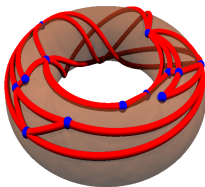


# Algorithmes numériques pour l'analyse topologique

Calcul par intervalles et théorie des graphes.

Nicolas Delanoue



Université d'Angers - LISA

Jeudi 14 décembre 2006

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

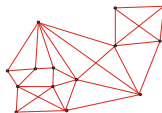
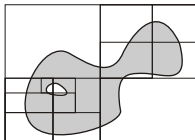
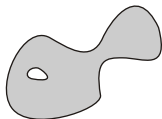
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Analyse de la topologie d'un ensemble



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

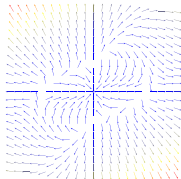
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

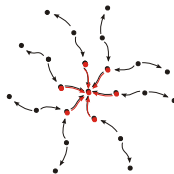
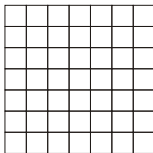
Discretisation

Conclusion

## Calcul du bassin d'attraction d'un point



$$\dot{x} = f(x)$$



# Plan

## Calcul par intervalles

## Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discrétisation

## Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

## Conclusion

### Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles

Calcul par intervalles

### Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discrétisation

### Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

### Conclusion

# Calcul par intervalle

## Notation

Soient  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$ ,  $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ ,

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Notation

Soient  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$ ,  $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ ,

## Définition

On note par  $\mathbb{IR}$  l'ensemble des intervalles compacts de  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Notation

Soient  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$ ,  $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ ,

## Définition

On note par  $\mathbb{IR}$  l'ensemble des intervalles compacts de  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

## Exemple

►  $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$

Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Notation

Soient  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$ ,  $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ ,

## Définition

On note par  $\mathbb{IR}$  l'ensemble des intervalles compacts de  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

## Exemple

- ▶  $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$
- ▶  $[2; 1] \notin \mathbb{IR}$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Notation

Soient  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}$ ,  $[x] = [\underline{x}; \bar{x}] = \{x \in \mathbb{R} : \underline{x} \leq x \leq \bar{x}\}$ ,

## Définition

On note par  $\mathbb{IR}$  l'ensemble des intervalles compacts de  $\mathbb{R}$  :

$$\mathbb{IR} = \{[x] \mid \underline{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}, \underline{x} \leq \bar{x}\}$$

## Exemple

- ▶  $[1; \pi] \in \mathbb{IR}$
- ▶  $[2; 1] \notin \mathbb{IR}$
- ▶  $[1; \infty[ \notin \mathbb{IR}$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



## Topologie sur $\mathbb{R}$

Soient  $[a], [b] \in \mathbb{R}$ , la distance de Hausdorff  $d$

$$d([a], [b]) = \max(|\underline{a} - \underline{b}|, |\bar{a} - \bar{b}|)$$

munit  $\mathbb{R}$  d'une topologie.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition

Si  $\star \in \{+, -, \times, \div\}$  et  $[a], [b] \in \mathbb{IR}$  alors :

$$[a] \star [b] = \{a \star b, a \in [a] \text{ et } b \in [b]\}$$

Remarque : si  $0 \in [b]$  alors  $[a] \div [b]$  n'est pas définie.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

R. C. Young (1931), M. Warmus (1956), T. Sunaga (1958),  
R. E. Moore (1959) Interval Analysis (1966).

## Définition

Si  $\star \in \{+, -, \times, \div\}$  et  $[a], [b] \in \mathbb{IR}$  alors :

$$[a] \star [b] = \{a \star b, a \in [a] \text{ et } b \in [b]\}$$

Remarque : si  $0 \in [b]$  alors  $[a] \div [b]$  n'est pas définie.

$$[a] + [b] = [\underline{a} + \underline{b}; \bar{a} + \bar{b}]$$

$$[a] - [b] = [\underline{a} - \bar{b}; \bar{a} - \underline{b}]$$

$$[a] \times [b] = [\min\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}; \max\{\underline{a}\underline{b}, \underline{a}\bar{b}, \bar{a}\underline{b}, \bar{a}\bar{b}\}]$$

$$[a] \div [b] = [a] \times [1/\bar{b}; 1/\underline{b}]$$

R. C. Young (1931), M. Warmus (1956), T. Sunaga (1958),  
R. E. Moore (1959) Interval Analysis (1966).

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

$[f] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$  est une **fonction d'inclusion** pour  $f$  si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}, f([x]) \subset [f]([x])$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}$  à valeur dans  $\mathbb{R}$ .

$[f] : \mathbb{IR} \rightarrow \mathbb{IR}$  est une **fonction d'inclusion** pour  $f$  si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}, f([x]) \subset [f]([x])$$

## Exemple

Si  $f$  est une fonction réelle continue définie sur  $\mathbb{R}$ .

L'image directe  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une **fonction d'inclusion** pour  $f$ .

Calcul par  
intervallesL'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemples

1.  $\exp([x]) = [\exp(\underline{x}); \exp(\bar{x})]$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemples

1.  $\exp([x]) = [\exp(\underline{x}); \exp(\bar{x})]$
2.  $\sqrt{([x])} = [\sqrt{\underline{x}}; \sqrt{\bar{x}}]$  si  $0 \leq \underline{x}$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemples

$$1. \exp([x]) = [\exp(\underline{x}); \exp(\bar{x})]$$

$$2. \sqrt{([x])} = [\sqrt{\underline{x}}; \sqrt{\bar{x}}] \text{ si } 0 \leq \underline{x}$$

$$3. ([x])^2 = \begin{cases} [\underline{x}^2; \bar{x}^2] & \text{si } 0 \leq \underline{x} \\ [0; \max\{\underline{x}^2, \bar{x}^2\}] & \text{si } 0 \in [x] \\ [\bar{x}^2; \underline{x}^2] & \text{si } \bar{x} \leq 0 \end{cases}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



## Exemple

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemple

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

La fonction sin étendue aux intervalles :

$$\begin{aligned} [\sin_1] : \mathbb{IR} &\rightarrow \mathbb{IR} \\ [x] &\mapsto [-1; 1] \end{aligned}$$

$[\sin_1]$  est une fonction d'inclusion pour sin.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

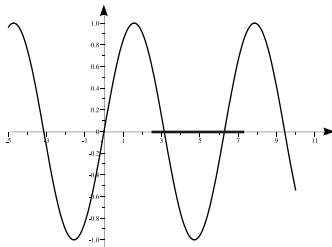
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

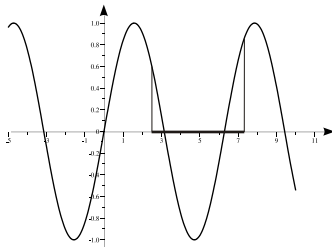
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



## Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles

Calcul par intervalles

## Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discrétisation

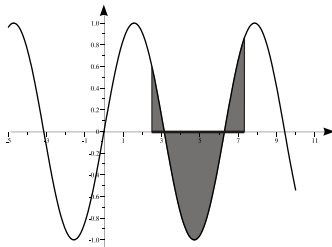
## Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

## Conclusion



## Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles

Calcul par intervalles

## Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discrétisation

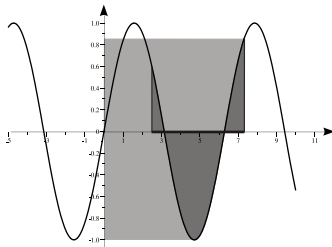
## Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

## Conclusion



## Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles

Calcul par intervalles

## Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discrétisation

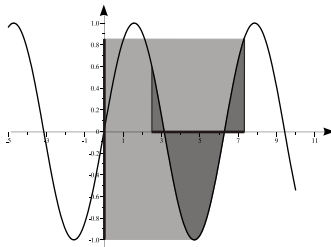
## Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

## Conclusion



## Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles

Calcul par intervalles

## Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discrétisation

## Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

## Conclusion

## Proposition

Si  $[f]$  et  $[g]$  sont des fonctions d'inclusion pour  $f$  et  $g$  respectivement alors  $[f] \circ [g]$  est une fonction d'inclusion pour  $f \circ g$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



# Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

## Exemple

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\sin x - x^2 + 1) \cos x \end{aligned}$$

Montrons que  $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

## Exemple

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\sin x - x^2 + 1) \cos x \end{aligned}$$

Montrons que  $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit  $\left\{ \begin{array}{l} [f] : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ [x] \mapsto (\sin[x] - [x]^2 + 1) \cos[x] \end{array} \right.$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

## Exemple

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\sin x - x^2 + 1) \cos x \end{aligned}$$

Montrons que  $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

On définit  $\begin{cases} [f] : \mathbb{IR} &\rightarrow \mathbb{IR} \\ [x] &\mapsto (\sin[x] - [x]^2 + 1) \cos[x] \end{cases}$

$$[f]([0; \frac{1}{2}]) = (\sin[0; \frac{1}{2}] - [0; \frac{1}{2}]^2 + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

# Exemple d'utilisation du calcul par intervalle

## Exemple

Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto (\sin x - x^2 + 1) \cos x \end{aligned}$$

Montrons que  $\mathbb{S} = \{x \in [0; \frac{1}{2}], f(x) = 0\} = \emptyset$

$$\text{On définit } \begin{cases} [f] : \mathbb{I}\mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{I}\mathbb{R} \\ [x] &\mapsto (\sin[x] - [x]^2 + 1) \cos[x] \end{cases}$$

$$[f]([0; \frac{1}{2}]) = (\sin[0; \frac{1}{2}] - [0; \frac{1}{2}]^2 + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] - [0; \frac{1}{4}] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1])[\cos \frac{1}{2}; 1]$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1]) [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4}; 1 + \sin \frac{1}{2}] \times [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1]) [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4}; 1 + \sin \frac{1}{2}] \times [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4} \cos \frac{1}{2}; 1 + \sin \frac{1}{2}]$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1]) [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4}; 1 + \sin \frac{1}{2}] \times [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4} \cos \frac{1}{2}; 1 + \sin \frac{1}{2}]$$

$$[f]([0; \frac{1}{2}]) \subset [0.65818; 1.4795]$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



$$= (\sin[0; \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{4}; 0] + 1) \cos[0; \frac{1}{2}]$$

$$= ([0; \sin \frac{1}{2}] + [\frac{3}{4}; 1]) [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4}; 1 + \sin \frac{1}{2}] \times [\cos \frac{1}{2}; 1]$$

$$= [\frac{3}{4} \cos \frac{1}{2}; 1 + \sin \frac{1}{2}]$$

$$[f]([0; \frac{1}{2}]) \subset [0.65818; 1.4795]$$

## Conclusion

$0 \notin [f]([0; \frac{1}{2}])$ , donc  $\mathbb{S} = \emptyset$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

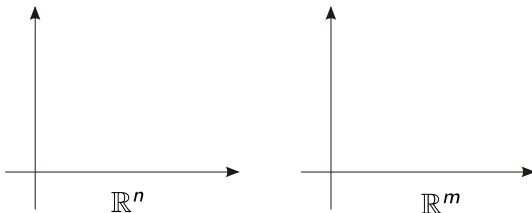
Conclusion

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}^m$ .

$[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  est une **fonction d'inclusion** pour  $f$  si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$

Calcul par  
intervallesL'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

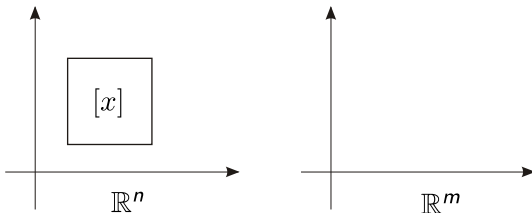
Conclusion

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}^m$ .

$[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  est une **fonction d'inclusion** pour  $f$  si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

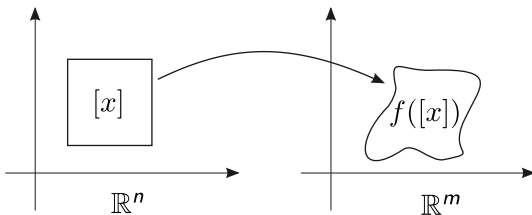
Conclusion

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}^m$ .

$[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  est une **fonction d'inclusion** pour  $f$  si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$

Calcul par  
intervallesL'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

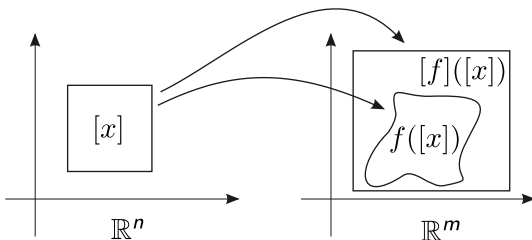
Conclusion

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie de  $\mathbb{R}^n$  à valeur dans  $\mathbb{R}^m$ .

$[f] : \mathbb{IR}^n \rightarrow \mathbb{IR}^m$  est une **fonction d'inclusion** pour  $f$  si

$$\forall [x] \in \mathbb{IR}^n, f([x]) \subset [f]([x])$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

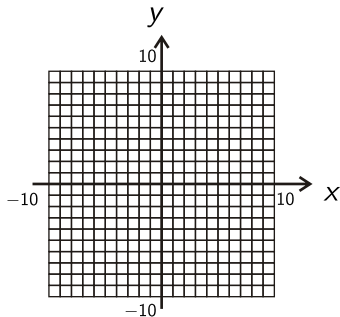
Discrétisation

Conclusion

# Démontrer qu'une équation n'admet aucune solution

## Exemple 2

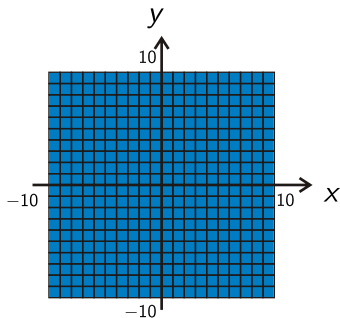
$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 10 \leq 0\}$$



# Démontrer qu'une équation n'admet aucune solution

## Exemple 2

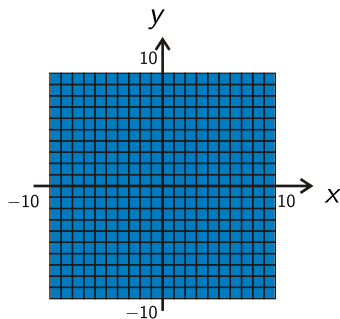
$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 10 \leq 0\}$$



# Démontrer qu'une équation n'admet aucune solution

## Exemple 2

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in [-10; 10]^2 \mid f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 10 \leq 0\}$$



$$\Rightarrow \mathbb{S} = \emptyset$$



# Autres utilisations du calcul par intervalles

## Analyse numérique

1. Optimisation globale : E.R. Hansen, Méthode de Newton par intervalles ...
2. Approximation des solutions d'un système d'équations, A. Neumaier ...
3. Résolution garantie d'ODE. Moore ...

Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Autres utilisations du calcul par intervalles

## Analyse numérique

1. Optimisation globale : E.R. Hansen, Méthode de Newton par intervalles ...
2. Approximation des solutions d'un système d'équations, A. Neumaier ...
3. Résolution garantie d'ODE. Moore ...

## Preuve assistée par ordinateur

1. Preuve de la conjecture de Kepler par Hales en 1998.
2. Existence de l'attracteur de Lorentz par Tucker, W en 2002.

Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Le calcul par intervalles permet de vérifier :

1.  $S = \emptyset$ ,
2.  $\#(S) = 1$ , (Newton par intervalles).

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Analyse de la topologie d'un ensemble

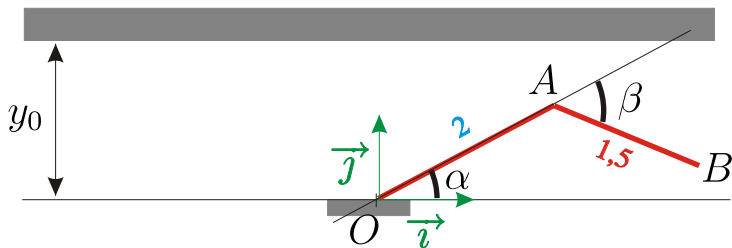


FIG.: Robot à 2 degrés de liberté.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

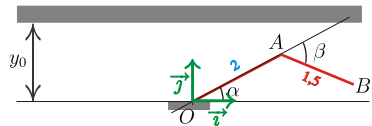
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

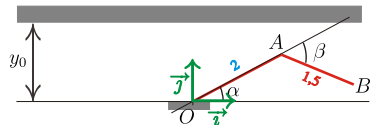
Discrétisation

Conclusion



## Contraintes sur A

$$y_A \in [0, y_0]$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

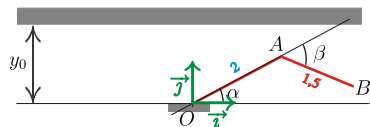
Conclusion

## Contraintes sur A

$$y_A \in [0, y_0]$$

## Contraintes sur B

$$y_B \leq y_0$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Contraintes sur A

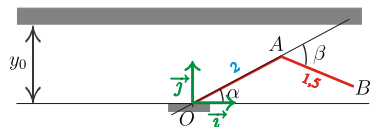
$$y_A \in [0, y_0]$$

## Contraintes sur B

$$y_B \leq y_0$$

## Contraintes sur $\alpha$ et $\beta$

$$\alpha \in [-\pi, \pi], \beta \in [-\pi, \pi]$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

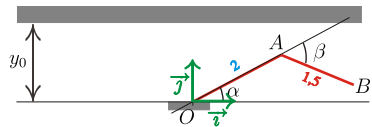
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

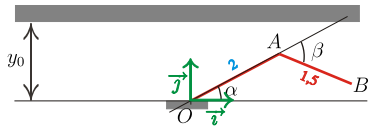
Discrétisation

Conclusion



## Coordonnées de A

$$\begin{cases} x_A = 2 \cos(\alpha) \\ y_A = 2 \sin(\alpha) \end{cases}$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

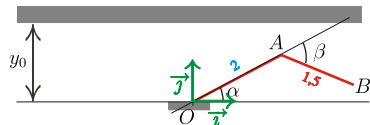
Conclusion

## Coordonnées de A

$$\begin{cases} x_A = 2 \cos(\alpha) \\ y_A = 2 \sin(\alpha) \end{cases}$$

## Coordonnées de B

$$\begin{cases} x_B = 2 \cos(\alpha) + 1.5 \cos(\alpha + \beta) \\ y_B = 2 \sin(\alpha) + 1.5 \sin(\alpha + \beta) \end{cases}$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé  
Discrétisation

