Calcul par intervalles et stabilité de systèmes dynamiques non linéaires

N. Delanoue

Rencontres Doctorales de Mathématiques

Jeudi 11 mai 2006

RENNES2006

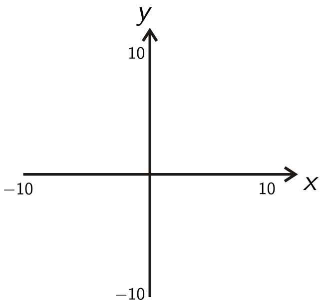
Objectif :

1. Montrer l'asymptotique stabilité d'un point x_∞.
2. Calculer un ensemble qui est contenu dans le bassin d'attraction de x_∞.

Plan

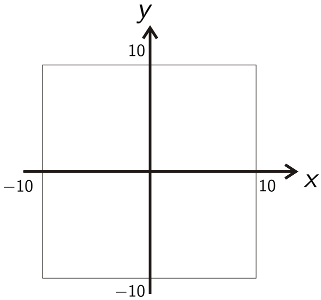
Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



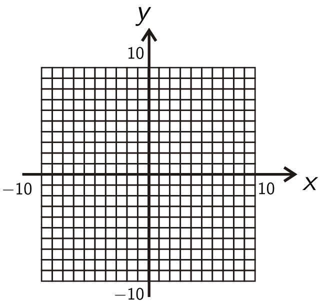
Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



Exemple 1

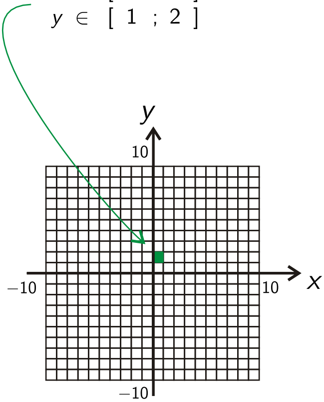
$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

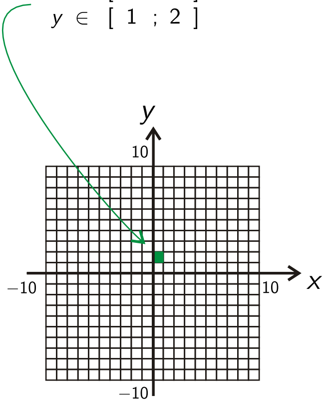
$$\begin{array}{lcl} x & \in & [\ 0\ ;\ 1\ ] \\ y & \in & [\ 1\ ;\ 2\ ] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

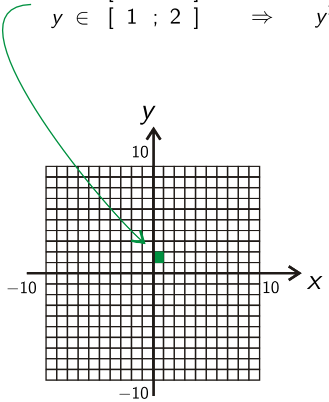
$x \in [\ 0\ ;\ 1\ ] \quad \Rightarrow \quad x^2 \in [\ 0\ ;\ 1\ ]$
$y \in [\ 1\ ;\ 2\ ]$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

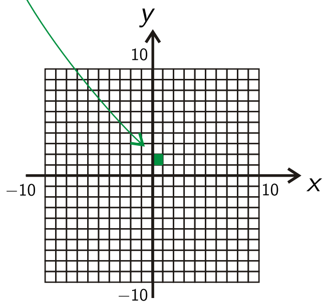
$$\begin{array}{lllll} x \in [\,0\;;\;1\,] & \Rightarrow & x^2 \in [\,0\;;\;1\,] \\ y \in [\,1\;;\;2\,] & \Rightarrow & y^2 \in [\,1\;;\;4\,] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

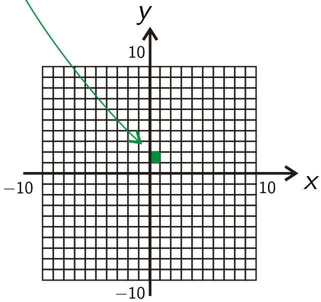
$$\begin{array}{lll} x \in [\,0\,;\,1\,] & \Rightarrow & x^2 \in [\,0\,;\,1\,] \\ y \in [\,1\,;\,2\,] & \Rightarrow & y^2 \in [\,1\,;\,4\,] \\ & \Rightarrow & xy \in [\,0\,;\,2\,] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$\begin{array}{lcl} x \in [\,0\,;\,1\,] & \Rightarrow & x^2 \in [\,0\,;\,1\,] \\ y \in [\,1\,;\,2\,] & \Rightarrow & y^2 \in [\,1\,;\,4\,] \\ & \Rightarrow & xy \in [\,0\,;\,2\,] \\ & \Rightarrow & -30 \in [-30\,;\,-30\,] \end{array}$$

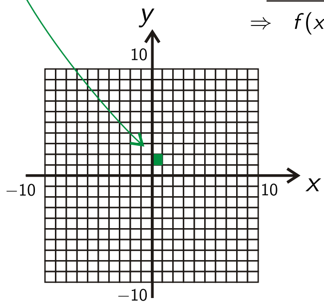


Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$x \in [\,0\,;\,1\,] \qquad y \in [\,1\,;\,2\,]$$

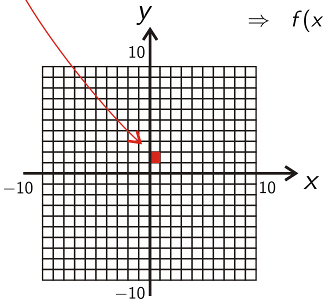
$$\begin{array}{lrcl}
\Rightarrow & x^2 & \in & [\,0\,;\,1\,] \\
\Rightarrow & y^2 & \in & [\,1\,;\,4\,] \\
\Rightarrow & xy & \in & [\,0\,;\,2\,] \\
\Rightarrow & -30 & \in & [-30\,;\,-30\,] \\
\hline
\Rightarrow & f(x,y) & \in & [-29\,;\,-27\,]
\end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

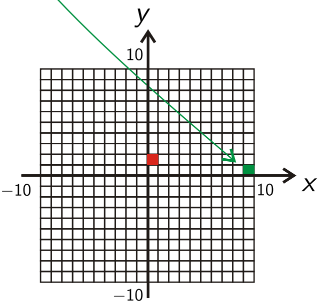
$$\begin{array}{lcl} x \in [\ 0\ ;\ 1\ ] & \Rightarrow & x^2 \in [\ 0\ ;\ 1\ ] \\ y \in [\ 1\ ;\ 2\ ] & \Rightarrow & y^2 \in [\ 1\ ;\ 4\ ] \\ & \Rightarrow & xy \in [\ 0\ ;\ 2\ ] \\ & \Rightarrow & -30 \in [-30\ ;\ -30\ ] \\ \hline & \Rightarrow & f(x, y) \in [-29\ ;\ -27\ ] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

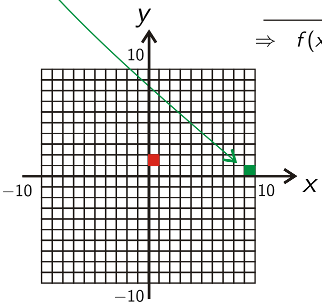
$$\begin{array}{lllll} x & \in & [\ 9 & ; 10 &] \\ y & \in & [\ 0 & ;\ 1 &] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

