Méthodes numériques garanties pour la classification de fonctions et le contrôle optimal

Nicolas Delanoue

Soutenance HDR

Le 10 octobre 2018

Rapporteurs :
- Didier Henrion (DR LAAS - Toulouse)
- Nacim Ramdani (PR PRISME - Université d'Orléans)
- Stef Graillat (PR LIP6 - Sorbonne Université)

Examinateurs :
- Marie-Françoise Roy (PR IRMAR - Université de Rennes)
- Luc Jaulin (PR Lab-STICC - ENSTA Bretagne)
- Laurent Hardouin (PR LARIS - Université d'Angers)

- Enseignements :

Mathématiques, réseaux, système d'exploitation, électronique numérique, programmation, calcul scientifique, architecture logicielle et matérielle, projets en systèmes automatisés, modélisation, théorie du contrôle...

Environ 300 heures enseignements / an — DUT GEII, Licence Réseaux, ISTIA, Faculté des sciences

- Charges diverses :

Directeur des études — Département GEII

Responsable du recrutement — Département GEII

Animation scientifique — Département GEII

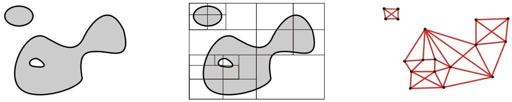
Chargé de mission pour le numérique — Composante IUT

Co-animateur de l'axe Mathématiques et fondement du numérique de SFR Math-STIC. — Université

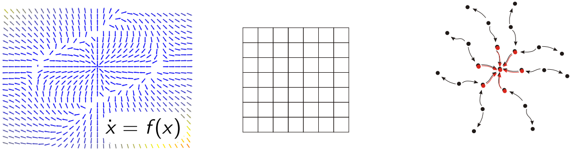
Maître de conférences à l'IUT

09 10 11 12 13 14 15 16 17 18

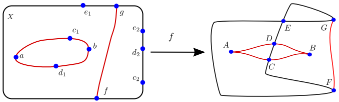
Analyse de la topologie d'un ensemble



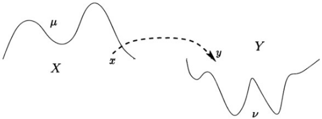
Calcul du bassin d'attraction d'un point



Analyse de fonctions lisses



Transport optimal et contrôle optimal



Doctorat | ATER | Maître de conférences

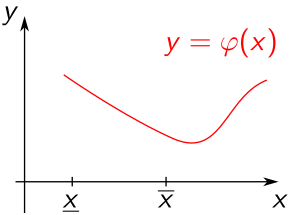
04 05 06 07 08 09 10 11 12 13 14 15 16 17 18

Sommaire

Définition

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, la fonction $[\varphi] : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ est une *fonction d'inclusion* pour φ si

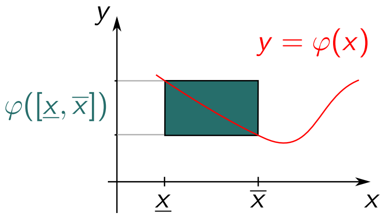
$$\forall [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR},\ \varphi([\underline{x}, \overline{x}]) \subset [\varphi]([\underline{x}, \overline{x}]).$$



Définition

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, la fonction $[\varphi] : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ est une *fonction d'inclusion* pour φ si

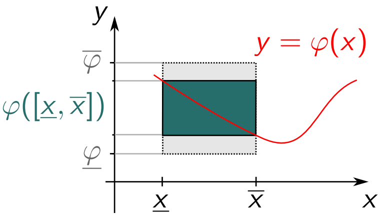
$$\forall [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR},\ \varphi([\underline{x}, \overline{x}]) \subset [\varphi]([\underline{x}, \overline{x}]).$$



Définition

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction, la fonction $[\varphi] : \mathbb{IR} \to \mathbb{IR}$ est une *fonction d'inclusion* pour φ si

$$\forall [\underline{x}, \overline{x}] \in \mathbb{IR},\ \varphi([\underline{x}, \overline{x}]) \subset [\varphi]([\underline{x}, \overline{x}]).$$

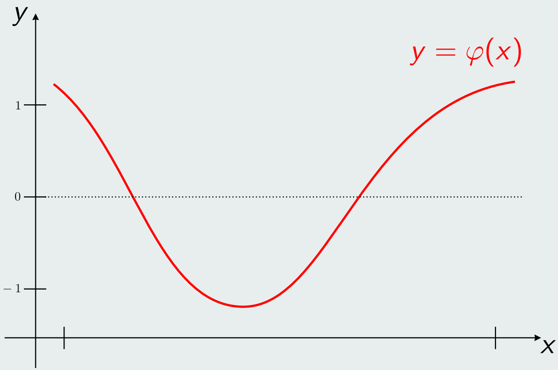


Une courte histoire du calcul par intervalles

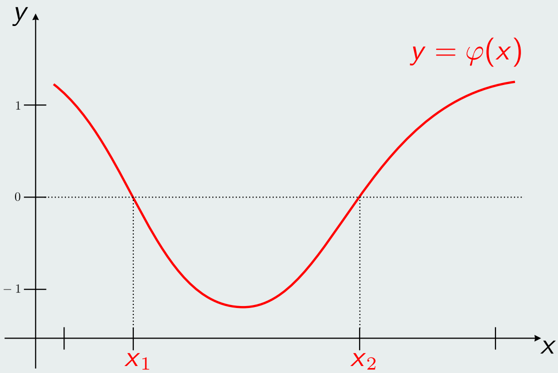
- Arithmétique des intervalles, R. E. Moore, 1966.
- Optimisation globale, R. Baker Kearfott, 90's,
- Résolution de systèmes d'équations, A. Neumaier, 90's
- Résolution d'équations différentielles ordinaires, R. Lohner 1988,
- La preuve de l'existence de l'attracteur étrange pour le système de Lorentz, W. Tucker, 1998.
- Analyse par intervalles appliquée à la robotique, L. Jaulin, 2001,
- La preuve de la conjecture de Kepler, T. Hales, 2003,
- Estimation de paramètres pour les systèmes décrits par les équations différentielles ordinaires, N. Ramdani, 2004
- EDP, topologie algébrique, ...

Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.

Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.

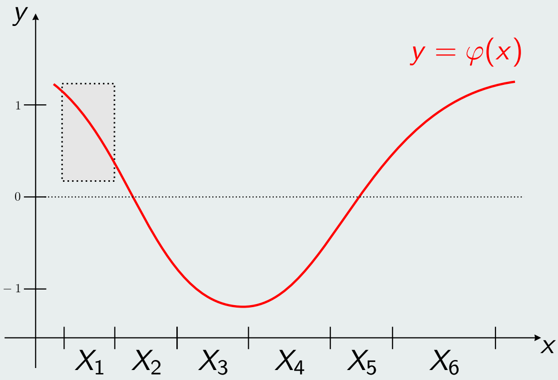


Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.

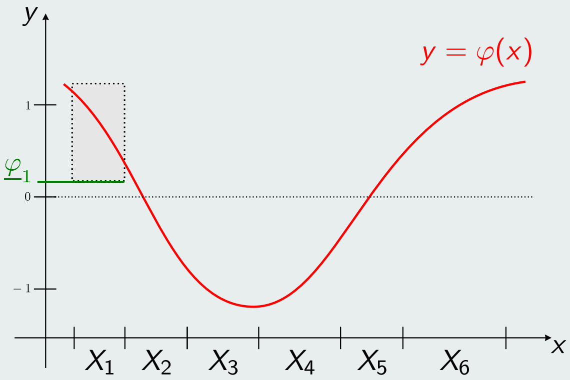


Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.

