THÈSE

présentée par

Bertrand Cottenceau

pour obtenir le grade de Docteur
de l'Université d'Angers

Spécialité : Automatique et Informatique Appliquée

Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes

Soutenue le 5 Octobre 1999 devant le jury composé de :

Guy Cohen	Rapporteur	*Professeur, Ecole des Mines de Paris*
Christian Commault	Rapporteur	*Professeur, INPG*
Alain Bourjault	Examinateur	*Professeur, Université de Franche-Comté*
Jean-Louis Ferrier	Examinateur	*Professeur, Université d'Angers*
Edouard Wagneur	Examinateur	*Professeur, Ecole des Mines de Nantes*
Laurent Hardouin	Examinateur	*Maître de Conférences, Université d'Angers*
Jean-Jacques Loiseau	Invité	*Chargé de Recherches, CNRS*

Directeur de thèse : L. Hardouin

Thèse préparée au sein du **L**aboratoire d'**I**ngénierie des **S**ystèmes **A**utomatisés

Remerciements

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA) de l'Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur d'Angers (ISTIA).

J'adresse mes plus vifs remerciements à M. Jean-Louis Ferrier, Professeur à l'Université d'Angers, pour m'avoir donné l'opportunité de préparer une thèse au sein du laboratoire qu'il dirige ainsi que pour avoir accepté d'être examinateur de ce travail.

Je remercie M. Guy Cohen, Professeur à l'Ecole des Mines de Paris, et M. Christian Commault, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, pour l'honneur qu'il m'ont fait en acceptant d'être rapporteurs de ce travail. Je leur suis également très reconnaissant pour les nombreuses remarques et suggestions qu'il nous ont apportées.

Je remercie M. Alain Bourjault, Professeur à l'Université de Franche-Comté, M. Edouard Wagneur, Professeur à l'Ecole des Mines de Nantes et M. Jean-Jacques Loiseau, Chargé de recherche au CNRS, pour avoir accepté d'être examinateurs de ce mémoire.

Je tiens à exprimer particulièrement ma gratitude à M. Laurent Hardouin, Maître de Conférences à l'Université d'Angers et directeur de cette thèse, pour son immense disponibilité, ses nombreux et précieux conseils et son dynamisme. Je voudrais qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance la plus sincère.

Je remercie M. Jean-Louis Boimond, Maître de Conférences à l'Université d'Angers, pour l'aide et les conseils qu'il m'a apportés tout au long de cette thèse. Je tiens également à remercier Eric Menguy et Sébastien Lahaye pour leur soutien, tant scientifique que moral, tout au long de cette thèse.

Enfin, je remercie également les collègues de laboratoire, en particulier ceux du bureau 311, pour l'ambiance sympathique qu'ils ont su faire régner durant ces trois années.

Introduction

Sous l'appellation *Systèmes (Dynamiques) à Evénements Discrets* (SED) sont regroupés certains systèmes, généralement de conception humaine[1], dont le comportement dynamique ne peut être décrit par des équations différentielles ou aux différences. Cette classe de systèmes regroupe aussi bien les systèmes de production, pour lesquels on étudie par exemple les flux de matière, que les systèmes de transport ou les systèmes informatique. Pour ces systèmes, se posent, entre autres, deux types de problèmes :

l'évaluation de performances :
ex. : estimer le taux de production ou le niveau d'en-cours d'un système de production, déterminer le débit maximum d'un réseau informatique pour un protocole particulier ...

l'optimisation de système :
ex. : calculer un ordonnancement de tâches qui optimise un critère donné, déterminer l'allocation optimale de ressources (moyens de transports, machines, processeurs ...) pour une performance souhaitée ...

Il est nécessaire, pour aborder ces problèmes, de bénéficier de modèles aptes à prendre en compte toutes les caractéristiques dynamiques de ces systèmes. Or, les phénomènes mis en jeu par les SED, et responsables de leur dynamique, sont nombreux et de natures diverses : tâches séquentielles ou simultanées, temporisées ou non, synchronisées ou concurrentes ... De cette diversité de phénomènes provient l'incapacité de décrire l'ensemble des SED par un modèle unique qui soit à la fois fidèle à la réalité et exploitable mathématiquement. L'étude des SED se fait donc au travers de plusieurs théories complémentaires parmi lesquelles on peut rappeler par exemple la *théorie des Réseaux de File d'Attente*, pour l'évaluation de performances de systèmes temporisés, ou la *théorie des langages et automates*, pour la description et la commande de systèmes non temporisés.

Le travail présenté dans ce mémoire s'inscrit dans le cadre de la *théorie des systèmes (max,+) linéaires* également appelée *théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes.* Cette théorie concerne la sous-classe des systèmes à événements discrets temporisés dont l'évolution de l'état est représentable par des équations récurrentes linéaires sur des structures algébriques particulières telles que l'algèbre (max,+) ou l'algèbre (min,+). Le comportement des systèmes caractérisés par des délais et des synchronisations peut être décrit par de telles récurrences. Ces systèmes correspondent en fait aux *Graphes d'Evénements Temporisés* (GET) qui constituent une sous-classe des *Réseaux de Petri* (RdP) dont chaque place n'admet qu'une transition en amont et une transition en aval.