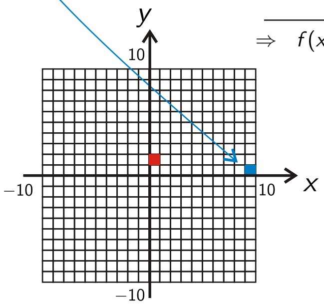
$$\begin{array}{lcl}
x \in [\,9\,;\,10\,] & \Rightarrow & x^2 \in [\,81\,;\,100\,] \\
y \in [\,0\,;\,1\,] & \Rightarrow & y^2 \in [\,0\,;\,1\,] \\
 & \Rightarrow & xy \in [\,0\,;\,10\,] \\
 & \Rightarrow & -30 \in [\,-30\,;\,-30\,] \\
\hline
 & \Rightarrow & f(x,y) \in [\,51\,;\,81\,]
\end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

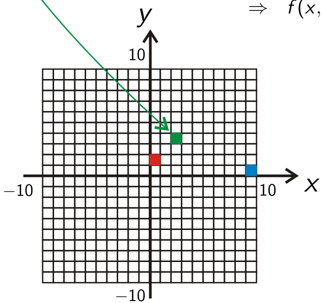
$$\begin{array}{lcl}
x & \in & [\ 9\ ;\ 10\ ] \\
y & \in & [\ 0\ ;\ 1\ ]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rccc}
\Rightarrow & x^2 & \in & [\ 81\ ;\ 100\ ] \\
\Rightarrow & y^2 & \in & [\ 0\ ;\ 1\ ] \\
\Rightarrow & xy & \in & [\ 0\ ;\ 10\ ] \\
\Rightarrow & -30 & \in & [\ -30\ ;\ -30\ ] \\
\hline
\Rightarrow & f(x,y) & \in & [\ 51\ ;\ 81\ ]
\end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

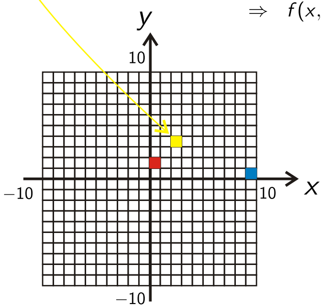
$$\begin{array}{lcl} x & \in & [\ 2\ ;\ 3\ ] \\ y & \in & [\ 3\ ;\ 4\ ] \end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\Rightarrow & x^2 & \in & [\ 4\ ;\ 9\ ] \\
\Rightarrow & y^2 & \in & [\ 9\ ;\ 16\ ] \\
\Rightarrow & xy & \in & [\ 6\ ;\ 12\ ] \\
\Rightarrow & -30 & \in & [\ -30\ ;\ -30\ ] \\
\hline
\Rightarrow & f(x,y) & \in & [\ -11\ ;\ 7\ ]
\end{array}$$



Exemple 1

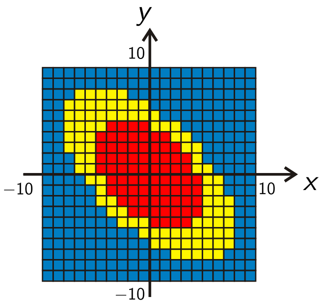
$$\mathbb{S} = \{(x,y) \in [-10;10]^2 \mid f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$\begin{array}{lcl} x & \in & [\ 2\ ;\ 3\ ] \\ y & \in & [\ 3\ ;\ 4\ ] \end{array} \qquad \begin{array}{rlcl} \Rightarrow & x^2 & \in & [\ 4\ ;\ 9\ ] \\ \Rightarrow & y^2 & \in & [\ 9\ ;\ 16\ ] \\ \Rightarrow & xy & \in & [\ 6\ ;\ 12\ ] \\ \Rightarrow & -30 & \in & [\ -30\ ;\ -30\ ] \\ \hline \Rightarrow & f(x,y) & \in & [\ -11\ ;\ 7\ ] \end{array}$$



Exemple 1

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



Remplacer les réels par des intervalles

Notation

Soient $\underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}$, $[x] = [\underline{x}; \overline{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \overline{x}\}$,

Définition

On note par $\mathbb{IR}$ l'ensemble des intervalles compacts de $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \overline{x} \in \mathbb{R}, \quad \underline{x} \leq \overline{x}\}$$

Exemple

- $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$
- $[2; 1] \notin \mathbb{IR}$
- $[1; \infty[\notin \mathbb{IR}$

Relations sur $\mathbb{IR}$

En tant que parties de $\mathbb{R}$, les éléments de $\mathbb{IR}$ héritent des relations $=$ et $\subset$

Avec $[a], [b], \in \mathbb{IR}$, si $\overline{a} < \underline{b}$ alors

$$[\underline{a}, \overline{a}] \cup [\underline{b}, \overline{c}] \notin \mathbb{IR}$$

Opérations sur $\mathbb{IR}$

- $[a] \sqcup [b] := [\min(\underline{a}, \underline{b}); \max(\overline{a}, \overline{b})]$
- $[a] \cap [b] := \begin{cases} \emptyset & \text{if } \overline{a} < \underline{b} \text{ or } \overline{b} < \underline{a} \\ [\max(\underline{a}, \underline{b}); \min(\overline{a}, \overline{b})] & \text{autrement} \end{cases}$

Topologie sur $\mathbb{IR}$

Soient $[a], [b] \in \mathbb{IR}$, la distance de Hausdorff d

$$d([a],[b]) = \max(|\underline{a} - \underline{b}|, |\overline{a} - \overline{b}|)$$

munit $\mathbb{IR}$ d'une topologie.

Remplacer les réels par des intervalles

Définition

Si $\star \in \{+, -, \times, \div\}$ et $[a], [b] \in \mathbb{IR}$ alors :

$$[a] \star [b] = \{a \star b, a \in [a] \text{ et } b \in [b]\}$$

Remarque : si $0 \in [b]$ alors $[a] \div [b]$ n'est pas définie.

$$\begin{aligned}
[a] + [b] &= [\underline{a} + \underline{b}; \overline{a} + \overline{b}] \\
[a] - [b] &= [\underline{a} - \overline{b}; \overline{a} - \underline{b}] \\
[a] \times [b] &= [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}\}; \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\overline{b}, \overline{a}\underline{b}, \overline{a}\overline{b}, \}] \\
[a] \div [b] &= [a] \times [1/\overline{b}; 1/\underline{b}]
\end{aligned}$$

R. C. Young (1931), M. Warmus (1956), T. Sunaga (1958), R. E. Moore (1959) Interval Analysis (1966)

Propriétés de l'arithmétique des intervalles

1. $+$ et $\times$ sont deux lois de compositions *associatives* et *commutatives*.
2. $\times$ n'est pas *distributive* par rapport à $+$:
$$\begin{aligned} [-1;1]\times([-1;0]+[3;4]) &= [-1;1]\times[2;4] \\ &= [-4,4] \\ [-1;1]\times[-1;0]+[-1;1]\times[3;4] &= [-1;1]+[-4;4] \\ &= [-5,5] \end{aligned}$$
Par contre, on a la sous-distributivité :
$$[a]\times([b]+[c]) \subset [a]\times[b]+[a]\times[c]$$
3. $[0;0]$ et $[1;1]$ sont les éléments neutres de $+$ et de $\times$. En général,
$$[a]-[a]\neq[0;0] \text{ et } [a]\div[a]\neq[1;1]$$

Définition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
$[f] : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ est une fonction d'inclusion pour f si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}, f([x]) \subset [f]([x])$$

Exemple

Si f est une fonction réelle continue définie sur $\mathbb{R}$.
L'image directe $\mathbf{f} : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ est une fonction d'inclusion pour f.