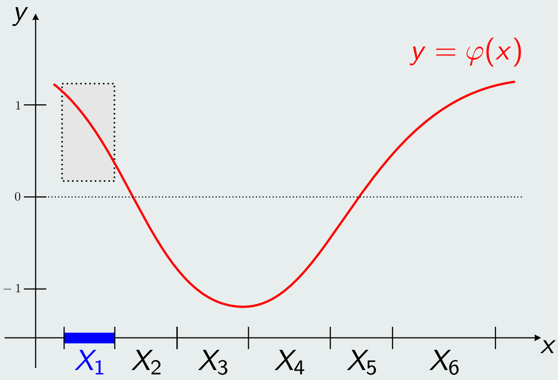
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.



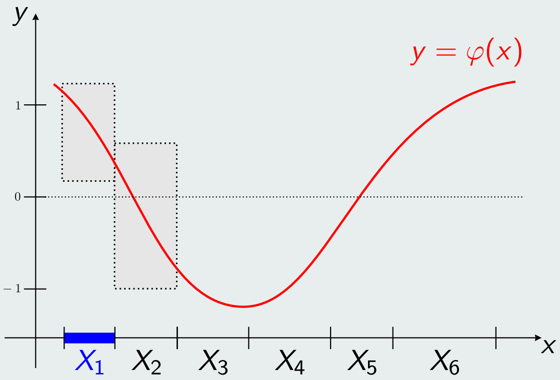
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.



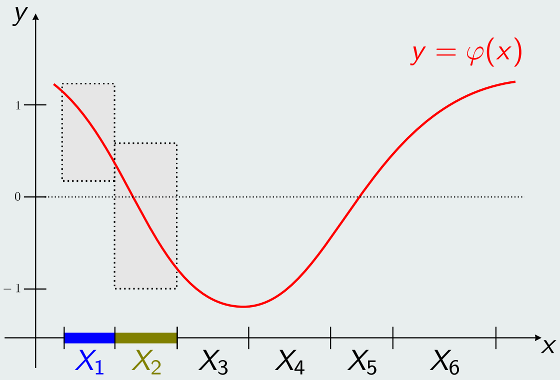
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.



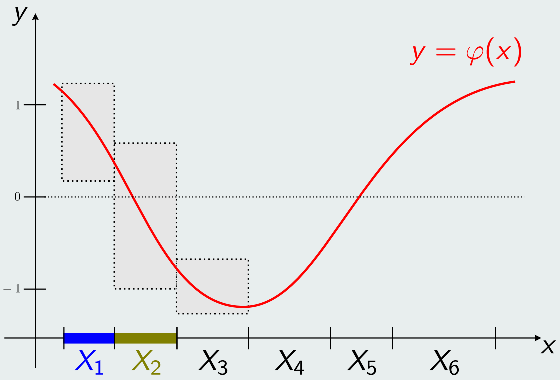
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.



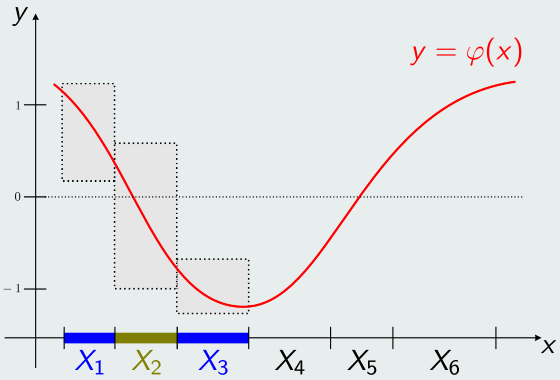
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.



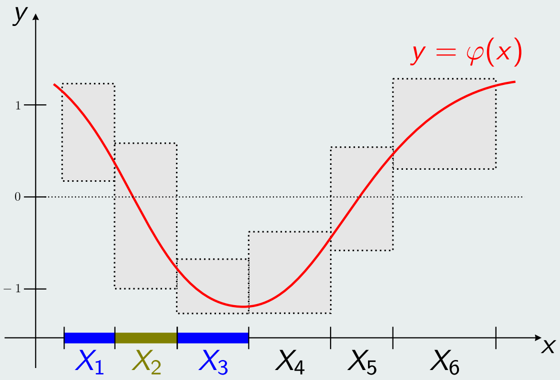
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.



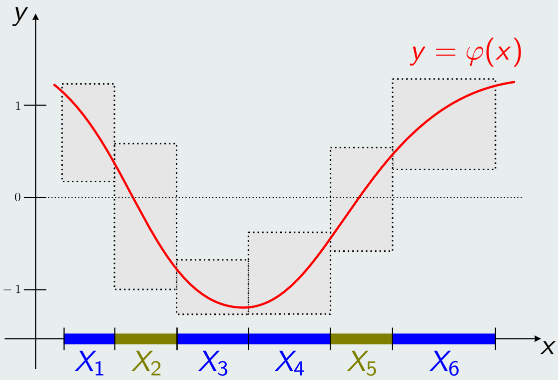
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.



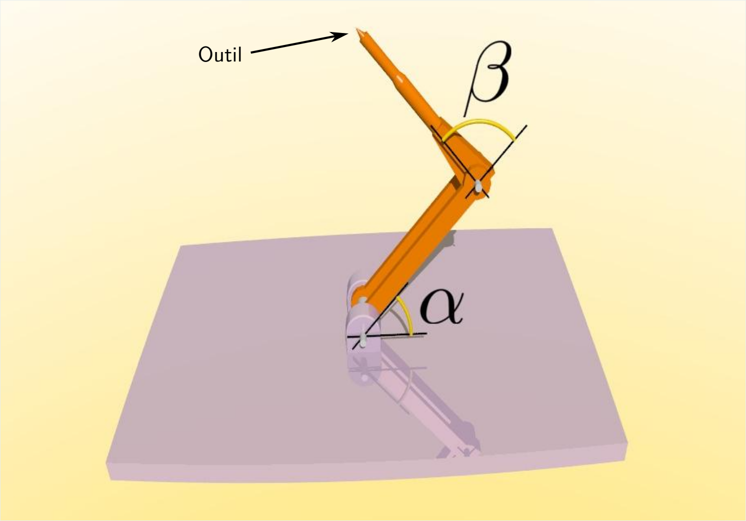
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.



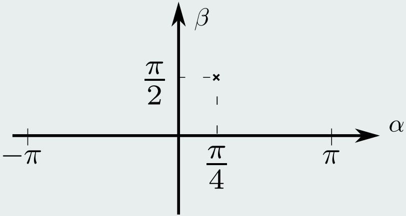
Résoudre l'équation $\varphi(x) = 0$ d'inconnue x.



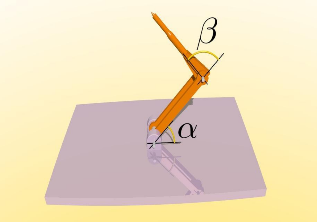
Les solutions de $\varphi(x) = 0$ appartiennent à $X_2 \cup X_5$.


Outil
β
α

La position de l'outil dépend de α et β



Espace des configurations



Espace de travail

Modélisation

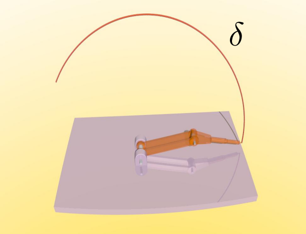
$$
\begin{array}{rccc}
f : & X & \to & \mathbb{R}^2 \\
 & \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2\cos(\alpha) + \cos(\alpha+\beta) \\ 2\sin(\beta) + \sin(\alpha+\beta) \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Plannification de trajectoires

Entrée : un chemin δ pour l'outil.

Sortie : un chemin γ dans l'espace des configurations tel que

$$f \circ \gamma = \delta.$$

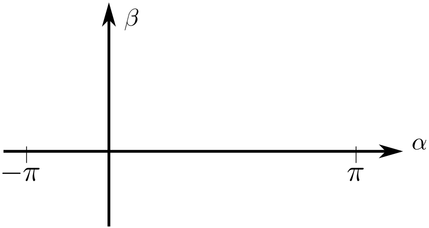


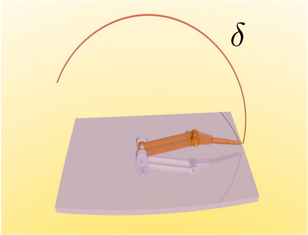
Plannification de trajectoires

Entrée : un chemin δ pour l'outil.

