Introduction au transport optimal

Nicolas Delanoue
LARIS - Universite d'Angers - France
http://perso-laris.univ-angers.fr/~delanoue/

Université d'Angers, Séminaire Transport Optimal, SFR MathStic

Vendredi 8 mars 2019

Plan

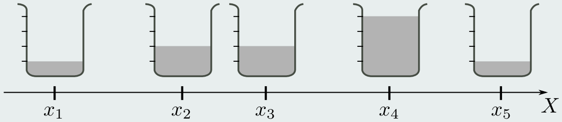


Figure: Etat initial.

Figure: Etat final.

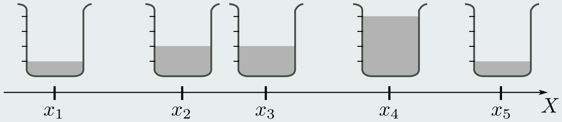


Figure: Etat initial.

$$\mu(x_1) = 1,\ \mu(x_2) = 2,\ \mu(x_3) = 2,\ \mu(x_4) = 4,\ \mu(x_5) = 1.$$

Figure: Etat final.

$$\nu(y_1) = 4,\ \nu(y_2) = 2,\ \nu(y_3) = 4,\ \nu(y_4) = 0.$$

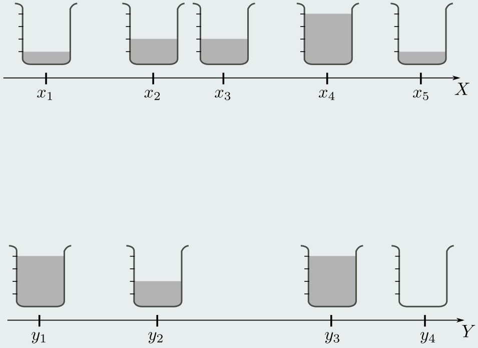


Figure: Problème de transport.

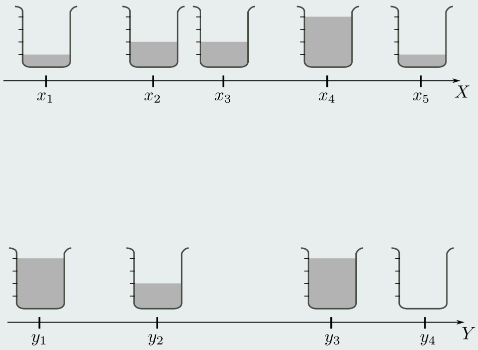
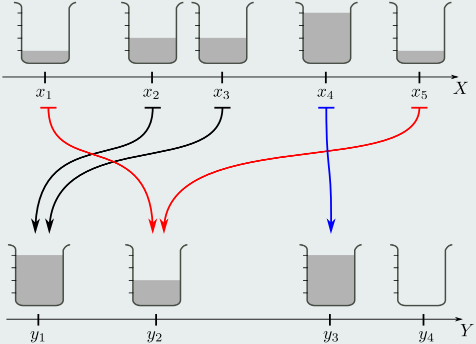


Figure: Problème de transport.

Modélisation du problème

Trouver $T : X \to Y$ de sorte que

$$\forall y_j \in Y, \quad \sum_{x_i \in X \,|\, T(x_i) = y_j} \mu(x_i) = \nu(y_j).$$



Une solution

$$T(x_2) = y_1,\ T(x_3) = y_1,\ T(x_1) = y_2,\ T(x_5) = y_2,\ T(x_4) = y_3.$$

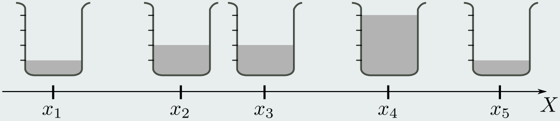
Définition - Mesure

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.
Une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ est appelée mesure si :

- $\mu(\varnothing) = 0$,
- si $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille disjointe dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Exemple 1



$$\mu = 1\delta_{x_1} + 2\delta_{x_2} + 2\delta_{x_3} + 4\delta_{x_4} + 1\delta_{x_5},$$

$$\text{avec } \forall A \in \mathcal{A},\ \delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A, \\ 0 & \text{si } a \notin A. \end{cases}$$

Définition - Mesure

Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable.
Une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ est appelée mesure si :