Exemples

1. $\exp([x]) = [\exp(\underline{x}); \exp(\overline{x})]$
2. $\sqrt{([x])} = [\sqrt{\underline{x}}; \sqrt{\overline{x}}]$ si $0 \leq \underline{x}$
3. $([x])^2 = \begin{cases} [\underline{x}^2; \overline{x}^2] & \text{si} \quad 0 \leq \underline{x} \\ [0; \max\{\underline{x}^2, \overline{x}^2\}] & \text{si} \quad 0 \in [x] \\ [\overline{x}^2; \underline{x}^2] & \text{si} \quad \overline{x} \leq 0 \end{cases}$

Exemple

$$\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sin(x) \end{array}$$

La fonction sin étendue aux intervalles :

$$\begin{array}{rccc} [\sin_1] : & \mathbb{IR} & \longrightarrow & \mathbb{IR} \\ & [x] & \longmapsto & [-1;1] \end{array}$$

$[\sin_1]$ est une fonction d'inclusion pour sin.

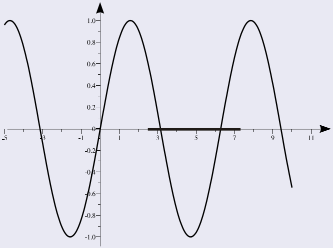


FIG.: [sin]([x])

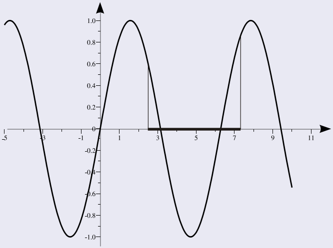


Fig.: $[\sin]([x])$

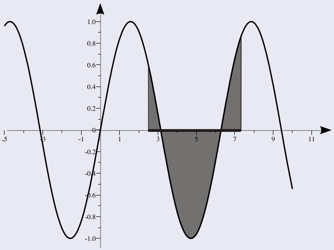


FIG.: $[\sin]([x])$

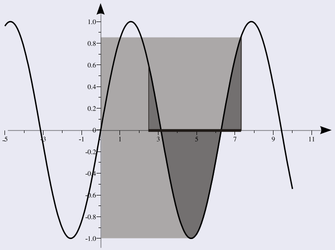


FIG.: $[\sin]([x])$

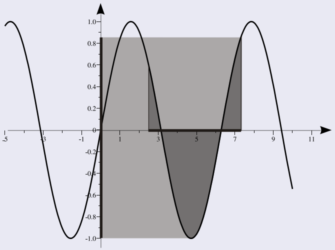


FIG.: $[\sin]([x])$

Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = (\sin x - x^2 + 1)\cos x$.
Montrons que $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit $\left\{ \begin{array}{llll} [f] : & \mathbb{IR} & \to & \mathbb{IR} \\ & [x] & \mapsto & (\sin[x] - [x]^2 + 1)\cos[x] \end{array} \right.$

$$[f]([0; \tfrac{1}{2}]) = (\sin[0; \tfrac{1}{2}] - [0; \tfrac{1}{2}]^2 + 1)\cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

$$= (\sin[0; \tfrac{1}{2}] - [0; \tfrac{1}{4}] + 1)\cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad (\sin[0; \tfrac{1}{2}] + [-\tfrac{1}{4}; 0] + 1)\cos[0; \tfrac{1}{2}]$$

$$= \quad ([0; \sin\tfrac{1}{2}] + [\tfrac{3}{4}; 1])[\cos\tfrac{1}{2}; 1]$$

$$= \quad [\tfrac{3}{4}; 1 + \sin\tfrac{1}{2}] \times [\cos\tfrac{1}{2}; 1]$$

$$= \quad [\tfrac{3}{4}\cos\tfrac{1}{2}; 1 + \sin\tfrac{1}{2}]$$

$$[f]([0; \tfrac{1}{2}]) \quad \subset \quad [0.65818; 1.4795]$$

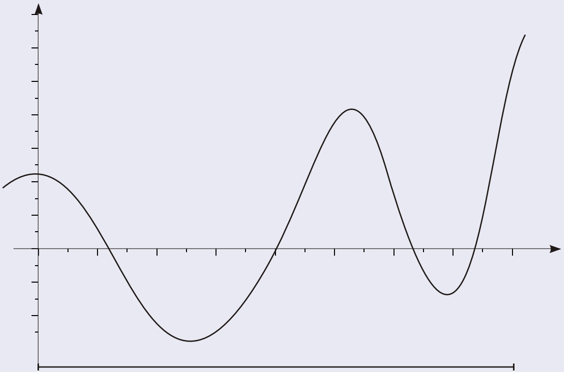
Conclusion

$0 \notin [f]([0; \frac{1}{2}])$ or $\forall x \in [0; \frac{1}{2}],\ f(x) \in [f]([0; \frac{1}{2}])$ donc $\mathbb{S} = \emptyset$

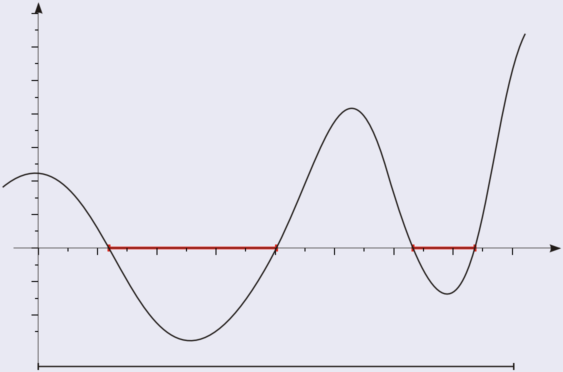
Définition

Une collection finie $\{p_i\}_{i \in I}$ d'intervalles est appelée un pavage.

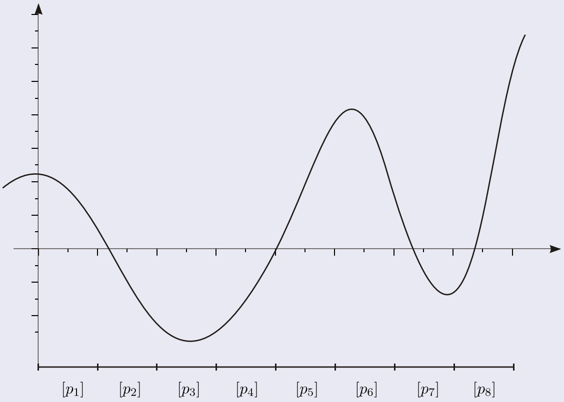
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



