

# Optimisation globale de l'information mutuelle sur un canal quantique

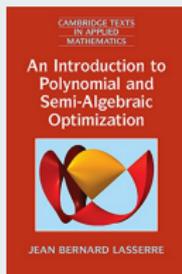
Nicolas DELANOUE, François CHAPEAU-BLONDEAU

LARIS - Université d'Angers - France

ROADEF, 20-23 février 2023, Rennes

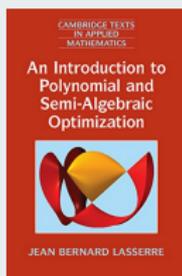


## Optimisation polynomiale sur un ensemble semi-algébrique.



Soient les polynômes  $p, g_j \in \mathbb{R}[x]$ ,

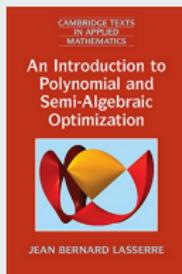
## Optimisation polynomiale sur un ensemble semi-algébrique.



Soient les polynômes  $p, g_j \in \mathbb{R}[x]$ ,

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & p(x) \\ \text{tel que} \quad & g_j(x) \leq 0, \forall j \in 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

## Optimisation polynomiale sur un ensemble semi-algébrique.



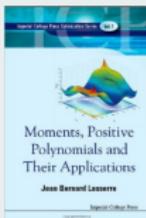
Soient les polynômes  $p, g_j \in \mathbb{R}[x]$ ,

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & p(x) \\ \text{tel que} \quad & g_j(x) \leq 0, \forall j \in 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1)$$

## Ingrédients de cette approche

- Sum of square,
- Théorème de Putinar,
- Dualité de Riesz,
- Théorie de la mesure,
- Hiérarchie de Lasserre.
- ...

## Problème généralisé des moments



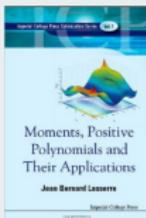
$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \int_X \varphi(x) d\mu$$

tel que  $\int_X \psi(x) d\mu \leq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$

Ce formalisme permet de modéliser les problèmes suivants :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,
- concevoir un détecteur quantique optimal,
- ...

## Problème généralisé des moments



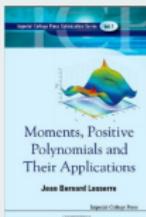
$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \int_X \varphi(x) d\mu$$

tel que  $\int_X \psi(x) d\mu \leq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$

Ce formalisme permet de modéliser les problèmes suivants :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,  
[N. Delanoue et al.. Numerical enclosures of the optimal cost of the Kantorovitch's mass transportation problem, Computational Optimization and Applications, Springer 2016](#)
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,
- concevoir un détecteur quantique optimal,
- ...

## Problème généralisé des moments



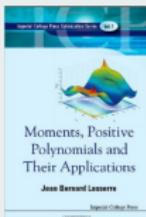
$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \int_X \varphi(x) d\mu$$

tel que  $\int_X \psi(x) d\mu \leq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$

Ce formalisme permet de modéliser les problèmes suivants :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,  
[N. Delanoue et al.. Numerical enclosures of the optimal cost of the Kantorovitch's mass transportation problem, Computational Optimization and Applications, Springer 2016](#)
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,  
[N. Delanoue et al.. Nonlinear optimal control : A numerical scheme based on occupation measures and interval analysis, Computational Optimization and Applications, Springer, 2020](#)
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,
- concevoir un détecteur quantique optimal,
- ...

## Problème généralisé des moments



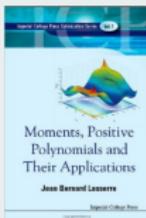
$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \int_X \varphi(x) d\mu$$

tel que  $\int_X \psi(x) d\mu \leq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$

Ce formalisme permet de modéliser les problèmes suivants :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,  
N. Delanoue *et al.*. *Version tropicale du théorème de Putinar. Applications à l'optimisation globale*, RoadeF Lyon 2022.
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,  
N. Delanoue *et al.*. *Numerical enclosures of the optimal cost of the Kantorovitch's mass transportation problem*, *Computational Optimization and Applications*, Springer 2016
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,  
N. Delanoue *et al.*. *Nonlinear optimal control : A numerical scheme based on occupation measures and interval analysis*, *Computational Optimization and Applications*, Springer, 2020
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,
- concevoir un détecteur quantique optimal,
- ...

## Problème généralisé des moments



$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \int_X \varphi(x) d\mu$$

tel que  $\int_X \psi(x) d\mu \leq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$

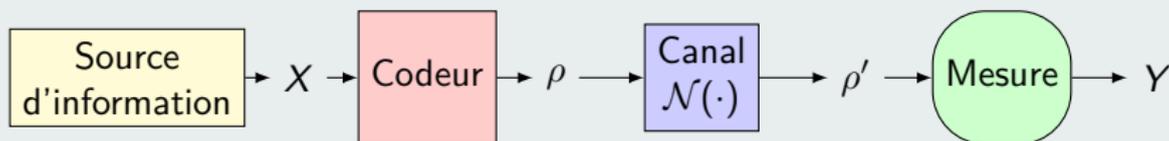
Ce formalisme permet de modéliser les problèmes suivants :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,  
N. Delanoue *et al.*. Version tropicale du théorème de Putinar. Applications à l'optimisation globale, RoadeF Lyon 2022.
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,  
N. Delanoue *et al.*. Numerical enclosures of the optimal cost of the Kantorovitch's mass transportation problem, Computational Optimization and Applications, Springer 2016
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,  
N. Delanoue *et al.*. Nonlinear optimal control : A numerical scheme based on occupation measures and interval analysis, Computational Optimization and Applications, Springer, 2020
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ ,
- concevoir un détecteur quantique optimal,  
**Maintenant**
- ...

# Table des matières

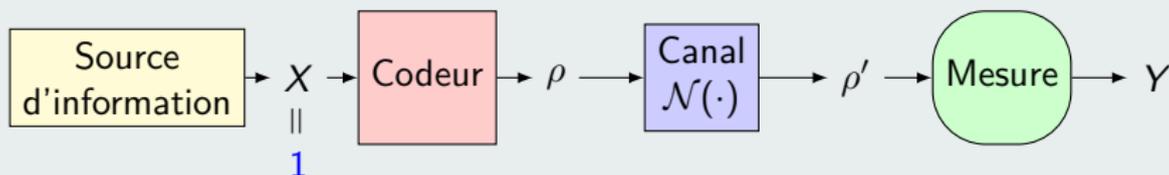
- 1 Canal quantique
  - Canal de transmission
  - Entropie et information mutuelle
  - Cas quantique
- 2 Optimisation globale
  - Le calcul par intervalles
  - Algorithme de Branch and Bound
- 3 Détecteur optimal
  - Convexité de l'information mutuelle
  - Contraintes et condition nécessaire d'optimalité
- 4 Conclusion

## Canal de transmission



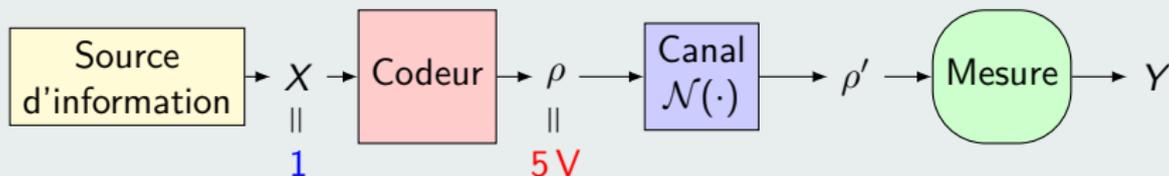
- Une **source d'information** émet un symbole  $X$  prenant les valeurs  $x_j$  avec les probabilités a priori  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ .
- Chaque symbole  $x_j$  est **encodé** par un état  $\rho_j$ .
- Le **canal** réalise une transformation d'une entrée  $\rho$  en une sortie  $\rho' = \mathcal{N}(\rho)$ .
- En sortie du canal, on réalise une **mesure** via un détecteur qui produit un symbole  $Y$  prenant les valeurs  $y_k$ .

## Canal de transmission



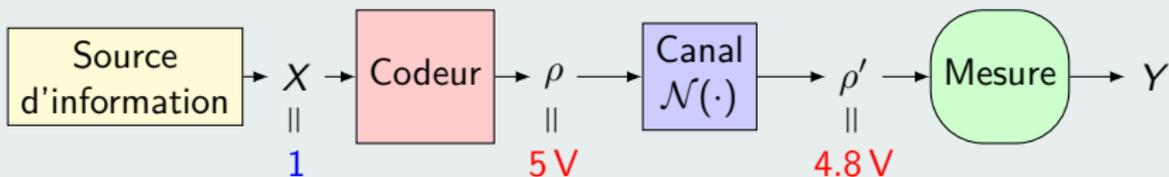
- Une **source d'information** émet un symbole  $X$  prenant les valeurs  $x_j$  avec les probabilités a priori  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ .
- Chaque symbole  $x_j$  est **encodé** par un état  $\rho_j$ .
- Le **canal** réalise une transformation d'une entrée  $\rho$  en une sortie  $\rho' = \mathcal{N}(\rho)$ .
- En sortie du canal, on réalise une **mesure** via un détecteur qui produit un symbole  $Y$  prenant les valeurs  $y_k$ .