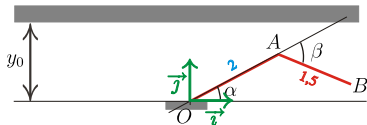
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

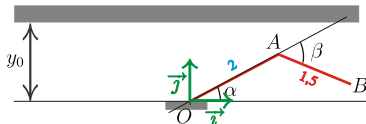
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



## Espace des configurations admissibles

$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha, \beta) \in [-\pi, \pi]^2 / \begin{cases} -2 \sin(\alpha) & \leq 0 \\ 2 \sin(\alpha) & \leq y_0 \\ 2 \sin(\alpha) + \frac{3}{2} \sin(\alpha + \beta) & \leq y_0 \end{cases} \right\}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Objectif :

Compter le nombre de composantes connexes de :

$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n; f_{i,j}(x) \leq 0\} \quad \text{où } f_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

**Motivation**

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

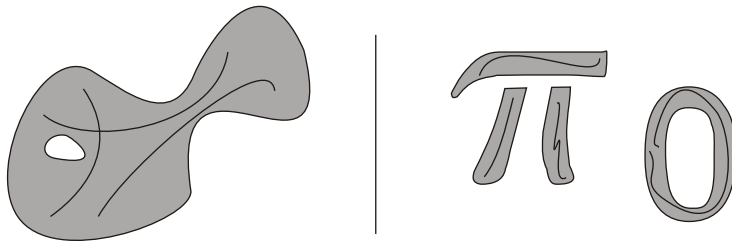
# Rappels topologiques

## Définition *Espace connexe par arcs*

Un espace topologique  $\mathbb{S}$  est *connexe (par arcs)* si :

$\forall x, y \in \mathbb{S}, \exists f$  continue,

$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}$  vérifiant  $f(0) = x$  et  $f(1) = y$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

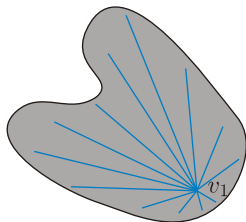
Discrétisation

Conclusion



## Définition *Etoile*

Le point  $v^*$  est une *étoile* pour le sous-espace  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  si  $\forall x \in X$ , le segment  $[x, v^*]$  est inclus dans  $X$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

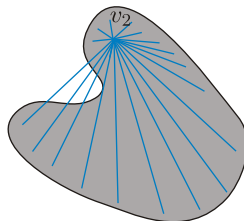
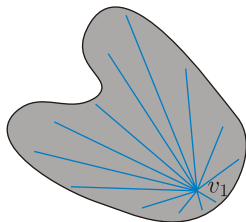
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition *Etoile*

Le point  $v^*$  est une *étoile* pour le sous-espace  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  si  $\forall x \in X$ , le segment  $[x, v^*]$  est inclus dans  $X$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

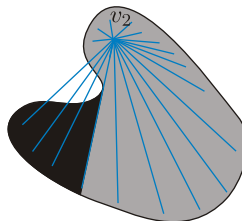
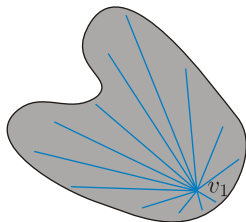
Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

## Définition *Etoile*

Le point  $v^*$  est une *étoile* pour le sous-espace  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  si  $\forall x \in X$ , le segment  $[x, v^*]$  est inclus dans  $X$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

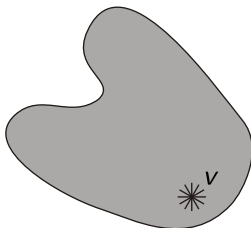
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition 1

Un ensemble étoilé est connexe par arcs.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

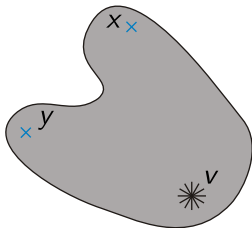
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition 1

Un ensemble étoilé est connexe par arcs.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

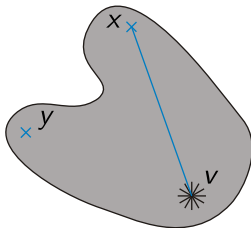
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition 1

Un ensemble étoilé est connexe par arcs.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

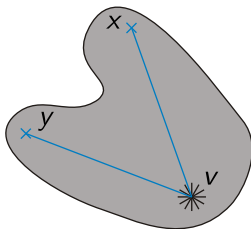
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition 1

Un ensemble étoilé est connexe par arcs.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

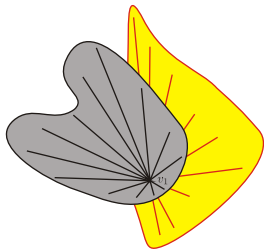
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition 2

Si  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles  $v^*$ -étoilés, alors  $X \cap Y$  et  $X \cup Y$  sont aussi  $v^*$ -étoilés.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

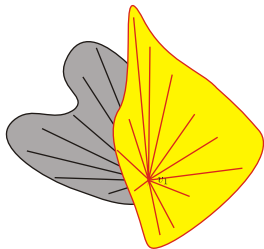
Discrétisation

Conclusion



## Proposition 2

Si  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles  $v^*$ -étoilés, alors  $X \cap Y$  et  $X \cup Y$  sont aussi  $v^*$ -étoilés.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

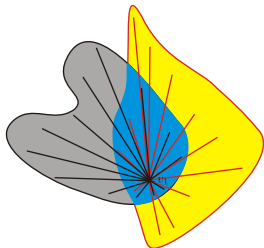
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition 2

Si  $X$  et  $Y$  sont deux ensembles  $v^*$ -étoilés, alors  $X \cap Y$  et  $X \cup Y$  sont aussi  $v^*$ -étoilés.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

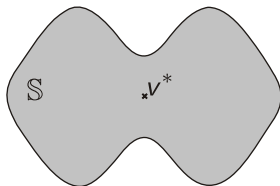
Conclusion

## Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq 0\}$  où  $f$  est une fonction  $C^1$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un convexe,  $v^*$  un point de  $\mathbb{S}$ , si

$$f(x) = 0, \nabla f(x) \cdot (x - v^*) \leq 0, x \in E$$

n'admet aucune solution, alors  $v^*$  est une étoile pour  $\mathbb{S}$ .

Calcul par  
intervallesL'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

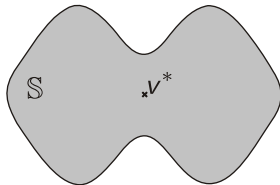
## Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n / f(x) \leq 0\}$  où  $f$  est une fonction  $C^1$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un convexe,  $v^*$  un point de  $\mathbb{S}$ , si

$$f(x) = 0, \nabla f(x) \cdot (x - v^*) \leq 0, x \in E$$

n'admet aucune solution, alors  $v^*$  est une étoile pour  $\mathbb{S}$ .

(1) est inconsistant  $\Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = 0 \Rightarrow \nabla f(x) \cdot (x - v^*) > 0$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

**Prouver qu'un  
ensemble est étoilé**

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

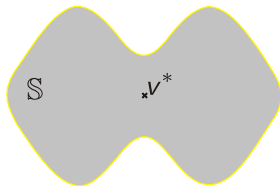
## Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n / f(x) \leq 0\}$  où  $f$  est une fonction  $C^1$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un convexe,  $v^*$  un point de  $\mathbb{S}$ , si

$$f(x) = 0, \nabla f(x) \cdot (x - v^*) \leq 0, x \in E$$

n'admet aucune solution, alors  $v^*$  est une étoile pour  $\mathbb{S}$ .

(1) est inconsistant  $\Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = 0 \Rightarrow$   
 $\nabla f(x) \cdot (x - v^*) > 0$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

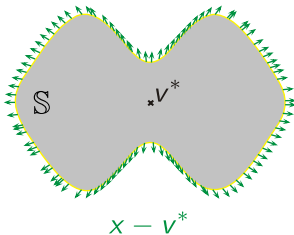
## Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n / f(x) \leq 0\}$  où  $f$  est une fonction  $C^1$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un convexe,  $v^*$  un point de  $\mathbb{S}$ , si

$$f(x) = 0, \nabla f(x) \cdot (x - v^*) \leq 0, x \in E$$

n'admet aucune solution, alors  $v^*$  est une étoile pour  $\mathbb{S}$ .

(1) est inconsistant  $\Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = 0 \Rightarrow$   
 $\nabla f(x) \cdot (x - v^*) > 0$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

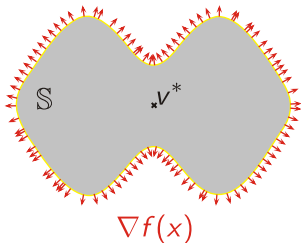
## Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n / f(x) \leq 0\}$  où  $f$  est une fonction  $C^1$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un convexe,  $v^*$  un point de  $\mathbb{S}$ , si

$$f(x) = 0, \nabla f(x) \cdot (x - v^*) \leq 0, x \in E$$

n'admet aucune solution, alors  $v^*$  est une étoile pour  $\mathbb{S}$ .

(1) est inconsistant  $\Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = 0 \Rightarrow$   
 $\nabla f(x) \cdot (x - v^*) > 0$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Théorème

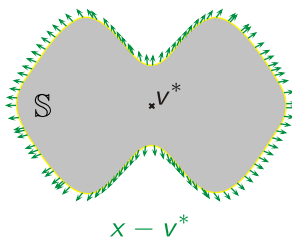
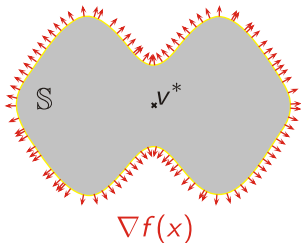
$\mathbb{S} = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n / f(x) \leq 0\}$  où  $f$  est une fonction  $C^1$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un convexe,  $v^*$  un point de  $\mathbb{S}$ , si

$$f(x) = 0, \nabla f(x) \cdot (x - v^*) \leq 0, x \in E$$

n'admet aucune solution, alors  $v^*$  est une étoile pour  $\mathbb{S}$ .

(1) est inconsistant  $\Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = 0 \Rightarrow$

$$\nabla f(x) \cdot (x - v^*) > 0$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



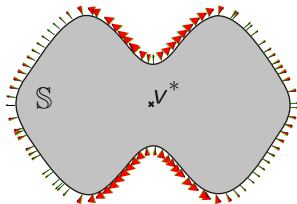
## Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n / f(x) \leq 0\}$  où  $f$  est une fonction  $C^1$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un convexe,  $v^*$  un point de  $\mathbb{S}$ , si

$$f(x) = 0, \nabla f(x) \cdot (x - v^*) \leq 0, x \in E$$

n'admet aucune solution, alors  $v^*$  est une étoile pour  $\mathbb{S}$ .

(1) est inconsistant  $\Leftrightarrow \forall x \in E, f(x) = 0 \Rightarrow$   
 $\nabla f(x) \cdot (x - v^*) > 0$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

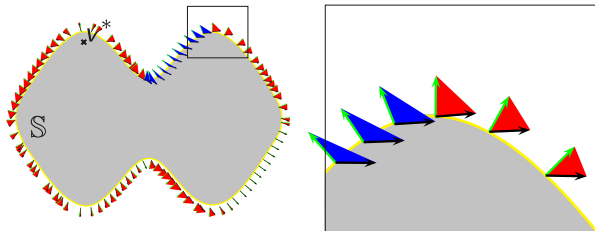
Conclusion

## Théorème

$\mathbb{S} = \{x \in E \subset \mathbb{R}^n / f(x) \leq 0\}$  où  $f$  est une fonction  $C^1$  de  $E$  vers  $\mathbb{R}$ ,  $E$  un convexe,  $v^*$  un point de  $\mathbb{S}$ , si

$$f(x) = 0, \nabla f(x) \cdot (x - v^*) \leq 0, x \in E$$

n'admet aucune solution, alors  $v^*$  est une étoile pour  $\mathbb{S}$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Prouvons que  $v^* = (0.6, -0.5)$  est une étoile pour  
l'ensemble défini par

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

**Prouver qu'un  
ensemble est étoilé**

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Prouvons que  $v^* = (0.6, -0.5)$  est une étoile pour  
l'ensemble défini par

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 \\ \partial f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'admet aucune solution}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Prouvons que  $v^* = (0.6, -0.5)$  est une étoile pour  
l'ensemble défini par

$$\mathbb{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ tel que } f(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2 \leq 0\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(\mathbf{x}) = 0 \\ \partial f(\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{x} - v^*) \leq 0 \end{cases} \quad \text{n'admet aucune solution}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 2 = 0 \\ (2x + y)(x - 0.6) + (2y + x)(y + 0.5) \leq 0 \end{cases}$$

n'admet aucune solution.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

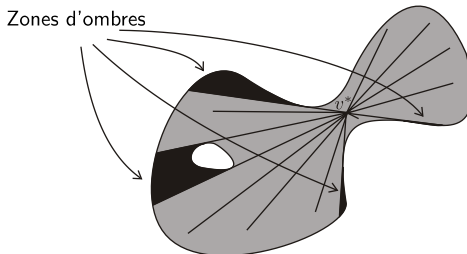
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

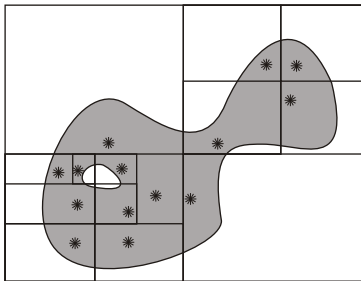
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# L'idée

Diviser  $S$  avec un pavage  $\mathcal{P}$  tel que, sur chaque partie  $p$ ,  $S \cap p$  est étoilé.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

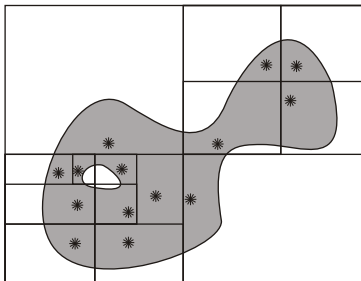
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation :  $\mathcal{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

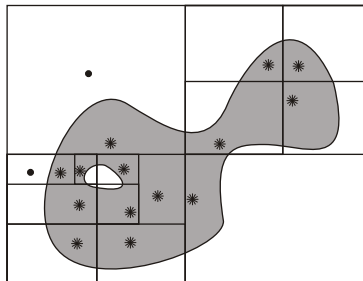
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation :  $\mathbb{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

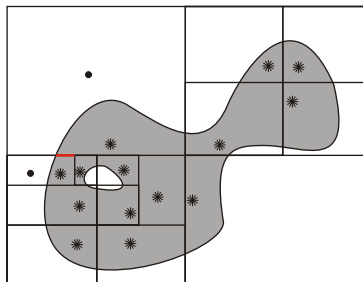
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation :  $\mathbb{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

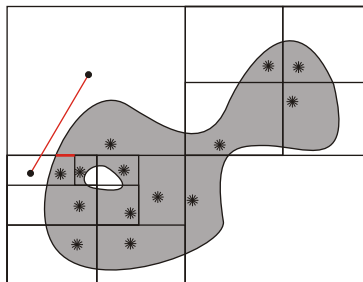
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation :  $\mathbb{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

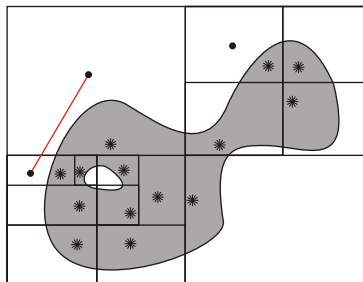
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation :  $\mathbb{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

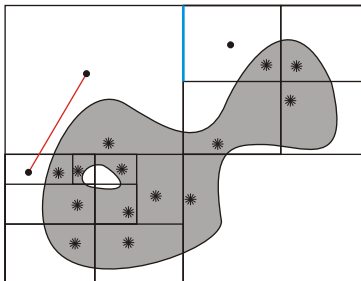
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation :  $\mathbb{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

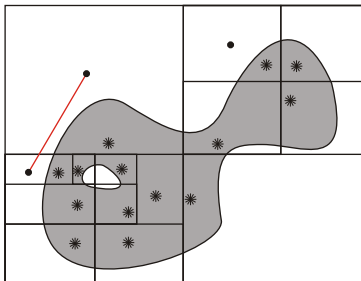
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation :  $\mathbb{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

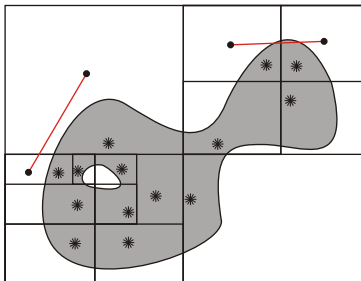
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation :  $\mathbb{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

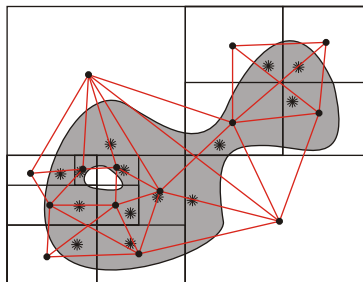
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Définissons la notion de *graphe parsemé d'étoiles* avec la relation :  $\mathbb{S} \cap [p] \cap [q] \neq \emptyset$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

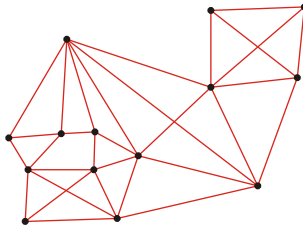
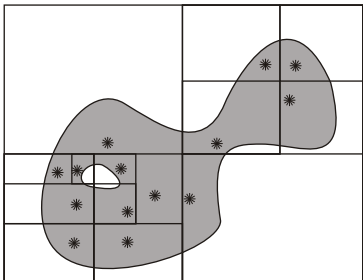
Conclusion



## Théorème

Soit  $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$  un graphe parsemé d'étoiles d'un ensemble  $\mathbb{S}$ .