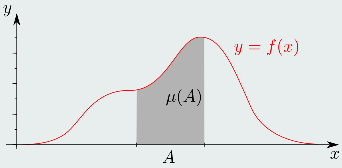
- $\mu(\varnothing) = 0$,
- si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille disjointe dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

Exemple 2

Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, on peut définir la mesure μ via

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mu(A) = \int_A f(x)\, dx$$



Définition : Image d'une mesure via une fonction

Soient

- $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables,
- une mesure μ sur X,
- $T : X \to Y$ une fonction mesurable,

On note par $T\#\mu$ la mesure sur Y définie par

$$\forall B \in \mathcal{B}, T\#\mu(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right).$$

Définition : Image d'une mesure via une fonction

Soient

- $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables,
- une mesure μ sur X,
- $T : X \to Y$ une fonction mesurable,

On note par $T\#\mu$ la mesure sur Y définie par

$$\forall B \in \mathcal{B}, T\#\mu(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right).$$

Remarque (terminologie)

La mesure $T\#\mu$ ainsi définie est appelée *mesure image* de μ par T.

Définition : Image d'une mesure via une fonction

Soient

- $(X, \mathcal{A})$ et $(Y, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables,
- une mesure μ sur X,
- $T : X \to Y$ une fonction mesurable,

On note par $T\#\mu$ la mesure sur Y définie par

$$\forall B \in \mathcal{B}, T\#\mu(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right).$$

Remarque (terminologie)

La mesure $T\#\mu$ ainsi définie est appelée *mesure image* de μ par T.

Remarque (point de vue théorie des catégories)

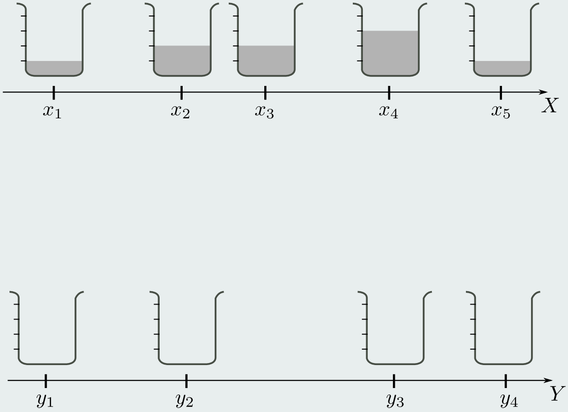
A partir d'une flèche :

$$T : X \to Y,$$

on crée une flèche

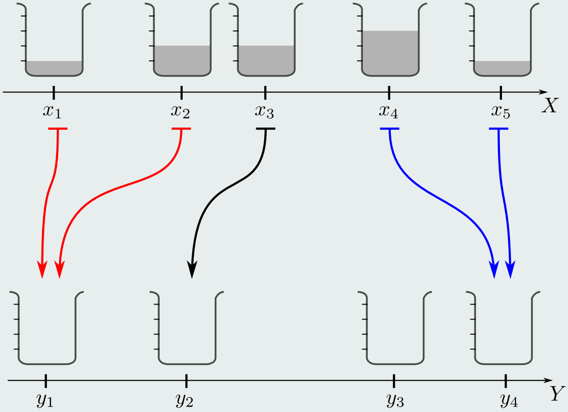
$$T\# : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y).$$

Mesure image



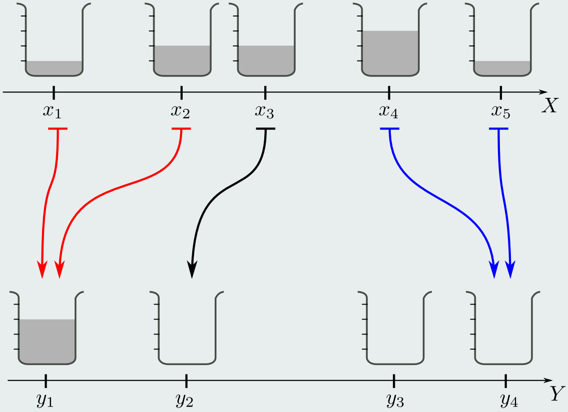
$$\forall B \in \mathcal{B}, T\#\mu(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right).$$