## Canal de transmission



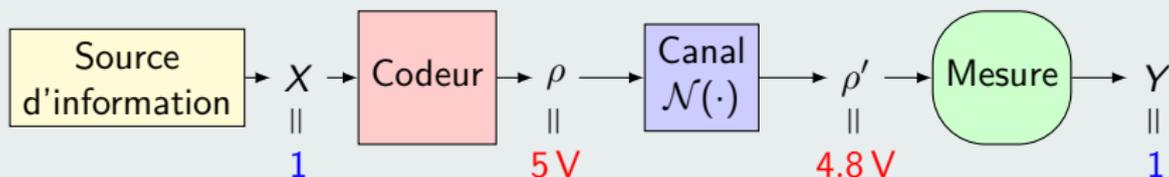
- Une **source d'information** émet un symbole  $X$  prenant les valeurs  $x_j$  avec les probabilités a priori  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ .
- Chaque symbole  $x_j$  est **encodé** par un état  $\rho_j$ .
- Le **canal** réalise une transformation d'une entrée  $\rho$  en une sortie  $\rho' = \mathcal{N}(\rho)$ .
- En sortie du canal, on réalise une **mesure** via un détecteur qui produit un symbole  $Y$  prenant les valeurs  $y_k$ .

## Canal de transmission



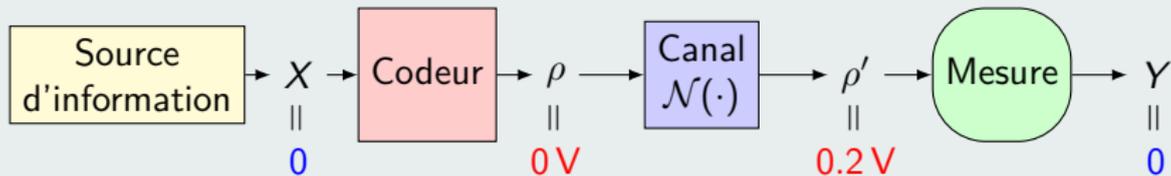
- Une **source d'information** émet un symbole  $X$  prenant les valeurs  $x_j$  avec les probabilités a priori  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ .
- Chaque symbole  $x_j$  est **encodé** par un état  $\rho_j$ .
- Le **canal** réalise une transformation d'une entrée  $\rho$  en une sortie  $\rho' = \mathcal{N}(\rho)$ .
- En sortie du canal, on réalise une **mesure** via un détecteur qui produit un symbole  $Y$  prenant les valeurs  $y_k$ .

## Canal de transmission

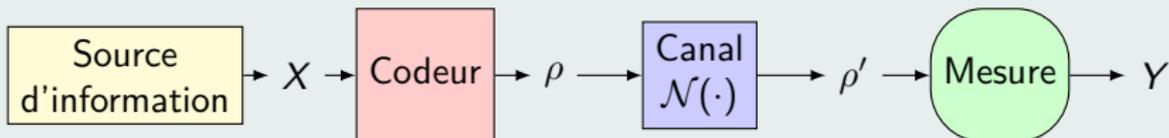


- Une **source d'information** émet un symbole  $X$  prenant les valeurs  $x_j$  avec les probabilités a priori  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ .
- Chaque symbole  $x_j$  est **encodé** par un état  $\rho_j$ .
- Le **canal** réalise une transformation d'une entrée  $\rho$  en une sortie  $\rho' = \mathcal{N}(\rho)$ .
- En sortie du canal, on réalise une **mesure** via un détecteur qui produit un symbole  $Y$  prenant les valeurs  $y_k$ .

## Canal de transmission



## Canal de transmission



## Modèle probabiliste

Pour un signal d'entrée  $X$  pouvant prendre les valeurs  $x_1, \dots, x_j$  et un signal de sortie  $Y$  prenant les valeurs  $y_1, \dots, y_k$ , la matrice de transition  $(p_{jk})$  est définie par

$$p_{jk} = \Pr\{Y = y_k \mid X = x_j\} \quad (2)$$

## Exemple 1

$$p_{jk} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

## Exemple 2

$$p_{jk} = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{pmatrix}$$

## Définition

Pour une source  $X$ , qui est une variable aléatoire discrète, avec  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ , l'entropie  $H$  de la source  $X$  est :

$$H(X) = - \sum_{j=1}^n p_j \log p_j. \quad (3)$$

## Définition

Pour une source  $X$ , qui est une variable aléatoire discrète, avec  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ , l'entropie  $H$  de la source  $X$  est :

$$H(X) = - \sum_{j=1}^n p_j \log p_j. \quad (3)$$

## Exemple 3

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0$  et  $\Pr\{X = 1\} = 1$ ,

## Définition

Pour une source  $X$ , qui est une variable aléatoire discrète, avec  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ , l'entropie  $H$  de la source  $X$  est :

$$H(X) = - \sum_{j=1}^n p_j \log p_j. \quad (3)$$

## Exemple 3

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0$  et  $\Pr\{X = 1\} = 1$ , alors  $H(X) = 0$ .

## Définition

Pour une source  $X$ , qui est une variable aléatoire discrète, avec  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ , l'entropie  $H$  de la source  $X$  est :

$$H(X) = - \sum_{j=1}^n p_j \log p_j. \quad (3)$$

## Exemple 3

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0$  et  $\Pr\{X = 1\} = 1$ , alors  $H(X) = 0$ .

## Exemple 4

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0.3$  et  $\Pr\{X = 1\} = 0.7$ ,

## Définition

Pour une source  $X$ , qui est une variable aléatoire discrète, avec  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ , l'entropie  $H$  de la source  $X$  est :

$$H(X) = - \sum_{j=1}^n p_j \log p_j. \quad (3)$$

## Exemple 3

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0$  et  $\Pr\{X = 1\} = 1$ , alors  $H(X) = 0$ .

## Exemple 4

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0.3$  et  $\Pr\{X = 1\} = 0.7$ , alors  $H(X) \approx 0.88$

### Définition

Pour une source  $X$ , qui est une variable aléatoire discrète, avec  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ , l'entropie  $H$  de la source  $X$  est :

$$H(X) = - \sum_{j=1}^n p_j \log p_j. \quad (3)$$

### Exemple 3

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0$  et  $\Pr\{X = 1\} = 1$ , alors  $H(X) = 0$ .

### Exemple 4

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0.3$  et  $\Pr\{X = 1\} = 0.7$ , alors  $H(X) \approx 0.88$

### Exemple 5

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0.5$  et  $\Pr\{X = 1\} = 0.5$ ,

### Définition

Pour une source  $X$ , qui est une variable aléatoire discrète, avec  $p_j = \Pr\{X = x_j\}$ , l'entropie  $H$  de la source  $X$  est :

$$H(X) = - \sum_{j=1}^n p_j \log p_j. \quad (3)$$

### Exemple 3

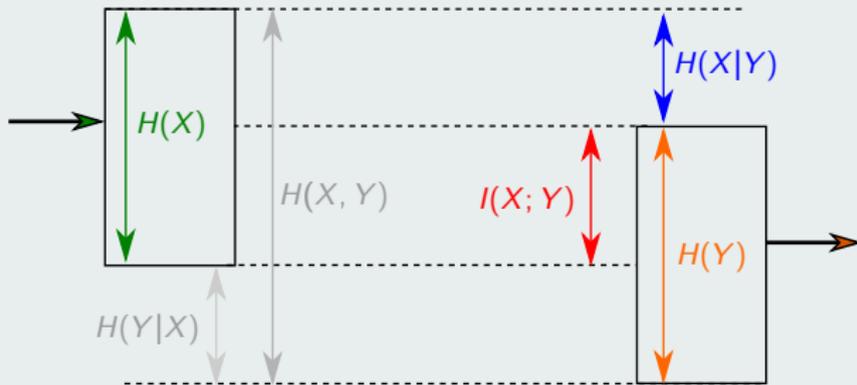
Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0$  et  $\Pr\{X = 1\} = 1$ , alors  $H(X) = 0$ .

### Exemple 4

Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0.3$  et  $\Pr\{X = 1\} = 0.7$ , alors  $H(X) \approx 0.88$

### Exemple 5

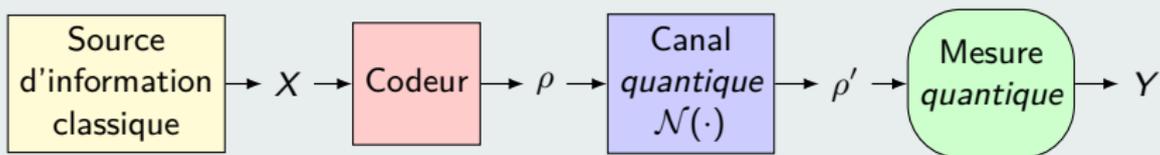
Soit  $X$  t.q.  $\Pr\{X = 0\} = 0.5$  et  $\Pr\{X = 1\} = 0.5$ , alors  $H(X) = 1$ .



- $H(X)$  est la quantité d'information émise,
- $H(X|Y)$  est l'information requise pour supprimer l'ambiguïté sur l'entrée,

### Définition

La quantité d'information transmise est l'information mutuelle  $I(X; Y) = H(X) - H(X|Y)$ .