[1]en opposition aux systèmes "naturels" décrits par les lois de la physique

On s'intéresse ici de manière générale au problème de *commande de GET* qui consiste à répondre à la question suivante :

Quelle séquence de tirs doit-on appliquer aux transitions d'entrée d'un GET pour obtenir les performances désirées?

Plus précisément, le problème de commande abordé dans ce mémoire peut être vu comme un problème de poursuite de modèle. Partant d'un système représentable par un GET, l'objectif est de synthétiser un *correcteur* (une loi de commande), également descriptible par un GET, de telle sorte que le comportement entrée-sortie du système corrigé (système nominal + correcteur) soit aussi proche que possible de celui d'un *modèle de référence* donné. Ceci nous amènera à considérer différents types de correction dont les principaux seront la correction avec précompensateur et la correction par *feedback*[2] de sortie. Pratiquement, cela revient à étudier comment la dynamique d'un GET (système nominal) peut être modifiée par l'ajout d'un autre GET (un correcteur) placé soit en amont, soit en feedback de la sortie vers l'entrée.

Le plan de ce mémoire est le suivant :

- Le premier chapitre fournit les outils algébriques nécessaires à la représentation des GET et à leur commande. Il se divise en trois parties présentant des éléments de la théorie des treillis, de la théorie de la résiduation ainsi que de la théorie des dioïdes. L'originalité de cette présentation réside dans l'étude de la résiduabilité de certaines restrictions d'applications. En particulier, il apparaît que la restriction d'une fermeture à son image est toujours une application résiduable. On met ainsi en évidence que certaines applications non résiduables peuvent néanmoins bénéficier de restrictions résiduables. Notamment, l'application étoile de Kleene, qui joue un rôle clé dans le problème de synthèse de feedback abordé dans le chapitre 3, bénéficie de cette propriété d'être "en partie" résiduable.

- Le second chapitre présente la modélisation des GET sur différents dioïdes rencontrés dans la littérature. Nous insisterons notamment sur la présentation du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ qui sera, et ce tout au long du mémoire, la structure algébrique privilégiée pour le développement d'exemples. Sur cette structure algébrique, le transfert entrée-sortie d'un GET est une matrice rationnelle. Dès lors, l'étude des GET est très liée à l'algèbre des séries rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. Ce chapitre est essentiellement bibliographique ([Baccelli et al., 1992],[Cohen, 1993]); on met néanmoins en évidence la propriété suivante : le produit du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ -dioïde des séries rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$- est résiduable. La résiduée de ce produit repose à la fois sur la résiduée du produit du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ et sur la résiduée de l'injection canonique du dioïde des séries causales dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. Ce résultat nous permettra d'aborder dans le chapitre 3 la synthèse de correcteurs rationnels optimaux (c.-à-d. optimaux dans l'ensemble $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$).

- Le troisième chapitre aborde le problème de commande avec modèle de référence. A quelques exceptions soulignées dans le texte, les résultats proposés dans ce chapitre sont originaux. Plusieurs structures de commande sont proposées : précompensation, feedback de sortie, feedback d'état et feedback de sortie sur l'état. Le problème traité de manière

[2]nous utiliserons le terme anglo-saxon *feedback*, communément admis dans la communauté, en lieu et place de retour (d'état ou de sortie).

générale consiste, en partant d'un GET nominal dont on connaît le transfert noté H dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, à calculer un correcteur noté C (réalisable par un GET) tel que le GET nominal muni du correcteur ait un comportement aussi proche que possible de celui d'une spécification établie sous forme de modèle de référence noté G_{ref}. En outre, on cherche à déterminer sous quelle condition il existe un correcteur maximal C_{opt} (au sens de l'ordre de $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$) conduisant à la spécification G_{ref} ou permettant d'approcher "au plus près" cette spécification (cette notion sera évidemment précisée). Dans le cadre de la synthèse de feedback, nous montrons que l'optimalité n'est garantie que pour certains modèles de référence.

- Le quatrième chapitre propose deux types d'applications des résultats énoncés dans le chapitre 3.

  Nous étudions dans un premier temps des modèles de lignes de production gérées à flux tirés ayant fait l'objet de modélisations notamment dans la thèse de Di Mascolo [Di Mascolo, 1990] ou plus récemment dans [Chaouiya and Dallery, 1997]. Nous mettons en évidence une évolution possible de la politique de gestion des ordres de production d'un système Kanban dans l'objectif de diminuer les en-cours de production tout en conservant les mêmes performances entrée-sortie, c'est-à-dire la même qualité de service. Nous obtenons ainsi un système de gestion Kanban modifié que nous qualifions de Kanban Dynamique puisque le recyclage des kanbans suit une dynamique (max,+). C'est à cette dynamique que l'on doit en particulier la diminution des en-cours du système par rapport au Kanban classique.