$\mathbb{S}$  est connexe par arcs  $\Leftrightarrow \mathcal{G}_{\mathbb{S}}$  est connexe .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

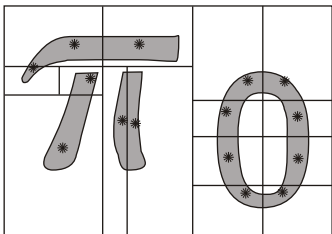
Conclusion

## Corollaire

Soit  $\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$  un graphe parsemé d'étoiles d'un ensemble  $\mathbb{S}$ .

$\mathcal{G}_{\mathbb{S}}$  a le même nombre de composantes connexes que  $\mathbb{S}$ . i.e.

$$\pi_0(\mathbb{S}) = \pi_0(\mathcal{G}_{\mathbb{S}}).$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

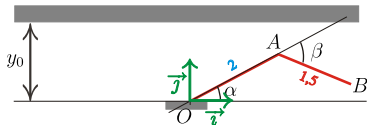
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

## Espace des configurations admissibles, $y_0 = 2.3$



$$\mathbb{S} = \left\{ (\alpha, \beta) \in [-\pi, \pi]^2 / \begin{cases} 2 \sin(\alpha) & \leq y_0 \\ -2 \sin(\alpha) & \leq 0 \\ 2 \sin(\alpha) + \frac{3}{2} \sin(\alpha + \beta) & \leq y_0 \end{cases} \right\}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

CIA : Connected components via Interval Analysis

Solveur développé en c++ disponible via

<http://www.istia.univ-angers.fr/~delanoue/>

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

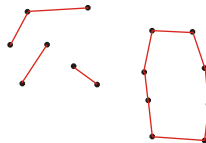
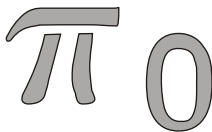
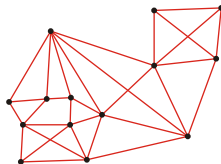
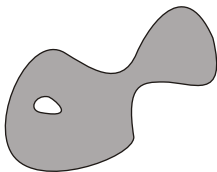
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Récapitulatif



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

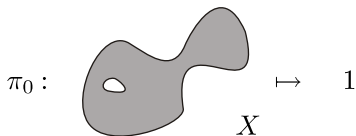
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion





Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

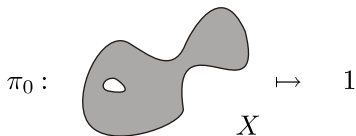
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



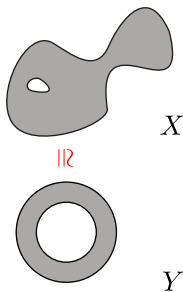


FIG.:  $\pi_0(\cdot)$  est un invariant topologique.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

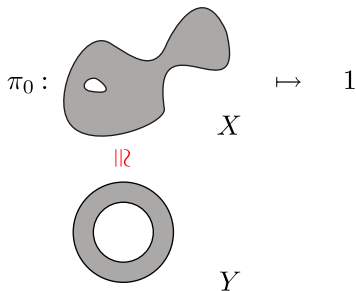


FIG.:  $\pi_0(\cdot)$  est un invariant topologique.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

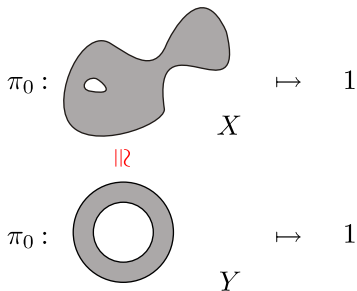


FIG.:  $\pi_0(\cdot)$  est un invariant topologique.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles  
Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation  
Rappels topologiques  
Prouver qu'un  
ensemble est étoilé  
Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques  
Théorie de Lyapunov  
Discrétisation

Conclusion

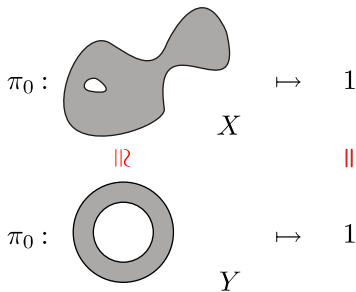


FIG.:  $\pi_0(\cdot)$  est un invariant topologique.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

$\pi_0(\cdot)$  est un invariant topologique car

Si  $X \cong Y$  alors  $\pi_0(X) = \pi_0(Y)$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

$\pi_0(\cdot)$  est un invariant topologique car

$$\text{Si } X \cong Y \text{ alors } \pi_0(X) = \pi_0(Y)$$

Si  $X$  et  $Y$  deux espaces topologiques, tels que  $\pi_0(X) \neq \pi_0(Y)$   
alors  $X \not\cong Y$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Il existe des ensembles topologiques tels que

$$X \not\cong Y \text{ et } \pi_0(X) = \pi_0(Y)$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Il existe des ensembles topologiques tels que

$$X \not\cong Y \text{ et } \pi_0(X) = \pi_0(Y)$$

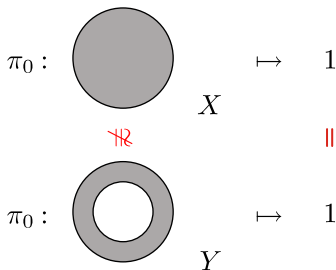


FIG.:  $\pi_0(\cdot)$  n'est pas un invariant assez fort.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



## Définition - Homéomorphisme

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques. On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme si

1.  $f$  est continue.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition - Homéomorphisme

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques. On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme si

1.  $f$  est continue.
2.  $f$  est bijective.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition - Homéomorphisme

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques. On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme si

1.  $f$  est continue.
2.  $f$  est bijective.
3.  $f^{-1}$  est continue.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition - Homéomorphisme

Soient  $X$  et  $Y$  des espaces topologiques. On dit que  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme si

1.  $f$  est continue.
2.  $f$  est bijective.
3.  $f^{-1}$  est continue.

## Définition - Espaces homéomorphes

Deux espaces topologiques  $X$  et  $Y$  sont dits homéomorphes s'il existe un homéomorphisme  $f : X \rightarrow Y$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemples d'homéomorphismes

Exemple d'ensembles homéomorphes.

On notera  $X \cong Y \cong Z$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

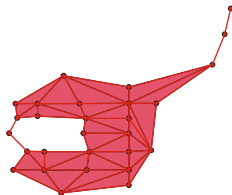
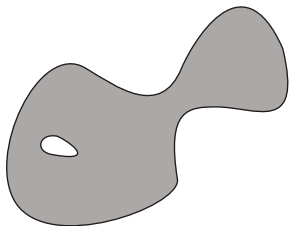
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

- ▶ Construire une **triangulation** pour obtenir plus de propriétés topologiques.
  - ▶ type d'homotopie, groupe fondamental ( $\pi_1(\mathbb{S})$ ).
  - ▶ groupes d'homologie ( $H_1(\mathbb{S}), H_2(\mathbb{S}), \dots$ ).
  - ▶ nombres de Betti.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

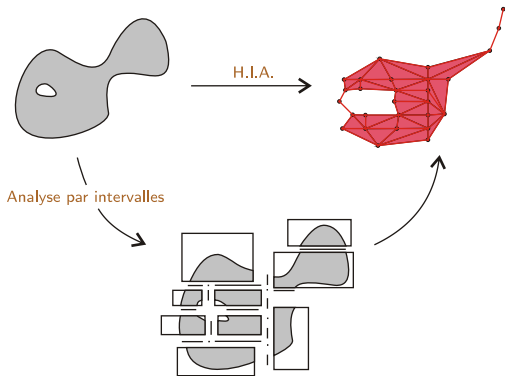
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



## Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles  
Calcul par intervalles

## Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation  
Rappels topologiques  
Prouver qu'un ensemble est étoilé

## Discrétisation

## Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques  
Théorie de Lyapunov  
Discrétisation

## Conclusion

## Définition - Fonctions homotopes

Deux fonctions continues  $f, g : X \rightarrow Y$  sont *homotopes*,

$$f \sim g$$

s'il existe une fonction continue  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ , telle que :

$$F(x, 0) = f(x) \text{ et } F(x, 1) = g(x), \forall x \in X.$$

Calcul par  
intervallesL'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



## Définition du $\pi_1$ d'un ensemble

Soit  $Y$  un espace topologique connexe par arcs, et  $y_0 \in Y$ ,

$$\pi_1(Y, y_0) = \{f : \mathbb{S}_1 \rightarrow Y, f \text{ continue}, f(x_0) = y_0\} / \sim$$

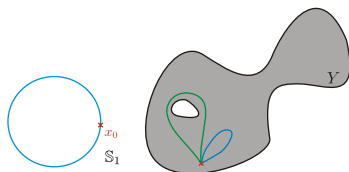


FIG.:  $f^1$  et  $f^0$ .

Poincaré, H. 'Analysis situs', J. Ecole polytech. (2)1, 1-121 (1895).

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition du $\pi_1$ d'un ensemble

Soit  $Y$  un espace topologique connexe par arcs, et  $y_0 \in Y$ ,

$$\pi_1(Y, y_0) = \{f : \mathbb{S}_1 \rightarrow Y, f \text{ continue}, f(x_0) = y_0\} / \sim$$

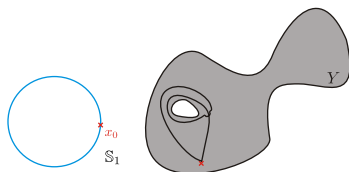


FIG.:  $f^2$

Poincaré, H. 'Analysis situs', J. Ecole polytech. (2)1, 1-121 (1895).

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Propriétés

$\pi_1(Y, y_0)$  est un groupe.

$$f^1 \times f^{-1} \sim f^0$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

$$\pi_1 : \begin{array}{c} \text{---} \\ \circ \\ \text{---} \\ X \end{array} \mapsto \{0\}$$

FIG.:  $\pi_1(\cdot)$  est un invariant topologique.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

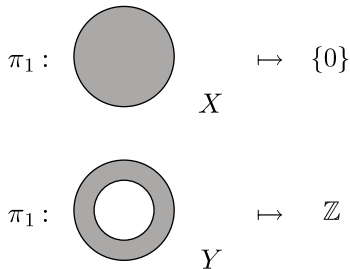


FIG.:  $\pi_1(\cdot)$  est un invariant topologique.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

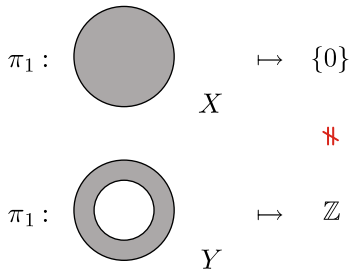


FIG.:  $\pi_1(\cdot)$  est un invariant topologique.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

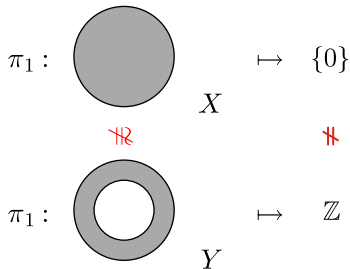


FIG.:  $\pi_1(\cdot)$  est un invariant topologique.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition

Deux espaces  $X$  et  $Y$  ont le *même type d'homotopie* s'il existe des applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que  $g \circ f \sim 1_X$  et  $f \circ g \sim 1_Y$ . On notera  $X \simeq Y$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



## Définition

Deux espaces  $X$  et  $Y$  ont le *même type d'homotopie* s'il existe des applications continues  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow X$  telles que  $g \circ f \sim 1_X$  et  $f \circ g \sim 1_Y$ . On notera  $X \simeq Y$ .

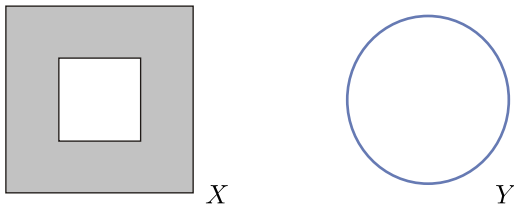


FIG.:  $X \simeq Y$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Deux ensembles du même type d'homotopie.

## Définition

Un espace  $X$  est *contractile* s'il a le même type d'homotopie qu'un point.

$$X \simeq Y.$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition

Deux ensembles homéomorphes sont du même type d'homotopie.

$$X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition

Deux ensembles homéomorphes sont du même type d'homotopie.

$$X \cong Y \Rightarrow X \simeq Y$$

## Remarque

La plupart des invariants topologiques ne permettent pas de différencier deux ensembles du même type d'homotopie.

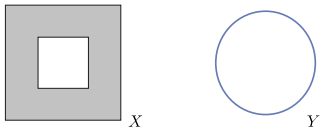


FIG.:  $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) = \pi_1(Y)$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

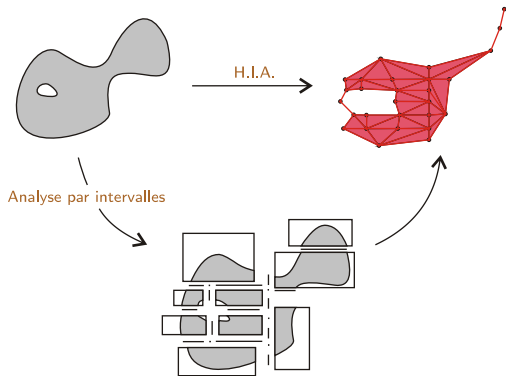
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



## Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles  
Calcul par intervalles

## Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation  
Rappels topologiques  
Prouver qu'un ensemble est étoilé

## Discretisation

## Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques  
Théorie de Lyapunov  
Discretisation

## Conclusion

# Une triangulation

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

**Discretisation**

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

## Définition d'une triangulation abstraite

Soit  $\mathcal{N}$  un ensemble fini de symboles  $\{(a^0), (a^1), \dots, (a^n)\}$   
 Une triangulation abstraite  $\mathcal{K}$  est une famille des parties de  
 $\mathcal{N}$  qui vérifie :  $\sigma \in \mathcal{K} \Rightarrow \forall \sigma_0 \subset \sigma, \sigma_0 \in \mathcal{K}$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



$$\mathcal{K} = \{ \emptyset, (a^0), (a^1), (a^2), (a^3), (a^4), \\ (a^0, a^1), (a^1, a^2), (a^0, a^2), (a^3, a^4), \\ (a^0, a^1, a^2) \}$$

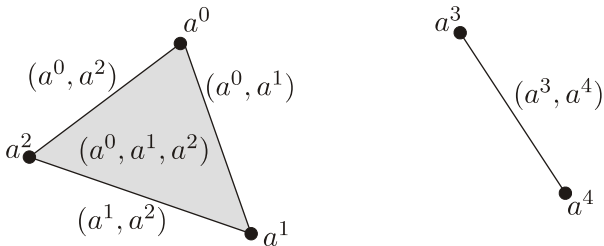


FIG.: Une réalisation de  $\mathcal{K}$ .

$$\mathcal{K} = \{ \emptyset, (a^0), (a^1), (a^2), (a^3), (a^4), \\ (a^0, a^1), (a^1, a^2), (a^0, a^2), (a^3, a^4), \\ (a^0, a^1, a^2) \}$$

On le notera par :  $a^0 a^1 a^2 + a^3 a^4$

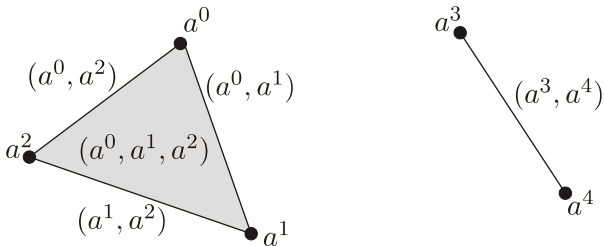
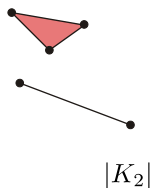
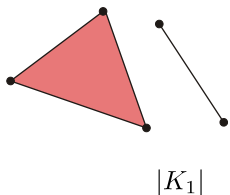


FIG.: Une réalisation de  $\mathcal{K}$ .

