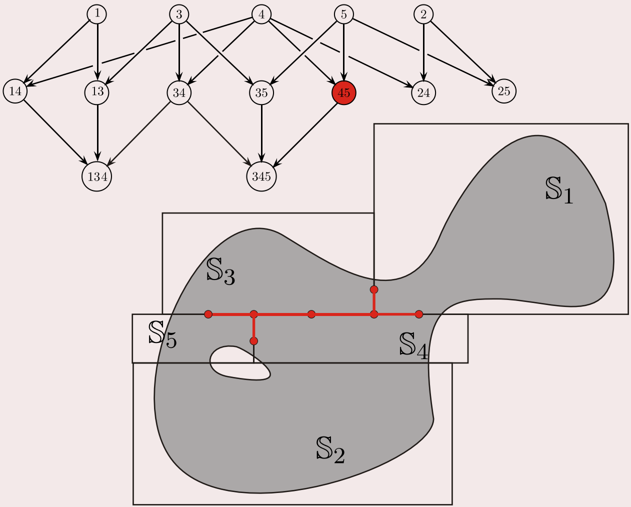

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

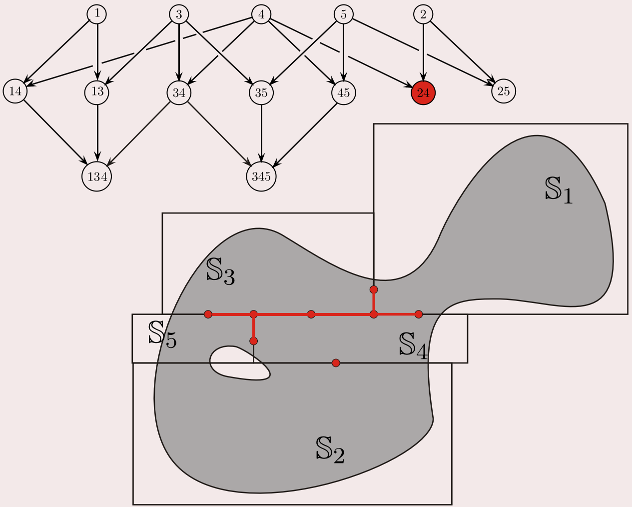

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

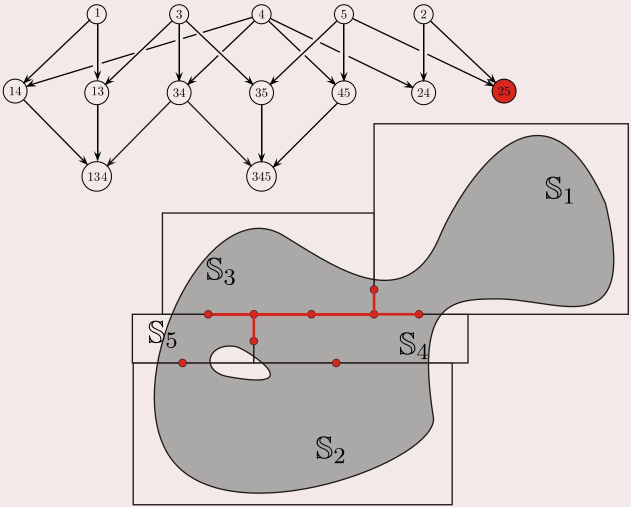

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

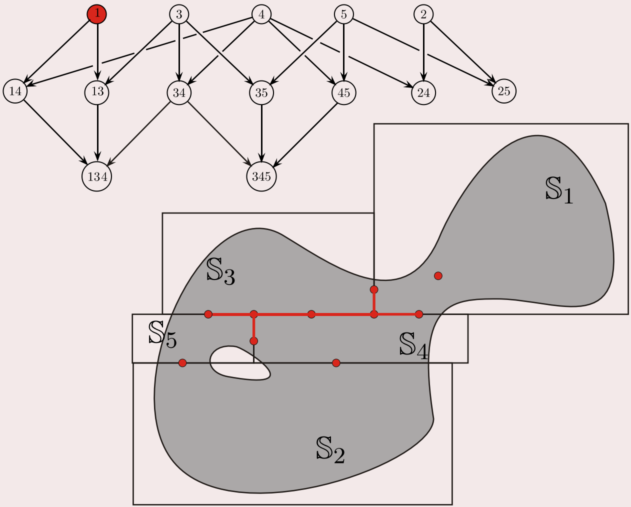

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

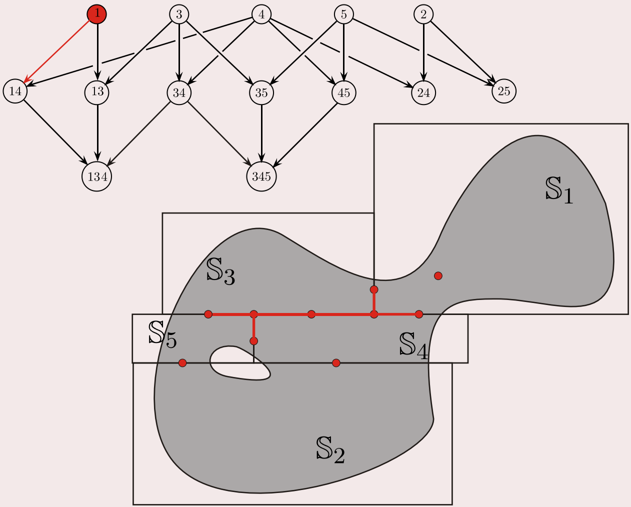

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

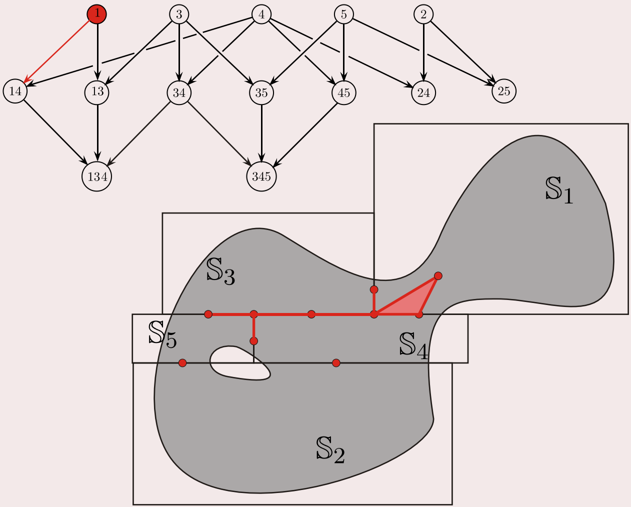

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

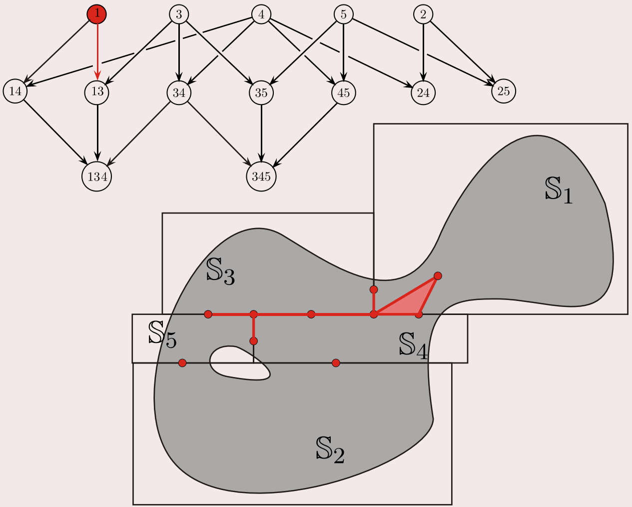

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

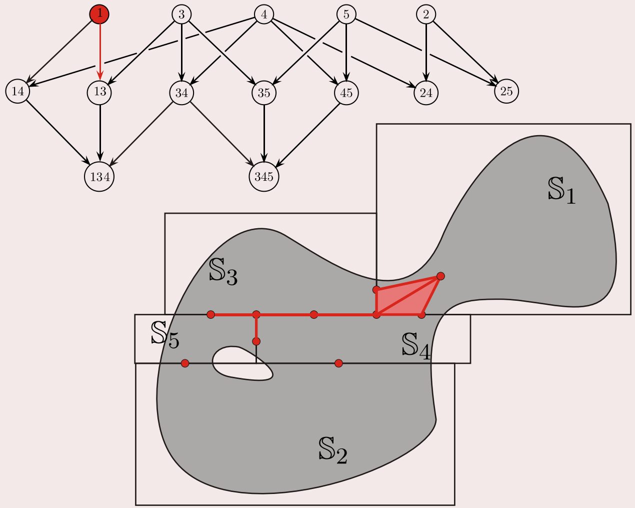