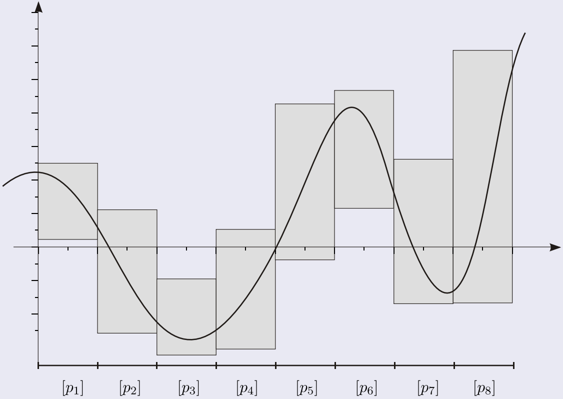
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



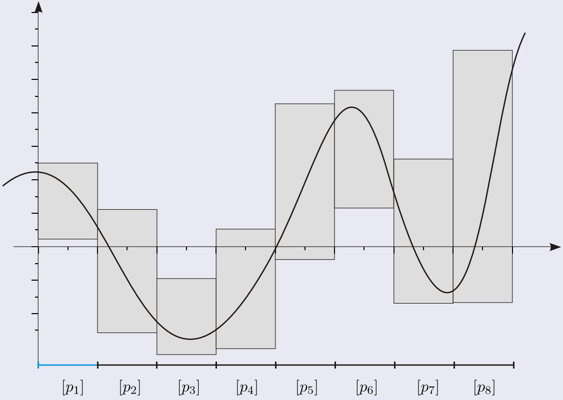
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



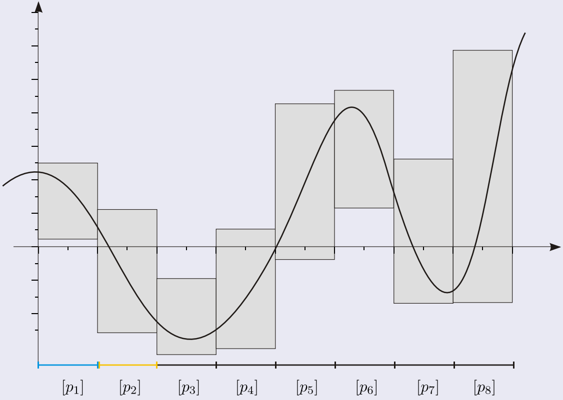
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



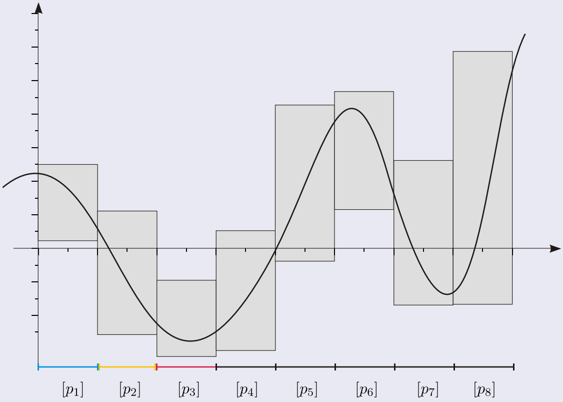
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



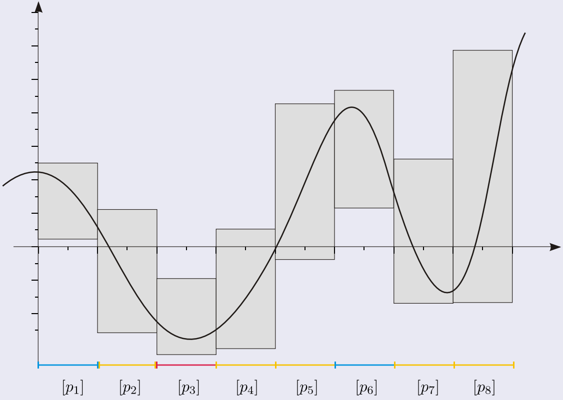
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



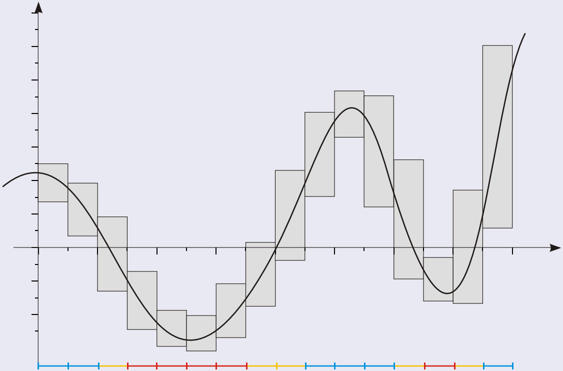
Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



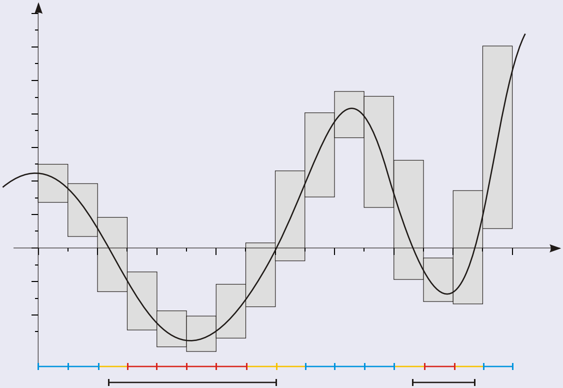
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



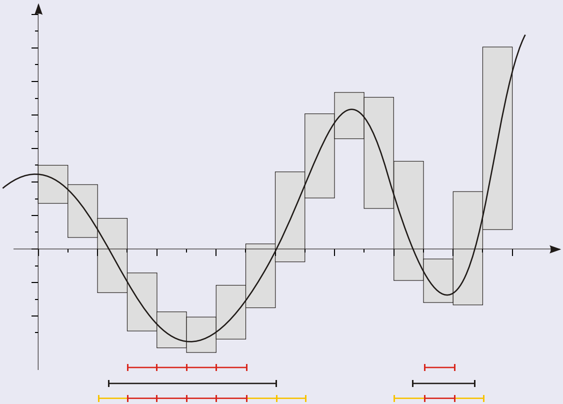
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



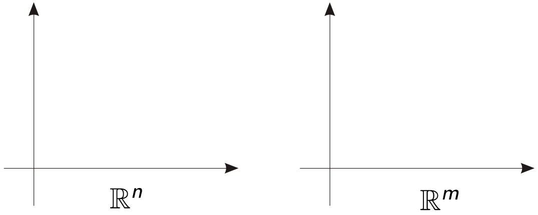
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $[f]$ une fonction d'inclusion pour f.
Soit $\mathbb{S} = \{x \in I,\ f(x) \leq 0\}$



Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.
$[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$ est une fonction d'inclusion pour f si

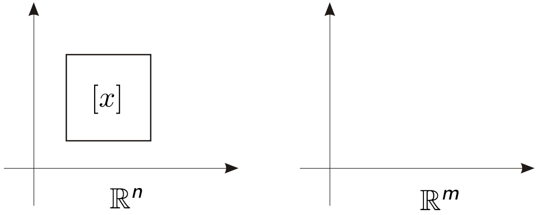
$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.
$[f] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$ est une fonction d'inclusion pour f si

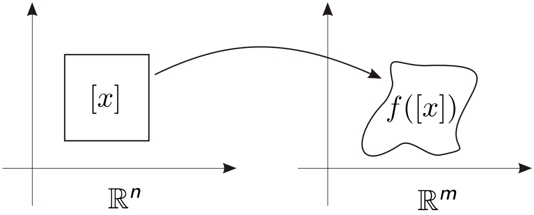
$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.
$[f] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$ est une fonction d'inclusion pour f si