  Dans un second temps, nous abordons le problème de stabilisation de GET (problème abordé dans [Cohen et al., 1984] et plus récemment dans [Commault, 1998]). On remarquera que la stabilité, lorsqu'elle fait défaut, peut être obtenue par l'ajout d'un précompensateur ou d'un feedback de sortie. Cette étude s'appuie sur des résultats théoriques obtenus par l'équipe Max Plus dans [Max Plus, 1991b]. Notre objectif est simplement de montrer que la stabilité d'un GET peut être obtenue par un correcteur (précompensateur ou feedback) calculé dans un objectif d'atteinte d'un modèle de référence (chapitre 3). Le problème consiste alors à établir pour quels modèles de référence G_{ref} le correcteur synthétisé dans l'objectif de répondre au mieux à la spécification G_{ref} possède, en outre, la propriété de stabiliser le système.

- Les annexes sont divisées en trois parties. Une première annexe rappelle des notions classiques sur la théorie des graphes. Nous rappelons dans une seconde annexe les algorithmes de calcul sur des séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$; nous proposons en particulier le calcul de l'inf et de la résiduée du produit de séries périodiques. La troisième annexe propose une simulation en vue de comparer les performances de la gestion Kanban classique avec la gestion Kanban Dynamique (calculée dans le chapitre 4) pour un modèle de ligne de production ayant des temporisations aléatoires.

Notations

$\overline{\mathbb{Z}}_{max}$: dioïde $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$, appelé aussi algèbre (max,+)

$\overline{\mathbb{Z}}_{min}$: dioïde $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$, appelé aussi algèbre (min,+)

$\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$: dioïde des séries formelles en γ à exposants dans $\mathbb{Z}$ et coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$.

$\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$: dioïde des séries formelles en δ à exposants dans $\mathbb{Z}$ et coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$.

$\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$: dioïde $\gamma^*\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$.

$\mathcal{D}[\![\delta]\!]$: dioïde $(\delta^{-1})^*\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$.

$\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$: dioïde des séries formelles en γ et δ à exposants dans $\mathbb{Z}$ et coefficients booléens.

$\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$: quotient du dioïde $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$ par la congruence $\mathcal{R}_{(\gamma\oplus\delta^{-1})}$:

$$s_1(\gamma, \delta)\mathcal{R}_{(\gamma\oplus\delta^{-1})}s_2(\gamma, \delta) \iff (\gamma \oplus \delta^{-1})^* s_1(\gamma, \delta) = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* s_2(\gamma, \delta).$$

$\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma, \delta]\!]$: dioïde des éléments causaux de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

$\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma, \delta]\!]$: dioïde des éléments périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

$\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma, \delta]\!]$: dioïde des éléments rationnels de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

$\mathsf{Im}f$: image de l'application $f : E \to F$, $\mathsf{Im}f = \{y \in F | \exists x \in E, y = f(x)\}$.

$f_{|A}$: restriction de l'application f au domaine A.

${}_{B|}f$: restriction de l'application f au codomaine B (avec $\mathsf{Im}f \subseteq B$).

${}_{B|}f_{|A}$: restriction de l'application f au domaine A et au codomaine B (avec $f(A) \subseteq B$).

$f^\sharp$: application résiduée de l'application f: $f^\sharp(y) = Sup(\{x | f(x) \preceq y\})$.

$f^\flat$: application résiduée duale de l'application f: $f^\flat(y) = Inf(\{x | f(x) \succeq y\})$.

$Res^\sharp(E, F)$: ensemble des applications résiduables de E dans F

$Res^\flat(E, F)$: ensemble des applications dualement résiduables de E dans F

L_a : produit à gauche par a, $L_a(x) = a \otimes x$.

R_a : produit à droite par a, $R_a(x) = x \otimes a$.

T_a : addition avec a, $T_a(x) = a \oplus x$.

$\mathcal{K}$: application étoile de Kleene définie sur un dioïde complet, $\mathcal{K}(x) = x^* = \bigoplus_{i\geq 0} x^i$.

$\mathcal{P}$: application "plus" dérivée de l'étoile de Kleene, $\mathcal{P}(x) = x^+ = xx^* = \bigoplus_{i\geq 1} x^i$.

$\frac{b}{a} = a \backslash b$: notation utilisée pour représenter $L_a^\sharp(b)$.

$\frac{b}{a} = b \not\phi a$ **:** notation utilisée pour représenter $R_a^\sharp(b)$.

Pr_+ **:** application résiduée de l'injection canonique $\mathsf{Id}_{|\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!]} : \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!] \to \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$.

Table des matières

Chapitre 1

Outils algébriques

Les dioïdes sont des structures algébriques que l'on peut munir d'un ordre naturel défini à partir de leur loi additive notée $\oplus$ (qui est une loi interne associative, commutative et idempotente). En effet, cette loi leur confère directement une structure de $\oplus$-demi-treillis.

De plus, lorsqu'un dioïde est complet, on peut lui adjoindre une loi interne notée $\wedge$ qui est associative, commutative et idempotente et qui forme avec la loi $\oplus$ des lois de treillis (complet). Par conséquent, une partie de la théorie des dioïdes est intimement liée à la *théorie des treillis* [Birkhoff, 1940].