Sortie : un chemin γ dans l'espace des configurations tel que

$$f \circ \gamma = \delta.$$



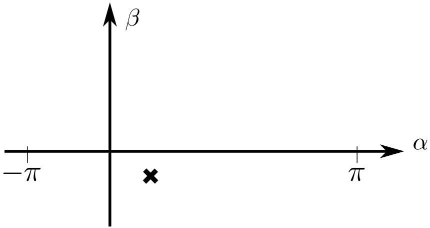


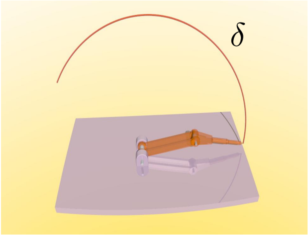
Plannification de trajectoires

Entrée : un chemin δ pour l'outil.

Sortie : un chemin γ dans l'espace des configurations tel que

$$f \circ \gamma = \delta.$$



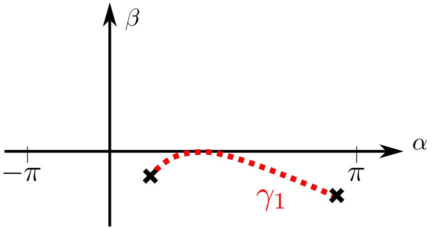


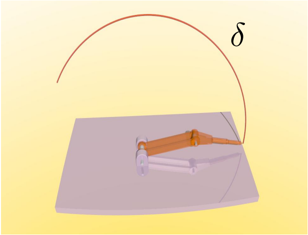
Plannification de trajectoires

Entrée : un chemin δ pour l'outil.

Sortie : un chemin γ dans l'espace des configurations tel que

$$f \circ \gamma = \delta.$$



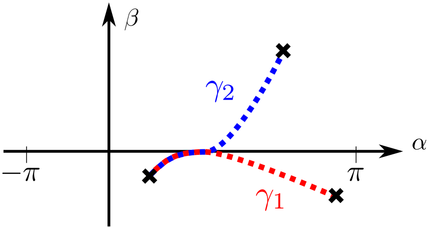


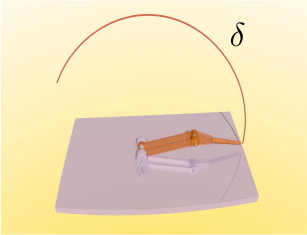
Plannification de trajectoires

Entrée : un chemin δ pour l'outil.

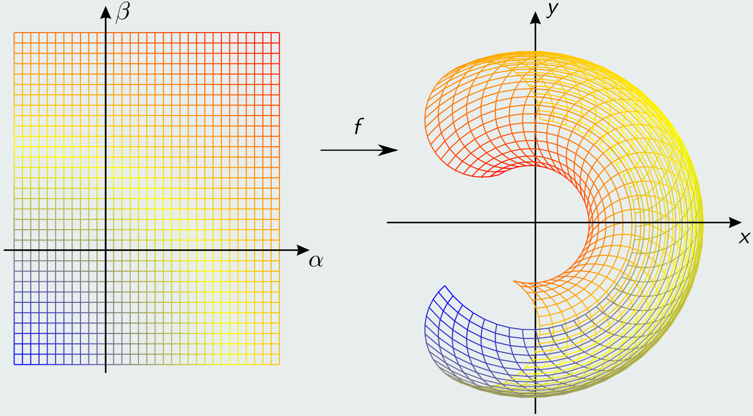
Sortie : un chemin γ dans l'espace des configurations tel que

$$f \circ \gamma = \delta.$$





“Graphe” de la fonction f



Objectif (robotique)

Calculer des *propriétés intrinsèques* d'un robot pour comprendre son comportement.

Objectif (robotique)

Calculer des *propriétés intrinsèques* d'un robot pour comprendre son comportement.

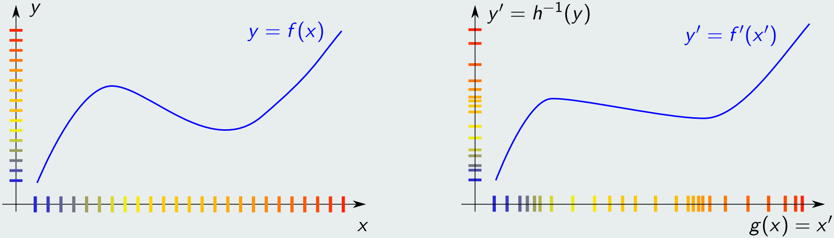
Objectif (mathématique)

Etudier la fonction f qui modélise le robot :

$$\begin{array}{cccc} f & : & X & \rightarrow & Y \\ & & x & \mapsto & f(x), \end{array}$$

modulo les changements de variables sur l'espace de configuration X et sur l'espace de travail Y (relation notée $\sim$).

Actions



Proposition

Si $f = h \circ f' \circ g$ alors rang $df_x =$ rang $df'_{g(x)}$.

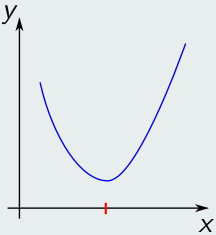
Corollaire

La topologie de l'ensemble des points singuliers S_f de f est un invariant pour $\sim$.

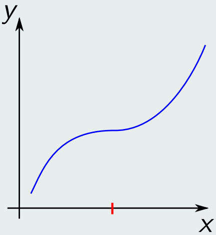
Type des singularités.

Il existe des fonctions lisses $f, f' : [0,1] \to [0,1]$ telles que

$$S_f \simeq S_{f'} \text{ et } f \not\sim f'.$$



$y = f(x)$

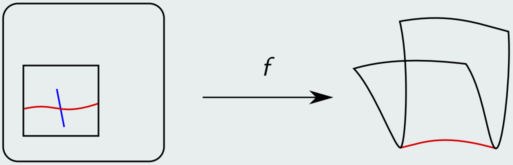


$y = f'(x)$

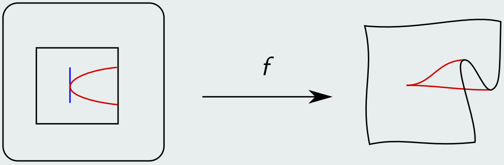
Théorème de Whitney [1955]

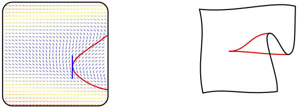
Soient X, Y deux variétés de dimension 2 et f *générique*. L'ensemble des points singuliers S_f est une courbe régulière. De plus, avec $p \in S_f$, on a :

- $T_p S_f \oplus \ker df_p = T_p X$ (point pli)



- $T_p S_p = \ker df_p$ (point fronce)





Proposition

Soit f une fonction générique de X dans $\mathbb{R}^2$, on définit l'application c par :

$$\begin{array}{rcccc} c & : & X & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & p & \mapsto & df_p \xi_p, \end{array}$$

où ξ est un champ de vecteurs défini par $\xi_p = \begin{pmatrix} \partial_2 \det df_p \\ -\partial_1 \det df_p \end{pmatrix}$. On a :

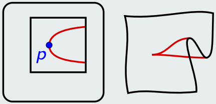
$$c(p) = 0 \Leftrightarrow \ p \text{ est une fronce.}$$

Publication

Nicolas Delanoue et Sébastien Lagrange. A numerical approach to compute the topology of the Apparent Contour of a smooth mapping from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 271 :267–284, 2014.