Mesure image



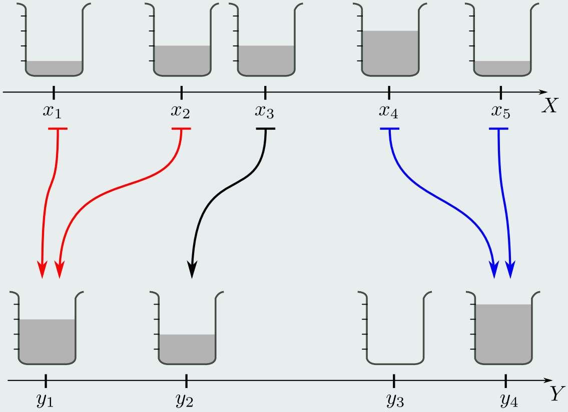
$$\forall B \in \mathcal{B}, T\#\mu(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right).$$

Mesure image



$$\forall B \in \mathcal{B}, T\#\mu(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right).$$

Mesure image



$$\forall B \in \mathcal{B}, T\#\mu(B) = \mu\left(T^{-1}(B)\right).$$

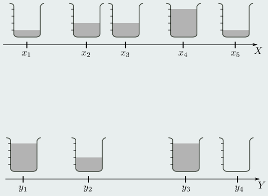


Figure: Problème de transport.

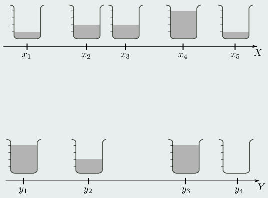


Figure: Problème de transport.

(Re)formulation problème

Étant donné μ une mesure sur X et ν une mesure sur Y, on cherche $T : X \to Y$ de sorte que

$$T\#\mu = \nu. \tag{1}$$

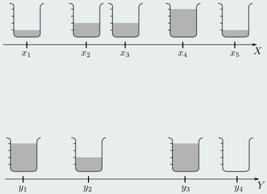


Figure: Problème de transport.

(Re)formulation problème

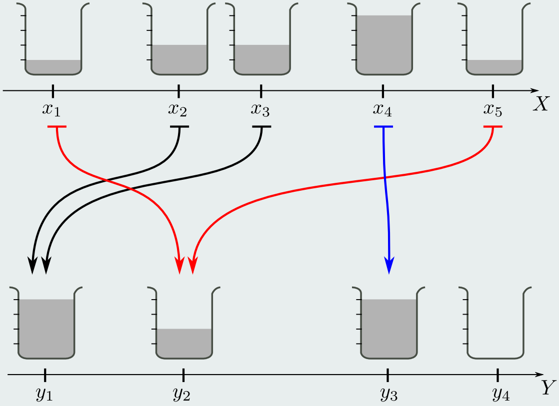
Étant donné μ une mesure sur X et ν une mesure sur Y, on cherche $T : X \to Y$ de sorte que

$$T\#\mu = \nu. \tag{1}$$

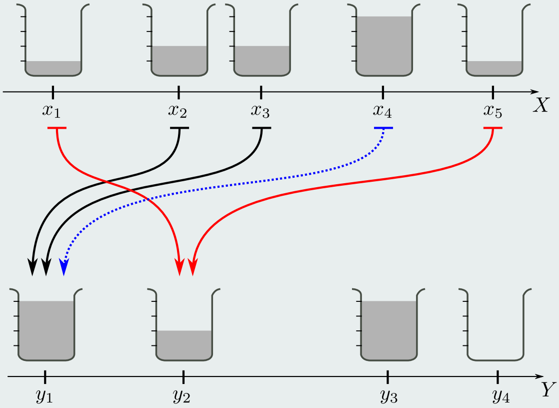
Remarque

Si $\mu(X) \neq \nu(Y)$, alors (1) n'a pas de solution.