D'autre part, ni la loi additive, ni la loi multiplicative, notée $\otimes$, d'un dioïde n'a d'inverse. La *théorie de la résiduation*, présentée dans [Blyth and Janowitz, 1972], fournit une alternative à cette impossibilité d'inverser certaines applications définies sur des dioïdes. Cette théorie propose des éléments de réponse aux questions suivantes:
soit une application $f : (\mathcal{C}, \preceq) \to (\mathcal{D}, \preceq)$ définie sur des ensembles ordonnés,

- existe-t-il, pour tout $b \in \mathcal{D}$, une plus grande solution à l'inéquation $f(x) \preceq b$?
- existe-t-il, pour tout $b \in \mathcal{D}$, une plus petite solution à l'inéquation $f(x) \succeq b$?

Cette théorie concerne de façon générale les applications *croissantes* (ou isotones) définies sur des ensembles ordonnés $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. En outre, des résultats particuliers se dégagent lorsque $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ ont des structures de demi-treillis, de treillis ou de treillis complets. Ces résultats spécifiques trouvent alors un domaine d'application dans la théorie des dioïdes.

Ce chapitre est construit de la façon suivante.

On rappelle tout d'abord quelques définitions et résultats classiques de la théorie des treillis.

Parmi les résultats concernant la théorie de la résiduation, nous rappelons des résultats généraux sur les applications isotones et les fermetures. Nous introduisons également la notion d'application restreinte, ce qui nous permettra d'aborder l'étude d'applications "partiellement" résiduables, c'est-à-dire pour lesquelles seules certaines restrictions sont résiduables. En particulier, il apparaîtra que la restriction d'une fermeture à son image est une application résiduable. Nous rappelons ensuite quelques propriétés des applications résiduables définies sur des treillis ou des treillis complets.

Enfin, nous terminons ce chapitre par des éléments de la théorie des dioïdes couramment rencontrés dans la littérature (max,+). Nous insistons tout particulièrement sur l'application de la théorie de la résiduation aux dioïdes puisque cette théorie joue un rôle central dans les problèmes de commande des GET abordés par la suite. En particulier, il apparaît que l'application étoile de Kleene est résiduable lorsque son codomaine est restreint à son image. La synthèse de feedbacks pour les GET proposée au chapitre 3 repose principalement sur cette propriété.

1.1 Ensembles Ordonnés et Treillis

Nous renvoyons le lecteur à [Birkhoff, 1940] pour cette partie. Des rappels sur la théorie des treillis sont également donnés dans [Baccelli et al., 1992] et [Blyth and Janowitz, 1972].

Un *ensemble ordonné* est un ensemble E muni d'une relation d'ordre, c.-à-d. une relation binaire qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Cette relation sera notée $\preceq$ et un ensemble ordonné sera noté simplement $(E, \preceq)$.

Soit $x, y \in (E, \preceq)$, x et y sont dits *comparables* (suivant l'ordre $\preceq$) si

$$x \preceq y \text{ ou } y \preceq x,$$

ce que l'on notera $x \nparallel y$. Inversement, deux éléments $x, y \in (E, \preceq)$ vérifiant $x \npreceq y$ et $y \npreceq x$, sont dits *incomparables* et seront notés $x \| y$.

Si $\forall x, y \in (E, \preceq)$, $x \nparallel y$, alors l'ordre est dit *total*, et $(E, \preceq)$ est dit *totalement ordonné*. Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe au moins un couple $x, y \in (E, \preceq)$, tel que $x \neq y$ et $x \| y$, alors l'ordre est dit *partiel* et $(E, \preceq)$ est dit *partiellement ordonné*.

Par la suite, on utilisera la notation

$$a \prec b \iff \{a \preceq b \text{ et } a \neq b\}.$$

Remarque 1.1 En présence d'ambiguités, nous désignerons parfois l'ordre d'un ensemble E par la notation alternative $\preceq_E$. $\diamond$

Tout sous-ensemble F d'un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ peut également être ordonné par la restriction de l'ordre de E aux éléments de F notée $\preceq_F$. Cet ordre restreint est simplement défini par

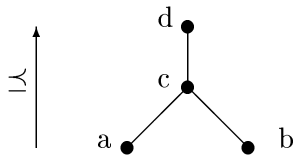
$$x, y \in F \subset E, \;\; x \preceq y \iff x \preceq_F y.$$

Aucune distinction de notation ne sera faite par la suite entre l'ordre $\preceq$ et sa restriction à F (notée $\preceq_F$ précédemment).

Remarque 1.2 Si $(E, \preceq)$ est partiellement ordonné, un sous-ensemble $F \subset E$, ordonné par la restriction de $\preceq$ à F, peut être tel que tous les éléments de F soient incomparables deux à deux. L'ensemble $(F, \preceq)$ est alors dit *totalement non ordonné*. $\diamond$

Un ensemble ordonné fini $(E, \preceq)$ peut être représenté par un graphe appelé *diagramme de Hasse*. Chaque élément de E est représenté par un sommet ($\bullet$). Un arc reliant deux sommets du diagramme signifie que les éléments représentés par ces sommets sont comparables. Par convention, l'ordre est croissant dans le sens du bas vers le haut du diagramme.