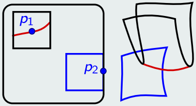
$X \subset \mathbb{R}^2$ compact simplement connexe et $f : X \to \mathbb{R}^2$ *générique* :

Cas i : Fronce



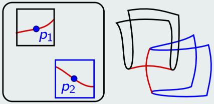
$$df_p \xi_p = 0$$

Cas iv



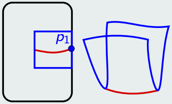
$$\begin{cases} b(p_1) & = & 0 \\ \det df_{p_2} & = & 0 \\ f(p_1) & = & f(p_2) \end{cases}$$

Cas ii : Noeuds



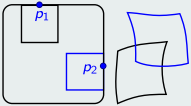
$$\begin{cases} \det df_{p_1} & = & 0 \\ \det df_{p_2} & = & 0 \\ f(p_1) & = & f(p_2) \end{cases}$$

Cas v



$$\begin{cases} \det df_{p_1} & = & 0 \\ b(p_1) & = & 0 \end{cases}$$

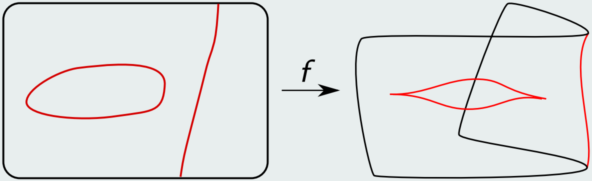
Cas iii



$$\begin{cases} b(p_1) & = & 0 \\ b(p_2) & = & 0 \\ f(p_1) & = & f(p_2) \end{cases}$$

Calcul de la topologie du contour apparent de f

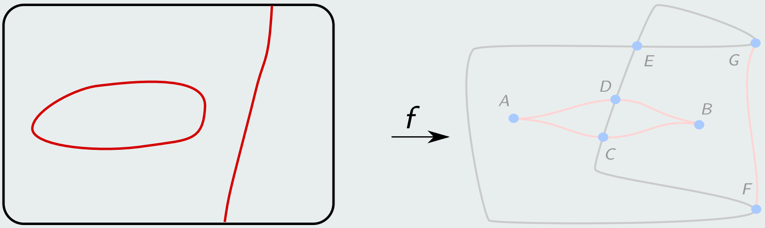
Entrée : X compact simplement connexe de $\mathbb{R}^2$,
une fonction $f : X \mapsto \mathbb{R}^2$,



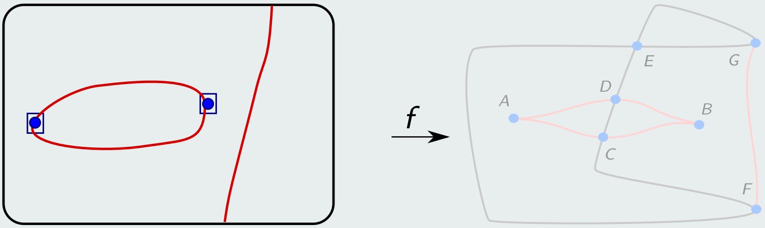
Sortie : la topologie de l'ensemble $f(S_f \cup \partial X)$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

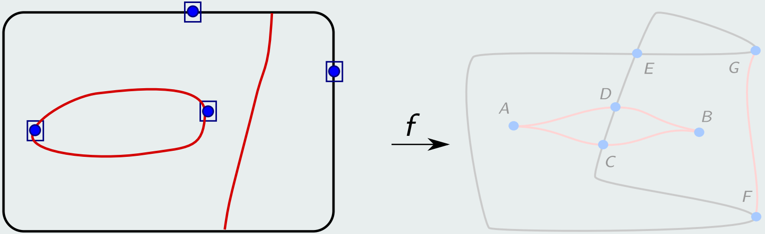
Analyse



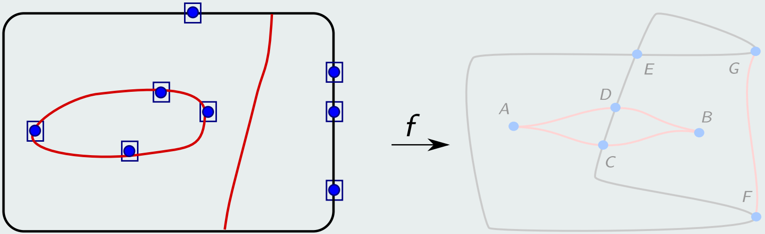
Analyse



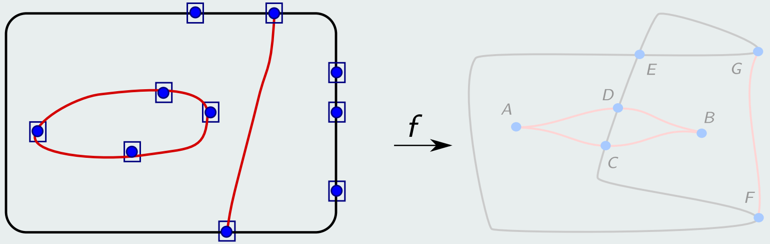
Analyse



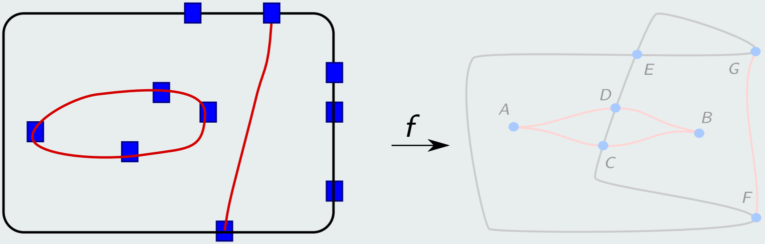
Analyse



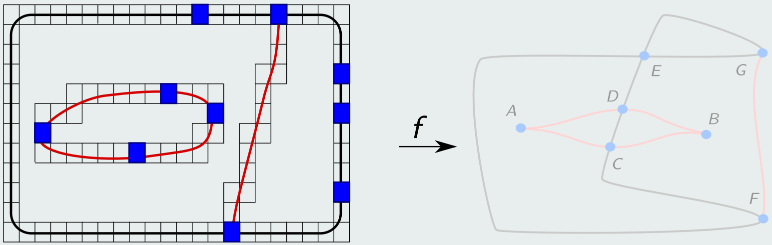
Analyse



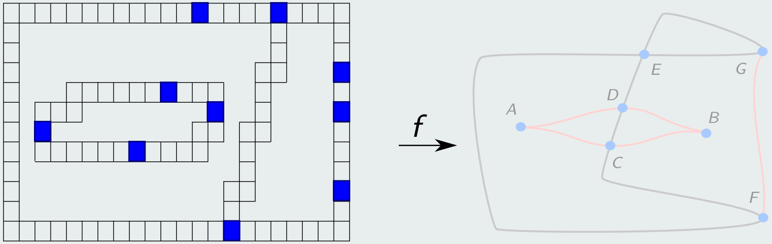
Analyse



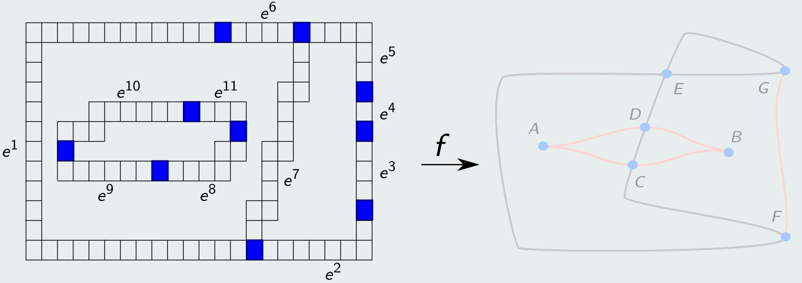
Analyse



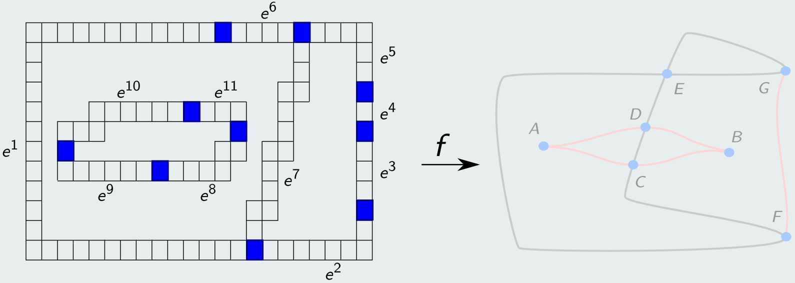
Analyse



Analyse

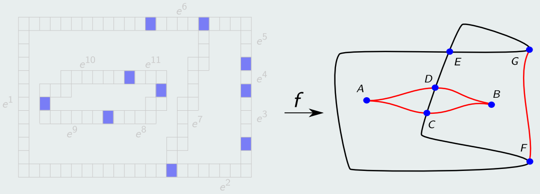


Analyse



$$\mathcal{X} = \begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c_1 \\ c_2 \\ d_1 \\ d_2 \\ e_1 \\ e_2 \\ f \\ g \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} e^1 & e^2 & e^3 & e^4 & e^5 & e^6 & e^7 & e^8 & e^9 & e^{10} & e^{11} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Synthèse