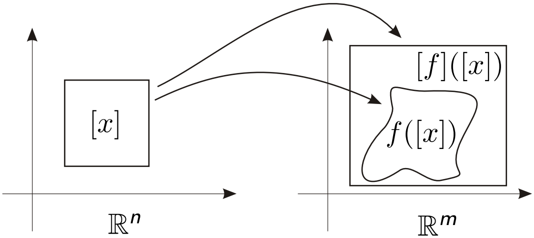
$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



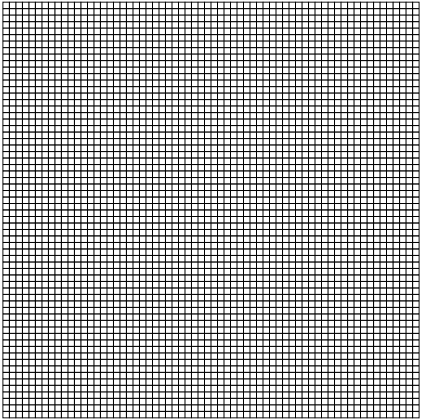
Definition

Soit f une fonction définie de $\mathbb{R}^n$ à valeur dans $\mathbb{R}^m$.
$[f] : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$ est une fonction d'inclusion pour f si

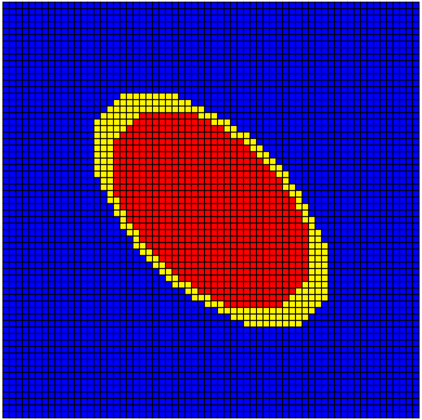
$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-3; 3]^2 | f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$



$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-3; 3]^2 | f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$



$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^{s} \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in D \subset \mathbb{R}^n; f_{i,j}(x) \leq 0\} \text{ où } f_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

où D est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Objectif

- Trouver une approximation garantie de la solution de $f(x) = 0$ avec $x \in [x]$ où $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.
- Montrer l'unicité de cette solution

Moyen

Créer une suite $([x]_n)_n$ définie de façon récurrente (et décroissante) qui contient cette solution

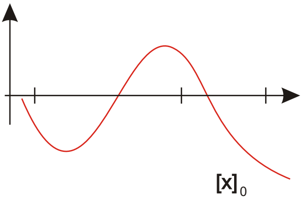
- $[x]_0 = [x]$
- $[x]_{n+1} = [x]_n \cap \rho_{x_1}([x]_n)$

où $\rho_{x_1} : [x] \to \mathbb{R}^n$ avec $\rho_{x_1}(x) = x_1 - Df^{-1}(x)f(x_1)$ et $x_1 \in [x]_n$

Algorithme

- $[x]_0 = [x]$
- $[x]_{n+1} = [x]_n \cap \rho_{x_1}([x]_n)$

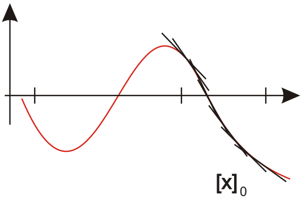
où $\rho_{x_1} : [x] \to \mathbb{R}^n$ avec $\rho_{x_1}(x) = x_1 - Df^{-1}(x)f(x_1)$ et $x_1 \in [x]_n$



Algorithme

- $[x]_0 = [x]$
- $[x]_{n+1} = [x]_n \cap \rho_{x_1}([x]_n)$

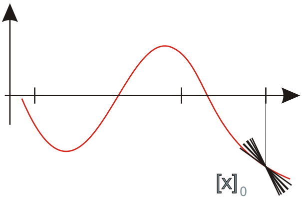
où $\rho_{x_1} : [x] \to \mathbb{R}^n$ avec $\rho_{x_1}(x) = x_1 - Df^{-1}(x)f(x_1)$ et $x_1 \in [x]_n$



Algorithme

- $[x]_0 = [x]$
- $[x]_{n+1} = [x]_n \cap \rho_{x_1}([x]_n)$

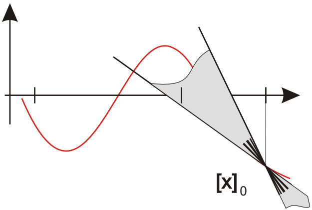
où $\rho_{x_1} : [x] \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $\rho_{x_1}(x) = x_1 - Df^{-1}(x)f(x_1)$ et $x_1 \in [x]_n$



Algorithme

- $[x]_0 = [x]$
- $[x]_{n+1} = [x]_n \cap \rho_{x_1}([x]_n)$

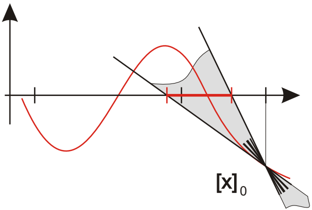
où $\rho_{x_1} : [x] \to \mathbb{R}^n$ avec $\rho_{x_1}(x) = x_1 - Df^{-1}(x)f(x_1)$ et $x_1 \in [x]_n$



Algorithme

- $[x]_0 = [x]$
- $[x]_{n+1} = [x]_n \cap \rho_{x_1}([x]_n)$

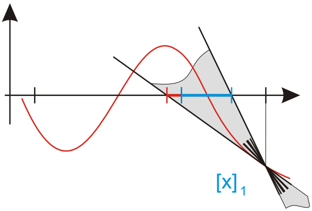
où $\rho_{x_1} : [x] \to \mathbb{R}^n$ avec $\rho_{x_1}(x) = x_1 - Df^{-1}(x)f(x_1)$ et $x_1 \in [x]_n$



Algorithme

- $[x]_0 = [x]$
- $[x]_{n+1} = [x]_n \cap \rho_{x_1}([x]_n)$

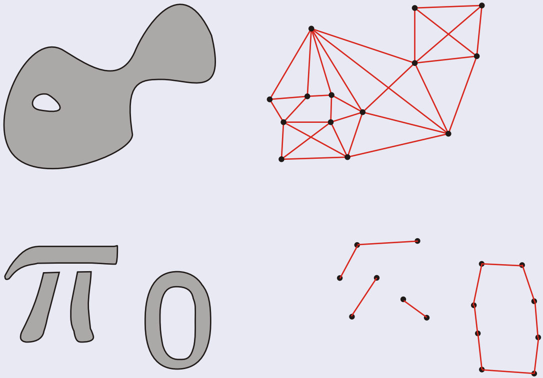
où $\rho_{x_1} : [x] \to \mathbb{R}^n$ avec $\rho_{x_1}(x) = x_1 - Df^{-1}(x)f(x_1)$ et $x_1 \in [x]_n$



Propriétés

Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $x_1 \in [x]$. On suppose que $Df([x]) \subset GL(\mathbb{R}^n)$.