Pour la figure 1.1, l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$ est partiellement ordonné pour l'ordre $\preceq$ décrit par le diagramme. Le sous-ensemble $F = \{a, b\} \subset E$ est un ensemble ordonné par la restriction de $\preceq$ à F. Néanmoins, dans ce cas précis, $(F, \preceq)$ est totalement non ordonné (remarque 1.2).



$a \| b$ (a et b incomparables)

$a \preceq c,\ b \preceq c,\ c \preceq d$

$a \preceq d,\ b \preceq d$ (par transitivité de l'ordre $\preceq$)

Figure 1.1 : Diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné $(\{a, b, c, d\}, \preceq)$

Remarque 1.3 Un ensemble totalement ordonné est également appelé une *chaîne* en référence à son diagramme de Hasse qui en est une. ◇

Exemple 1.4 (Ensembles Ordonnés)

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$ où $\leq$ est l'ordre naturel, sont totalement ordonnés.
- Soit E un ensemble. L'ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$, est un ensemble ordonné par l'inclusion. Cet ensemble ordonné est noté $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$. Il s'agit d'un ordre partiel. Par exemple, deux sous-ensembles disjoints de E ne sont pas comparables suivant l'ordre $\subseteq$.
- Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. L'ensemble des vecteurs $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ de $E^{2\times 1}$ est ordonné par l'ordre
$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff (\alpha \preceq a \text{ et } \beta \preceq b).$$
Même si $\preceq$ est total sur E, l'ordre qu'il induit sur $E^{2\times 1}$ n'est que partiel.

◇

Définition 1.5 (Majorant, Minorant) *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $F \subseteq E$ un sous-ensemble non vide de E. Un élément $z \in E$ vérifiant $\forall x \in F, z \succeq x$ (resp. $z \preceq x$) est appelé majorant (resp. minorant) de l'ensemble F.*

Définition 1.6 (Demi-treillis) *Un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est appelé sup-demi-treillis si tout sous-ensemble fini de E admet un plus petit majorant dans E. Un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est appelé inf-demi-treillis si tout sous-ensemble fini admet un plus grand minorant.*

Remarque 1.7 (Bornes d'un ensemble) Lorsqu'il existe, le plus petit majorant d'un ensemble $F \subset E$ est souvent appelé *borne sup* de F et est noté $Sup(F)$. De même, lorsqu'il existe, le plus grand minorant de F est appelé *borne inf* de F et est noté $Inf(F)$. Lorsque ces bornes sont définies, tout majorant de F est plus grand que $Sup(F)$ et tout minorant de F est plus petit que $Inf(F)$. ◇

Exemple 1.8 L'ensemble ordonné décrit par le diagramme de Hasse de la figure 1.1 est un sup-demi-treillis, en particulier $Sup(\{a, b\}) = c$. En revanche, ce n'est pas un inf-demi-treillis puisque l'ensemble $\{a, b\}$, n'ayant pas de minorant dans l'ensemble E, n'a pas de borne inf. $\diamond$

Le théorème suivant fournit une caractérisation des demi-treillis.

Théorème 1.9. *Un ensemble E peut être muni d'une structure de sup-demi-treillis si, et seulement si, il peut être muni d'une loi de composition interne, notée $\vee$, qui soit associative, commutative et idempotente ($\forall a \in E, a \vee a = a$).*

Preuve :

($\Rightarrow$) si un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ a une structure de sup-demi-treillis, en notant $a \vee b = Sup(\{a, b\})$ (qui, par hypothèse, est défini pour tout sous-ensemble fini), on vérifie facilement que $\vee$ est une loi interne, associative ($Sup(\{Sup(\{a, b\}), c\}) = Sup(\{a, b, c\}) = Sup(\{a, Sup(\{b, c\})\})$), commutative ($Sup(\{a, b\}) = Sup(\{b, a\})$) et idempotente ($Sup(\{a, a\}) = a$).

($\Leftarrow$) inversement, si E est muni d'une loi interne $\vee$ associative, commutative et idempotente, la relation binaire suivante (notée $\succeq$)

$$a \succeq b \iff a \vee b = a \tag{1.1}$$

est une relation d'ordre.

On peut alors écrire $a \vee b = a \vee a \vee b = a \vee b \vee b$, puisque $\vee$ est idempotente, c.-à-d. $a \vee b \succeq a$ et $a \vee b \succeq b$ selon l'ordre défini en (1.1). Pour cet ordre, $a \vee b$ est donc un majorant de l'ensemble $\{a, b\}$. De plus, pour tout majorant c de $\{a, b\}$ on a

$$\{c \succeq a \text{ et } c \succeq b\} \iff c = c \vee a = c \vee b = c \vee a \vee b \iff c \succeq a \vee b.$$

Tout majorant de $\{a, b\}$ est donc plus grand que $a \vee b$, ou encore, le couple $\{a, b\}$ admet $a \vee b$ comme plus petit majorant. Enfin, puisque $\vee$ est associative, tout sous-ensemble fini $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $(E, \preceq)$ admet $\bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha$ comme plus petit majorant. L'ensemble E est donc un sup-demi-treillis pour l'ordre défini en (1.1).