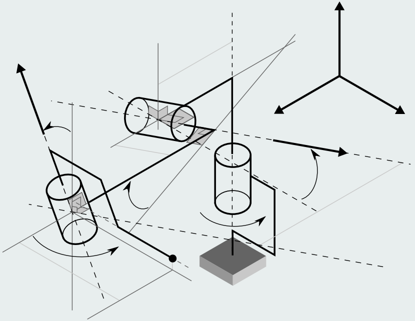
$$
\mathcal{X}/f = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccc} e^1 & e^2 & e^3 & e^4 & e^5 & e^6 & e^7 & e^8 & e^9 & e^{10} & e^{11} \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccccccccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
$$

Publication - Détails et preuves - Solver Thom

Nicolas Delanoue et Sébastien Lagrange. A numerical approach to compute the topology of the Apparent Contour of a smooth mapping from $\mathbb{R}^2$ to $\mathbb{R}^2$. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 271 :267–284, 2014.

Thèse de Romain Benoit

- Coencadrement avec Philippe Wenger et Sébastien Lagrange.
- Calcul numérique des fronces et noeuds du robot 3R :



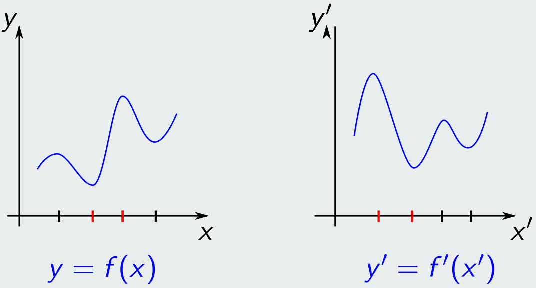
Publication

Romain Benoit, Nicolas Delanoue, Sébastien Lagrange, et Philippe Wenger. Guaranteed detection of the singularities of 3R robotic manipulators. *Mechanical Sciences*, 7(1) :31-38, 2016.

Topologies de X et de Y

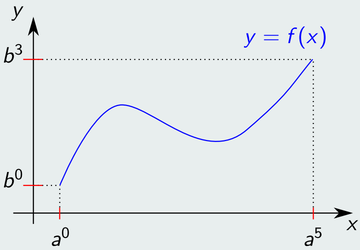
Il existe des fonctions lisses $f, f' : [0,1] \to [0,1]$ telles que

$$S_f \simeq S_{f'} \text{ et } f \not\sim f'.$$



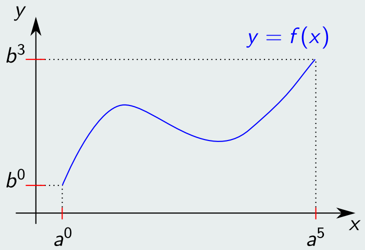
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



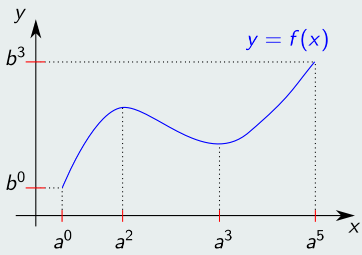
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



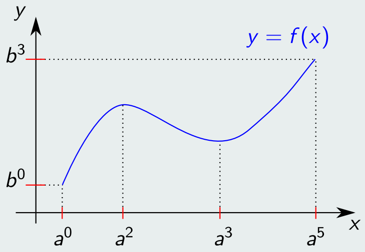
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



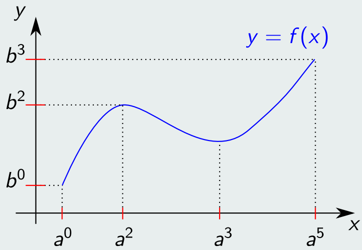
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



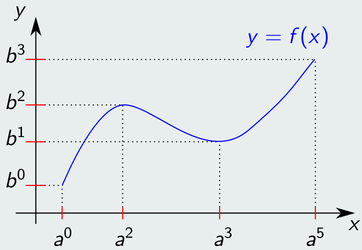
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



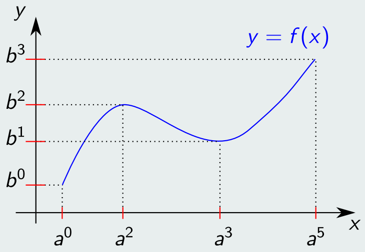
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



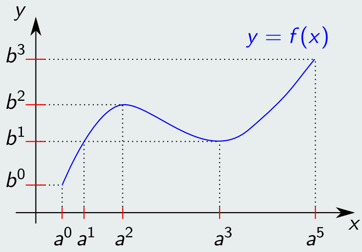
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



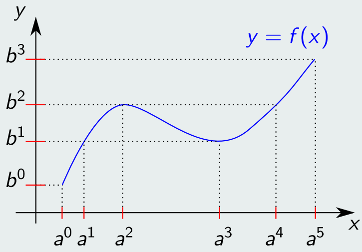
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



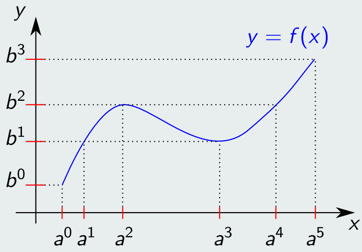
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



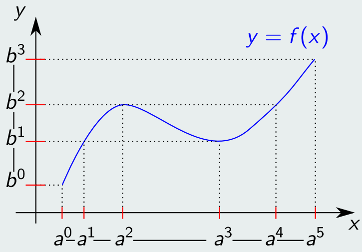
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



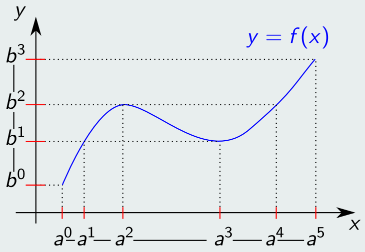
Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.



Méthode

1. Calcul des singularités de f : S_f
2. Calcul des valeurs singulières de f : $f(S_f)$
3. Calcul des antécédents des valeurs singulières de f : $f^{-1}f(S_f))$
4. Création des graphes $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ de voisinage sur le source et le but.

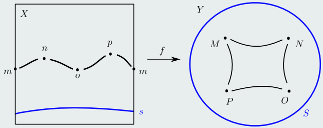


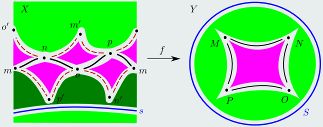
Résultat : portrait F de f

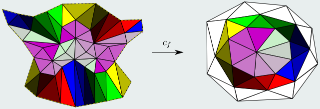
$\mathcal{X} = a^0 — a^1 — a^2 — a^3 — a^4 — a^5$
$\mathcal{Y} = b^0 — b^1 — b^2 — b^3$

$$\begin{array}{lllll} F & : & \mathcal{X} & \to & \mathcal{Y} \\ & & a^0 & \mapsto & b^0 \\ & & a^1 & \mapsto & b^1 \\ & & a^2 & \mapsto & b^2 \\ & & a^3 & \mapsto & b^1 \\ & & a^4 & \mapsto & b^2 \\ & & a^5 & \mapsto & b^3 \end{array}$$

Portrait de fonctions







Publication

Romain Benoit, Nicolas Delanoue, Sébastien Lagrange, et Philippe Wenger. Combinatorial description of 2-dimensional kinematic functions : application to 3R robotic manipulators. *Soumis à Robotica*, 2018.