1. $x^* \in [x], f(x^*) = 0 \Rightarrow x^* \in \rho_{x_1}([x])$
2. $\rho_{x_1}([x]) \subset [x] \Rightarrow \exists! x^* \in [x], f(x^*) = 0$

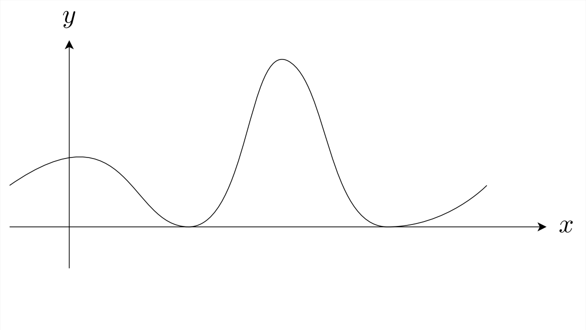


Positivité

Une preuve que $f([x]) \geq 0$.

3 cas :

- $\forall x \in [x], f(x) > 0$: l'analyse par intervalles.
- $\forall x \in [x], f(x) = 0$: le calcul algébrique.
- Dans les autres cas ?


y
x

Le calcul alébrique ne suffit pas . . .

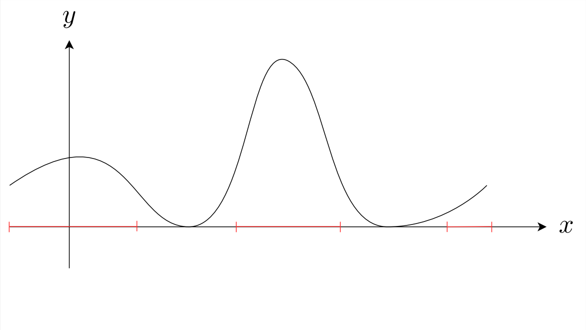
Cas où les fonctions sont non polynomiales.

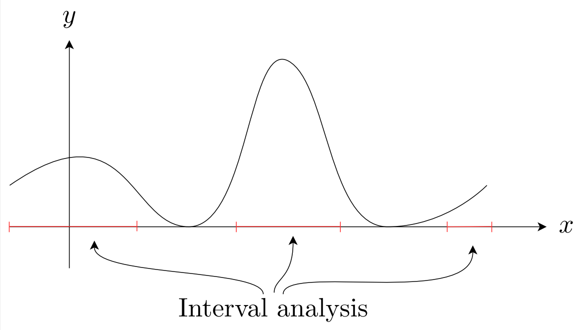
La calcul par intervalle ne suffit pas . . .

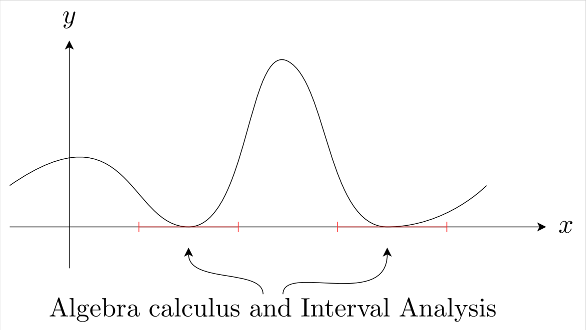
En général, on a seulement :

$$f([x]) \subsetneqq [f]([x]).$$

- multiple occurrence des variables.
- arrondi extérieurs.


y
x


y
x
Interval analysis


y
x
Algebra calculus and Interval Analysis

Théorème

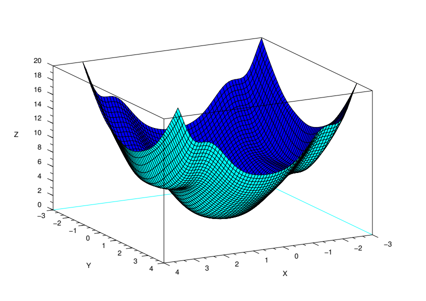
Soit $x_0 \in E$ où E est un convexe de $\mathbb{R}^n$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On a l'implication suivante :

1. $\exists x_0$ tel que $f(x_0) = 0$ et $Df(x_0) = 0$.
2. $\forall x \in E, D^2 f(x) > 0$.

alors $\forall x \in E, f(x) \geq 0$.

Exemple

Pour montrer que $f(x) \geq 0, \forall x \in [-1/2, 1/2]^2$
où $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie par
$f(x, y) = -\cos(x^2 + \sqrt{2}\sin^2 y) + x^2 + y^2 + 1.$

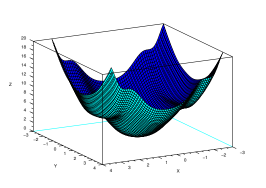


Exemple

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :
$f(x,y) = -\cos(x^2 + \sqrt{2}\sin^2 y) + x^2 + y^2 + 1.$

1. On a : $f(0,0) = 0$ et $\nabla f(0,0) = 0$

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x(\sin(x^2 + \sqrt{2}\sin^2 y) + 1) \\ 2\sqrt{2}\cos y \sin y \sin\left(\sqrt{2}\sin^2 y + x^2\right) + 2y \end{pmatrix}.$$



$$\nabla^2 f = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
a_{1,1} &= 2\sin\left(\sqrt{2}\sin^2 y + x^2\right) \\
&\quad +4x^2\cos\left(\sqrt{2}\sin^2 y + x^2\right) + 2. \\
a_{2,2} &= -2\sqrt{2}\sin^2 y \sin(\sqrt{2}\sin^2 y + x^2) \\
&\quad +2\sqrt{2}\cos^2 y \sin(\sqrt{2}\sin^2 y + x^2) \\
&\quad +8\cos^2 y \sin^2 y \cos(\sqrt{2}\sin^2 y + x^2) + 2. \\
a_{1,2} = a_{2,1} &= \; = 4\sqrt{2}x\cos y \sin y \\
&\quad \cos\left(\sqrt{2}\sin y^2 + x^2\right).
\end{aligned}$$

Le calcul par intervalle donne : $\forall x \in [-1/2, 1/2]^2$, $\nabla^2 f(x) \subset [A]$

$$[A] = \begin{pmatrix} [1.9, 4.1] & [-1.3, 1.4] \\ [-1.3, 1.4] & [1.9, 5.4] \end{pmatrix}.$$

Reste à vérifier que : $\forall A \in [A]$, A est définie positive.

Définition

Une matrice symétrique A est définie positive si

$$\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, x^T A x > 0$$

On note par S^{n+} l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques définie positive.

Definition

Un ensemble de matrices symétriques $[A]$ est un intervalle de matrices symétriques si :

$$[A] = \{(a_{ij})_{ij}, a_{ij} = a_{ji}, a_{ij} \in [a]_{ij}\}$$

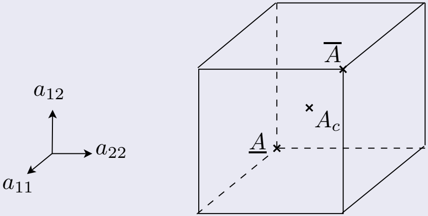
i.e.

$$[\underline{A}, \overline{A}] = \left\{A \text{ symmetric}, \ \underline{A} \leq A \leq \overline{A}\right\}.$$

Exemple

Dans $\mathbb{R}^2$, une matrice symétrique A

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{1,2} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

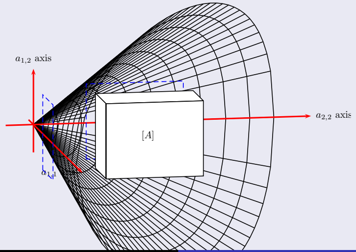


Remarque - Rohn

Soit $V([A])$ l'ensemble des coins de $[A]$. S^{n+} et $[A]$ sont des convexes de S^n :

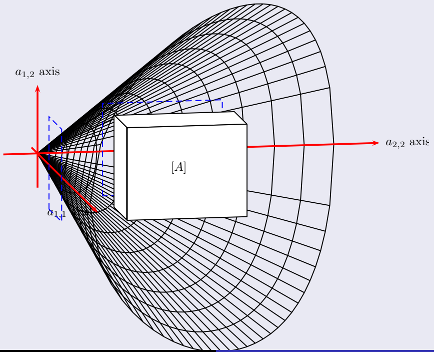
$$[A] \subset S^{n+} \Leftrightarrow V([A]) \subset S^{n+}$$

S^n est un espace vectortiel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.
$\#V([A]) = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.