## Théorème

Si  $|K_1|$  et  $|K_2|$  deux réalisations d'une triangulation abstraite  $\mathcal{K}$ , alors  $|K_1|$  et  $|K_2|$  sont homéomorphes.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition

Soit  $\mathcal{K}$  une triangulation abstraite, et  $(x)$  un symbole. On note  $\mathcal{C}(x, \mathcal{K})$  l'ensemble :

$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \bigcup_{\sigma \in \mathcal{K}} (x, \sigma).$$

où  $(x, \sigma) := (x, a^1, \dots, a^n)$  avec  $\sigma = (a^1, \dots, a^n) \in \mathcal{K}$ .  
 $\mathcal{C}(x, \mathcal{K})$  est le *cône* de sommet  $x$  et de base  $\mathcal{K}$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

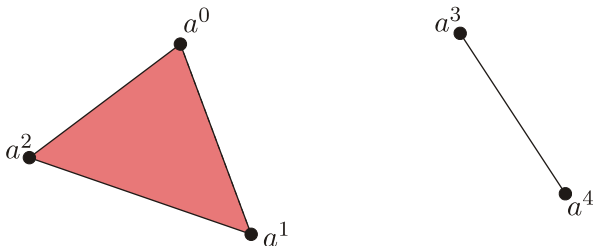
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{(x), (x, a^0), (x, a^1), (x, a^2), (x, a^3), (x, a^4), \\ (x, a^0, a^1), (x, a^1, a^2), (x, a^0, a^2), (x, a^3, a^4), \\ (x, a^0, a^1, a^2)\}.$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

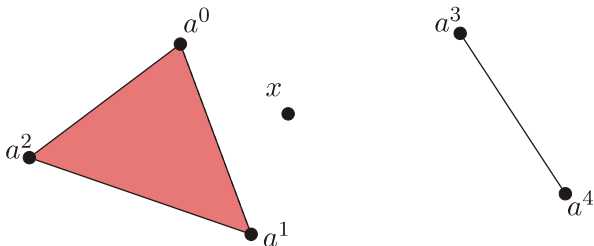
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{(x), (x, a^0), (x, a^1), (x, a^2), (x, a^3), (x, a^4), (x, a^0, a^1), (x, a^1, a^2), (x, a^0, a^2), (x, a^3, a^4), (x, a^0, a^1, a^2)\}.$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

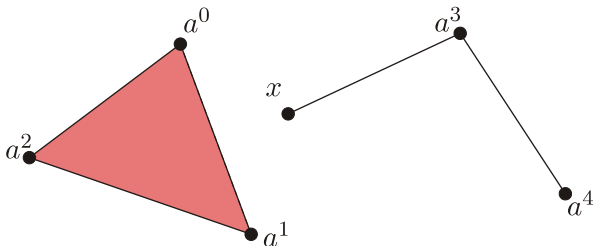
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{(x), (x, a^0), (x, a^1), (x, a^2), (x, a^3), (x, a^4), (x, a^0, a^1), (x, a^1, a^2), (x, a^0, a^2), (x, a^3, a^4), (x, a^0, a^1, a^2)\}.$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

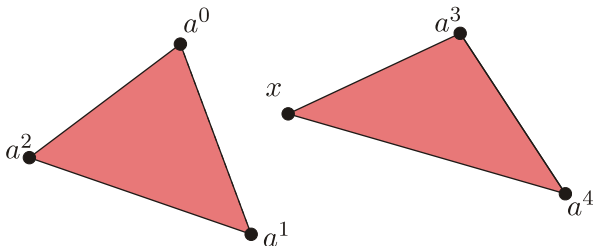
Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion







$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{(x), (x, a^0), (x, a^1), (x, a^2), (x, a^3), (x, a^4), (x, a^0, a^1), (x, a^1, a^2), (x, a^0, a^2), (x, a^3, a^4), (x, a^0, a^1, a^2)\}.$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

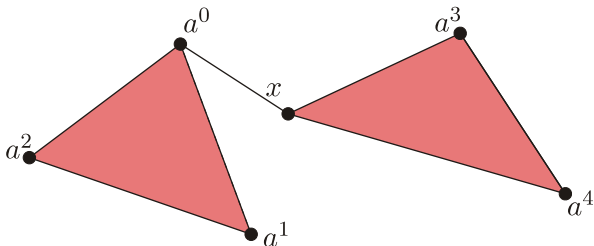
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{(x), (x, a^0), (x, a^1), (x, a^2), (x, a^3), (x, a^4), (x, a^0, a^1), (x, a^1, a^2), (x, a^0, a^2), (x, a^3, a^4), (x, a^0, a^1, a^2)\}.$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

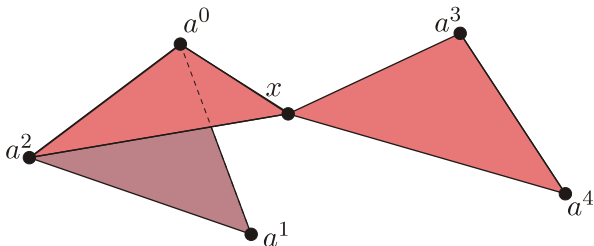
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion





$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{(x), (x, a^0), (x, a^1), (x, a^2), (x, a^3), (x, a^4), (x, a^0, a^1), (x, a^1, a^2), (x, a^0, a^2), (x, a^3, a^4), (x, a^0, a^1, a^2)\}.$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

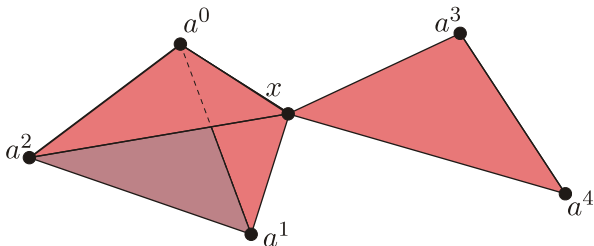
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



$$\mathcal{C}(x, \mathcal{K}) = \mathcal{K} \cup \{(x), (x, a^0), (x, a^1), (x, a^2), (x, a^3), (x, a^4), (x, a^0, a^1), (x, a^1, a^2), (x, a^0, a^2), (x, a^3, a^4), (x, a^0, a^1, a^2)\}.$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

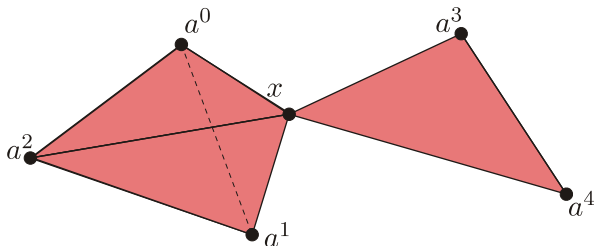
Discretisation

Conclusion



## Propriété d'un cône

Un cône est contractile.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Objectif :

Construire une triangulation du même type d'homotopie  
que :

$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n; f_{i,j}(x) \leq 0\} \quad \text{où } f_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



1. Créer un recouvrement  $\{\mathbb{S}_i\}_{i \in I}$  de  $\mathbb{S}$  tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

1. Créer un recouvrement  $\{\mathbb{S}_i\}_{i \in I}$  de  $\mathbb{S}$  tel que

$$\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j \text{ est contractile ou vide}$$

2. Créer un triangulation du même type d'homotopie que  $\mathbb{S}$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

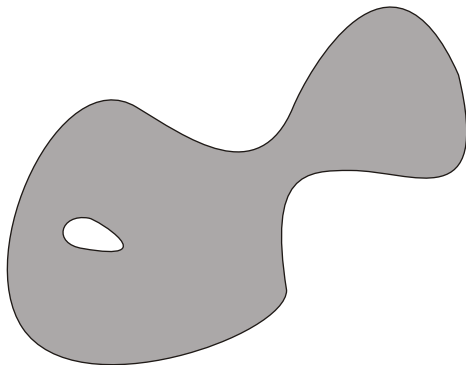
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

Découper  $\mathbb{S}$  avec un pavage  $\{p_i\}_{i \in I}$ , ( $\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$ ) tel que  
 $\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j$  est contractile ou vide



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

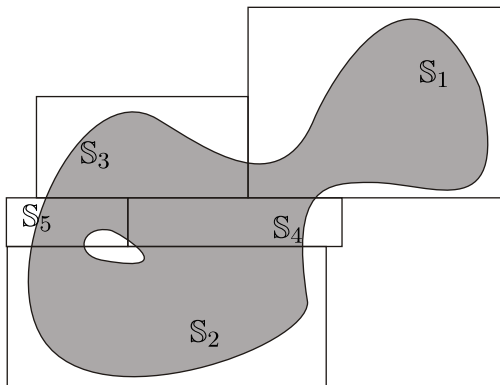
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Découper  $\mathbb{S}$  avec un pavage  $\{p_i\}_{i \in I}$ , ( $\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$ ) tel que  
 $\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j$  est contractile ou vide



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

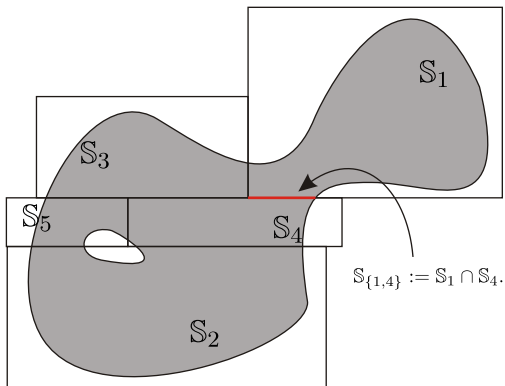
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Découper  $\mathbb{S}$  avec un pavage  $\{p_i\}_{i \in I}$ , ( $\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$ ) tel que  
 $\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j$  est contractile ou vide



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

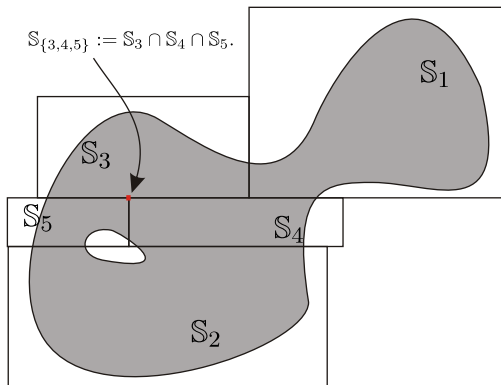
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

Découper  $\mathbb{S}$  avec un pavage  $\{p_i\}_{i \in I}$ , ( $\mathbb{S}_i := \mathbb{S} \cap p_i$ ) tel que  
 $\forall J \subset I, \bigcap_{j \in J} \mathbb{S}_j$  est contractile ou vide



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

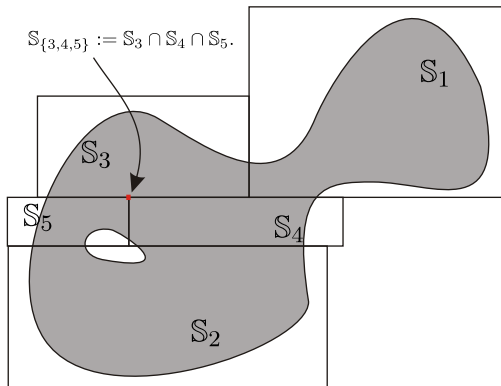
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Soit  $\mathcal{F} = \{S_J, J \subset I, \text{ tel que } S_J \text{ est contractile}\}$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

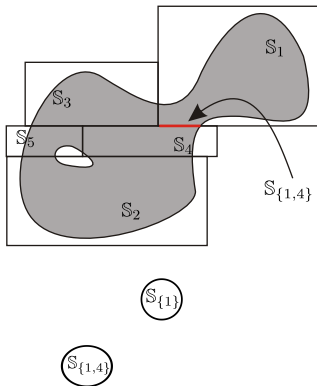
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

Ordonner  $\mathcal{F}$  avec l'inclusion :



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

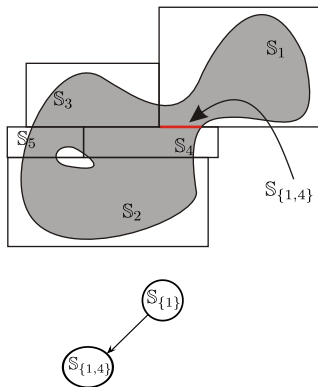
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Ordonner  $\mathcal{F}$  avec l'inclusion :



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

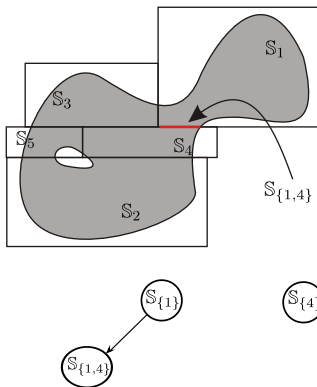
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Ordonner  $\mathcal{F}$  avec l'inclusion :



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

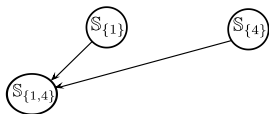
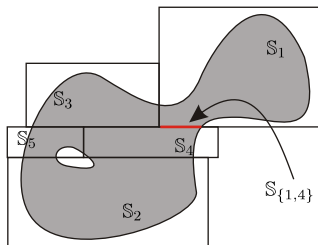
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Ordonner  $\mathcal{F}$  avec l'inclusion :



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

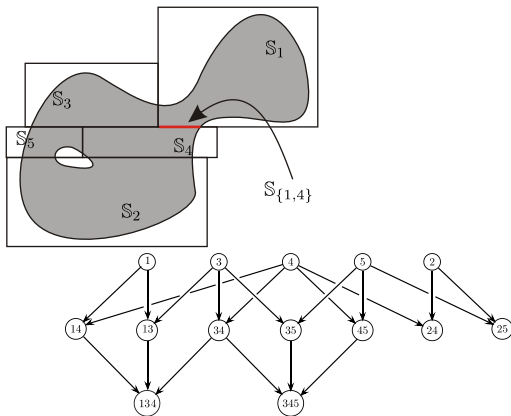
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Ordonner  $\mathcal{F}$  avec l'inclusion :



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

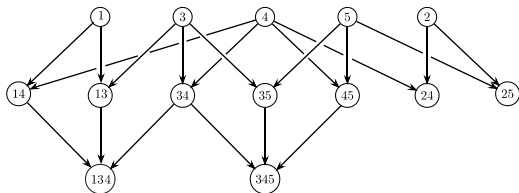
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

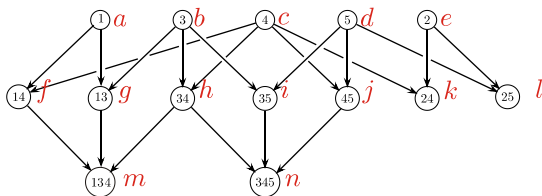
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

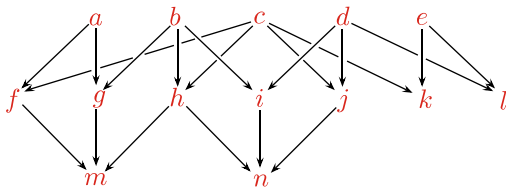
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

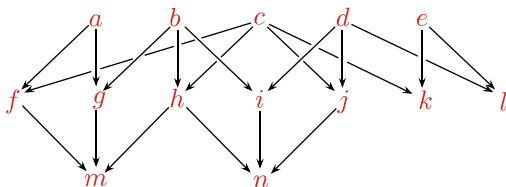
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



$$a(fm+gm)+b(gm+h(m+n)+in)+$$

$$+c(fm+h(m+n)+jn+k)+d(in+jn+l)+e(k+l)$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

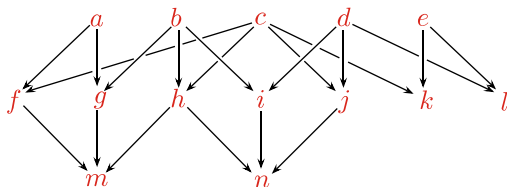
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion





$$\begin{aligned}
 & a(fm+gm)+b(gm+h(m+n)+in)+ \\
 & \quad +c(fm+h(m+n)+jn+k)+d(in+jn+l)+e(k+l) \\
 = & \\
 & a fm+agm+bgm+bhm+bhn+bin+ \\
 & \quad +cfm+chm+chn+cjn+ck+din+djn+dl+ek+el
 \end{aligned}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

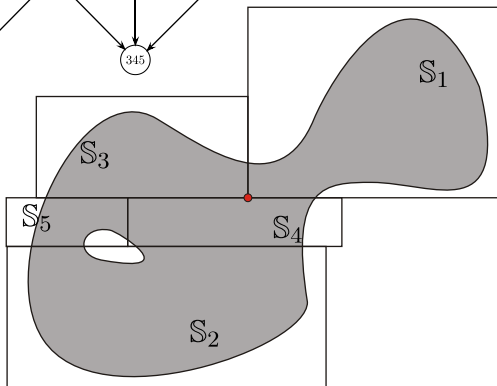
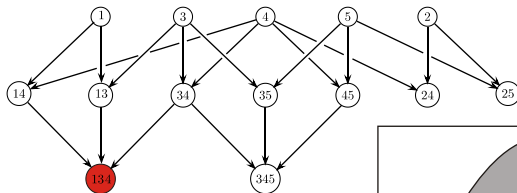
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

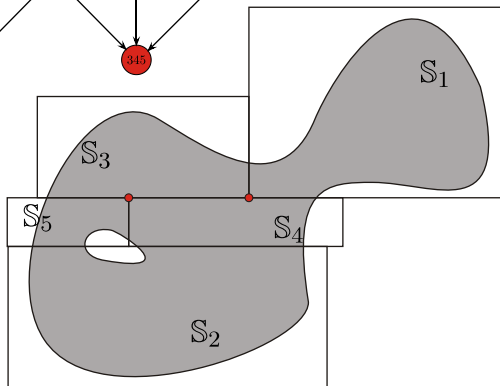
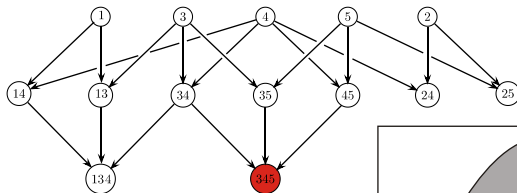
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

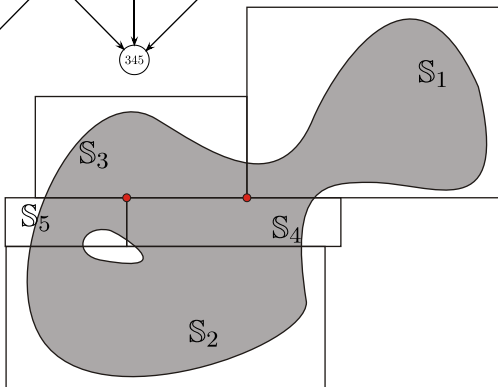
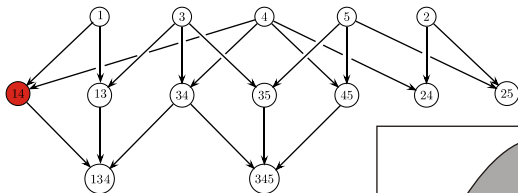
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

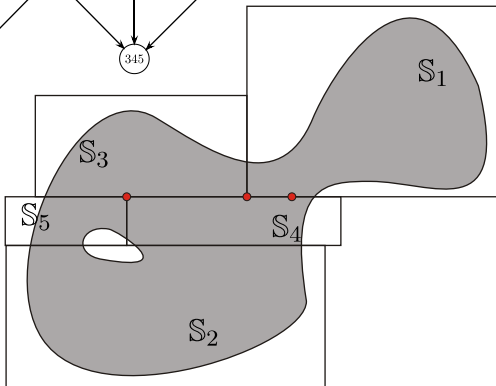
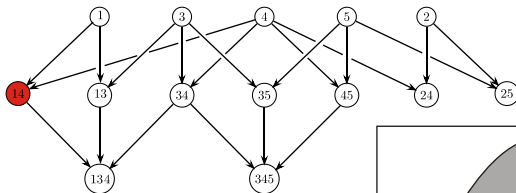
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

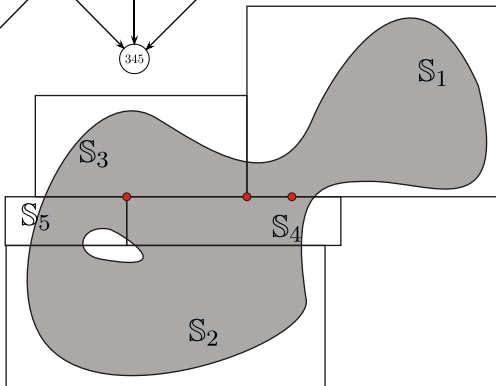
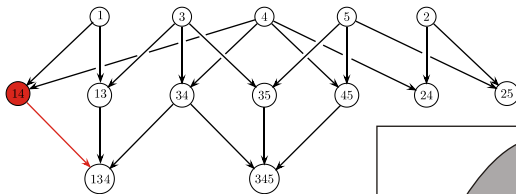
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