GdR MOA

GdR 3273 MOA

Mathématiques de l'Optimisation et Applications

cnrs

Accueil | Equipes | Activités | Historique | Liens | Contact

Mini-cours sur l'optimisation polynomiale et le contrôle

INSA Rennes, 24-25 Mars 2014
En collaboration avec la conférence MODE 2014

Ce mini-cours se concentre sur l'optimisation polynomiale et le contrôle. Une attention particulière sera portée sur les techniques de relaxation semi-définie exploitant la dualité entre les problèmes de moments et la représentation de polynômes positifs sur des ensembles semi-algébriques.

L'objectif est d'introduire les idées principales d'une façon unifiée mais accessible, dans l'espoir de stimuler de nouvelles activités de recherche dans ce domaine.

Intervenants

Didier Henrion est chercheur au CNRS travaillant au LAAS à Toulouse, France. Il est aussi Professeur à Faculté d'ingénierie électrique de l'Université technologique tchèque à Prague, République Tchèque. Il s'intéresse à l'optimisation polynomiale des systèmes contrôlés et plus particulièrement au developpement d'outils constructifs pour résoudre les problèmes mathématiques apparaissant dans la théorie du contrôle des systèmes.

Jean-Bernard Lasserre est chercheur au CNRS travaillant au LAAS et à l'Institut de Mathématiques de l'Université de Toulouse, France. Après avoir contribué à l'étude des problèmes de décision markovien, il s'est spécialisé dans la programmation semi-définie et dans la relaxation des inégalités matricielles linéaires pour l'optimisation polynomiale et le contrôle optimal.

Problème des moments généralisés

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \quad \int_X \varphi(x) d\mu$$

$$\text{tel que} \quad \int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$$

Ces techniques permettent de résoudre des problèmes tels que :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Problème des moments généralisés

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \quad \int_X \varphi(x) d\mu$$
$$\text{tel que} \quad \int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$$

Ces techniques permettent de résoudre des problèmes tels que :

- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Problème des moments généralisés

$$\inf_{\mu \in \mathcal{M}^+(X)} \quad \int_X \varphi(x) d\mu$$

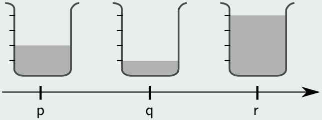
$$\text{tel que} \quad \int_X \psi(x) d\mu \leqq \gamma_\psi, \forall \psi \in \Gamma.$$

Ces techniques permettent de résoudre des problèmes tels que :

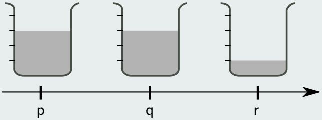
- trouver le minimum global d'une fonction sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$,
- évaluer la valeur du transport optimal de Kantorovitch,
- calculer la valeur optimale d'un problème de contrôle optimal,
- calculer la mesure de Lebesgue d'un sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$,
- calculer une borne supérieure à $\mu(S)$ parmi toutes les mesures μ vérifiant certaines conditions sur ses moments,
- évaluer le critère ergodique associé à une chaîne de Markov,
- ...

Jean-Bernard Lasserre. *Moments, Positive Polynomials and Their Applications.* Imperial College Press optimization series. Imperial College Press, 2010.

Exemple dans le cas discret



$\mu = (2, 1, 4)$

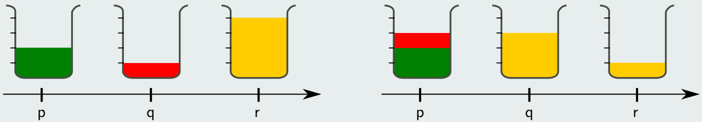


$\nu = (3, 3, 1)$

Problème de transport

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 4 & \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ 1 & \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ 2 & \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{array} \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} \forall i,\ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ \forall j,\ \sum_j \pi_{ij} = \nu_j. \end{cases}$$

Exemple dans le cas discret



$\mu = (2, 1, 4)$ $\nu = (3, 3, 1)$

Une solution au problème de transport

$$\begin{array}{c|ccc} & 3 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{array} \text{ vérifie } \begin{cases} \forall i,\ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ \forall j,\ \sum_j \pi_{ij} = \nu_j. \end{cases}$$

Dans le cas discret

$$\begin{aligned} \min_{\pi \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m} \quad & \sum_{i,j} c_{ij}\pi_{ij} \\ \text{tel que} \quad & \forall i, \ \sum_j \pi_{ij} = \mu_i, \\ & \forall j, \ \sum_j \pi_{ij} = \nu_j. \end{aligned} \tag{1}$$

où $c_{ij} \in \mathbb{R}^+$ est le coût d'un transport de masse unitaire de la position i à la position j.

Formulation de Kantorovich

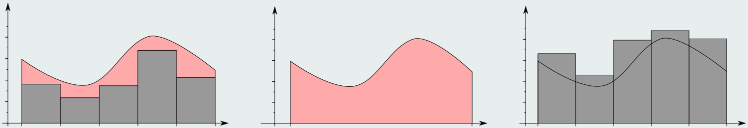
La *valeur optimale du problème de transport* entre μ et ν est la valeur :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_c(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \mathcal{M}^+(X \times Y)} \quad & \int_{X \times Y} c(x, y) \mathrm{d}\pi \\ \text{telle que} \quad & \pi_X = \mu, \\ & \pi_Y = \nu. \end{aligned} \tag{2}$$

Lemme - Encadrement

Soit $\{X_i\}_i$ une partition de X, si $\mu \in \mathcal{M}^+(X)$ et $[\varphi]$ une fonction d'inclusion pour φ alors

$$\sum_i \underline{\varphi}(X_i)\mu(X_i) \leq \int_X \varphi(x)\mathrm{d}\mu(x) \leq \sum_i \overline{\varphi}(X_i)\mu(X_i).$$



Proposition - Relaxation

- μ, ν deux mesures avec X et Y comme support,
- $\{X_i\}_i$, $\{Y_j\}_j$ deux partitions de X et Y,
- $\mu(X_i) \in [\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i]$, $\nu(Y_j) \in [\underline{\nu}_j, \overline{\nu}_j]$,
- $\forall (x,y) \in X_i \times Y_j, \underline{c}_{ij} \leq c(x,y)$,

Si

$$\underline{\mathcal{T}} = \min_{\pi_{ij} \in \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m} \sum_{i,j} \underline{c}_{ij} \pi_{ij}$$

$$\text{tel que} \quad \forall i,\ \underline{\mu}_i \leq \sum_j \pi_{ij} \leq \overline{\mu}_i,$$

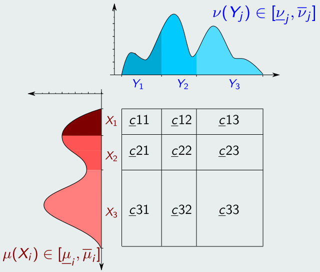
$$\forall j,\ \underline{\nu}_j \leq \sum_i \pi_{ij} \leq \overline{\nu}_j,$$

$$\forall i, \forall j,\ \pi_{ij} \geq 0.$$

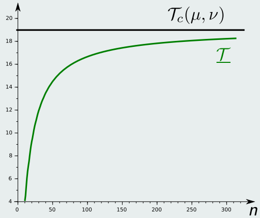
alors

$$\underline{\mathcal{T}} \leq \mathcal{T}_c(\mu, \nu).$$

Discrétisation spatiale



Résultats : bornes inférieures



Problème primal

$$\begin{array}{ll} \inf\limits_{\pi \in \mathcal{M}^+(X \times Y)} & \displaystyle\int_{X \times Y} c(x,y)\mathrm{d}\pi \\ \text{tel que} & \pi_X = \mu, \\ & \pi_Y = \nu \end{array}$$

Problème dual

$$\begin{array}{ll} \sup\limits_{\phi,\psi \in \mathcal{C}_b(X,Y)} & \displaystyle\int_X \varphi(x)\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_Y \psi(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \\ \text{tel que} & \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x,y). \end{array}$$

où $\mathcal{C}_b(X, Y)$ désigne l'ensemble des couples (ϕ, ψ) de fonctions bornées et continues $\phi : X \to \mathbb{R}$ et $\psi : Y \to \mathbb{R}$.