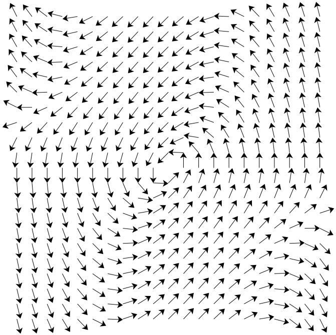
Théorème- Adefeld

Soit $[A]$ une matrice intervalle symétrique.
et $C = \{z \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } |z_i| = 1\}$
Si $\forall z \in C$, $A_z = A_c + \mathrm{Diag}(z)\Delta\mathrm{Diag}(z)$ est définie positive.
alors $[A]$ est définie positive.



Considérons le système dynamique suivant :

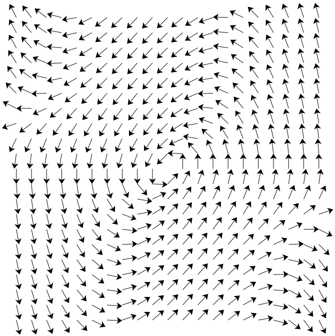
$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \quad \text{où } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n). \tag{1}$$



Définition

Soit $x \in \mathbb{R}$, x est un *point d'équilibre* si :

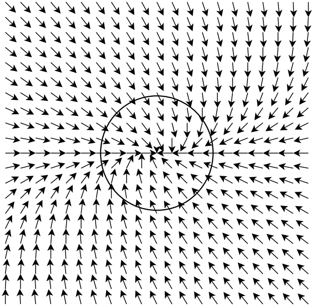
$$f(x) = 0$$



Définition

Un ensemble D est *stable* si :

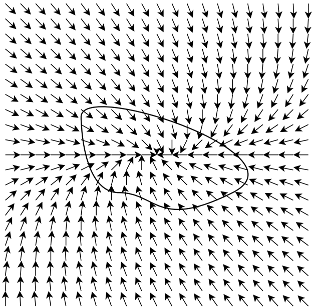
$$\phi^{\mathbb{R}^+}(D) \subset D$$



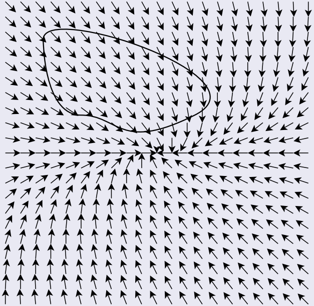
Définition

Un ensemble D est *stable* si :

$$\phi^{\mathbb{R}^+}(D) \subset D$$



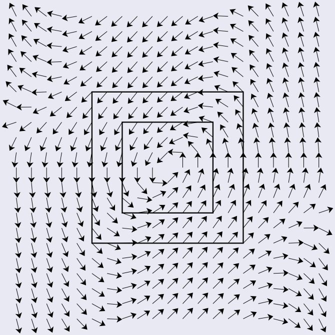
Exemple d'ensemble non stable



Définition

Un point d'équilibre x_∞ est *asymptotiquement* (D, D_0)*-stable* si

- $\phi^{\mathbb{R}^+}(D) \subset D_0$
- $\phi^{\infty}(D) = \{x_\infty\}$



$D \subset D_0$

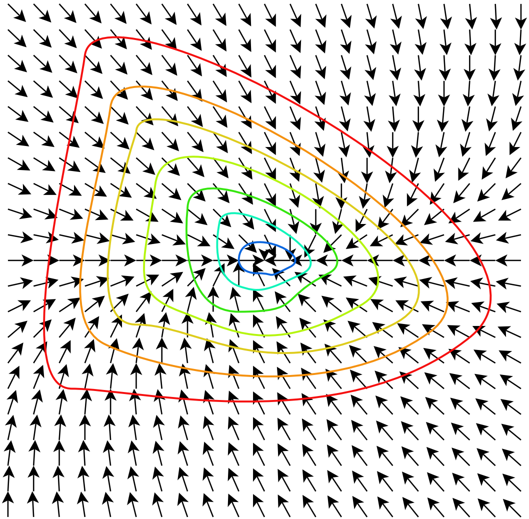
Definition

On dit que la fonction $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de Lyapunov pour (**??**) si :

1. $L(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_\infty$
2. $x \in D - \{x_\infty\} \Rightarrow L(x) > 0$
3. $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0, \ \forall x \in D - \{x_\infty\}$

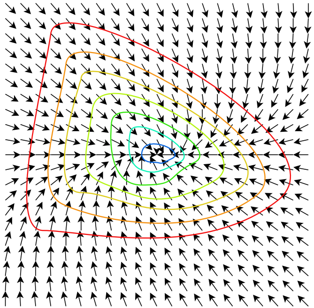
Avec $V : t \mapsto L(x(t))$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V(t) &= \frac{d}{dt}(L(x(t))) \\ &= \frac{d}{dx} L \cdot \frac{d}{dt} x(t) \\ &= \langle \nabla L(x), f(x(t)) \rangle < 0 \end{aligned}$$



Théorème de Lyapunov

Soit D' un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^n$ et x_∞ à l'intérieur de D'.
Si $L : D' \rightarrow \mathbb{R}$ est de Lyapunov pour (**??**) alors
il existe un sous ensemble $D(\neq \{x_\infty\})$ de D' tel que le point d'équilibre x_∞ soit asymptotiquement D, D'-stable.



Pour les systèmes linéaires :

$$\dot{x} = Ax \tag{2}$$

On pose $L = x^T W x$ avec $W \in S^n$.
donc $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle = x^T(A^T W + WA)x$.

Dans ce cas, les conditions Lyapunov se réécrivent :

1. $W \in S^{n+}$.
2. $-(A^T W + WA) \in S^{n+}$.

Dans le cas linéaire, pour trouver une fonction de Lyapunov pour **??**, on résoud le système d'équations d'inconnues W

$$A^T W + WA = -I$$

et on vérifie que $W \in S^{n+}$.

Théorème

Le système $\dot{x} = Ax$ est asymptotiquement stable si et seulement si pour tout $Q \in S^{n+}$, la matrice W solution de

$$A^T W + WA = -Q$$

est définie positive.

Exemple

Le système

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Algorithme

1. Montrer que $[x_0]$ contient un unique point d'équilibre x_∞.
2. Trouver $[x_\infty] \subset [x_0]$ qui contient x_∞.
3. Linéariser le système autour d'une approximation $\tilde{x}_\infty$.
4. Trouver une fonction de Lyapunov L_{x_∞} pour le système linéarisé.
5. Vérifier que L_{x_∞} est aussi de Lyapunov pour $\dot{x} = f(x)$.