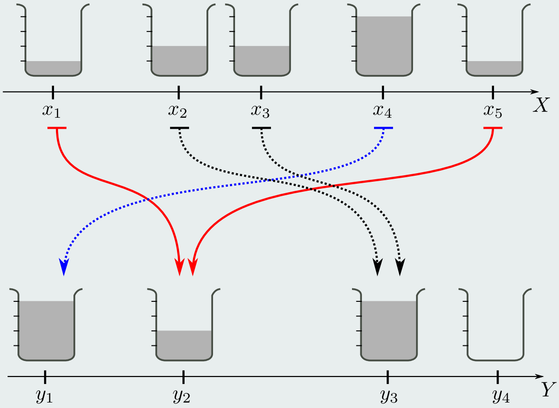
Comparer deux transports



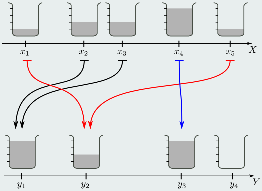
Comparer deux transports



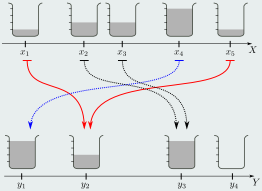
Comparer deux transports



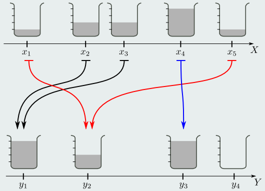
Un transport T_1



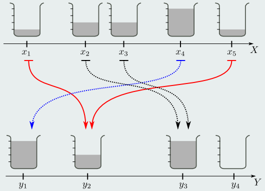
Un autre transport T_2



Un transport T_1

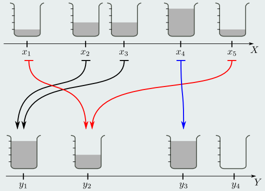


Un autre transport T_2

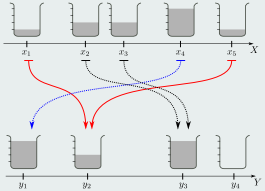


Soit $c : X \times Y \to [0, \infty]$ une fonction qui code le cout du transport d'une masse unitaire de la position $x \in X$ à la position $y \in Y$.

Un transport T_1



Un autre transport T_2



Soit $c : X \times Y \to [0, \infty]$ une fonction qui code le cout du transport d'une masse unitaire de la position $x \in X$ à la position $y \in Y$.

Définition

Le cout (total) d'un transport $T : X \to Y$ est donc

$$\int_X c(x, T(x)) d\mu(x).$$

Transport optimal (au sens de Monge)

Étant donné

- μ une mesure sur X, ν une mesure sur Y,

Transport optimal (au sens de Monge)

Étant donné

- μ une mesure sur X, ν une mesure sur Y,
- une fonction $c : X \times Y \to [0, \infty]$,

Transport optimal (au sens de Monge)

Étant donné

- μ une mesure sur X, ν une mesure sur Y,
- une fonction $c : X \times Y \to [0, \infty]$,

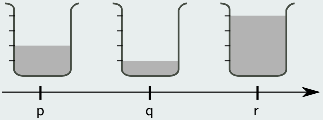
on cherche à résoudre

$$\begin{aligned} \min_{T:X\to Y} \quad & \int_X c(x, T(x))d\mu, \\ \text{tel que } \; & T\#\mu = \nu. \end{aligned} \tag{2}$$

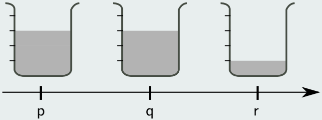
Inconvénients de la formulation de Monge

- On ne peut pas séparer des masses localisées en un même endroit pour les transporter à deux endroits différents.
- Le problème n'est pas linéaire en T ...

Exemple dans le cas discret



$$\mu = (2, 1, 4)$$

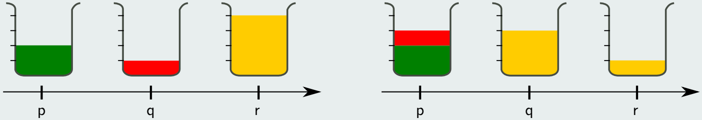


$$\nu = (3, 3, 1)$$

Problème de transport

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ 1 & \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ 4 & \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{array} \text{ tel que } \begin{cases} \forall i, \ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ \forall j, \ \sum_i \pi_{ij} = \nu_j. \end{cases}$$

Exemple dans le cas discret



$\mu = (2, 1, 4)$ $\nu = (3, 3, 1)$

Une solution au problème de transport

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & \color{green}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \color{red}{1} & 0 & 0 \\ 4 & 0 & \color{olive}{3} & \color{olive}{1} \end{array} \quad \text{vérifie} \quad \begin{cases} \forall i, \ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ \forall j, \ \sum_j \pi_{ij} = \nu_j. \end{cases}$$

Un problème de transport

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \end{array}$$

Un problème de transport

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & . & . & . \\ 1 & . & . & . \\ 4 & . & . & . \end{array}$$

peut admettre plusieurs solutions :

$$\pi = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}, \quad \tilde{\pi} = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}, \dots$$