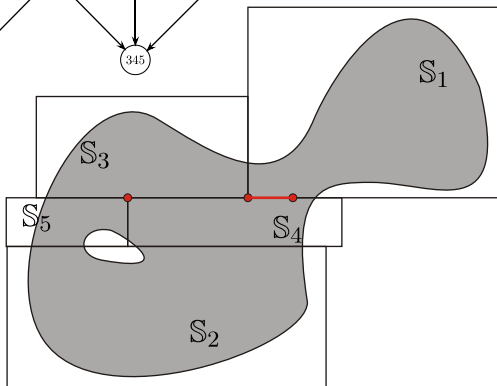
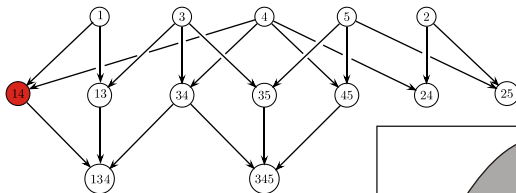
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

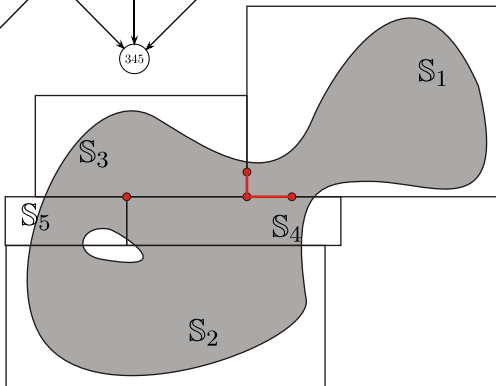
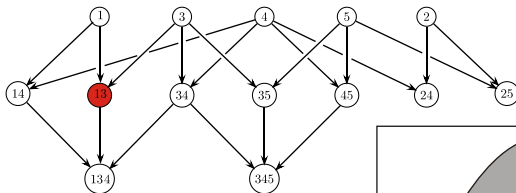
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

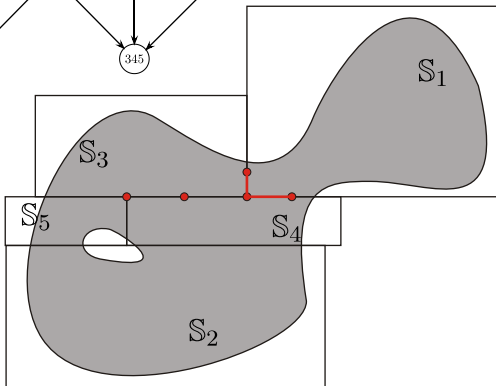
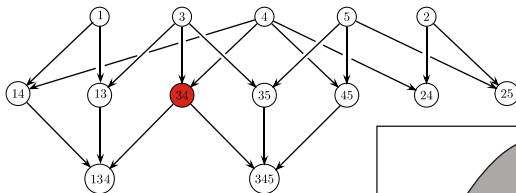
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion





Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

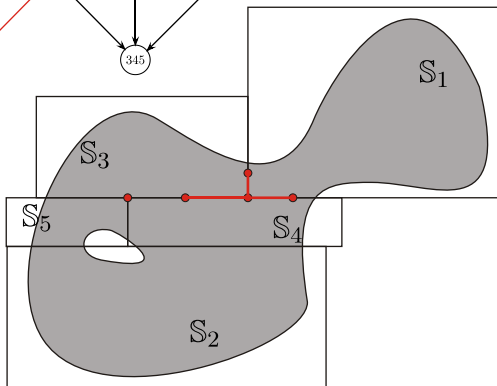
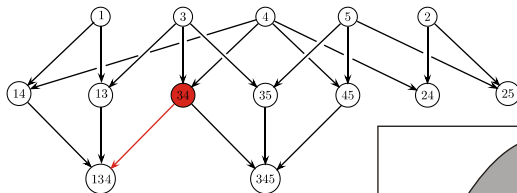
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

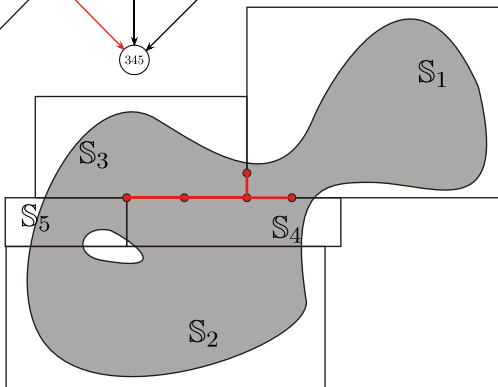
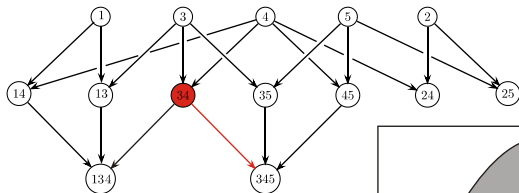
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

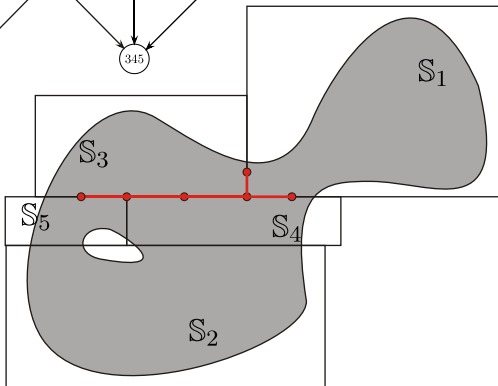
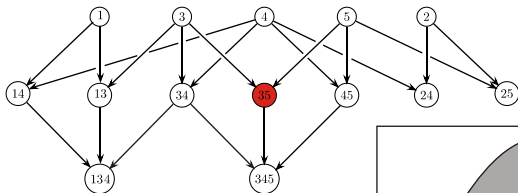
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

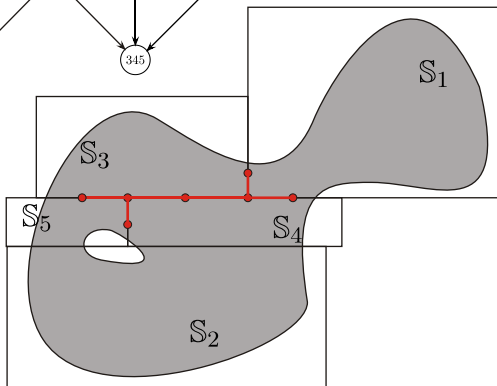
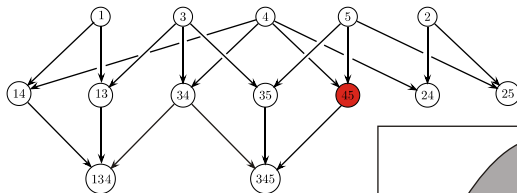
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

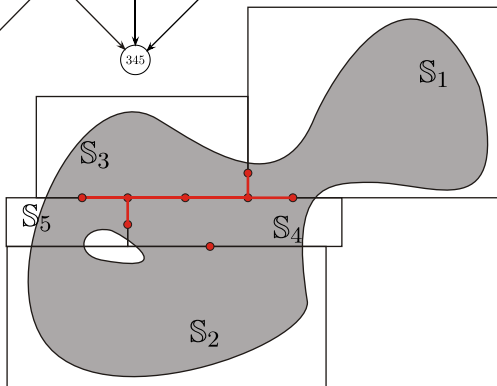
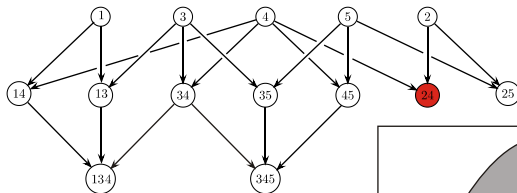
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

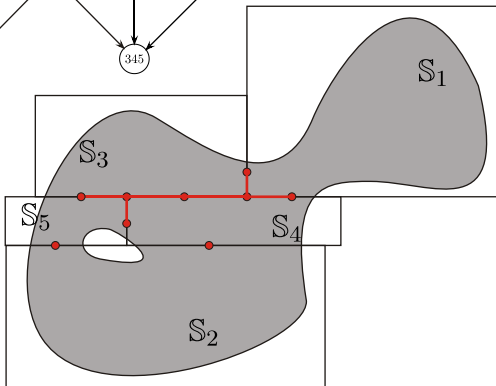
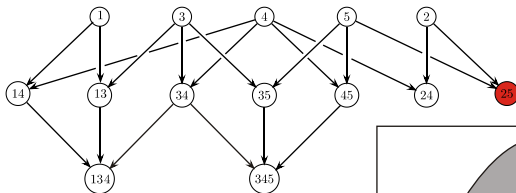
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

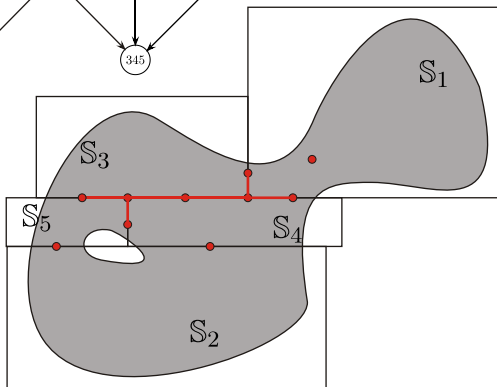
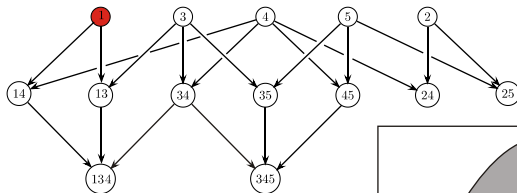
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

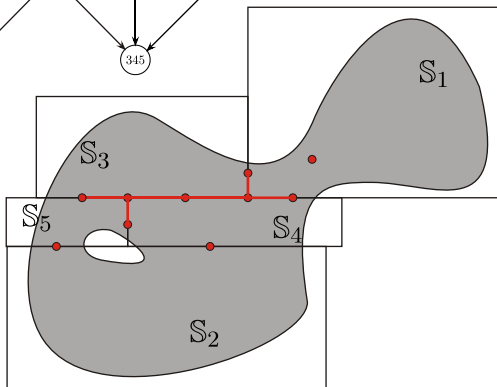
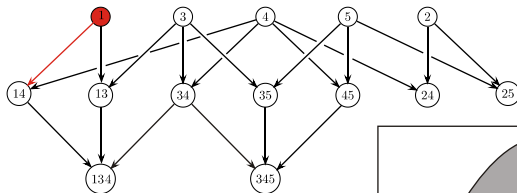
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion





Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

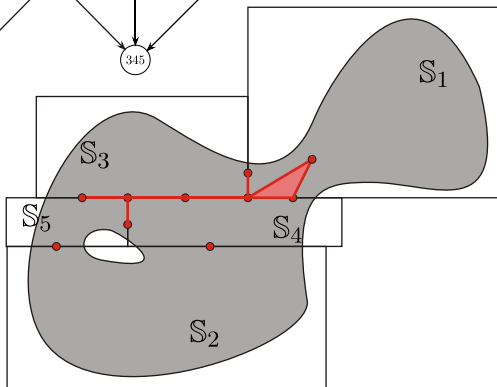
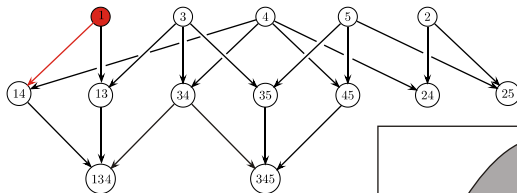
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

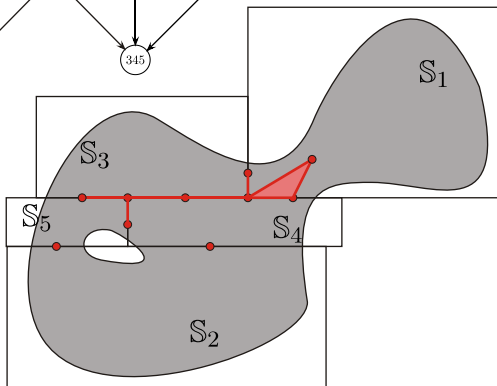
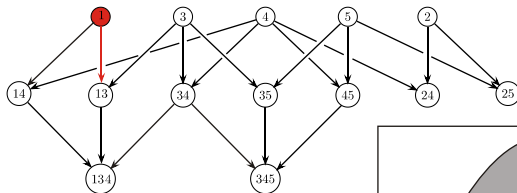
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

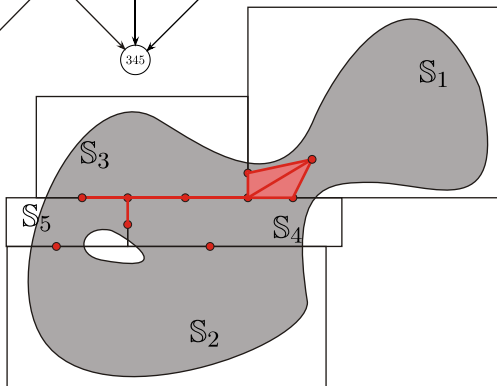
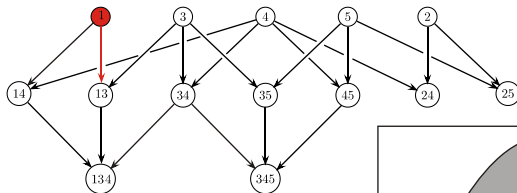
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

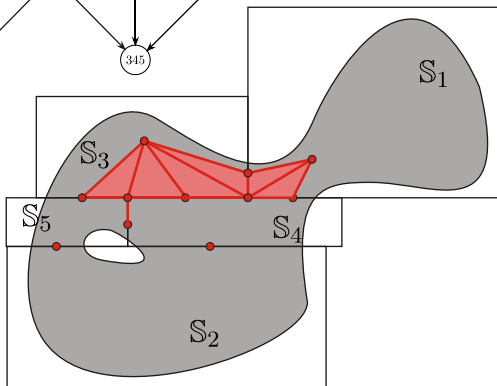
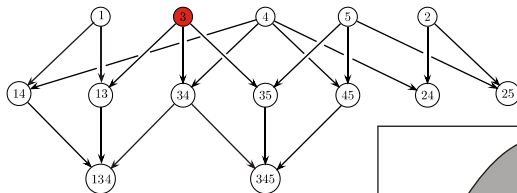
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

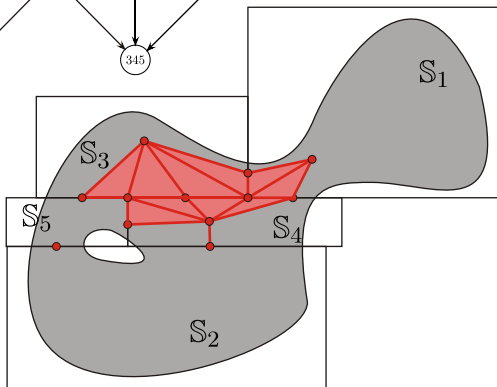
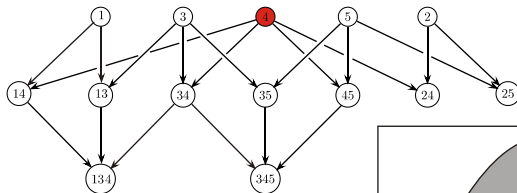
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

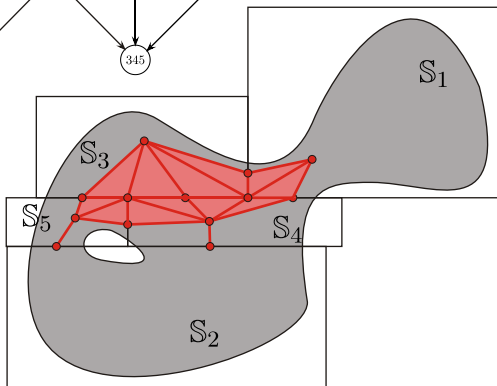
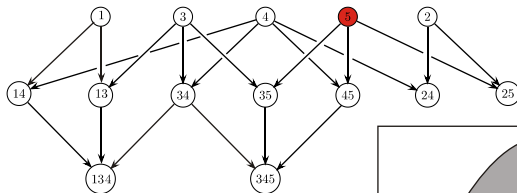
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

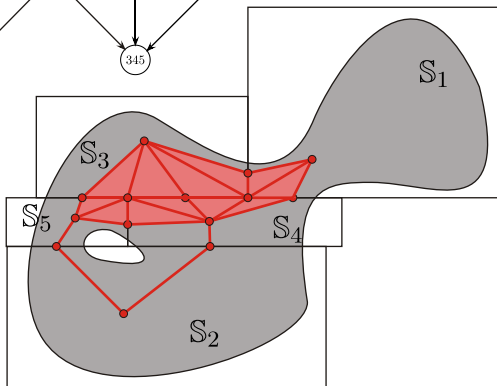
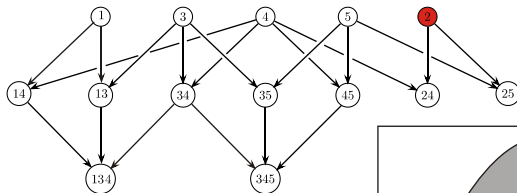
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



HIA : Homotopy type via Interval Analysis

Solveur développé en c++ disponible via

<http://www.istia.univ-angers.fr/~delanoue/>

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

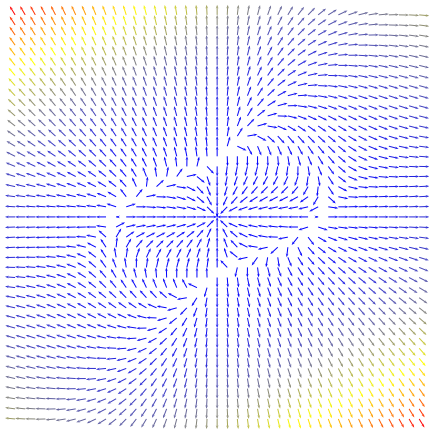
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Calculer le bassin d'attraction d'un point asymptotiquement stable