$\square$

Remarque 1.10 (Principe de dualité) L'inverse d'une relation d'ordre $\preceq$ est une relation d'ordre notée $\preceq^*$. Par conséquent, si $(E, \preceq)$ est un sup-demi-treillis, $(E, \preceq^*)$ est un inf-demi-treillis, et *vice versa*. En conséquence, une relation impliquant $\preceq$, $Sup()$ et $Inf()$ reste vraie en remplaçant $\preceq$ par $\preceq^*$ et en permutant $Sup()$ et $Inf()$. C'est ce que l'on appelle le *principe de dualité*. $\diamond$

Définition 1.11 (Treillis) *Un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ ayant à la fois une structure de sup-demi-treillis et d'inf-demi-treillis (pour l'ordre $\preceq$) est appelé treillis.*

Le théorème suivant fournit une caractérisation de ces structures ordonnées.

Théorème 1.12. *Un ensemble E peut être muni d'une structure de treillis si, et seulement si, il peut être doté de deux lois de composition internes, notées $\vee$ et $\wedge$, telles que* *(i) les lois $\vee$ et $\wedge$ sont associatives et commutatives*

(ii) $\forall a, b \in E,\ a \vee (a \wedge b) = a = a \wedge (a \vee b)$ (loi d'absorption).

Preuve : le lecteur trouvera cette preuve dans [Birkhoff, 1940]. □

Exemple 1.13

- Soit $E = \{a, b, c\}$. $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$ a une structure de treillis si l'on considère l'ensemble vide comme plus petit sous-ensemble de E. Le diagramme de Hasse de ce treillis est donné sur la figure 1.2.

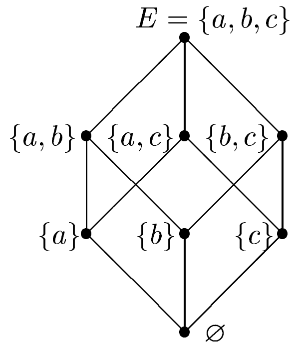


Figure 1.2 : Diagramme de Hasse du treillis $(\mathcal{P}(E), \cup, \cap)$ avec $E = \{a, b, c\}$

- $(\mathbb{N}^*, \preceq_{div})$, où l'ordre sur $\mathbb{N}^*$ est défini par

$$a \preceq_{div} b \iff a \text{ divise } b, \tag{1.2}$$

  est un treillis. Les lois de treillis de $(\mathbb{N}^*, \preceq_{div})$ sont $a \vee b = \mathrm{ppcm}(a, b)$ et $a \wedge b = \mathrm{pgcd}(a, b)$. On représente sur la figure 1.3 l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ordonné par $\preceq_{div}$. L'ensemble $(E, \preceq_{div}) \subset \mathbb{N}$ est un inf-demi-treillis.

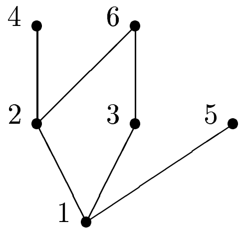


Figure 1.3 : Diagramme de Hasse du demi-treillis $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \preceq_{div})$

◇

Définition 1.14 (Demi-treillis complet et Treillis complet) *Un sup-demi-treillis (resp. inf-demi-treillis) E est dit sup-complet (resp. inf-complet) si tout sous-ensemble (fini ou infini) de E admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant) dans E. Un treillis est dit complet s'il est à la fois inf-complet et sup-complet.*

Remarque 1.15 Pour un sup-demi-treillis (sup-)complet noté $(E, \vee)$, la borne sup de tout sous-ensemble de E est définie, y compris pour E. Un sup-demi-treillis complet E a donc nécessairement un plus grand élément noté $\pi_E = \bigvee_{x \in E} x$. Pour la même raison, un inf-demi-treillis complet $(E, \wedge)$ a toujours un plus petit élément noté $0_E = \bigwedge_{x \in E} x$. En outre, un demi-treillis fini est complet (sup ou inf-complet) et un treillis fini est complet. $\diamond$

Exemple 1.16

- En ajoutant l'élément $+\infty$ à $\mathbb{Z}$, l'ensemble $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \leq)$ est totalement ordonné sup-complet.
- En revanche, $(\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné qui n'est ni sup-complet ni inf-complet. Par exemple, le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{Q} | x \leq \sqrt{2}\}$ de $\mathbb{Q}$ n'a pas de plus petit majorant dans $\mathbb{Q}$.

$\diamond$

Théorème 1.17. *Un sup-demi treillis complet E est un treillis complet si, et seulement si, il a un plus petit élément 0_E.*

Preuve :

($\Rightarrow$) si E est un treillis complet alors il admet un plus petit élément 0_E (cf. remarque 1.15).