Définition - Transport

Un transport π est une mesure sur l'espace produit $X \times Y$ vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi(A \times Y) = \mu(A), \\ \pi(X \times B) = \nu(B). \end{array} \right. \quad \text{pour tous } A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}. \tag{3}$$

Définition - Transport

Un transport π est une mesure sur l'espace produit $X \times Y$ vérifiant

$$\begin{cases} \pi(A \times Y) = \mu(A), \\ \pi(X \times B) = \nu(B). \end{cases} \quad \text{pour tous } A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{B}. \tag{3}$$

Notation

Les relations de l'équation (3) se note aussi

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases} \tag{4}$$

Dans le cas discret

$$\begin{cases} \forall i, \ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ \forall j, \ \sum_i \pi_{ij} = \nu_j. \end{cases}$$

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	300	200	500
200	·	·	·
100	·	·	·
700	·	·	·

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	0.3	0.2	0.5
0.2	·	·	·
0.1	·	·	·
0.7	·	·	·

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	0.3	0.2	0.5
0.2	0.06	0.04	0.10
0.1	·	·	·
0.7	·	·	·

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	0.3	0.2	0.5
0.2	0.06	0.04	0.10
0.1	0.03	0.02	0.05
0.7	0.21	0.14	0.35

Existence d'une solution

Si $\mu(X) = \nu(Y)$, le problème de trouver une mesure π vérifiant

$$\begin{cases} \pi_X = \mu, \\ \pi_Y = \nu. \end{cases}$$

admet une solution. Il suffit de penser à $\pi = \mu \otimes \nu$.

	300	200	500
200	60	40	100
100	30	20	50
700	210	140	350

Comparer deux transports

Transport π

$$\pi = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array}$$

$$I(\pi) = 2 \times 0 + 1 \times 1 + 3 \times 1 + 1 \times 0 = 4$$

Transport $\tilde{\pi}$

$$\tilde{\pi} = \begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$I(\tilde{\pi}) = 8$$

Dans le cas discret

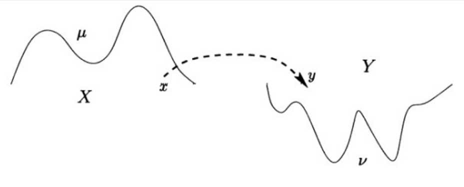
$$\begin{aligned} \min_{\pi \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i,j} c_{ij} \pi_{ij} \\ \text{tel que} \quad & \forall i, \ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ & \forall j, \ \sum_j \pi_{ij} = \nu_j. \end{aligned} \tag{5}$$

où $c_{ij} \in \mathbb{R}^+$ est le cout du transport d'une masse unitaire de la position i à la position j.

Formulation de Kantorovich

La *valeur optimale du problème de transport* entre μ et ν est le réel

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \inf_{\pi\in\mathcal{M}(X\times Y)} \quad & \int_{X\times Y} c(x,y)\mathrm{d}\pi \\ \text{tel que} \quad & \pi_X = \mu, \\ & \pi_Y = \nu. \end{aligned} \tag{6}$$



Formulation de Kantorovich

La *valeur optimale du problème de transport* entre μ et ν est le réel

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \inf_{\pi \in \mathcal{M}(X\times Y)} \quad & \int_{X\times Y} c(x,y)\mathrm{d}\pi \\ \text{tel que} \quad & \pi_X = \mu, \\ & \pi_Y = \nu. \end{aligned} \tag{6}$$

Remarque

Le problème de transport optimal de Kantorovich est un *programme linéaire en dimension infinie*.
i.e.

- la fonction cout est linéaire en π,
- les contraintes sur π sont des fonctions linéaires.

Linear Programming in Infinite Dimensional Spaces: Theory and Applications
Edward J. Anderson, Peter Nash

1. $c = \|x - y\|^p$, $p > 1$, la convexité stricte de c garantit que, si μ, ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, alors il existe une solution unique au problème de Kantorovich.

1. $c = \|x-y\|^p$, $p > 1$, la convexité stricte de c garantit que, si μ, ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, alors il existe une solution unique au problème de Kantorovich.
2. Avec $c = (x-y)^2$, μ et ν des mesures sur la droite réelle. On montre que

$$\mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \int_0^1 \left|G^{-1}(t) - F^{-1}(t)\right|^2 dt,$$

où F^{-1} et G^{-1} sont les fonctions répartitions de μ et ν.