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x \in \mathbb{R}^n \end{cases}, f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

On note par  $\{\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n\}_{t \in \mathbb{R}}$  le flot, i.e.

$$\left. \frac{d}{dt} \varphi^t x \right|_{t=0} = f(x) \text{ et } \varphi^0 = Id \quad (1)$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

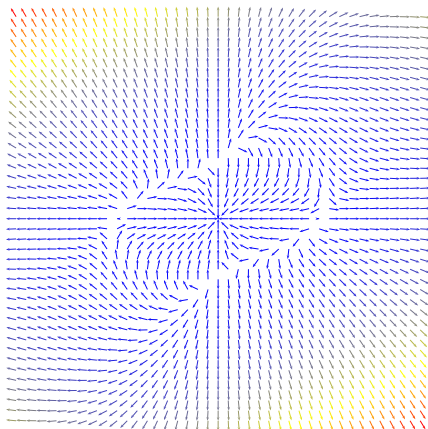
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition

Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $x$  est un *point d'équilibre* si  $f(x) = 0$ ,  
i.e.  $\varphi^t(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

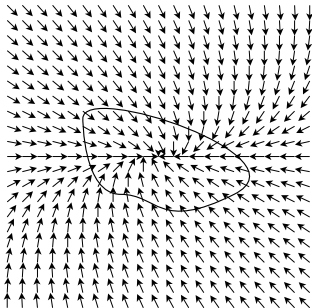
Discrétisation

Conclusion

## Définition

Un ensemble  $E$  est *stable* si :

$$\phi^{\mathbb{R}^+}(E) \subset E.$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

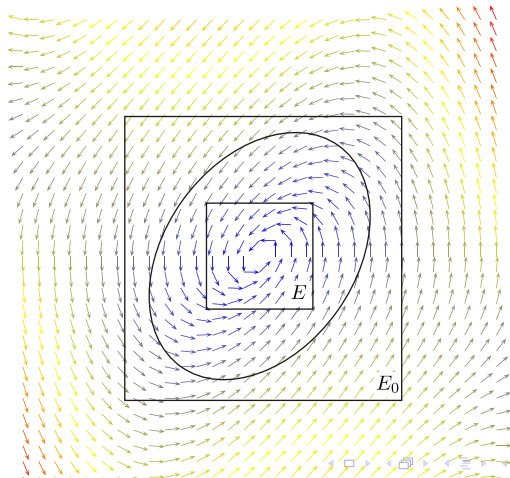
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition

Un point d'équilibre  $x_\infty$  est *asymptotiquement*  $(E, E_0)$ -stable si



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

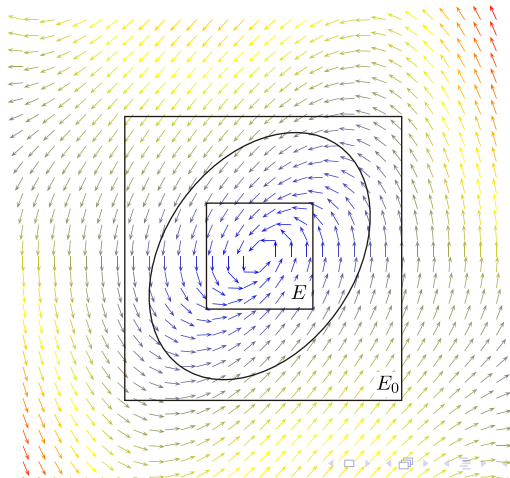
Discrétisation

Conclusion

## Définition

Un point d'équilibre  $x_\infty$  est *asymptotiquement*  $(E, E_0)$ -stable  
si

►  $\phi^{\mathbb{R}^+}(E) \subset E_0$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

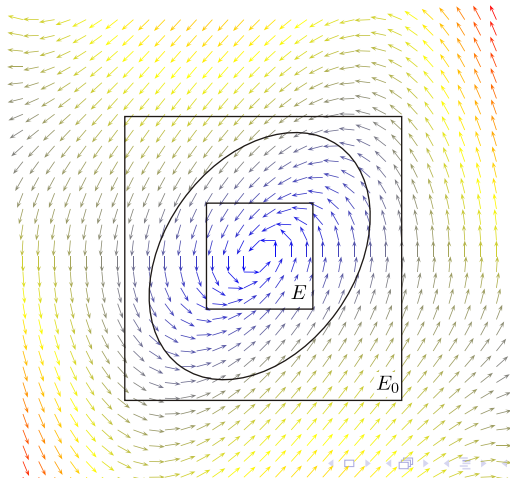
Discrétisation

Conclusion

## Définition

Un point d'équilibre  $x_\infty$  est *asymptotiquement*  $(E, E_0)$ -stable  
si

- ▶  $\phi^{\mathbb{R}^+}(E) \subset E_0$
- ▶  $\phi^\infty(E) = \{x_\infty\}$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

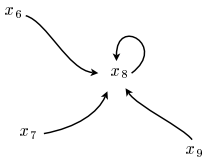
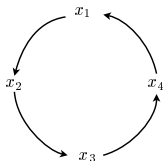
Conclusion



## Définition

Le bassin d'attraction de  $x_\infty$  est l'ensemble :

$$A_{x_\infty} = \{x \in E \mid \phi^\infty(x) = x_\infty\}.$$



$$A_{x_8} = \{x_6, x_7, x_8, x_9\}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

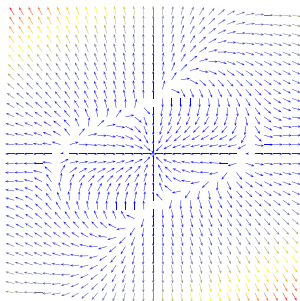
Discretisation

Conclusion

## Objectif :

Calculer le bassin d'attraction  $A_{x_\infty}$  d'un point  $x_\infty$ .

- 1.
- 2.
- 3.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

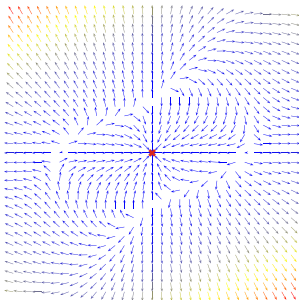
Discrétisation

Conclusion

## Objectif :

Calculer le bassin d'attraction  $A_{x_\infty}$  d'un point  $x_\infty$ .

1. Montrer l'asymptotique stabilité d'un point  $x_\infty$ .
- 2.
- 3.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

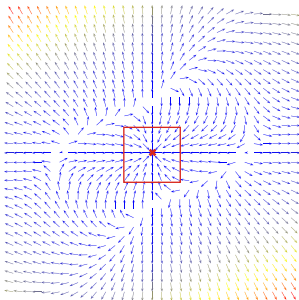
Discrétisation

Conclusion

## Objectif :

Calculer le bassin d'attraction  $A_{x_\infty}$  d'un point  $x_\infty$ .

1. Montrer l'asymptotique stabilité d'un point  $x_\infty$ .
2. Calculer un voisinage de  $x_\infty$  inclus dans  $A_{x_\infty}$ .
- 3.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

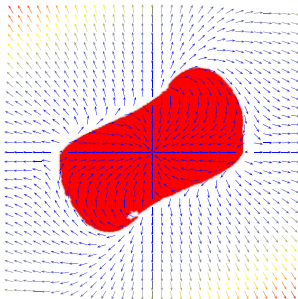
Discrétisation

Conclusion

## Objectif :

Calculer le bassin d'attraction  $A_{x_\infty}$  d'un point  $x_\infty$ .

1. Montrer l'asymptotique stabilité d'un point  $x_\infty$ .
2. Calculer un voisinage de  $x_\infty$  inclus dans  $A_{x_\infty}$ .
3. Discrétiser la dynamique afin de calculer  $A_{x_\infty}$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Définition

Une fonction  $L : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de Lyapunov pour  
( $\dot{x} = f(x)$ ) si :

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discrétisation

Conclusion

## Définition

Une fonction  $L : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de Lyapunov pour  $(\dot{x} = f(x))$  si :

1.  $L(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_\infty$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discrétisation

Conclusion

## Définition

Une fonction  $L : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de Lyapunov pour  $(\dot{x} = f(x))$  si :

1.  $L(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_\infty$
2.  $x \in E - \{x_\infty\} \Rightarrow L(x) > 0$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discrétisation

Conclusion



## Définition

Une fonction  $L : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est de Lyapunov pour  $(\dot{x} = f(x))$  si :

1.  $L(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_\infty$
2.  $x \in E - \{x_\infty\} \Rightarrow L(x) > 0$
3.  $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle < 0, \forall x \in E - \{x_\infty\}$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

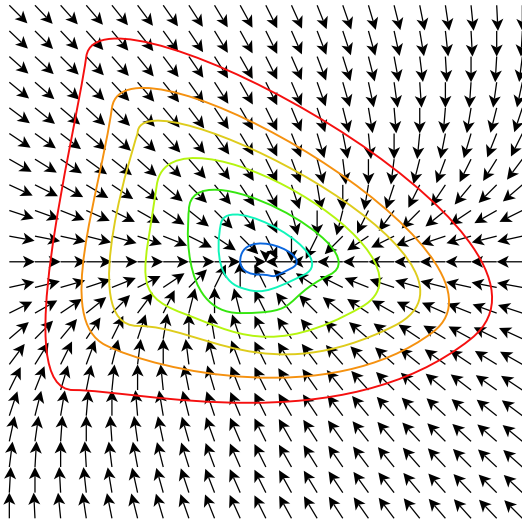
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discrétisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

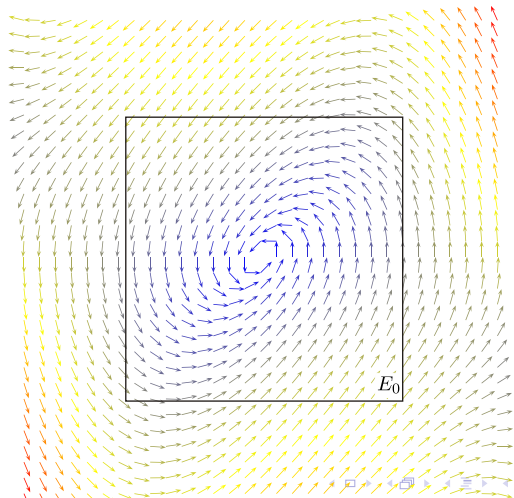
Discrétisation

Conclusion

## Théorème de Lyapunov

Soit  $E_0$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_\infty \in E_0$ .

Si  $L : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est de Lyapunov pour  $(\dot{x} = f(x))$  alors il existe un ensemble  $E (\neq \{x_\infty\}) \subset E_0$  tel que le point d'équilibre  $x_\infty$  soit asymptotiquement  $E, E_0$ -stable.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

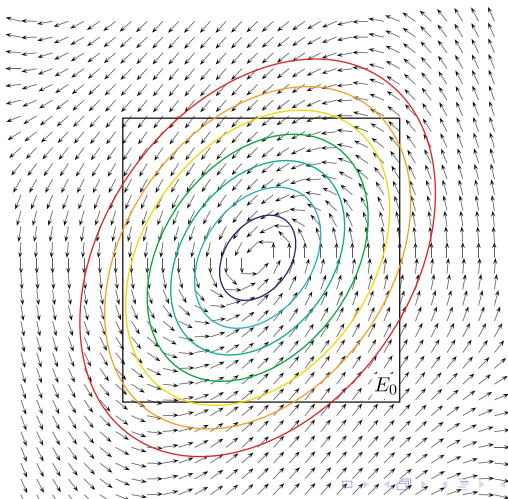
Discrétisation

Conclusion

## Théorème de Lyapunov

Soit  $E_0$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_\infty \in E_0$ .

Si  $L : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est de Lyapunov pour  $(\dot{x} = f(x))$  alors  
il existe un ensemble  $E (\neq \{x_\infty\}) \subset E_0$  tel que le point  
d'équilibre  $x_\infty$  soit asymptotiquement  $E, E_0$ -stable.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

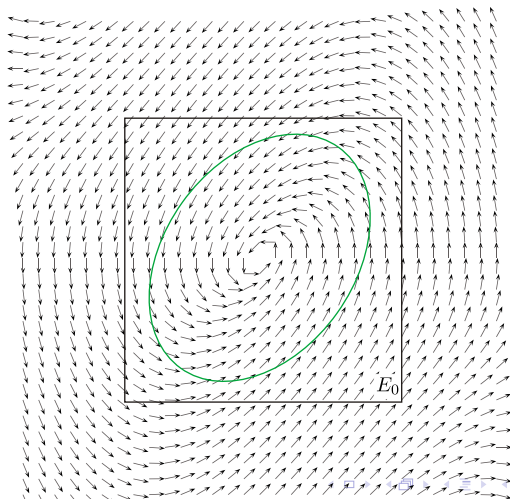
Discrétisation

Conclusion

## Théorème de Lyapunov

Soit  $E_0$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_\infty \in E_0$ .

Si  $L : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est de Lyapunov pour  $(\dot{x} = f(x))$  alors  
il existe un ensemble  $E (\neq \{x_\infty\}) \subset E_0$  tel que le point  
d'équilibre  $x_\infty$  soit asymptotiquement  $E, E_0$ -stable.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

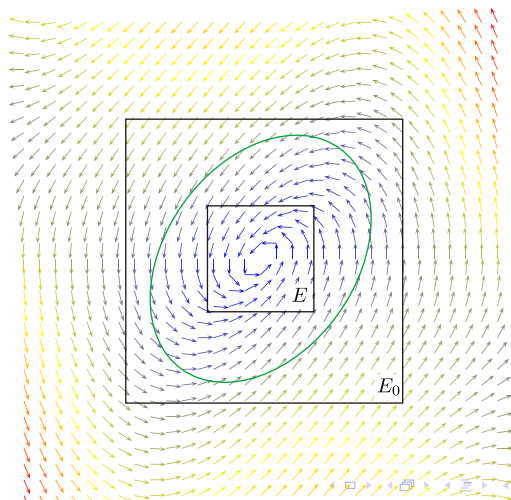
Discrétisation

Conclusion

## Théorème de Lyapunov

Soit  $E_0$  un compact de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_\infty \in E_0$ .

Si  $L : E_0 \rightarrow \mathbb{R}$  est de Lyapunov pour  $(\dot{x} = f(x))$  alors il existe un ensemble  $E (\neq \{x_\infty\}) \subset E_0$  tel que le point d'équilibre  $x_\infty$  soit asymptotiquement  $E, E_0$ -stable.



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Dans le cas linéaire :

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

Avec  $L = x^T W x$ ,  $W \in S^n$   
on a  $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle = x^T (A^T W + W A)x$ .

## Conditions de Lyapunov

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discrétisation

Conclusion

Dans le cas linéaire :

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

Avec  $L = x^T W x$ ,  $W \in S^n$   
on a  $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle = x^T (A^T W + W A)x$ .

## Conditions de Lyapunov

1.  $W \in S^{n+}$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discrétisation

Conclusion



Dans le cas linéaire :

$$\dot{x} = Ax \quad (2)$$

Avec  $L = x^T W x$ ,  $W \in S^n$   
on a  $\langle \nabla L(x), f(x) \rangle = x^T (A^T W + W A)x$ .

## Conditions de Lyapunov

1.  $W \in S^{n+}$ .
2.  $-(A^T W + W A) \in S^{n+}$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Théorème

Soit  $\dot{x} = Ax$ , l'origine est asymptotique stable si et seulement si  $\forall Q \in S^{n+}$ , la matrice  $W$  solution de

$$A^T W + WA = -Q$$

est définie positive.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discrétisation

Conclusion

## Théorème

Soit  $\dot{x} = Ax$ , l'origine est asymptotique stable si et seulement si  $\forall Q \in S^{n+}$ , la matrice  $W$  solution de

$$A^T W + WA = -Q$$

est définie positive.