($\Leftarrow$) supposons que E est un sup-demi-treillis sup-complet et possède un plus petit élément 0_E. Soit $X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sous-ensemble non vide de E, et $M = \{m_\beta\}_{\beta \in B}$ l'ensemble des minorants de X. L'ensemble M est non vide puisque $0_E \in M$. Posons $m = \bigvee_{\beta \in B} m_\beta$; l'élément m est défini dans E puisque E est sup-complet.

Par définition de l'ensemble M,

$$\forall x_\alpha \in X, \forall m_\beta \in M, \ \ m_\beta \preceq x_\alpha,$$

ou encore,

$$\forall x_\alpha \in X, \ \ m = \bigvee_{\beta \in B} m_\beta \preceq x_\alpha.$$

Donc m est minorant de X, et par conséquent, le plus grand des minorants de X. Tout sous-ensemble non vide de E admettant un plus grand minorant, E est un inf-demi-treillis complet et donc également un treillis complet.

$\square$

Remarque 1.18 En raison du principe de dualité énoncé dans la remarque 1.10, on peut énoncer le dual du théorème précédent : un inf-demi-treillis complet est un treillis complet si, et seulement si, il a un plus grand élément π_E. $\diamond$

Définition 1.19 (Treillis distributif) *Un treillis $(E, \vee, \wedge)$ est dit distributif si les lois $\vee$ et $\wedge$ distribuent l'une par rapport à l'autre, c'est-à-dire si*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \tag{1.3}$$
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \tag{1.4}$$

Définition 1.20 (Sous-Demi-Treillis, Sous-Treillis) *Soit $(E, \vee, \wedge)$ un treillis. F est dit sous-$\vee$-demi-treillis de $(E, \vee)$ si $F \subset E$ et si F est fermé pour la loi $\vee$. De même, F est dit sous-treillis de E si $F \subset E$ et si F est fermé pour les lois $\vee$ et $\wedge$.*

Remarque 1.21 Un sous-ensemble F d'un treillis $(E, \preceq)$ peut être un treillis (pour la restriction de l'ordre $\preceq$ à F) sans que les lois du treillis $(F, \preceq)$ soient celles du treillis $(E, \preceq)$, c'est-à-dire, sans que F soit un sous-treillis de E. Supposons $(F, \cup, \cap)$ et $(E, \vee, \wedge)$ des treillis tels que $F \subset E$ et tels que l'ordre de F est la restriction de l'ordre de E à F, c'est-à-dire

$$\forall x, y \in F \subset E,\ x \preceq y \iff y = y \vee x \iff y = y \cup x.$$

Les inégalités suivantes sont alors vérifiées

$$\forall x, y \in F,\quad x \cap y \preceq x \wedge y \preceq x \vee y \preceq x \cup y.$$

Pour illustrer ceci, on donne le diagramme de Hasse d'un treillis fini $(E, \preceq)$ contenant 6 éléments (fig. 1.4). Les éléments a et b sont incomparables suivant l'ordre $\preceq$ mais possèdent $a \vee b$ comme borne sup et $a \wedge b$ comme borne inf (dans E). L'ensemble E possède un élément minimum 0_E (avec $a \wedge b \succ 0_E$) et un élément maximum π_E (avec $\pi_E \succ a \vee b$).

Si l'on considère le sous-ensemble F de E égal à $F = E \setminus \{a \vee b, a \wedge b\}$ ($\setminus$ correspond à la soustraction ensembliste), alors, l'ensemble F possède encore une structure de treillis (il faut considérer les arcs en pointillés). Il faut néanmoins remarquer que ni $a \vee b$, ni $a \wedge b$ ne sont définis dans F. Par contre, l'ensemble $\{a, b\} \subset F$ admet l'élément 0_E comme seul minorant et l'élément π_E comme seul majorant (dans F). L'ensemble F a donc encore une structure de treillis, pour la restriction de l'ordre de E à F, mais n'est pas un sous-treillis de E car n'est pas fermé pour $\vee$ et $\wedge$. $\diamond$

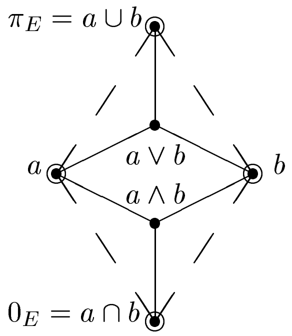


Figure 1.4 : F: $\circ$ et E: $\bullet$ avec $F = E \setminus \{a \vee b, a \wedge b\}$

1.2 Théorie de la résiduation

La théorie de la résiduation concerne le problème général de résolution d'inéquations de type

$$f(x) \preceq b \tag{1.5}$$
$$f(x) \succeq b \tag{1.6}$$

définies sur des ensembles ordonnés. Cette théorie permet d'établir l'existence de solutions extrémales (plus grande ou plus petite que toute autre solution) pour ces inéquations. Ceci donne une alternative à l'inversion d'applications lorsqu'une application n'est, par exemple, ni injective ni surjective.