Canal de communication *quantique*

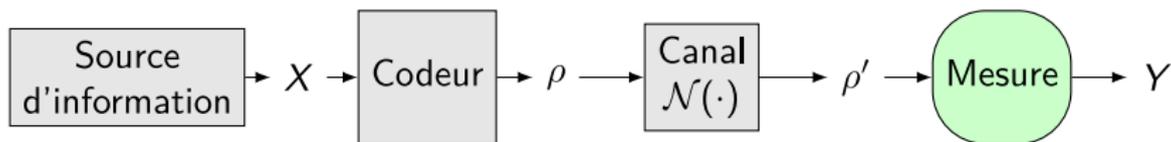
- *Source* :  $X$  avec  $\Pr(X = x_j) = p_j$ ,
- *Codeur* : chaque état quantique  $\rho_j$  est un opérateur densité, i.e. une matrice Hermitienne telle que  $\text{tr}(\rho_j) = 1$  et  $\rho_j \succeq 0$ ,
- *Canal* :

$$\rho' = \mathcal{N}(\rho) = \sum_{\ell} \Lambda_{\ell} \rho \Lambda_{\ell}^{\dagger}, \quad (4)$$

avec  $\{\Lambda_{\ell}\}$  les opérateurs de Kraus dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H}_N)$ .

- *Mesure quantique* :  $\{E_k\}_k$  d'opérateurs positifs tels que  $\sum E_k = \text{Id}$ .  
On a :

$$\Pr\{Y = y_k | X = x_j\} = \text{tr}(\rho'_j E_k), \quad (5)$$



### Objectif de cet exposé

Étant donné une source, un codeur, et un canal *quantique*  $\mathcal{N}(\cdot)$ , trouver un détecteur *quantique*  $\{E_k\}_k$  qui maximise  $I(X; Y(\{E_k\}_k))$ .

### Formellement

$$\begin{aligned} & \max_{\{E_k\}_k \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)} I(X; Y(\{E_k\}_k)) \\ & \text{tel que} \quad \sum_k E_k = \text{Id} \text{ et } E_k \succeq 0. \end{aligned} \tag{6}$$

### Remarque

Le problème (6) est un problème de programmation non linéaire.

## Une instance

- Entrée**
- $X$  génère  $x_1$  et  $x_2$  avec les probabilités a priori  $p_1 = 0.3$ ,  $p_2 = 0.7$ .
  - Les symboles  $x_1$  et  $x_2$  sont codés respectivement  
$$\rho_1 = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{15} \\ \sqrt{15} & 15 \end{pmatrix} \text{ et } \rho_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
  - On considère le canal sans bruit, *i.e.*  $\mathcal{N}(\rho) = \rho$ .

**Variables**  $E_1, E_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$

**Contraintes**  $E_1 + E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $E_k \succeq 0$ .

**Objectif**  $\max_{E_1, E_2} I(X; Y(E_1, E_2))$

## Une instance concrète

**Variables**  $a, b, d$ , en effet  $E_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \text{Id} - E_1$ ,

**Contraintes** Critères de Sylvester pour  $E_1 \succeq 0$  et  $E_2 \succeq 0$ ,

## Une instance concrète

**Variables**  $a, b, d$ , en effet  $E_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \text{Id} - E_1$ ,

**Contraintes** Critères de Sylvester pour  $E_1 \succeq 0$  et  $E_2 \succeq 0$ ,  
 $a \geq 0$ ,  
 $ad - b^2 \geq 0$ ,

## Une instance concrète

**Variables**  $a, b, d$ , en effet  $E_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \text{Id} - E_1$ ,

**Contraintes** Critères de Sylvester pour  $E_1 \succeq 0$  et  $E_2 \succeq 0$ ,

$$a \geq 0,$$

$$ad - b^2 \geq 0,$$

$$(1 - a) \geq 0,$$

$$(1 - a)(1 - d) - b^2 \geq 0,$$

## Une instance concrète

**Variables**  $a, b, d$ , en effet  $E_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix}$ ,  $E_2 = \text{Id} - E_1$ ,

**Contraintes** Critères de Sylvester pour  $E_1 \succeq 0$  et  $E_2 \succeq 0$ ,

$$a \geq 0,$$

$$ad - b^2 \geq 0,$$

$$(1 - a) \geq 0,$$

$$(1 - a)(1 - d) - b^2 \geq 0,$$

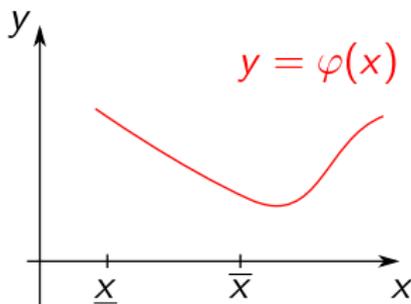
**Objectif** Maximiser

$$\begin{aligned} & -x \log x \left( \frac{101d}{160} + \frac{3\sqrt{15}b}{80} + \frac{7b}{10} + \frac{59a}{160} \right) + x \log x \left( \frac{7d}{20} + \frac{7b}{10} + \frac{7a}{20} \right) \\ & + x \log x \left( \frac{9d}{32} + \frac{3\sqrt{15}b}{80} + \frac{3a}{160} \right) - x \log x \left( \frac{101(1-d)}{160} - \frac{3\sqrt{15}b}{80} - \frac{7b}{10} + \frac{59(1-a)}{160} \right) \\ & + x \log x \left( \frac{7(1-d)}{20} - \frac{7b}{10} + \frac{7(1-a)}{20} \right) + x \log x \left( \frac{9(1-d)}{32} - \frac{3\sqrt{15}b}{80} + \frac{3(1-a)}{160} \right) \\ & - x \log x \left( \frac{7}{10} \right) - x \log x \left( \frac{3}{10} \right) \end{aligned}$$

## Définition

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, la fonction  $[\varphi] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$  est une *fonction d'inclusion* pour  $\varphi$  si

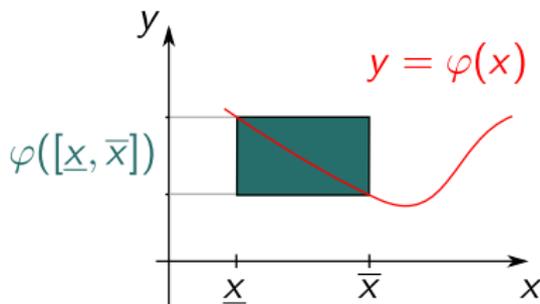
$$\forall [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{IR}, \varphi([\underline{x}, \bar{x}]) \subset [\varphi]([\underline{x}, \bar{x}]).$$



## Définition

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, la fonction  $[\varphi] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$  est une *fonction d'inclusion* pour  $\varphi$  si

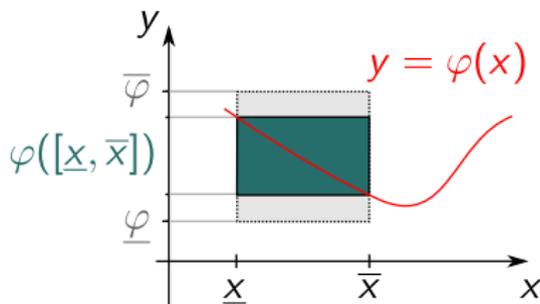
$$\forall [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{IR}, \varphi([\underline{x}, \bar{x}]) \subset [\varphi]([\underline{x}, \bar{x}]).$$



## Définition

Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction, la fonction  $[\varphi] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$  est une *fonction d'inclusion* pour  $\varphi$  si

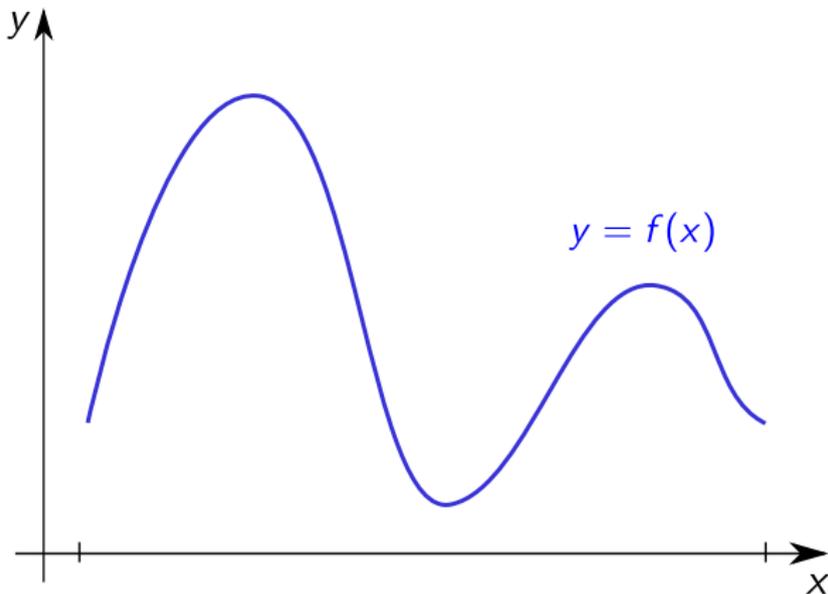
$$\forall [\underline{x}, \bar{x}] \in \mathbb{IR}, \varphi([\underline{x}, \bar{x}]) \subset [\varphi]([\underline{x}, \bar{x}]).$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