## En pratique

1.  $A^T W + WA = -I$
2. Vérifier que  $W \in S^{n+}$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

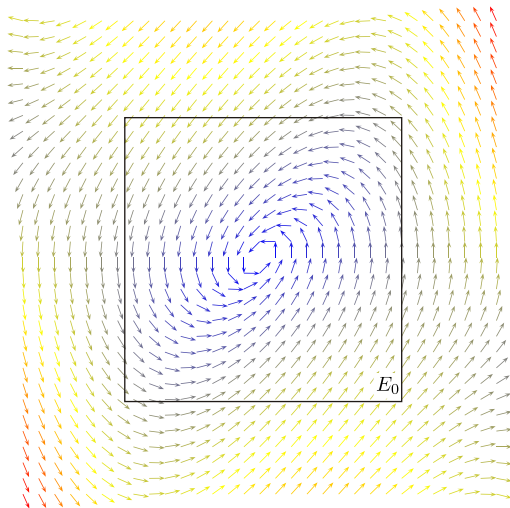
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Algorithme

1. Montrer que  $E_0$  contient un unique point d'équilibre.
2. Trouver  $[x_\infty] \subset [x_0]$  tel que  $x_\infty \in [x_\infty]$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

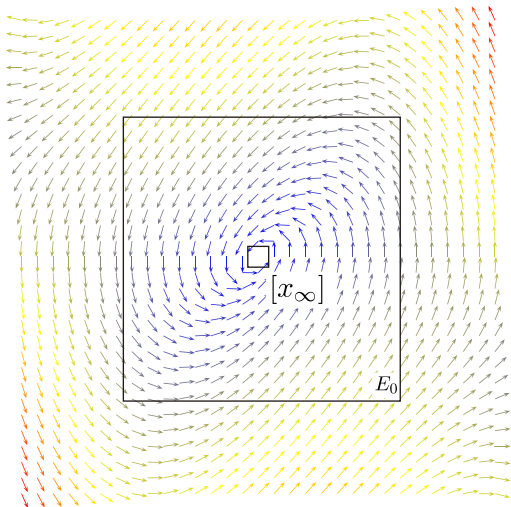
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Algorithme

1. Montrer que  $E_0$  contient un unique point d'équilibre.
2. Trouver  $[x_\infty] \subset [x_0]$  tel que  $x_\infty \in [x_\infty]$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

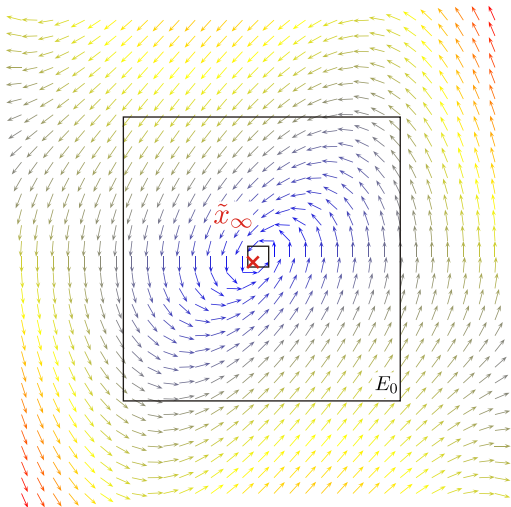
Discrétisation

Conclusion

# Algorithme

3. Linéariser autour d'une approximation  $\tilde{x}_\infty$  de  $x_\infty$  :

$$\overline{(x - x_\infty)} = Df(\tilde{x}_\infty)(x - x_\infty).$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

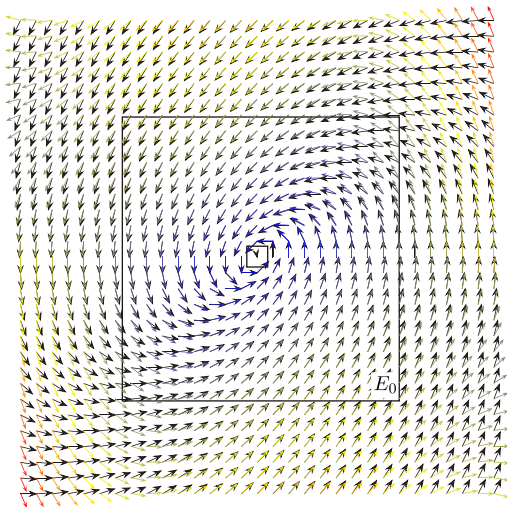
Discretisation

Conclusion

# Algorithme

3. Linéariser autour d'une approximation  $\tilde{x}_\infty$  de  $x_\infty$  :

$$\overline{(x - x_\infty)} = Df(\tilde{x}_\infty)(x - x_\infty).$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

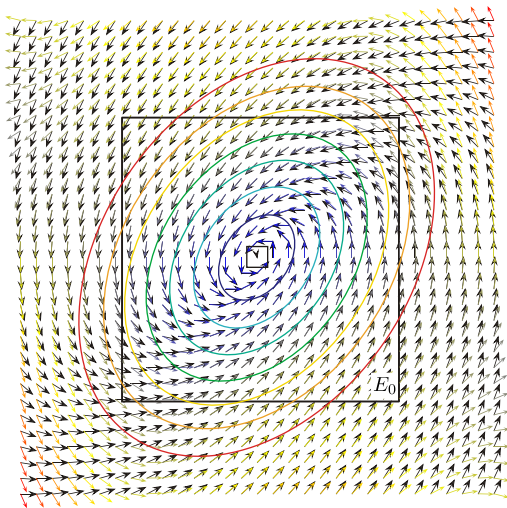
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Algorithme

4. Trouver une fonction de Lyapunov  $L_{x_\infty}$  pour  $Df(\tilde{x}_\infty)$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

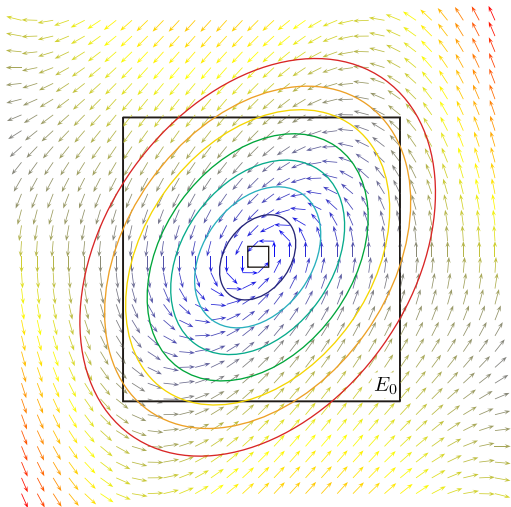
Discretisation

Conclusion



## Algorithme

5. Vérifier que  $L_{x_\infty}$  est aussi de Lyapunov pour le non linéaire  $\dot{x} = f(x)$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discrétisation

Conclusion

On a :  $L_{x_\infty}(x) = (x - x_\infty)^T W_{\tilde{x}_\infty} (x - x_\infty)$

Etape 5 : Vérifier que :

$$g_{x_\infty}(x) = -\langle \nabla L_{x_\infty}(x), f(x) \rangle \geq 0$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discrétisation

Conclusion

On a :  $L_{x_\infty}(x) = (x - x_\infty)^T W_{\check{x}_\infty} (x - x_\infty)$

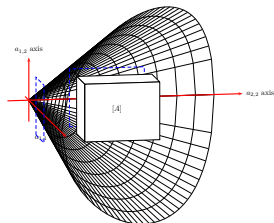
Etape 5 : Vérifier que :

$$g_{x_\infty}(x) = -\langle \nabla L_{x_\infty}(x), f(x) \rangle \geq 0$$

▶  $g_{x_\infty}(x_\infty) = 0$

▶  $\nabla g_{x_\infty}(x_\infty) = 0$

$$\nabla^2 g_{x_\infty}([x_0]) \subset S^{n+} \Rightarrow \forall x \in [x], g_{x_\infty}(x) \geq 0$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

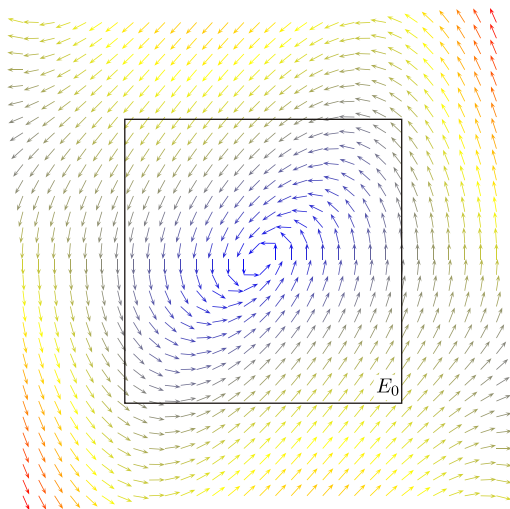
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

**Théorie de Lyapunov**

Discretisation

Conclusion



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

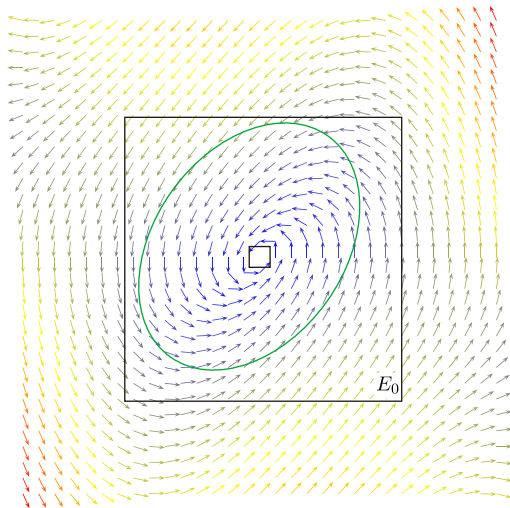
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion





Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

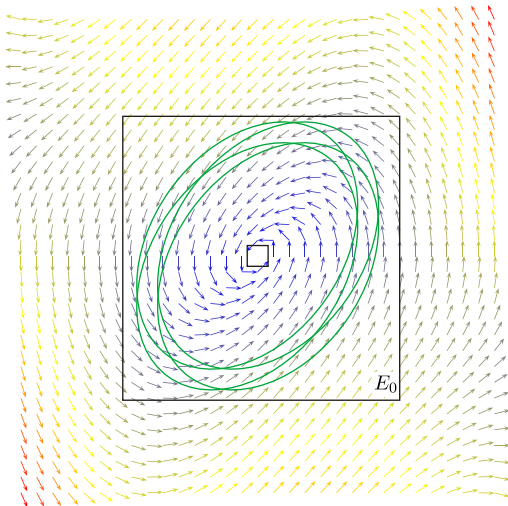
Discrétisation

Conclusion









Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

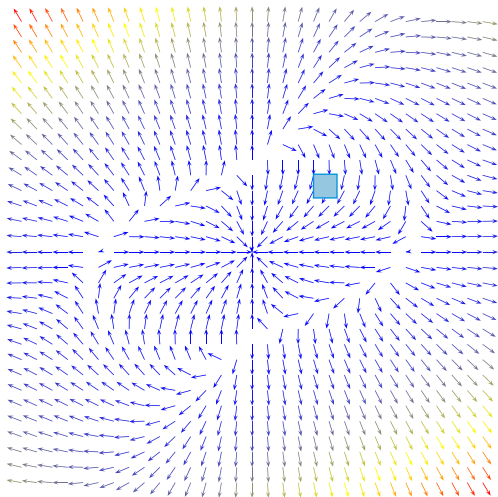
Discrétisation

Conclusion



## Méthode de Picard

Soit  $\dot{x} = f(x)$ , cette méthode numérique garantie construit une fonction d'inclusion pour  $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

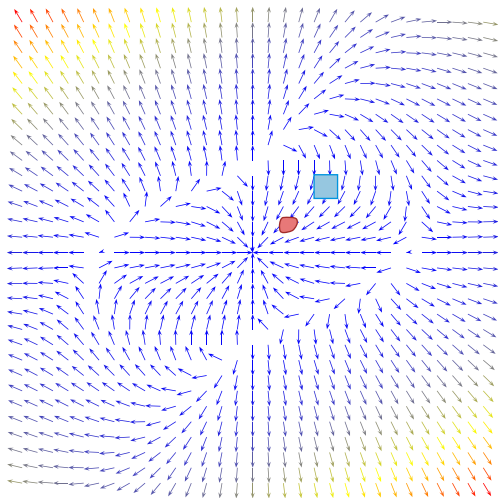
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Méthode de Picard

Soit  $\dot{x} = f(x)$ , cette méthode numérique garantie construit une fonction d'inclusion pour  $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

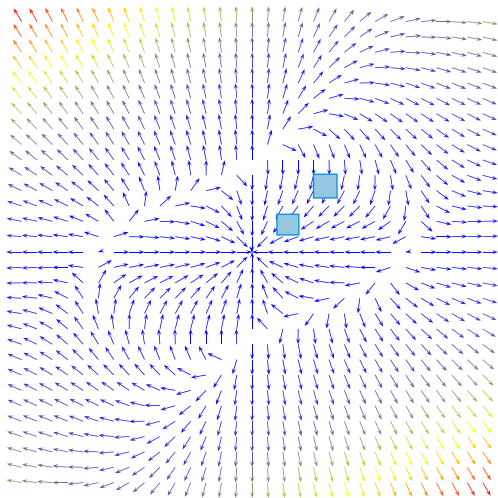
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Méthode de Picard

Soit  $\dot{x} = f(x)$ , cette méthode numérique garantie construit une fonction d'inclusion pour  $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

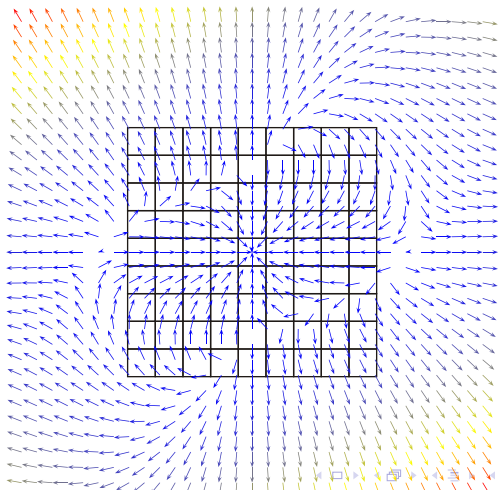
Discrétisation

Conclusion

## Définition

Soit  $t \in \mathbb{R}$ , et  $\{\mathbb{S}_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $\mathbb{S}$ , on note par  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $I$  par :

$$i\mathcal{R}j \Leftrightarrow \varphi^t(\mathbb{S}_i) \cap \mathbb{S}_j \neq \emptyset.$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

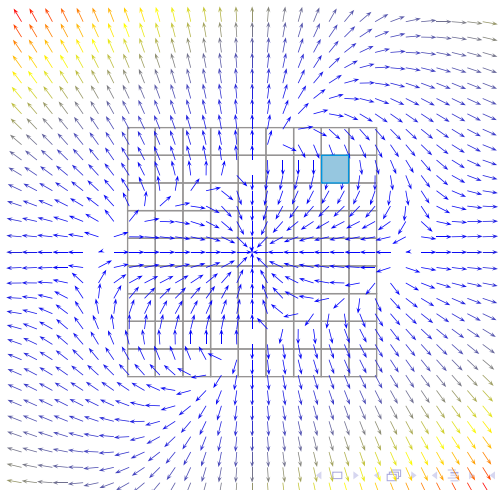
Discrétisation

Conclusion

## Définition

Soit  $t \in \mathbb{R}$ , et  $\{\mathbb{S}_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $\mathbb{S}$ , on note par  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $I$  par :

$$i \mathcal{R} j \Leftrightarrow \varphi^t(\mathbb{S}_i) \cap \mathbb{S}_j \neq \emptyset.$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

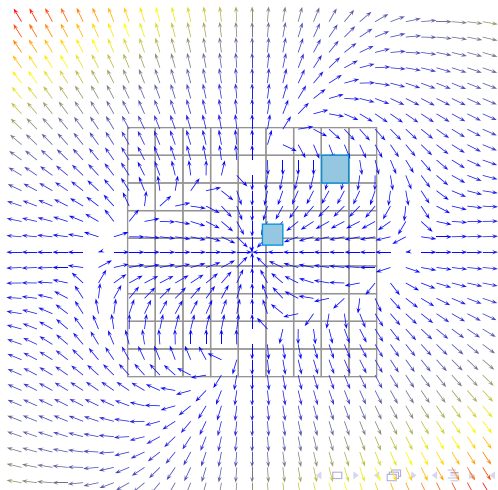
Discrétisation

Conclusion

## Définition

Soit  $t \in \mathbb{R}$ , et  $\{\mathbb{S}_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $\mathbb{S}$ , on note par  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $I$  par :

$$i\mathcal{R}j \Leftrightarrow \varphi^t(\mathbb{S}_i) \cap \mathbb{S}_j \neq \emptyset.$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

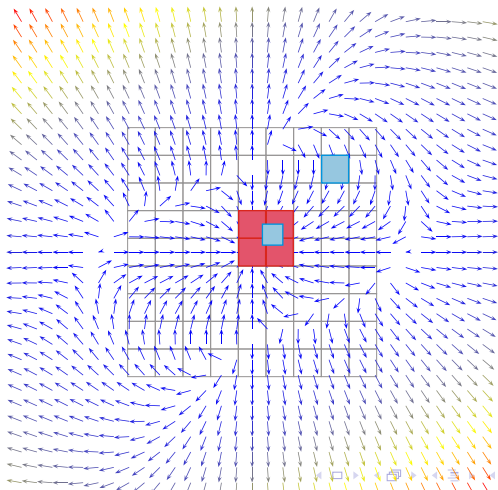
Conclusion



## Définition

Soit  $t \in \mathbb{R}$ , et  $\{\mathbb{S}_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $\mathbb{S}$ , on note par  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $I$  par :

$$i \mathcal{R} j \Leftrightarrow \varphi^t(\mathbb{S}_i) \cap \mathbb{S}_j \neq \emptyset.$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

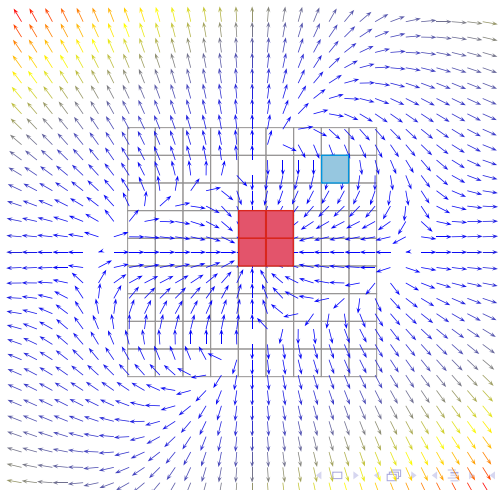
Discrétisation

Conclusion

## Définition

Soit  $t \in \mathbb{R}$ , et  $\{\mathbb{S}_i\}_{i \in I}$  un recouvrement de  $\mathbb{S}$ , on note par  $\mathcal{R}$  la relation définie sur  $I$  par :

$$i \mathcal{R} j \Leftrightarrow \varphi^t(\mathbb{S}_i) \cap \mathbb{S}_j \neq \emptyset.$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

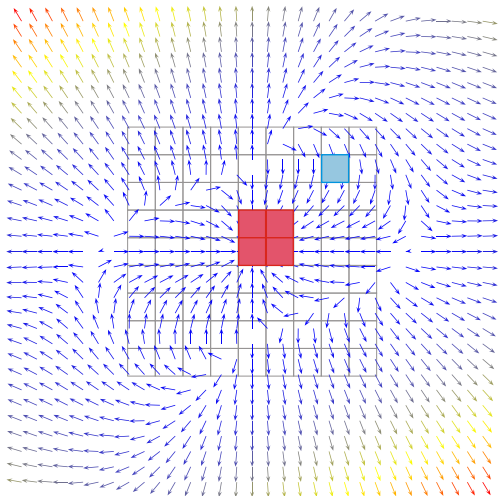
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition

Si  $\forall j \in I, i \mathcal{R} j \Rightarrow \mathbb{S}_j \subset A_{x_\infty}$  alors  $\mathbb{S}_i \subset A_{x_\infty}$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

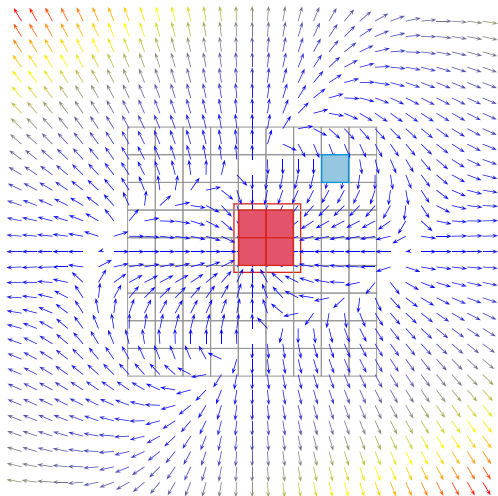
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition

Si  $\forall j \in I, i \mathcal{R} j \Rightarrow \mathbb{S}_j \subset A_{x_\infty}$  alors  $\mathbb{S}_i \subset A_{x_\infty}$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

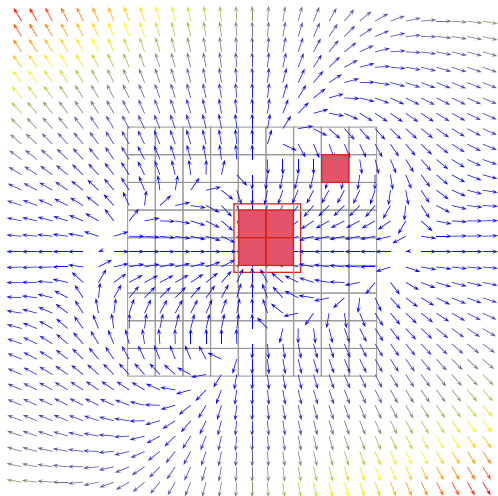
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Proposition

Si  $\forall j \in I, i \mathcal{R} j \Rightarrow \mathbb{S}_j \subset A_{x_\infty}$  alors  $\mathbb{S}_i \subset A_{x_\infty}$ .