Proposition - Relaxation

- μ, ν deux mesures avec X et Y comme support,
- $\{X_i\}_i$, $\{Y_j\}_j$ deux partitions de X et Y,
- $\mu(X_i) \leq \overline{\mu}_i$, $\nu(Y_j) \leq \overline{\nu}_j$,
- $\forall x, y \in X_i \times Y_j, c(x, y) \leq \overline{c}_{ij}$.

Si

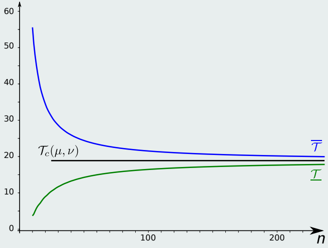
$$\overline{\mathcal{T}} = \sup_{(\phi_i)\in\mathbb{R}^n,(\psi_j)\in\mathbb{R}^n} \sum_i \phi_i \overline{\mu}_i + \sum_j \psi_j \overline{\nu}_i$$

$$\text{tel que} \quad \phi_i + \psi_j \leq \overline{c}_{ij}$$

alors

$$\mathcal{T}_c(\mu, \nu) \leq \overline{\mathcal{T}}.$$

Résultats : bornes supérieures



Publication - Preuves et convergence

Nicolas Delanoue, Mehdi Lhommeau, et Philippe Lucidarme. Numerical enclosures of the optimal cost of the Kantorovitch's mass transportation problem. *Computational Optimization and Applications*, 63(3) :855-873, 2016.

Théorème

$$J_1^* = \min_{u:[0,T]\to U} \int_0^T h(t, x(t), u(t))dt + H(x(T))$$
$$\text{tel que } x(0) = x_0, \dot{x} = f(x,u), \forall t \in [0,T],$$
$$x(t) \in X, \forall t \in [0,T], x(T) \in K. \tag{3}$$

et

$$J_2^* = \min_{\mu,\nu \in \mathcal{M}_+} \langle \mu, h \rangle + \langle \nu, H \rangle$$
$$\text{tel que } \mathcal{L}'(\mu,\nu) = \delta_{(0,x_0)},$$
$$supp(\mu) \subset [0,T] \times X \times U, supp(\nu) \subset K. \tag{4}$$

Sous les hypothèses de Vinter,

$$J_1^* = J_2^*.$$

R. Vinter. *Convex duality and nonlinear optimal control.* SIAM J. Control Optim. 31, 2 (1993), 518-538

Théorème

$$
\begin{aligned}
J_1^* = \min_{u:[0,T]\to U} & \int_0^T h(t, x(t), u(t))dt + H(x(T)) \\
\text{tel que } & x(0) = x_0, \dot{x} = f(x,u), \forall t \in [0,T], \\
& x(t) \in X, \forall t \in [0,T], x(T) \in K.
\end{aligned} \tag{3}
$$

et

$$
\begin{aligned}
J_2^* = \min_{\mu,\nu\in\mathcal{M}_+} & \langle \mu, h\rangle + \langle \nu, H\rangle \\
\text{tel que } & \mathcal{L}'(\mu,\nu) = \delta_{(0,x_0)}, \\
& supp(\mu) \subset [0,T] \times X \times U, supp(\nu) \subset K.
\end{aligned} \tag{4}
$$

Sous les hypothèses de Vinter,

$$J_1^* = J_2^*.$$

R. Vinter. *Convex duality and nonlinear optimal control.* SIAM J. Control Optim. 31, 2 (1993), 518-538

Théorème - Relaxation

$$J^* = \min_{\mu,\nu \in \mathcal{M}_+} \quad \langle \mu, h \rangle + \langle \nu, H \rangle$$

$$\text{tel que} \qquad \mathcal{L}'(\mu, \nu) = \delta_{(0,x_0)}$$

$\{X_i\}$ une partition de $[0, T] \times X \times U$,
$\{Y_k\}$ une partition de K,
$\mathcal{P} = \{\varphi\}$ une famille finie de fonctions de t, x.

$$\underline{J} = \min_{\mu_i, \nu_k \in \mathbb{R}^+} \quad \sum_{i \in I} \mu_i \underline{h}_i + \sum_{k \in K} \nu_k \underline{H}_k$$

$$\text{tel que } \forall \varphi \in \mathcal{P} \quad \sum_{i \in I} \mu_i \underline{\psi}_i + \sum_{k \in K} \nu_k \underline{\varphi}_k \leq \varphi(0, x_0)$$

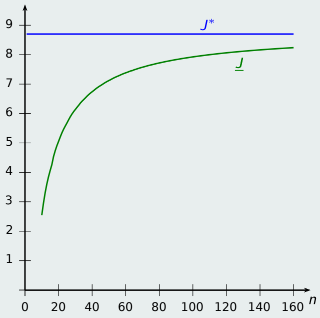
$$\varphi(0, x_0) \leq \sum_{i \in I} \mu_i \overline{\psi}_i + \sum_{k \in K} \nu_k \overline{\varphi}_k,$$

$$\text{avec } \psi = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} f(t, x, u),$$

alors

$$\underline{J} \leq J^*.$$

Bornes inférieures garanties



Publication - Preuves et convergence

Nicolas Delanoue, Mehdi Lhommeau, et Sébastien Lagrange. Nonlinear optimal control : A numerical scheme based on occupation measures and interval analysis. *Soumis à Computational Optimization and Applications*, 2018.

Publications et communications

- 11 articles de revues internationales à comité de lecture référencées,
- 2 chapitres d'ouvrages collectifs,
- 6 communications dans des conférences internationales à comité de lecture,
- nombreux séminaires et workshops internationaux.

Invitations

W. Tucker - Université de Bergen, Université d'Uppsala

A. Goldsztejn - Institut Henri Poincaré RAIM 2013

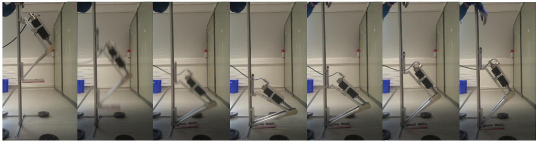
A. Stancu - Université de Manchester M. Mustafa, A. Stancu, N. Delanoue et E. Codres. Guaranteed slam - an interval approach. *Robotics and Autonomous Systems*, 100 :160-170, 2018.

G. Moroz - INRIA Nancy Perspective : écrire un semi-algorithme capable de décider qu'une fonction est transverse à une sous variété W.

Perspective 1 : Robotique humanoïde avec le LS2N.

Projet ANR en robotique humanoïde - B4D2 - 2018

Moteurs linéaires, à entrainement direct, réversibles et bi-articulaires pour la robotique humanoïde bio-inspirée.