Explications

Etape 4 : $L_{x_\infty}(x) = (x - x_\infty)^T W_{\tilde{x}_\infty}(x - x_\infty)$

Etape 5 : Il reste à vérifier :

$$g_{x_\infty}(x) = -\langle \nabla L_{x_\infty}(x), f(x) \rangle \geq 0$$

On a :

- $g(x_\infty) = 0$
- $\nabla g_{x_\infty}(x_\infty) = 0$

En accord avec le théorème de positivité, on a seulement à vérifier :

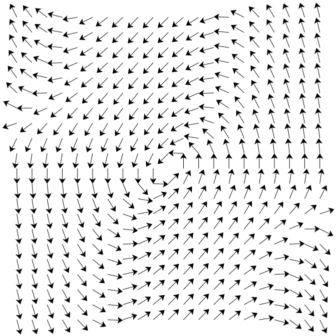
$$\nabla^2 g_{x_\infty}([x_0]) \subset S^{n+}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * (x^2 + y^2 - 1) \\ (x^2 + y^2 - 1)y + x \end{pmatrix}$$

où $[x_0] = [-0.6, 0.6]^2$.

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \text{ où } f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n). \tag{3}$$



Soit $\{\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_t$ le flot associé à cette équation différentielle.
Il existe une méthode donnant une fonction d'inclusion de φ^t.

Proposition

Si $[x]$ et $[\tilde{x}]$ sont deux éléments de $\mathbb{IR}^n$ et $h \in \mathbb{R}$ telles que

$$[x] + [0, h] f([\tilde{x}]) \subset [\tilde{x}]$$

alors

$$\forall t \in [0, h], \varphi^t([x]) \subset [\tilde{x}]$$

Preuve : théorème du point fixe de Banach et l'opérateur de Picard-Linderlöf.

Soit $\{\varphi^t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_t$ le flot associé à cette équation différentielle. Il existe une méthode donnant une fonction d'inclusion pour φ^t.

Proposition

Si $[x]$ et $[\tilde{x}]$ sont deux éléments de $\mathbb{IR}^n$ telles que

$$[x] + [0, h]f([\tilde{x}]) \subset [\tilde{x}]$$

alors

$$\varphi^t([x]) \subset [x] + tf([\tilde{x}])$$

Remarque

En pratique, on utilise des méthodes beaucoup plus sophitiquées.

Soit t un réel.

1. Créer un recouvrement $\{\mathbb{S}_i\}_{i\in I}$ de $\mathbb{S}$.
2. Mettre en relation les éléments de I avec :

$$i_1 \mathcal{R} i_2 \ \Leftrightarrow \varphi^t(\mathbb{S}_{i_1}) \cap \mathbb{S}_{i_2} \neq \emptyset.$$

Algorithme

1. Montrer que $[x_0]$ contient un unique point d'équilibre x_∞.
2. Créer un recouvrement $\{\mathbb{S}_i\}_{i\in I}$ de $[x_0]$.
3. Calculer un ensemble A qui est inclu dans le bassin d'attraction de x_∞ (méthode de Lyapunov).
4. Mettre en relation les élements de ce recouvrement avec $\mathcal{R}$.
5. Pour chaque élément $\mathbb{S}_{i_0}$ de $\{\mathbb{S}_i\}_{i\in I}$, si

$$i_0 \mathcal{R} i_1 \Rightarrow \mathbb{S}_{i_1} \subset A$$

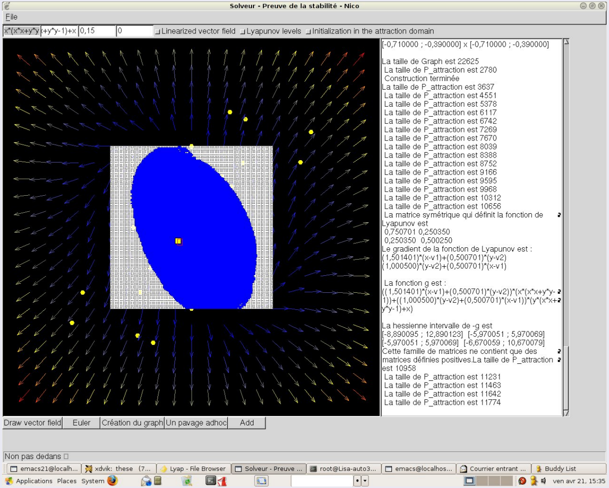
alors $A := A \cup \mathbb{S}_{i_1}$.

Exemple

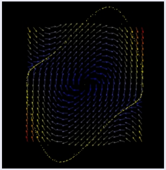
$$\begin{pmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * (x^2 + y^2 - 1) \\ (x^2 + y^2 - 1)y + x \end{pmatrix}$$

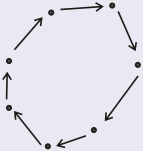
où $[x_0] = [-0.6, 0.6]^2$.

Exemple 1


Solveur - Preuve de la stabilité - Nico
File
x*(x*x+y*y+y*y-1)+x
0,15
0
Linearized vector field
Lyapunov levels
Initialization in the attraction domain
[-0,710000 ; -0,390000] x [-0,710000 ; -0,390000]
La taille de Graph est 22625
La taille de P_attraction est 2780
Construction terminée
La taille de P_attraction est 3637
La taille de P_attraction est 4551
La taille de P_attraction est 5378
La taille de P_attraction est 6117
La taille de P_attraction est 6742
La taille de P_attraction est 7269
La taille de P_attraction est 7670
La taille de P_attraction est 8039
La taille de P_attraction est 8388
La taille de P_attraction est 8752
La taille de P_attraction est 9166
La taille de P_attraction est 9595
La taille de P_attraction est 9968
La taille de P_attraction est 10312
La taille de P_attraction est 10656
La matrice symétrique qui définit la fonction de Lyapunov est
0,750701 0,250350
0,250350 0,500250
Le gradient de la fonction de Lyapunov est :
(1,501401)*(x-v1)+(0,500701)*(y-v2)
(1,000500)*(y-v2)+(0,500701)*(x-v1)
La fonction g est :
((1,501401)*(x-v1)+(0,500701)*(y-v2))*(x*(x*x+y*y-1))+((1,000500)*(y-v2)+(0,500701)*(x-v1))*(y*(x*x+y*y-1)+x)
La hessienne intervalle de -g est
[-8,890095 ; 12,890123] [-5,970051 ; 5,970069]
[-5,970051 ; 5,970069] [-6,670059 ; 10,670079]
Cette famille de matrices ne contient que des matrices définies positives.La taille de P_attraction est 10958
La taille de P_attraction est 11231
La taille de P_attraction est 11463
La taille de P_attraction est 11642
La taille de P_attraction est 11774
Draw vector field
Euler
Création du graph
Un pavage adhoc
Add
Non pas dedans
emacs21@localh...
xdvik: these (7...
Lyap - File Browser
Solveur - Preuve ...
root@Lisa-auto3...
emacs@localhos...
Courrier entrant ...
Buddy List
Applications Places System
ven avr 21, 15:35

Perspectives





- Merci pour votre attention !