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Entrée :  $\dot{x} = f(x)$  avec  $f : [x_0] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_\infty$  un point asymptotiquement stable et  $A$  un voisinage de  $x_\infty$  inclus dans le bassin d'attraction de  $A_\infty$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Entrée :  $\dot{x} = f(x)$  avec  $f : [x_0] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_\infty$  un point asymptotiquement stable et  $A$  un voisinage de  $x_\infty$  inclus dans le bassin d'attraction de  $A_\infty$ .

1. Créer un recouvrement de  $\{S_i\}_{i \in I}$  de  $[x_0]$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Entrée :  $\dot{x} = f(x)$  avec  $f : [x_0] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_\infty$  un point asymptotiquement stable et  $A$  un voisinage de  $x_\infty$  inclus dans le bassin d'attraction de  $A_\infty$ .

1. Créer un recouvrement de  $\{S_i\}_{i \in I}$  de  $[x_0]$ .
2. Calculer la relation  $\mathcal{R}$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



Entrée :  $\dot{x} = f(x)$  avec  $f : [x_0] \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x_\infty$  un point asymptotiquement stable et  $A$  un voisinage de  $x_\infty$  inclus dans le bassin d'attraction de  $A_\infty$ .

1. Créer un recouvrement de  $\{S_i\}_{i \in I}$  de  $[x_0]$ .
2. Calculer la relation  $\mathcal{R}$ .
3. Pour chaque  $i$  de  $I$ , si

$$\forall j \in I, i \mathcal{R} j \Rightarrow S_j \subset A$$

alors  $A := A \cup S_i$ .

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

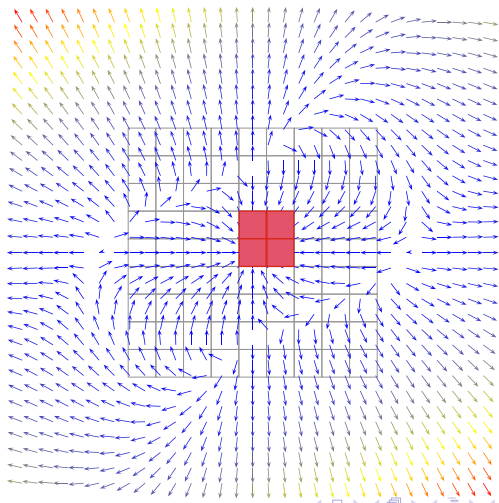
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemple

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * (x^2 - x * y + 3 * y^2 - 1) \\ y * (x^2 - 4 * y * x + 3 * y^2 - 1) \end{pmatrix}$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

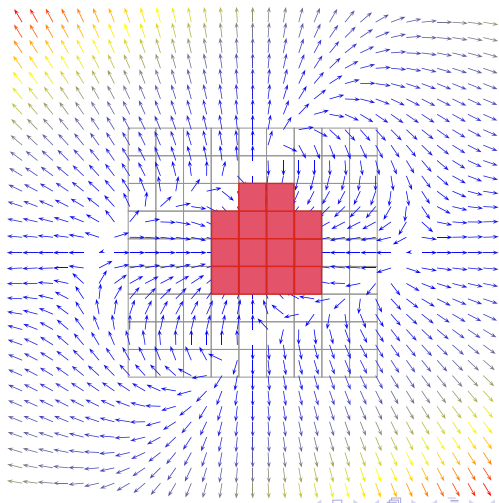
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemple

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * (x^2 - x * y + 3 * y^2 - 1) \\ y * (x^2 - 4 * y * x + 3 * y^2 - 1) \end{pmatrix}$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

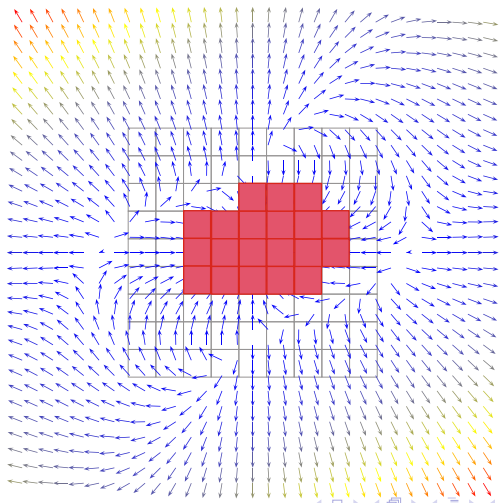
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemple

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * (x^2 - x * y + 3 * y^2 - 1) \\ y * (x^2 - 4 * y * x + 3 * y^2 - 1) \end{pmatrix}$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

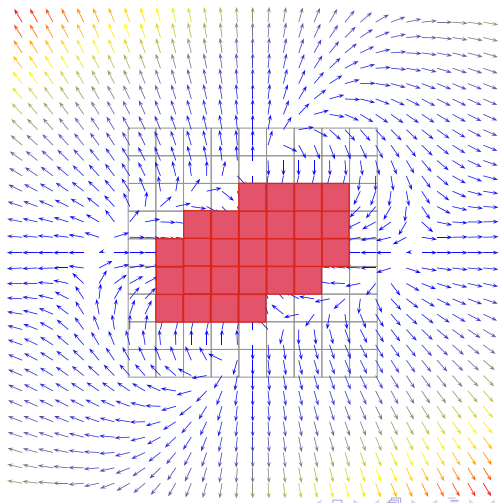
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemple

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * (x^2 - x * y + 3 * y^2 - 1) \\ y * (x^2 - 4 * y * x + 3 * y^2 - 1) \end{pmatrix}$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

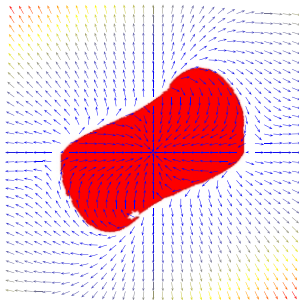
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Exemple

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x * (x^2 - x * y + 3 * y^2 - 1) \\ y * (x^2 - 4 * y * x + 3 * y^2 - 1) \end{pmatrix}$$



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

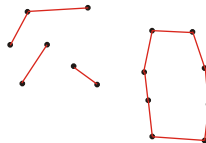
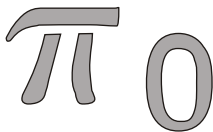
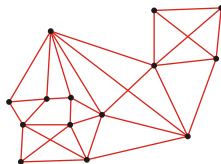
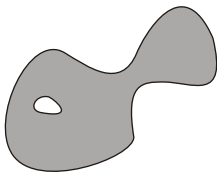
Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

# Algorithme CIA



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

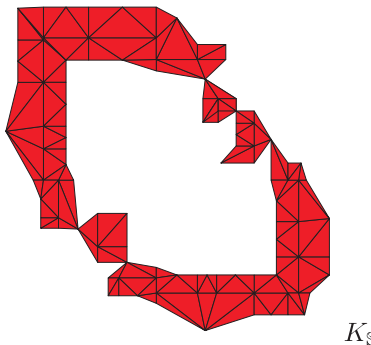
Discretisation

Conclusion

# Algorithme HIA

Algorithmes  
numériques pour  
l'analyse  
topologique

Nicolas Delanoue  
203 / 217



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

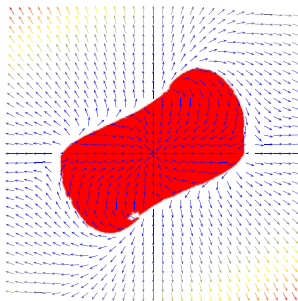
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



# Bassin d'attraction



Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Perspectives

- ▶ Applications réalistes.

*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Perspectives

- ▶ Applications réalistes.  
*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.
- ▶ Aborder des problèmes en dimension supérieure avec des méthodes de propagations de contraintes.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

## Perspectives

- ▶ Applications réalistes.  
*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.
- ▶ Aborder des problèmes en dimension supérieure avec des méthodes de propagations de contraintes.
- ▶ Montrer que ces algorithmes terminent souvent. (Partie résiduelle).

Calcul par intervalles

L'arithmétique des intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la topologie d'un ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un ensemble est étoilé

Discretisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion

## Proposition

Compter le nombre de composantes connexes d'un ensemble de la forme :

$$\mathbb{S} = \bigcup_{i=1}^s \bigcap_{j=1}^{r_i} \{x \in \mathbb{R}^n; f_{i,j}(x) \leq 0\} \quad \text{où } f_{i,j} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

est un problème indécidable.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

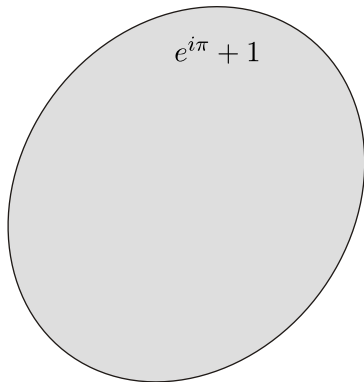
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



$\mathbb{Q}(i, \exp, \log, \pi, |\cdot|)$

”  $\cdot = 0$  ”

”  $\cdot \neq 0$  ”

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

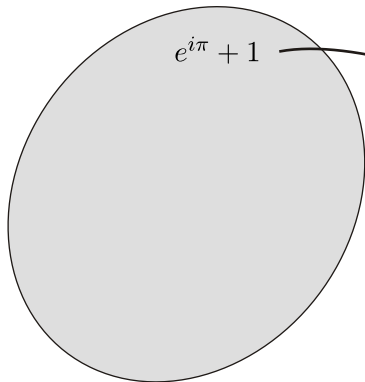
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



$$e^{i\pi} + 1$$

” . = 0”

” .  $\neq$  0”

$$\mathbb{Q}(i, \exp, \log, \pi, |\cdot|)$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

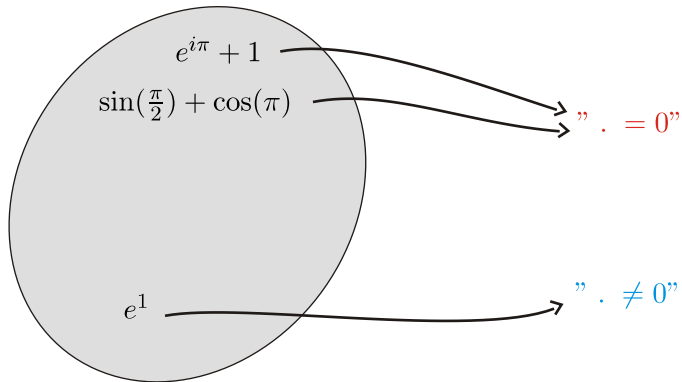
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



$\mathbb{Q}(i, \exp, \log, \pi, |\cdot|)$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

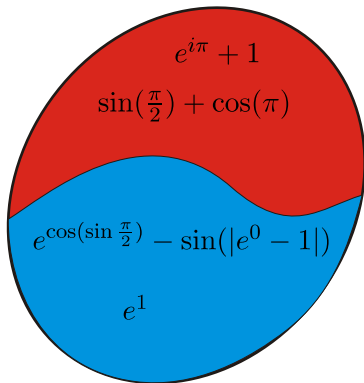
Discrétisation

Conclusion









$$\mathbb{Q}(i, \exp, \log, \pi, |\cdot|)$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

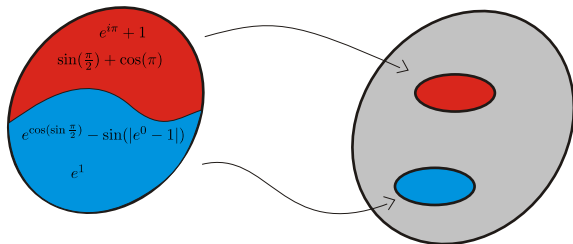
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

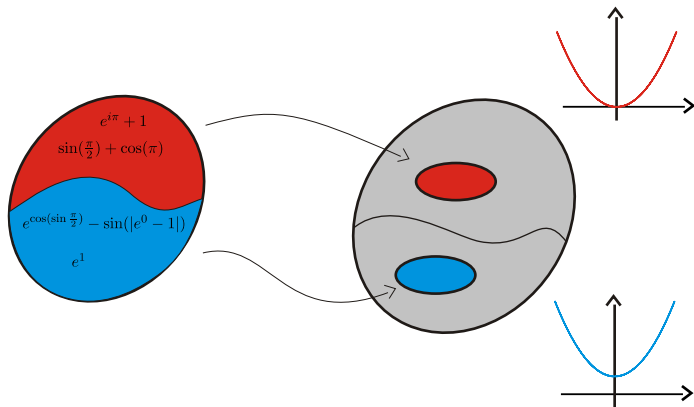
Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion



$$\alpha \mapsto \mathbb{S}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}, (x - |\alpha|)^2 + (x + |\alpha|)^2 \leq 0\}$$



$$\alpha \mapsto \mathbb{S}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}, (x - |\alpha|)^2 + (x + |\alpha|)^2 \leq 0\}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discretisation

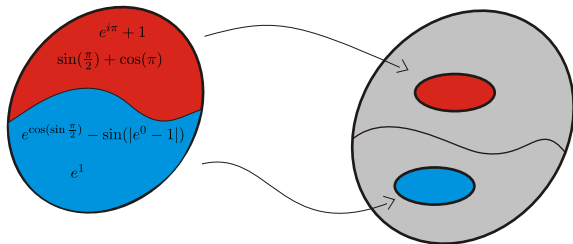
Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discretisation

Conclusion



$$\alpha \mapsto \mathbb{S}_\alpha = \{x \in \mathbb{R}, (x - |\alpha|)^2 + (x + |\alpha|)^2 \leq 0\}$$

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

- ▶ Applications réalistes.

*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

Conclusion

- ▶ Applications réalistes.  
*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.
- ▶ Aborder des problèmes en dimension supérieure avec des méthodes de propagations de contraintes.



- ▶ Applications réalistes.  
*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.
- ▶ Aborder des problèmes en dimension supérieure avec des méthodes de propagations de contraintes.
- ▶ Montrer que ces algorithmes terminent souvent. (Partie résiduelle).

- ▶ Applications réalistes.  
*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.
- ▶ Aborder des problèmes en dimension supérieure avec des méthodes de propagations de contraintes.
- ▶ Montrer que ces algorithmes terminent souvent. (Partie résiduelle).
- ▶ Montrer la convexité.

- ▶ Applications réalistes.  
*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.
- ▶ Aborder des problèmes en dimension supérieure avec des méthodes de propagations de contraintes.
- ▶ Montrer que ces algorithmes terminent souvent. (Partie résiduelle).
- ▶ Montrer la convexité.
- ▶ Développer un algorithme qui prend en entrée un système dynamique et qui renvoie un début de “portrait de phase” :

- ▶ Applications réalistes.  
*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.
- ▶ Aborder des problèmes en dimension supérieure avec des méthodes de propagations de contraintes.
- ▶ Montrer que ces algorithmes terminent souvent. (Partie résiduelle).
- ▶ Montrer la convexité.
- ▶ Développer un algorithme qui prend en entrée un système dynamique et qui renvoie un début de “portrait de phase” :
  - ▶ le nombre de points fixes,

- ▶ Applications réalistes.  
*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.
- ▶ Aborder des problèmes en dimension supérieure avec des méthodes de propagations de contraintes.
- ▶ Montrer que ces algorithmes terminent souvent. (Partie résiduelle).
- ▶ Montrer la convexité.
- ▶ Développer un algorithme qui prend en entrée un système dynamique et qui renvoie un début de “portrait de phase” :
  - ▶ le nombre de points fixes,
  - ▶ leur catégorie (dimension des espaces dilatants et contractants ...),

- ▶ Applications réalistes.  
*Star-shaped Roadmaps-A Deterministic Sampling Approach for Complete Motion Planning*, G Varadhan, D Manocha - Proc. of Robotics : Science and Systems, 2005.
- ▶ Aborder des problèmes en dimension supérieure avec des méthodes de propagations de contraintes.
- ▶ Montrer que ces algorithmes terminent souvent. (Partie résiduelle).
- ▶ Montrer la convexité.
- ▶ Développer un algorithme qui prend en entrée un système dynamique et qui renvoie un début de “portrait de phase” :
  - ▶ le nombre de points fixes,
  - ▶ leur catégorie (dimension des espaces dilatants et contractants ...),
  - ▶ dénombrer les cycles limites.

► Merci pour votre attention.

Calcul par  
intervalles

L'arithmétique des  
intervalles

Calcul par intervalles

Analyse de la  
topologie d'un  
ensemble

Motivation

Rappels topologiques

Prouver qu'un  
ensemble est étoilé

Discrétisation

Bassin d'attraction

Systèmes dynamiques

Théorie de Lyapunov

Discrétisation

**Conclusion**