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

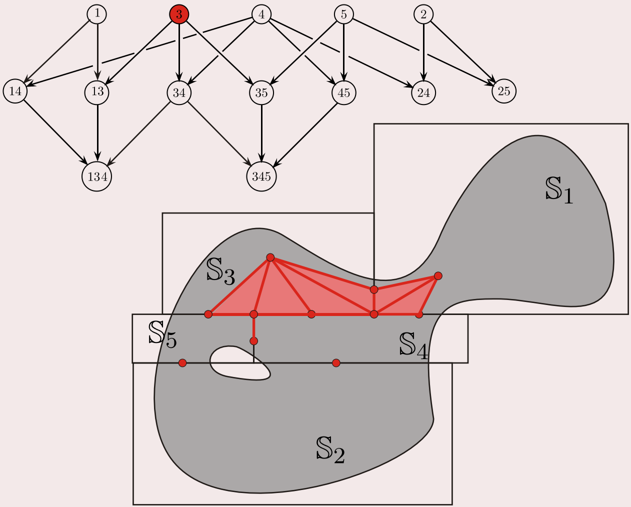

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

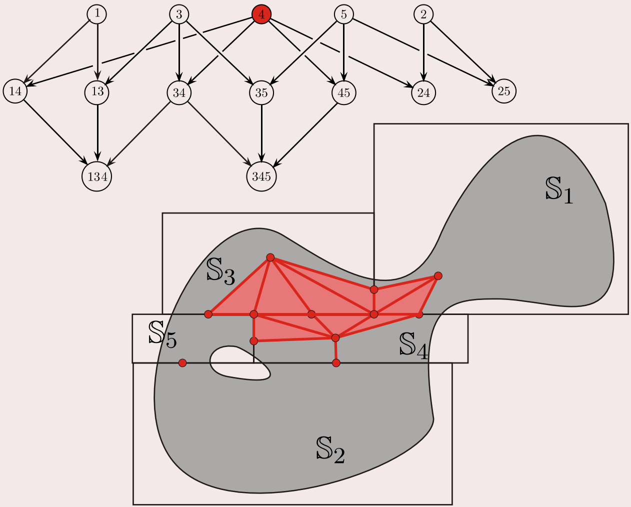

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

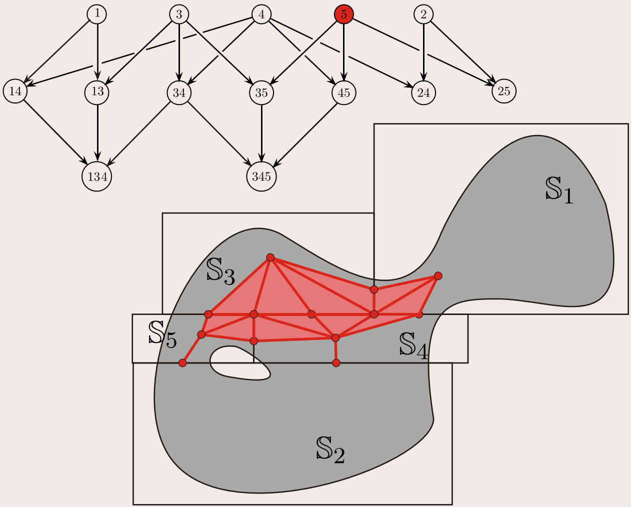

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

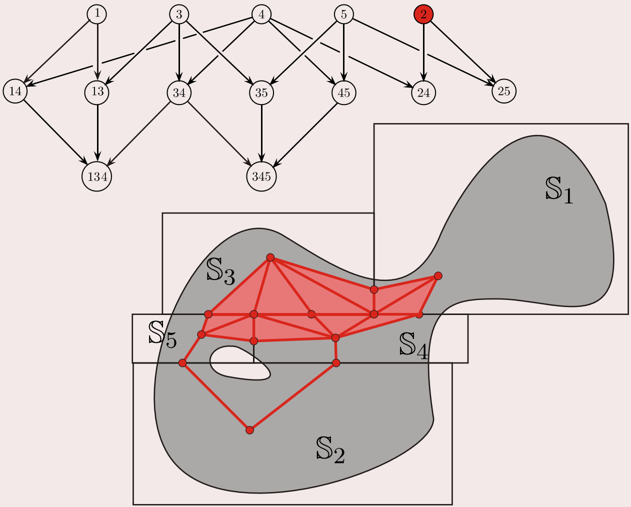

1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$


1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$


1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$


1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$


1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$


1
3
4
5
2
14
13
34
35
45
24
25
134
345
$\mathbb{S}_1$
$\mathbb{S}_3$
$\mathbb{S}_5$
$\mathbb{S}_4$
$\mathbb{S}_2$

- CIA : Connected components via Interval Analysis
  Solveur développé en c++ disponible via
  `http://www.istia.univ-angers.fr/~delanoue/`

- CIA : Connected components via Interval Analysis
  Solveur développé en c++ disponible via
  http://www.istia.univ-angers.fr/~delanoue/
- HIA : Homotopy type via Interval Analysis
  Solveur développé en c++ disponible via
  http://www.istia.univ-angers.fr/~delanoue/

Conclusion

- Cohomologie de Cech,

Perspectives

Conclusion

- Cohomologie de Cech,
- Du coté semi-algébrique, il existe l'algorithme de Collins,

Perspectives

Conclusion

- Cohomologie de Cech,
- Du coté semi-algébrique, il existe l'algorithme de Collins,
- termine dans le cas structurellement stable.