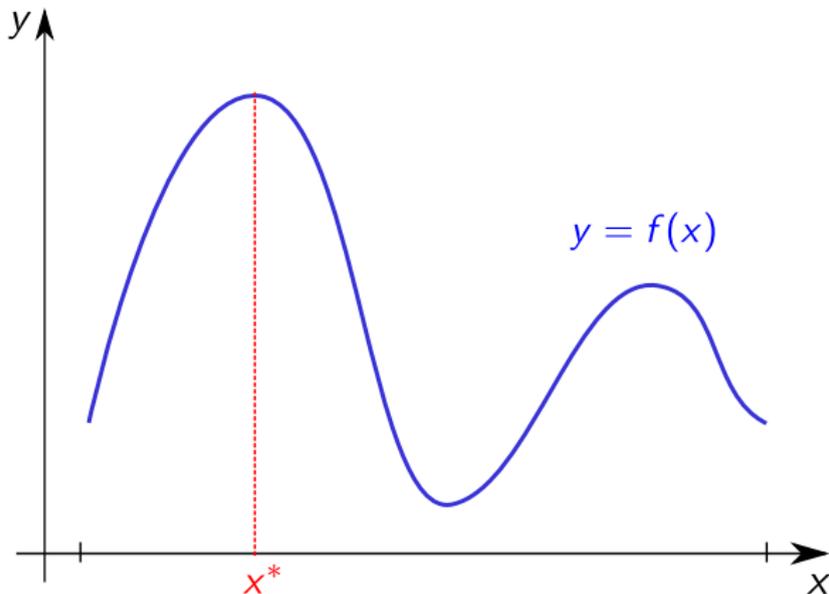
$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

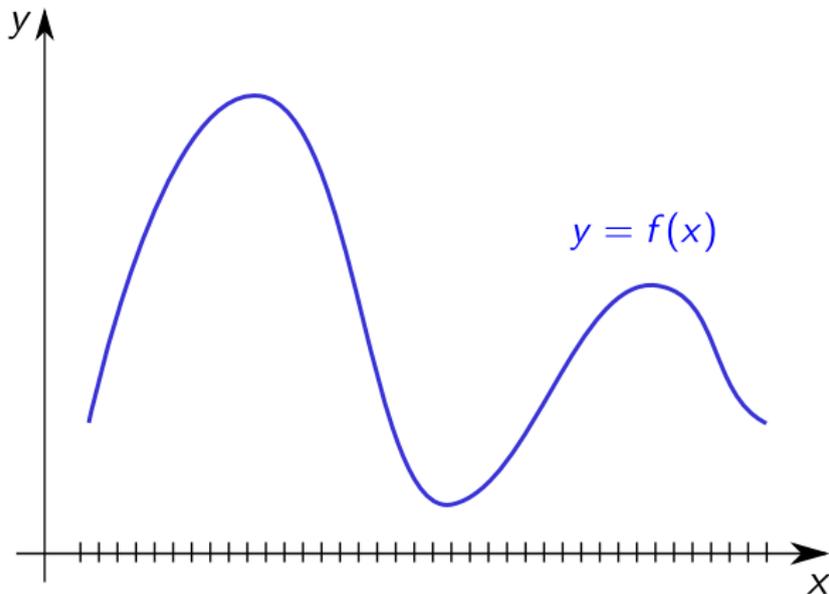
$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

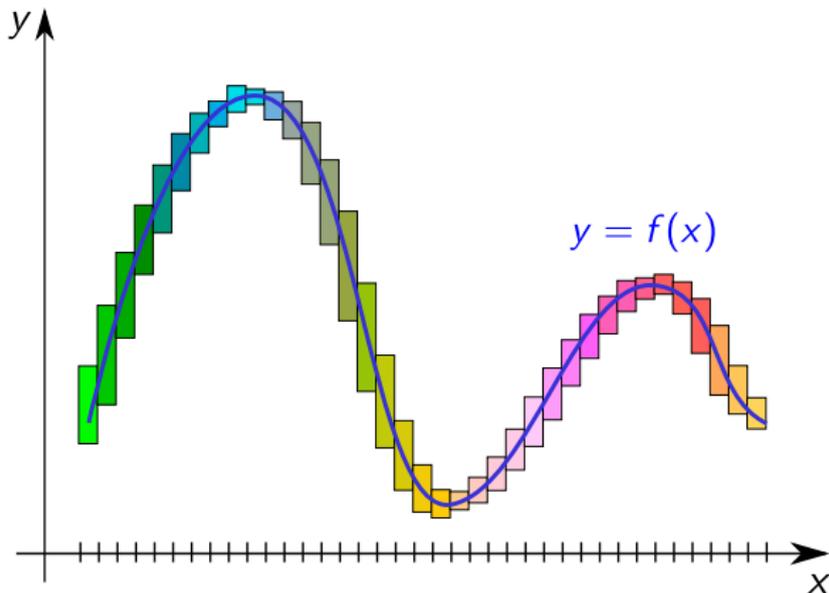
$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

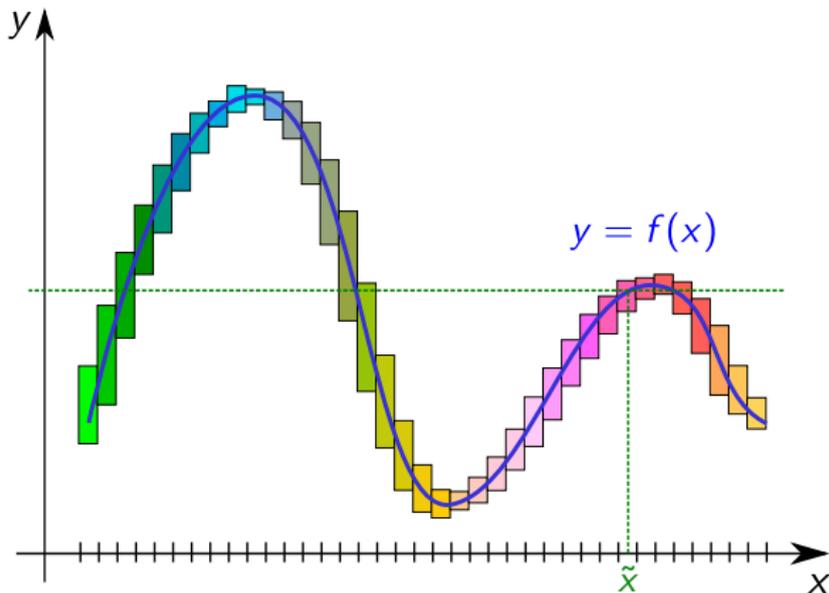
$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

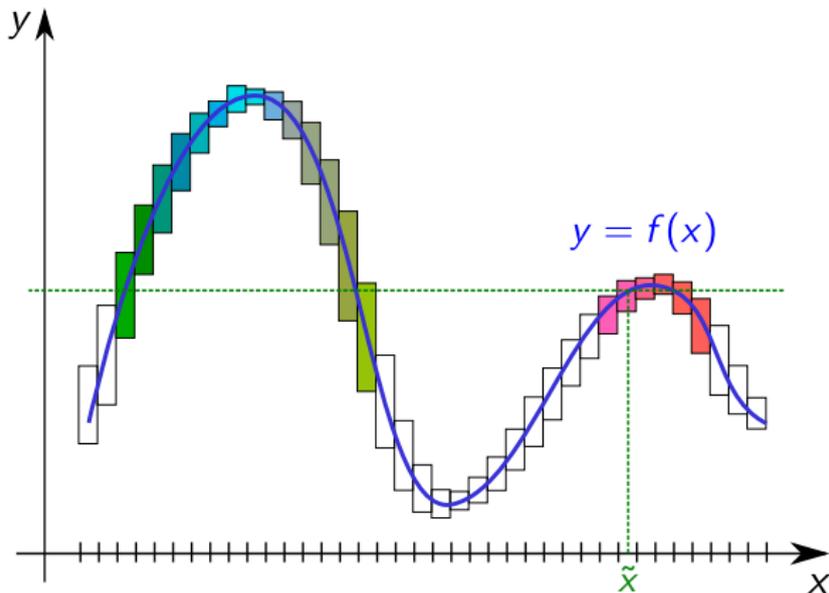
$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

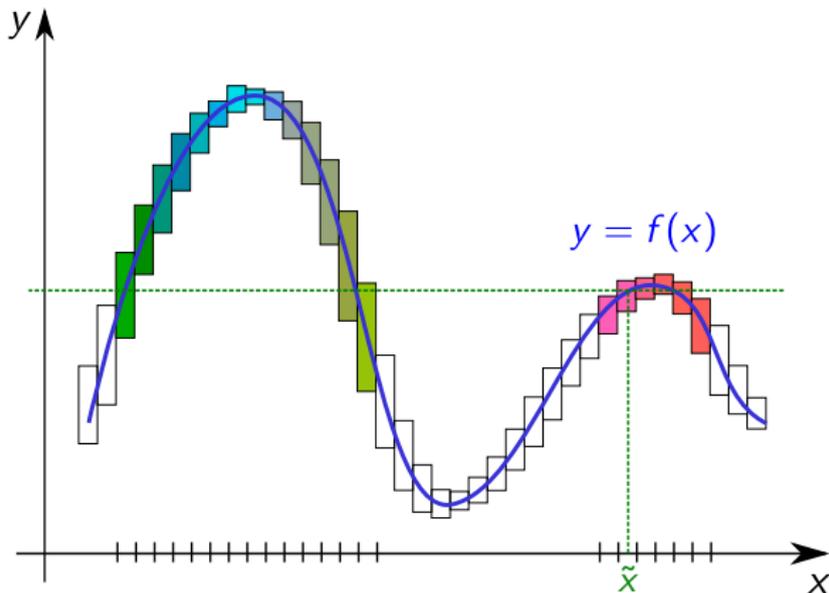
$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