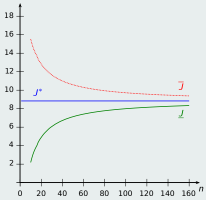


Conférence - ROMANSY 2018

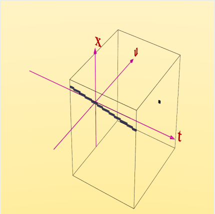
Preliminary survey of backdrivable linear actuators for humanoid robots, Philippe Lucidarme, Nicolas Delanoue, Franck Mercier, Yannick Aoustin, Christine Chevallereau, Philippe Wenger ROMANSY 2018,
22nd CISM IFToMM Symposium on Robot Design, Dynamics and Control, 2018 Rennes, France

Perspective 2 : *Calcul de bornes supérieures pour le contrôle optimal et étudier la convergence des solutions pour proposer une loi de commande.*

Bornes supérieures :



Commande optimale :



Didier Henrion, Jean-Bernard Lasserre, and Carlo Savorgnan. Nonlinear optimal control synthesis via occupation measures. In Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control, pages 4749–4754, 2008.

Encadrement doctoral - Collaboration avec l'université de Medellin - Colombie

Doctorante : Luz Adriana Guzman, Coencadrement avec S. Lahaye et V. Azhmyakov.

Perspective 3 : *Méthode générale pour résoudre numériquement les problèmes des moments généralisés.*

Théorème de Putinar

Soit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ compact et $(g_i)_{i=1}^m \subset \mathbb{R}[x]$.
Hypothèse (α),

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \Rightarrow \exists \sigma_i \in \Sigma[x], f - \sigma_1 g_1 \cdots - \sigma_m g_m = \sigma_0.$$

Théorème de positivité

Soit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \geq 0, i = 1, \ldots, m\}$ compact et $(g_i)_{i=1}^m \subset \mathcal{C}^0$.
Hypothèse (β),

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \Rightarrow \exists \sigma_i \in \mathcal{C}^+, \max(f, -(\sigma_1 + g_1), \ldots, -(\sigma_m + g_m)) = \sigma_0.$$

Perspective 4 : *Etudier globalement une fonction avec la théorie de la mesure.*

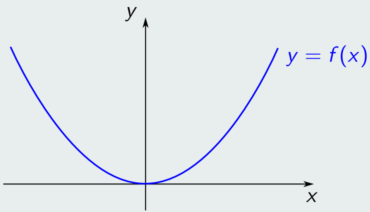
Définition - Pushforward

$$\begin{array}{rccl} f_* : & \mathcal{M}(X) & \to & \mathcal{M}(Y) \\ & \mu & \mapsto & \nu = f_*\mu, \quad \text{avec } \nu(B) = \mu(f^{-1}(B)). \end{array}$$

Perspective 4 : *Etudier globalement une fonction avec la théorie de la mesure.*

Définition - Pushforward

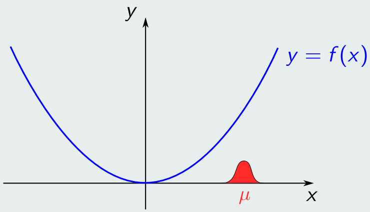
$$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathcal{M}(X) & \to & \mathcal{M}(Y) \\ & \mu & \mapsto & \nu = f_*\mu, \end{array} \quad \text{avec } \nu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$



Perspective 4 : *Etudier globalement une fonction avec la théorie de la mesure.*

Définition - Pushforward

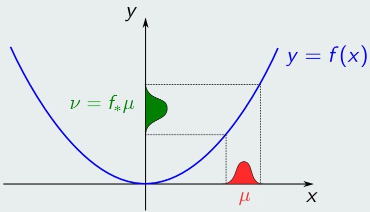
$$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathcal{M}(X) & \to & \mathcal{M}(Y) \\ & \mu & \mapsto & \nu = f_*\mu, \end{array} \quad \text{avec } \nu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$



Perspective 4 : *Etudier globalement une fonction avec la théorie de la mesure.*

Définition - Pushforward

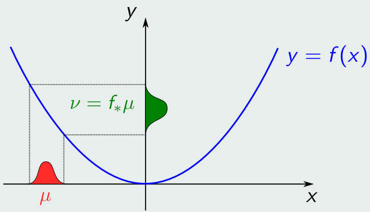
$$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathcal{M}(X) & \rightarrow & \mathcal{M}(Y) \\ & \mu & \mapsto & \nu = f_*\mu, \end{array} \quad \text{avec } \nu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$



Perspective 4 : *Etudier globalement une fonction avec la théorie de la mesure.*

Définition - Pushforward

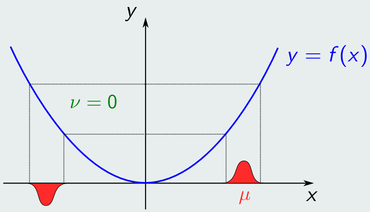
$$f_* : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}(X) & \to & \mathcal{M}(Y) \\ \mu & \mapsto & \nu = f_*\mu, \end{array} \quad \text{avec } \nu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$



Perspective 4 : *Etudier globalement une fonction avec la théorie de la mesure.*

Définition - Pushforward

$$\begin{array}{rccc} f_* : & \mathcal{M}(X) & \to & \mathcal{M}(Y) \\ & \mu & \mapsto & \nu = f_*\mu, \end{array} \quad \text{avec } \nu(B) = \mu(f^{-1}(B)).$$

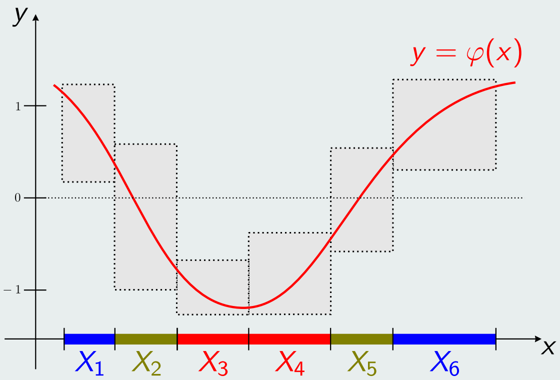


f est injective $\Leftrightarrow \ker f_* = \{0\}$.

Merci pour votre attention.

Calcul de volumes

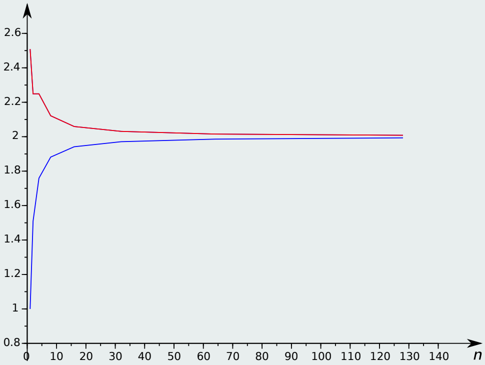
Calculer $V = \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(x) \leq 0\})$.



$$\lambda(X_3) + \lambda(X_4) \leq V \leq \lambda(X_2) + \cdots + \lambda(X_5)$$

Calcul de volumes

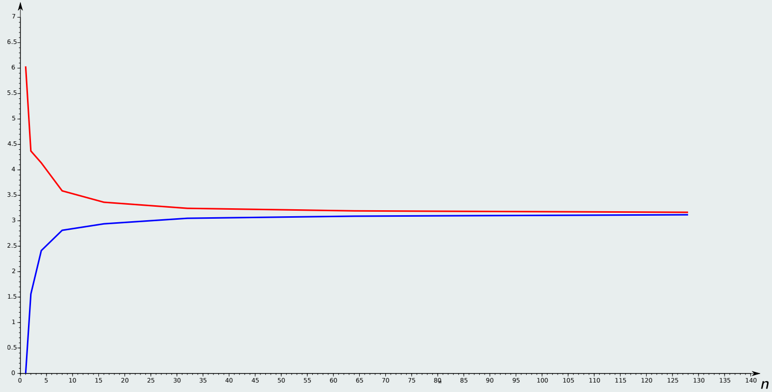
$$\lambda(\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 1 \leq 0\})$$



avec $\epsilon = \frac{1}{n}$.

Calcul de volumes

$$\lambda(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 \leq 0\})$$



avec $\epsilon = \frac{1}{n}$.