Perspectives

Conclusion

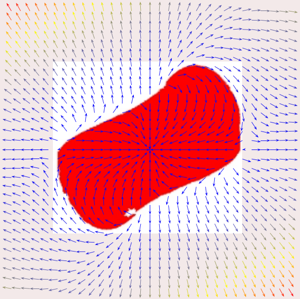
- Cohomologie de Cech,
- Du coté semi-algébrique, il existe l'algorithme de Collins,
- termine dans le cas structurellement stable.

Perspectives

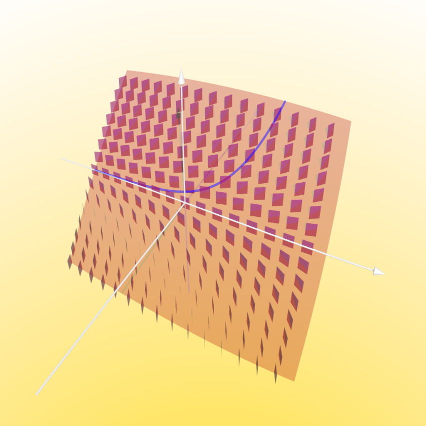
- Proposer le code source et monter en dimension.

Calcul par intervalles, théorie des graphes et de Lyapunov

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(x^2 - xy + 3y^2 - 1) \\ y(x^2 - 4yx + 3y^2 - 1) \end{pmatrix}$$



Et maintenant ?



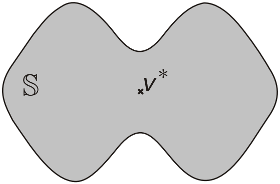
Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ \partial f(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow \partial f(x).(x - v^*) > 0$



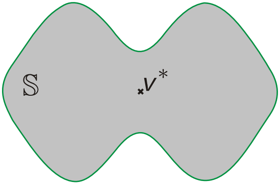
Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0,\ \partial f(x).(x - v^*) \leq 0,\ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow \partial f(x).(x - v^*) > 0$



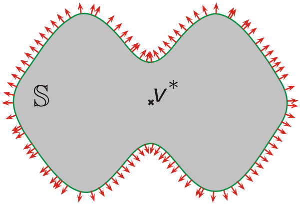
Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \;/\; f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

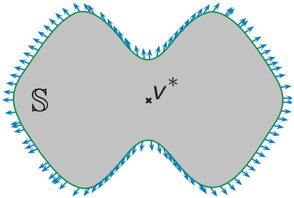
$$f(x) = 0,\; \partial f(x).(x - v^*) \leq 0,\; x \in D$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow \partial f(x).(x - v^*) > 0$



$\partial f(x)$



$x - v^*$

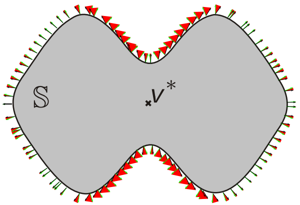
Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ \partial f(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

(1) est inconsistent $\Leftrightarrow \forall x \in D, f(x) = 0 \Rightarrow \partial f(x).(x - v^*) > 0$

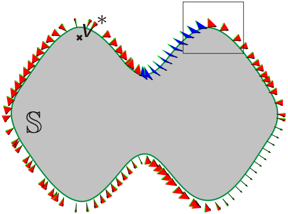


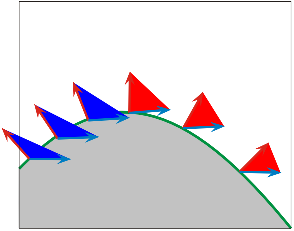
Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in D \subset \mathbb{R}^n \ / \ f(x) \leq 0\}$ où f est une fonction C^1 de D vers $\mathbb{R}$, D un convexe, v^* un point de $\mathbb{S}$, si

$$f(x) = 0, \ \partial f(x).(x - v^*) \leq 0, \ x \in D$$

n'admet aucune solution, alors v^* est une étoile pour $\mathbb{S}$.

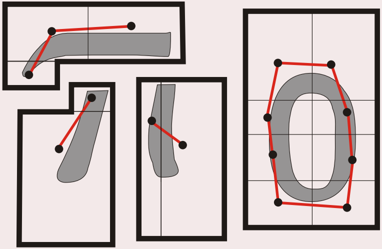




Retour

Corollaire

Let $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ be a star-spangled graph of a set $\mathbb{S}$.
$\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$ has the same number of connected components than $\mathbb{S}$. i.e. $\pi_0(\mathbb{S}) = \pi_0(\mathcal{G}_{\mathbb{S}})$.



▸ Retour