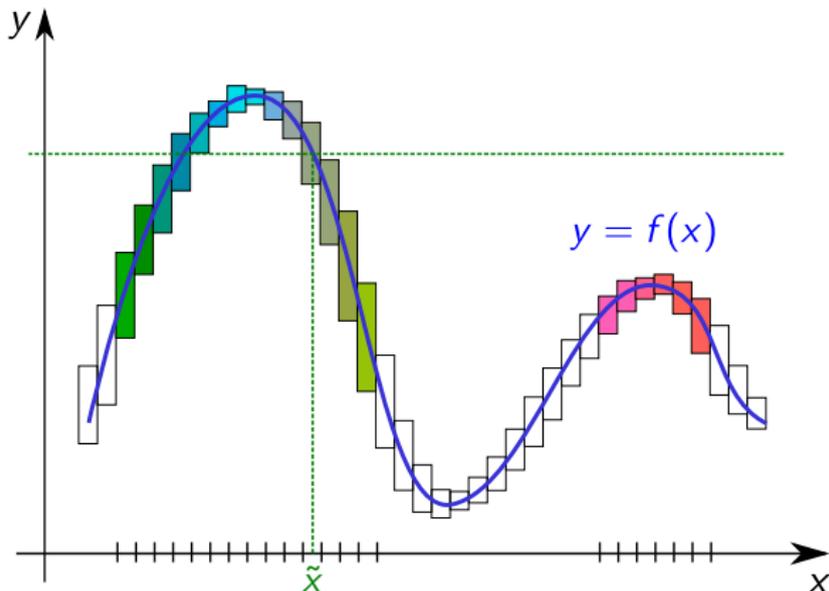
$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

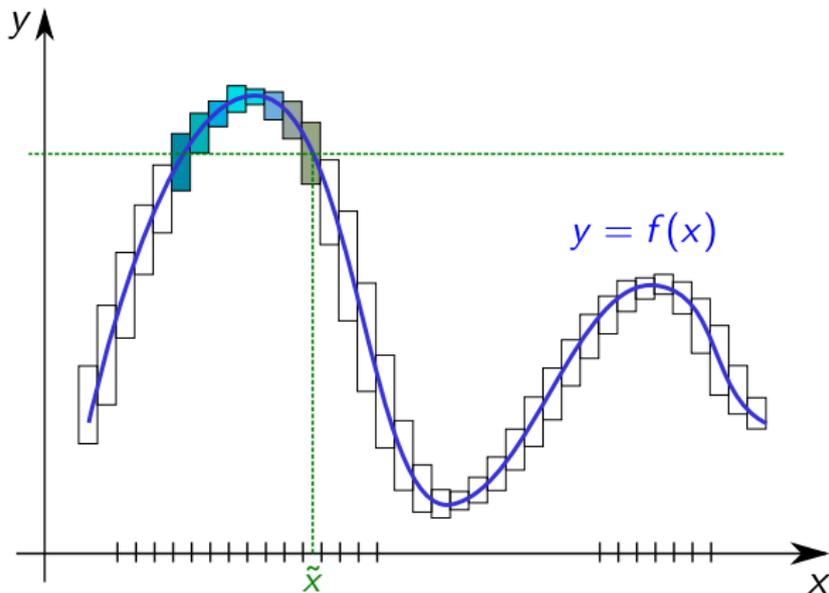
$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

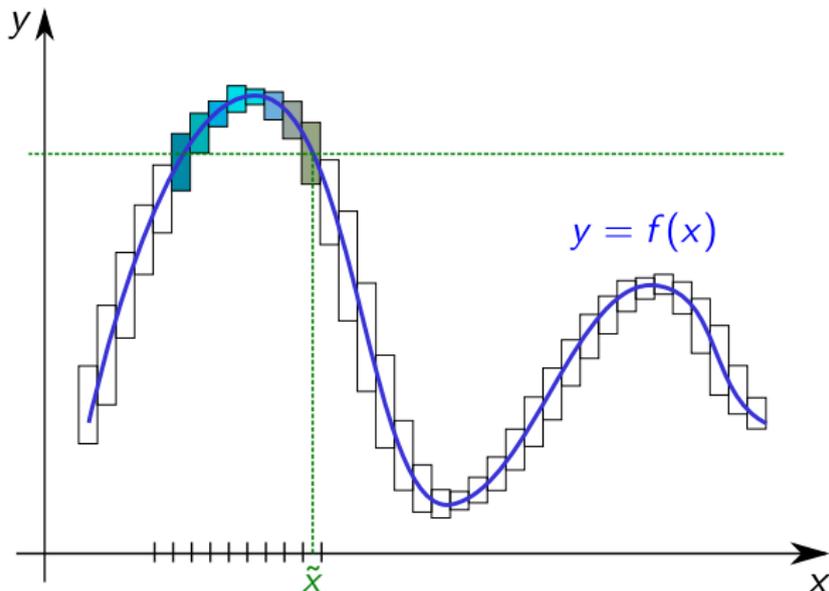
$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$



## Théorème

Considérons  $\max_{x \in A} f(x)$ ,  $x^*$  une solution optimale et  $\tilde{x} \in A$ ,

$$\text{Si } \sup([f]([x])) \leq f(\tilde{x}) \text{ alors } x^* \notin [x]. \quad (7)$$

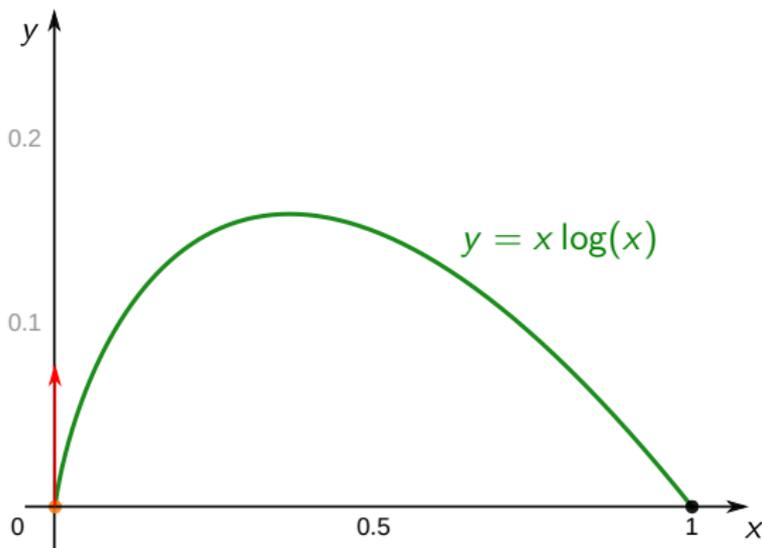


## Première implémentation

Ibex n'était pas capable de nativement gérer le problème. Considérons

$$\begin{aligned}x \log x : [0, 1] &\mapsto \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \times \log(x).\end{aligned}$$

- 1  $x \log x$  n'est pas définie pour  $x < 0$ ,
- 2 La pente en  $x = 0$  est infinie.



$$\begin{aligned} & \max_{\{E_k\}_k \subset \mathcal{L}(\mathcal{H}_N)} I(X; Y(\{E_k\}_k)) \\ \text{tel que} & \quad \sum_k E_k = \text{Id} \text{ et } E_k \succeq 0. \end{aligned} \tag{8}$$

### Proposition

- 1 Le critère du problème (8) est convexe.
- 2 L'ensemble admissible de (8) est convexe.

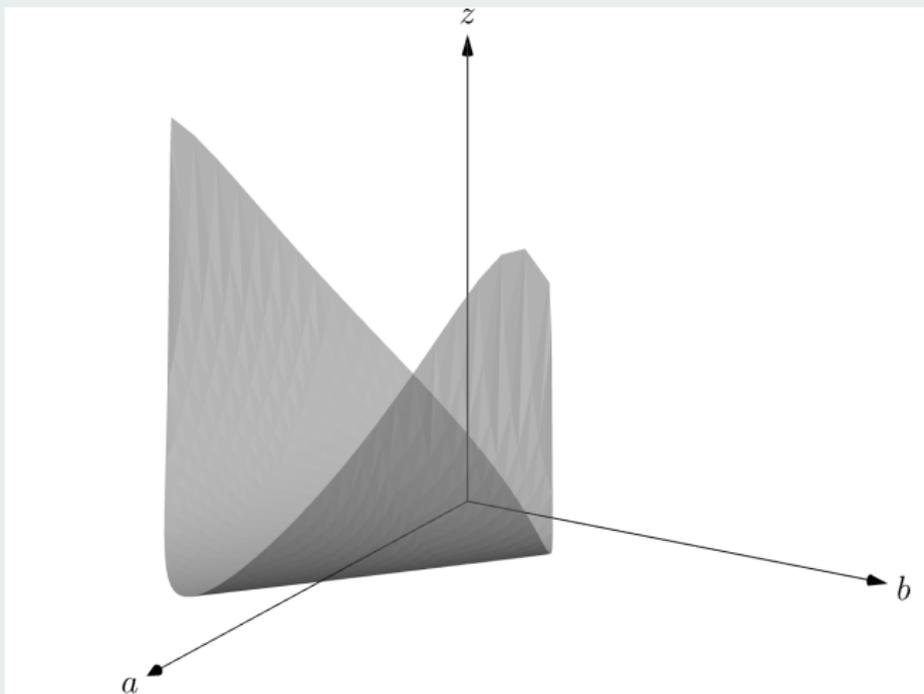
Proof : T. M. Cover, J. A. Thomas, "Elements of Information Theory", Wiley, 2012.