1. $c = \|x - y\|^p$, $p > 1$, la convexité stricte de c garantit que, si μ, ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, alors il existe une solution unique au problème de Kantorovich.
2. Avec $c = (x - y)^2$, μ et ν des mesures sur la droite réelle. On montre que

$$\mathcal{T}_c(\mu, \nu) = \int_0^1 \left| G^{-1}(t) - F^{-1}(t) \right|^2 dt,$$

où F^{-1} et G^{-1} sont les fonctions répartitions de μ et ν.
De plus, si μ et ν ne donnent pas de masse aux points, alors $T = G^{-1} \circ F$.

1. $c = \|x-y\|^p$, $p > 1$, la convexité stricte de c garantit que, si μ, ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, alors il existe une solution unique au problème de Kantorovich.
2. Avec $c = (x-y)^2$, μ et ν des mesures sur la droite réelle. On montre que

$$\mathcal{T}_c(\mu, \nu) = \int_0^1 \left|G^{-1}(t) - F^{-1}(t)\right|^2 dt,$$

   où F^{-1} et G^{-1} sont les fonctions répartitions de μ et ν.
   De plus, si μ et ν ne donnent pas de masse aux points, alors $T = G^{-1} \circ F$.
3. $c = \|x-y\|^2$, les plans de transfert optimaux sont les (restrictions de) gradients de fonctions convexes.

1. $c = \|x-y\|^p$, $p > 1$, la convexité stricte de c garantit que, si μ, ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, alors il existe une solution unique au problème de Kantorovich.
2. Avec $c = (x-y)^2$, μ et ν des mesures sur la droite réelle. On montre que

$$\mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \int_0^1 \left|G^{-1}(t) - F^{-1}(t)\right|^2 dt,$$

où F^{-1} et G^{-1} sont les fonctions répartitions de μ et ν.
De plus, si μ et ν ne donnent pas de masse aux points, alors $T = G^{-1} \circ F$.
3. $c = \|x-y\|^2$, les plans de transfert optimaux sont les (restrictions de) gradients de fonctions convexes.
4. La fonction $\mathcal{T}_c : (\mu,\nu) \to \mathcal{T}_c(\mu,\nu)$ permet de définir une distance sur des espaces de mesures de probabilités sur X (Distances de Wasserstein)

1. $c = \|x-y\|^p$, $p > 1$, la convexité stricte de c garantit que, si μ, ν sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, alors il existe une solution unique au problème de Kantorovich.
2. Avec $c = (x-y)^2$, μ et ν des mesures sur la droite réelle. On montre que

$$\mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \int_0^1 \left|G^{-1}(t) - F^{-1}(t)\right|^2 dt,$$

   où F^{-1} et G^{-1} sont les fonctions répartitions de μ et ν.
   De plus, si μ et ν ne donnent pas de masse aux points, alors $T = G^{-1} \circ F$.
3. $c = \|x-y\|^2$, les plans de transfert optimaux sont les (restrictions de) gradients de fonctions convexes.
4. La fonction $\mathcal{T}_c : (\mu,\nu) \to \mathcal{T}_c(\mu,\nu)$ permet de définir une distance sur des espaces de mesures de probabilités sur X (Distances de Wasserstein)
5. beaucoup d'autre dans

   Topics in Optimal Transportation, Cédric Villani, AMS (2003)

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad cx$$
$$\text{tel que} \quad Ax \geq b,$$
$$x \geq 0.$$

Problème dual

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m} \quad yb$$
$$\text{tel que} \quad yA \leq c.$$
$$y \geq 0.$$

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition

Soient

- $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$,
- $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$,

on a

$$yb \leq cx$$

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y \in \mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition

Soient

- $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$,
- $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$,

on a

$$yb \leq cx$$

Preuve

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y\in\mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition

Soient

- $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$,
- $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$,

on a

$$yb \leq cx$$

Preuve

$$b \leq Ax$$

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad cx$$
$$\text{tel que} \quad Ax \geq b,$$
$$x \geq 0.$$

Problème dual

$$\max_{y\in\mathbb{R}^m} \quad yb$$
$$\text{tel que} \quad yA \leq c.$$
$$y \geq 0.$$

Proposition

Soient

- $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$,
- $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$,

on a

$$yb \leq cx$$

Preuve

$$b \leq Ax \Rightarrow yb \leq yAx$$

Programmation linéaire - Dualité

Problème primal

$$\begin{aligned} \min_{x\in\mathbb{R}^n} \quad & cx \\ \text{tel que} \quad & Ax \geq b, \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned} \max_{y\in\mathbb{R}^m} \quad & yb \\ \text{tel que} \quad & yA \leq c. \\ & y \geq 0. \end{aligned}$$

Proposition

Soient

- $x \geq 0$ tel que $Ax \geq b$,
- $y \geq 0$ tel que $yA \leq c$,

on a

$$yb \leq cx$$

Preuve

$$b \leq Ax \Rightarrow yb \leq yAx \leq cx$$

Dualité de Kantorovich

Problème primal

$$\begin{aligned}
\inf_{\pi \in \mathcal{M}(X \times Y)} \quad & \int_{X \times Y} c(x,y) \mathrm{d}\pi(x,y) \\
\text{tel que} \quad & \pi_X = \mu, \\
& \pi_Y = \nu
\end{aligned}$$

Problème dual

$$\begin{aligned}
\sup_{\phi, \psi \in \mathcal{C}_b(X,Y)} \quad & \int_X \varphi(x)\, \mathrm{d}\mu(x) + \int_Y \psi(y)\, \mathrm{d}\nu(y) \\
\text{tel que} \quad & \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y).
\end{aligned}$$

Dualité de Kantorovich

Problème primal

$$\inf_{\pi \in \mathcal{M}(X\times Y)} \int_{X\times Y} c(x,y)\mathrm{d}\pi(x,y)$$

tel que $\pi_X = \mu,$ $\pi_Y = \nu$

Problème dual

$$\sup_{\phi,\psi \in \mathcal{C}_b(X,Y)} \int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_Y \psi(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

tel que $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y).$

où $\mathcal{C}_b(X,Y)$ désigne l'ensemble de toutes les paires de fonctions continues bornées $\phi : X \to \mathbb{R}$ et $\psi : Y \to \mathbb{R}$.

Dualité de Kantorovich

Problème primal

$$\inf_{\pi \in \mathcal{M}(X\times Y)} \int_{X\times Y} c(x,y)\mathrm{d}\pi(x,y)$$

tel que $\pi_X = \mu,$

$\pi_Y = \nu$

Problème dual

$$\sup_{\phi,\psi \in \mathcal{C}_b(X,Y)} \int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_Y \psi(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

tel que $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y).$

où $\mathcal{C}_b(X,Y)$ désigne l'ensemble de toutes les paires de fonctions continues bornées $\phi : X \to \mathbb{R}$ et $\psi : Y \to \mathbb{R}$.

Si X est compact et de Haussdorff, $\mathcal{C}_b(X)^* = \{\text{Mesure de Radon}\}$

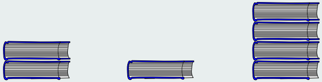
Dualité de Kantorovich

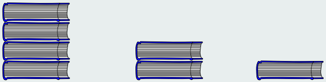
La valeur optimale du problème de Kantorovich est égale à

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c(\mu,\nu) = \sup_{\phi,\psi\in\mathcal{C}_b(X,Y)} \quad & \int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_Y \psi(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \\ \text{tel que} \quad & \varphi(x)+\psi(y) \leq c(x,y). \end{aligned} \tag{7}$$

Interprétation dans le cas discret

$$\begin{aligned} &\sup_{(\phi_i)\in\mathbb{R}^n,(\psi_j)\in\mathbb{R}^m} && \sum_i \phi_i\mu_i + \sum_j \psi_j\nu_i \\ &\text{tel que} && \phi_i + \psi_j \leq c_{ij} \end{aligned} \tag{8}$$

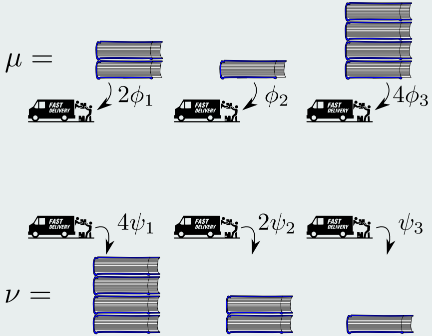
$\mu =$ 

$\nu =$ 

Interprétation dans le cas discret

$$\sup_{(\phi_i)\in\mathbb{R}^n,(\psi_j)\in\mathbb{R}^m} \quad \sum_i \phi_i\mu_i + \sum_j \psi_j\nu_i \qquad (9)$$