### Corollaire

- 1 La maximum est atteint sur la frontière de l'espace admissible.
- 2 Borner supérieurement la fonction coût sur un convexe polyédral en l'évaluant uniquement sur les sommets du convexe.

## Exemple

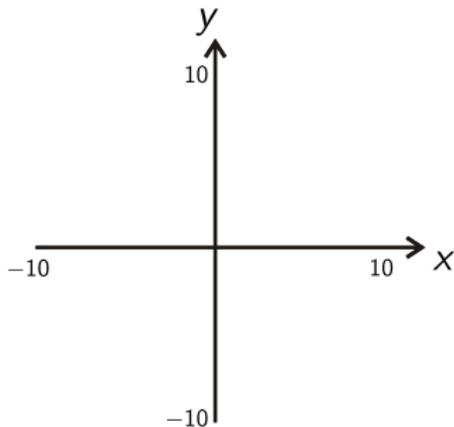
Graphe de la fonction coût avec  $d = 0.535$ .



Note : ouvre le navigateur.

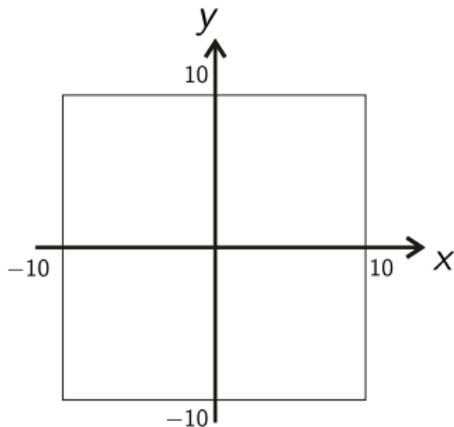
## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



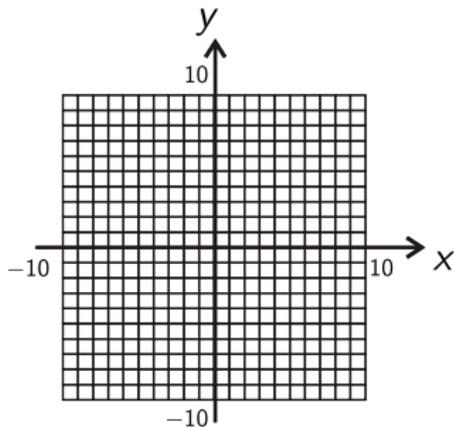
## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



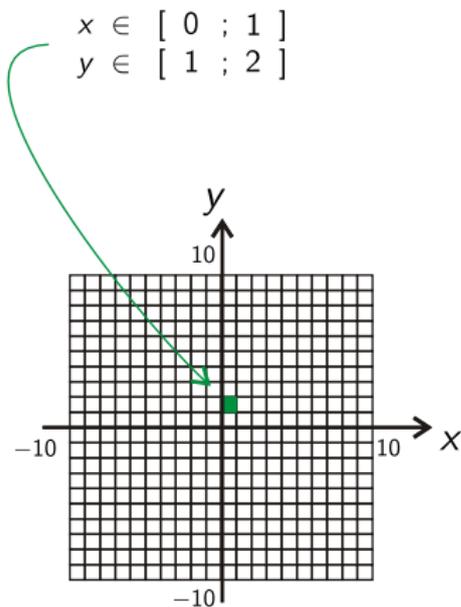
## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



## Exemple - Gestion des contraintes

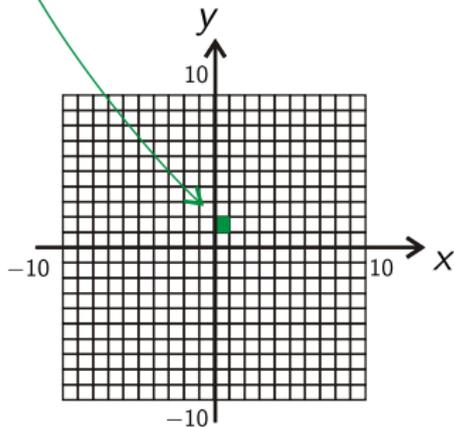
$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

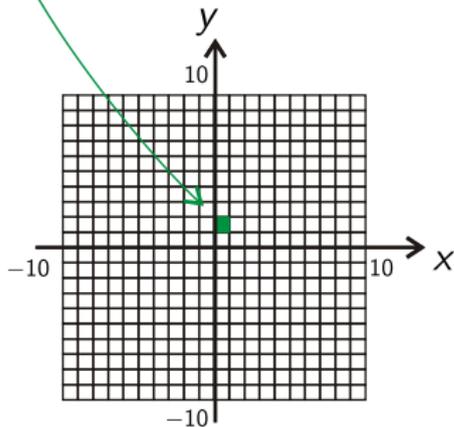
$$\begin{aligned} x \in [0 ; 1] &\Rightarrow x^2 \in [0 ; 1] \\ y \in [1 ; 2] & \end{aligned}$$



## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

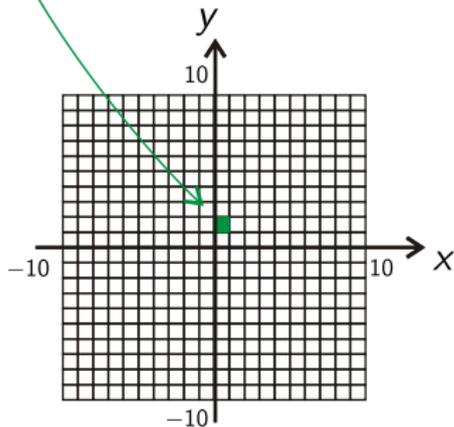
$$\begin{array}{l} x \in [0 ; 1] \quad \Rightarrow \quad x^2 \in [0 ; 1] \\ y \in [1 ; 2] \quad \Rightarrow \quad y^2 \in [1 ; 4] \end{array}$$



## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

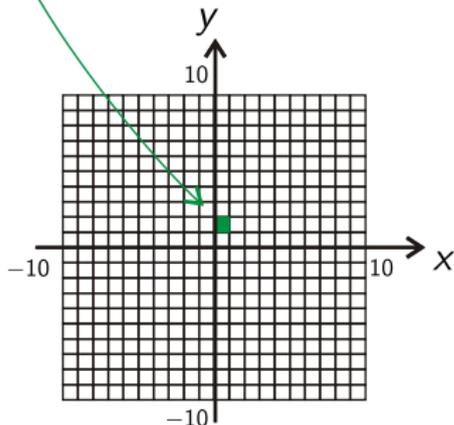
$$\begin{array}{lcl} x \in [0 ; 1] & \Rightarrow & x^2 \in [0 ; 1] \\ y \in [1 ; 2] & \Rightarrow & y^2 \in [1 ; 4] \\ & \Rightarrow & xy \in [0 ; 2] \end{array}$$



## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$\begin{aligned} x \in [0 ; 1] &\Rightarrow x^2 \in [0 ; 1] \\ y \in [1 ; 2] &\Rightarrow y^2 \in [1 ; 4] \\ &\Rightarrow xy \in [0 ; 2] \\ &\Rightarrow -30 \in [-30 ; -30] \end{aligned}$$



## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$x \in [0 ; 1] \Rightarrow x^2 \in [0 ; 1]$$

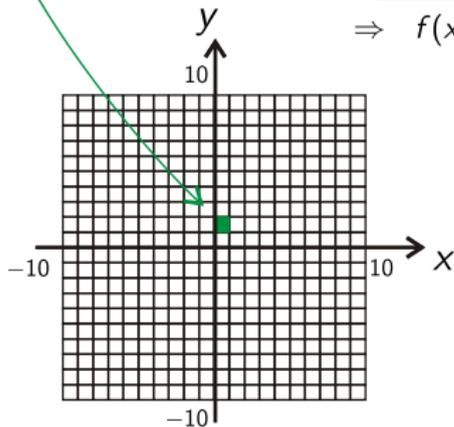
$$y \in [1 ; 2] \Rightarrow y^2 \in [1 ; 4]$$

$$\Rightarrow xy \in [0 ; 2]$$

$$\Rightarrow -30 \in [-30 ; -30]$$

---

$$\Rightarrow f(x, y) \in [-29 ; -27]$$



## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$x \in [0 ; 1] \Rightarrow x^2 \in [0 ; 1]$$