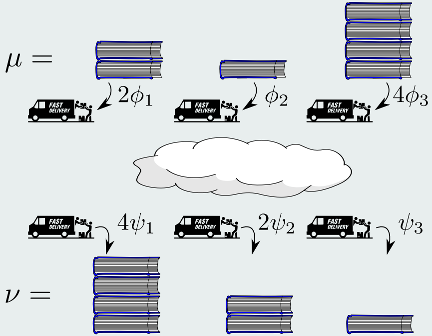
$$\text{tel que} \qquad \phi_i + \psi_j \leq c_{ij}$$



Interprétation dans le cas discret

$$\sup_{(\phi_i)\in\mathbb{R}^n,(\psi_j)\in\mathbb{R}^m} \quad \sum_i \phi_i \mu_i + \sum_j \psi_j \nu_i \tag{10}$$

$$\text{tel que} \qquad \phi_i + \psi_j \leq c_{ij}$$



Proposition - Relaxation

- μ, ν deux mesures avec X et Y comme support,
- $\{X_i\}_i$, $\{Y_j\}_j$ deux partitions de X et Y,
- $\mu(X_i) \in [\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i]$, $\nu(Y_j) \in [\underline{\nu}_j, \overline{\nu}_j]$,
- $\forall (x,y) \in X_i \times Y_j, \underline{c}_{ij} \leq c(x,y)$,

Si

$$\underline{\mathcal{T}} = \min_{\pi_{ij} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m} \sum_{i,j} \underline{c}_{ij} \pi_{ij}$$

tel que

$$\forall i,\ \underline{\mu}_i \leq \sum_j \pi_{ij} \leq \overline{\mu}_i,$$

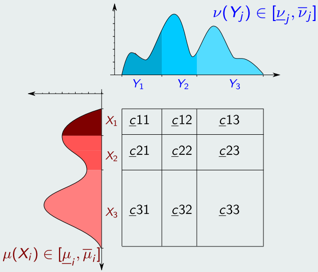
$$\forall j,\ \underline{\nu}_j \leq \sum_i \pi_{ij} \leq \overline{\nu}_j,$$

$$\forall i, \forall j,\ \pi_{ij} \geq 0.$$

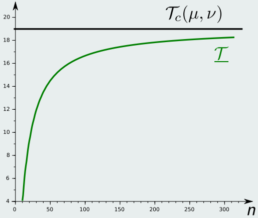
alors

$$\underline{\mathcal{T}} \leq \mathcal{T}_c(\mu, \nu).$$

Discrétisation spatiale



Résultats : bornes inférieures



Proposition - Relaxation

- μ, ν deux mesures avec X et Y comme support,
- $\{X_i\}_i$, $\{Y_j\}_j$ deux partitions de X et Y,
- $\mu(X_i) \leq \overline{\mu}_i$, $\nu(Y_j) \leq \overline{\nu}_j$,
- $\forall x, y \in X_i \times Y_j, c(x,y) \leq \overline{c}_{ij}$.

Si

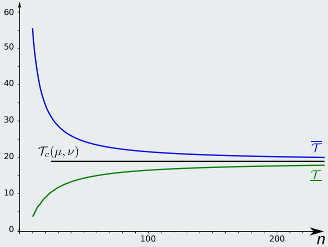
$$\overline{\mathcal{T}} = \sup_{(\phi_i)\in\mathbb{R}^n, (\psi_j)\in\mathbb{R}^n} \sum_i \phi_i \overline{\mu}_i + \sum_j \psi_j \overline{\nu}_i$$

$$\text{tel que} \quad \phi_i + \psi_j \leq \overline{c}_{ij}$$

alors

$$\mathcal{T}_c(\mu,\nu) \leq \overline{\mathcal{T}}.$$

Résultats : bornes supérieures



Publication - Preuves et convergence

Nicolas Delanoue, Mehdi Lhommeau, et Philippe Lucidarme. Numerical enclosures of the optimal cost of the Kantorovitch's mass transportation problem. *Computational Optimization and Applications*, 63(3) :855-873, 2016.

Problème des moments généralisés

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \int_X \varphi(x) d\mu$$

$$\text{tel que} \quad \int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$$

Ces techniques permettent de résoudre des problèmes tels que :

- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.