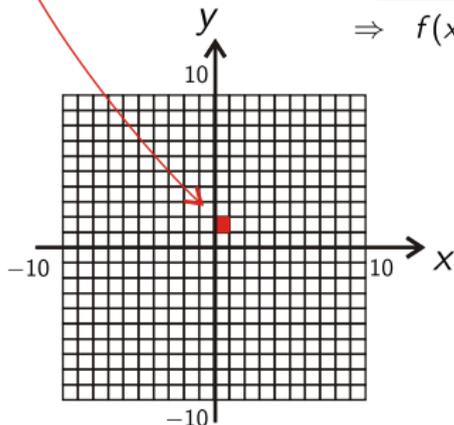
$$y \in [1 ; 2] \Rightarrow y^2 \in [1 ; 4]$$

$$\Rightarrow xy \in [0 ; 2]$$

$$\Rightarrow -30 \in [-30 ; -30]$$

---

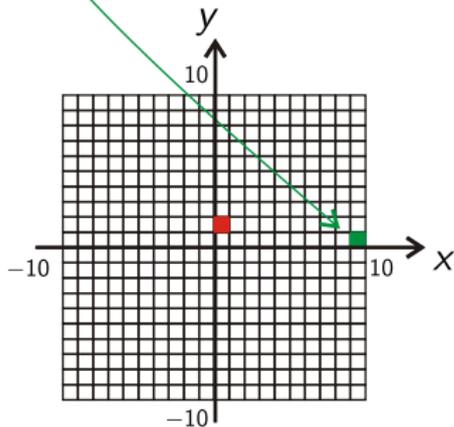
$$\Rightarrow f(x, y) \in [-29 ; -27]$$



## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$\begin{aligned} x &\in [9; 10] \\ y &\in [0; 1] \end{aligned}$$



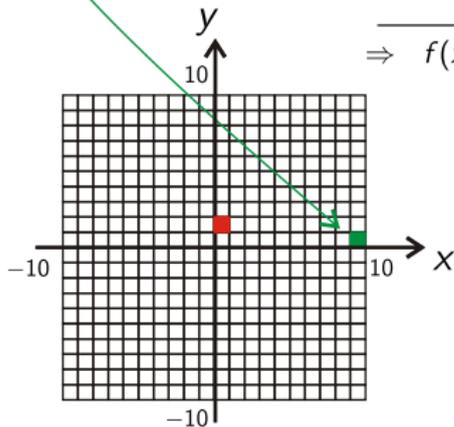
## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$\begin{aligned} x \in [9 ; 10] &\Rightarrow x^2 \in [81 ; 100] \\ y \in [0 ; 1] &\Rightarrow y^2 \in [0 ; 1] \\ &\Rightarrow xy \in [0 ; 10] \\ &\Rightarrow -30 \in [-30 ; -30] \end{aligned}$$

---

$$\Rightarrow f(x, y) \in [51 ; 81]$$



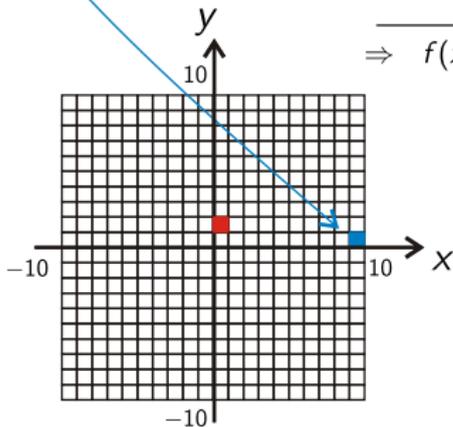
## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$\begin{aligned} x \in [9 ; 10] &\Rightarrow x^2 \in [81 ; 100] \\ y \in [0 ; 1] &\Rightarrow y^2 \in [0 ; 1] \\ &\Rightarrow xy \in [0 ; 10] \\ &\Rightarrow -30 \in [-30 ; -30] \end{aligned}$$

---

$$\Rightarrow f(x, y) \in [51 ; 81]$$



## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$x \in [2 ; 3] \Rightarrow x^2 \in [4 ; 9]$$

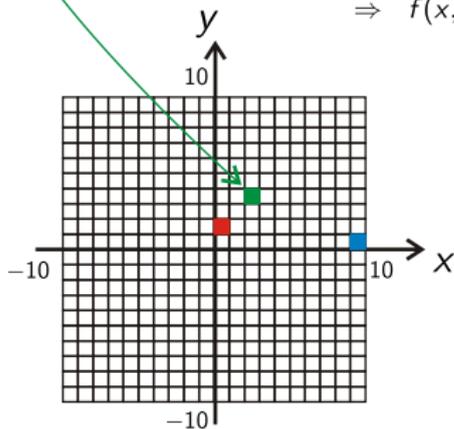
$$y \in [3 ; 4] \Rightarrow y^2 \in [9 ; 16]$$

$$\Rightarrow xy \in [6 ; 12]$$

$$\Rightarrow -30 \in [-30 ; -30]$$

---

$$\Rightarrow f(x, y) \in [-11 ; 7]$$



## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$

$$x \in [2 ; 3] \Rightarrow x^2 \in [4 ; 9]$$

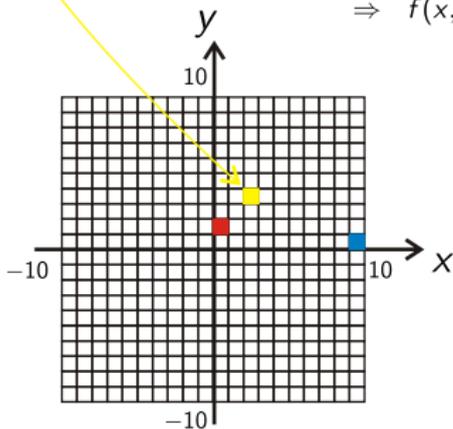
$$y \in [3 ; 4] \Rightarrow y^2 \in [9 ; 16]$$

$$\Rightarrow xy \in [6 ; 12]$$

$$\Rightarrow -30 \in [-30 ; -30]$$

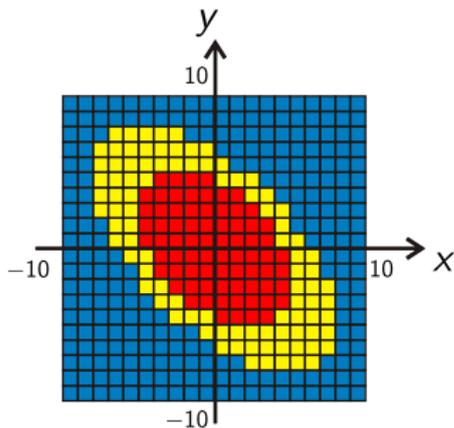
---

$$\Rightarrow f(x, y) \in [-11 ; 7]$$



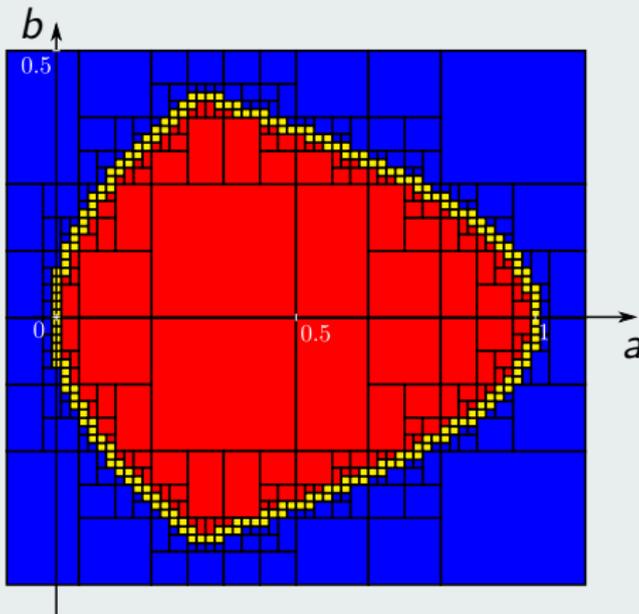
## Exemple - Gestion des contraintes

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 30 \leq 0\}$$



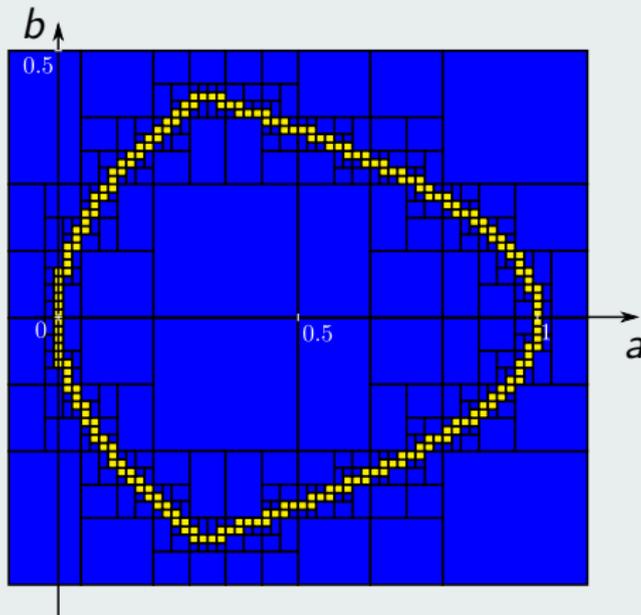
## Contraintes de l'instance considérée

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq 0, \\ ad - b^2 \geq 0, \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} (1 - a) \geq 0, \\ (1 - a)(1 - d) - b^2 \geq 0, \end{array} \right.$$

Illustration avec  $d = 0.7$ 

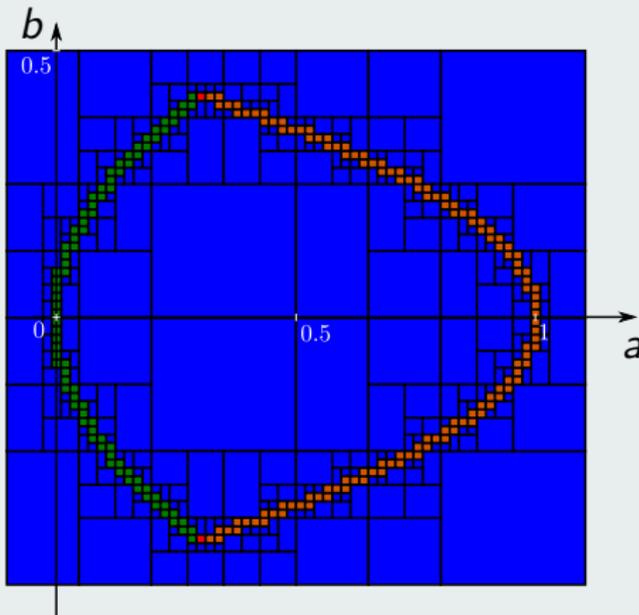
## Contraintes de l'instance considérée

$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq 0, \\ ad - b^2 \geq 0, \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} (1 - a) \geq 0, \\ (1 - a)(1 - d) - b^2 \geq 0, \end{array} \right.$$

Illustration avec  $d = 0.7$ 

## Contraintes de l'instance considérée

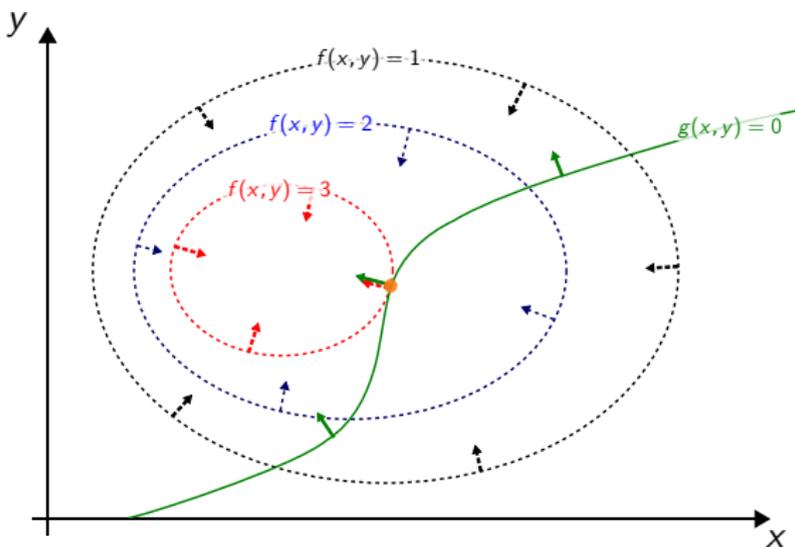
$$\begin{cases} a \geq 0, \\ ad - b^2 \geq 0, \end{cases} \text{ et } \begin{cases} (1 - a) \geq 0, \\ (1 - a)(1 - d) - b^2 \geq 0, \end{cases}$$

Illustration avec  $d = 0.7$ 

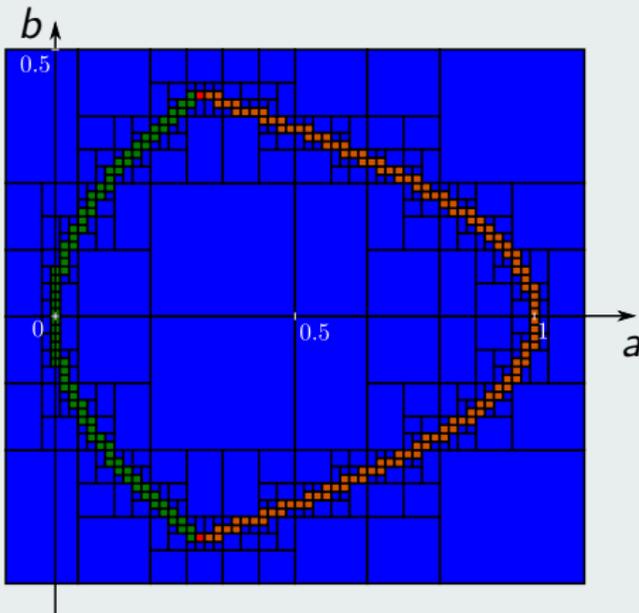
$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } g(x) = 0. \quad (9)$$

### Théorème - Condition nécessaire d'optimalité

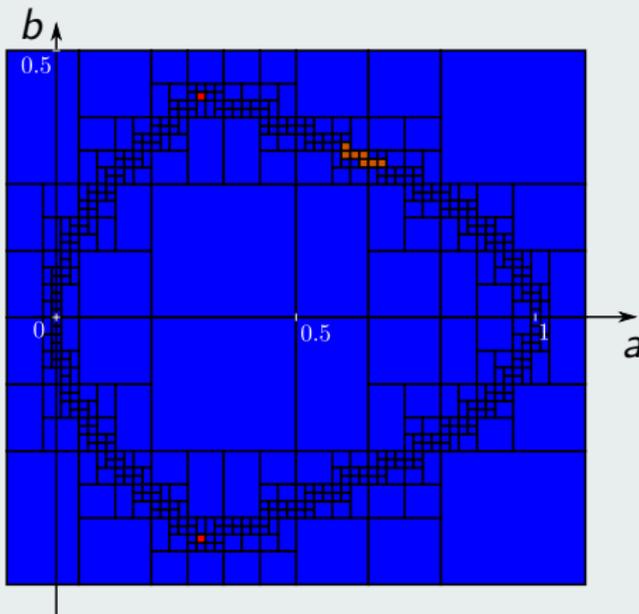
Si  $x^*$  est une solution optimale de (9) alors  $\nabla g(x^*) \parallel \nabla f(x^*)$ .



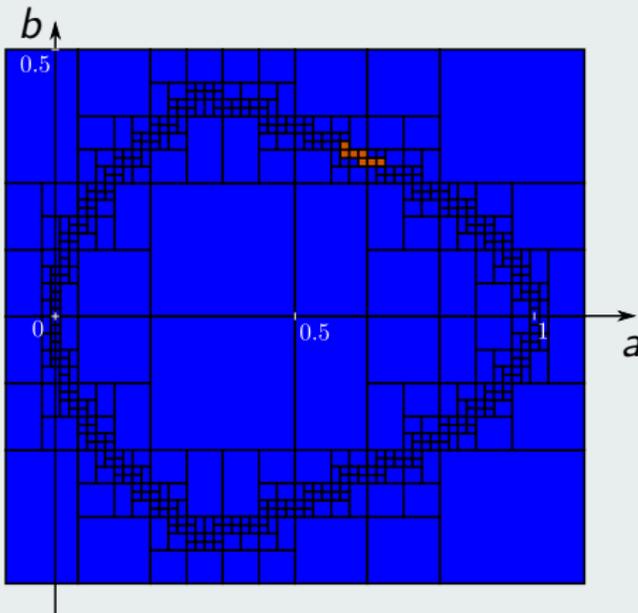
### Illustration avec $d = 0.7$



### Illustration avec $d = 0.7$



### Illustration avec $d = 0.7$



## Résultat de l'optimisation

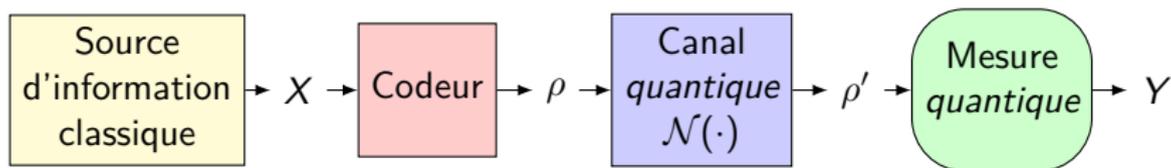
- Solution optimale (globale)  $E_1 = \begin{bmatrix} 0.446 & -0.497 \\ -0.497 & 0.554 \end{bmatrix}$  et  $E_2 = \text{Id} - E_1$ .
- La valeur de l'information mutuelle est de 0,0957 Sh pour cette solution.
- De plus, on certifie que le gap est inférieur à  $10^{-4}$  (en 20 secondes de temps CPU).

## Contribution

Optimisation globale pour la conception d'un détecteur quantique maximisant l'information mutuelle.

## Comparaison avec l'existant

- Minimiser l'erreur quadratique de mesure, Eldar, Y., "On Quantum Detection and the Square-Root Measurement", *IEEE Transaction on Information Theory* 47 (2001), 858-872.
- Maximiser la probabilité de détection correcte (linéaire), Eldar, Y., "Designing Optimal Quantum Detectors Via Semidefinite Programming", *IEEE Transaction on Information Theory* 49 (2003), 1012-1017.



## Perspectives

- Optimiser le codeur avec de la décohérence quantique, ou bien l'utilisation d'états quantiques intriqués optimalement.
- Ajouter la présence de bruit.
- Modifier le nombre  $k$  de mesures.

Merci pour votre attention !