On rappelle dans la partie 1.2.1 des résultats classiques de cette théorie. Les résultats liés aux restrictions d'applications résiduables sont ensuite présentés dans la partie 1.2.2. Nous dédions la partie 1.2.3 aux rappels des liens entre fermetures et applications résiduables. Des travaux récents sur l'approche géométrique des systèmes à événements discrets [Cohen et al., 1996] montrent que certaines fermetures, définies modulo une application résiduable, ont une signification particulière. Nous rappelons quelques points de cette approche en 1.2.4. Enfin, les résultats spécifiques aux applications définies sur des treillis sont présentés dans la partie 1.2.5.

Nous renvoyons le lecteur à [Blyth and Janowitz, 1972] pour une présentation approfondie de la théorie de la résiduation. Le lecteur trouvera également dans [Baccelli et al., 1992, chap. 4], [Gaubert, 1992, chap. 0], [Menguy, 1997, chap. 1] et [Cohen, 1998] des rappels détaillés sur cette théorie. La référence [Cohen, 1998] propose en outre un survol des domaines d'application de la théorie de la résiduation dans le cadre des systèmes (max,+) linéaires.

1.2.1 Applications Isotones, Applications Résiduables

La théorie de la résiduation concerne uniquement les applications non décroissantes (ou isotones) définies sur des ensembles ordonnés.

Définition 1.22 (Applications Isotones) *Une application $f : (E, \preceq_E) \to (F, \preceq_F)$ définie sur des ensembles ordonnés est dite isotone si*

$$x \preceq_E y \Rightarrow f(x) \preceq_F f(y).$$

Exemple 1.23 (Isotonie des lois de treillis) Soit $(E, \vee, \wedge)$ un treillis dont l'ordre est noté $\preceq$. La loi $\vee$ vérifie

$$\begin{aligned} a \preceq b \iff b = a \vee b \quad &\Rightarrow \quad x \vee b = x \vee a \vee x \vee b \\ &\Rightarrow \quad x \vee a \preceq x \vee b \end{aligned}$$

et il en est de même pour la loi $\wedge$. Les lois de treillis sont donc isotones pour l'ordre du treillis c'est-à-dire

$$a \preceq b \Rightarrow \begin{cases} x \vee a & \preceq & x \vee b \\ x \wedge a & \preceq & x \wedge b \end{cases}. \qquad \diamond$$

Remarque 1.24 (Treillis non distributif) Si un treillis n'est pas distributif, les égalités (1.3) et (1.4) ne sont pas vérifiées. En revanche, en raison de l'isotonie des lois $\vee$ et $\wedge$,

$$\begin{cases} b \wedge c \preceq b \\ b \wedge c \preceq c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vee (b \wedge c) \preceq a \vee b \\ a \vee (b \wedge c) \preceq a \vee c \end{cases} \Rightarrow a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

En appliquant le principe de dualité on obtient donc

$$a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c) \text{ et } a \wedge (b \vee c) \succeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \tag{1.7}$$

$\diamond$

Remarque 1.25 (Composition d'applications isotones) On devra avoir à l'esprit que l'isotonie est une propriété conservée par composition d'applications. $\diamond$

Définition 1.26 (Applications Résiduables) *Une application $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$ isotone est dite résiduable, si l'équation $f(x) \preceq b$ admet une plus grande solution dans E pour tout $b \in F$ et dualement résiduable, si l'équation $f(x) \succeq b$ admet une plus petite solution dans E pour tout $b \in F$.*

Le théorème suivant fournit une caractérisation de ces applications.

Théorème 1.27. *Soit $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$ une application isotone. Sont équivalents*

(i) f est résiduable.

(ii) il existe une application isotone $h : F \to E$ telle que $f \circ h \preceq \mathsf{Id}_F$ et $h \circ f \succeq \mathsf{Id}_E$.

De même, sont équivalents

(i') f est dualement résiduable.

(ii') il existe une application isotone $h' : F \to E$ telle que $f \circ h' \succeq \mathsf{Id}_F$ et $h' \circ f \preceq \mathsf{Id}_E$.

Preuve : on donne uniquement la preuve de l'équivalence $(i) \iff (ii)$, la preuve de $(i') \iff (ii')$ s'établissant de manière identique.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Posons $h(y) = Sup\{x|f(x) \preceq y\}$. Puisque f est résiduable, h est définie pour tout $y \in F$. Par définition de h, et car f est isotone, clairement on a $f(h(y)) \preceq y$ c'est-à-dire $f \circ h \preceq \mathsf{Id}_F$. Soit $y' \preceq y$, alors

$$f \circ h(y') \preceq y' \preceq y \Rightarrow h(y') \in \{x|f(x) \preceq y\},$$

en d'autres termes, $h(y')$ est solution de $f(x) \preceq y$ ce qui implique

$$h(y') \preceq Sup\{x|f(x) \preceq y\} = h(y).$$

En résumé,

$$y' \preceq y \Rightarrow h(y') \preceq h(y) \text{ (c.-à-d. } h \text{ est isotone).}$$

Pour finir, $h \circ f(x) = Sup\{x'|f(x') \preceq f(x)\}$. Puisque $x \in \{x'|f(x') \preceq f(x)\}$, on a $Sup\{x'|f(x') \preceq f(x)\} \succeq x$ qui conduit à $h \circ f \succeq \mathsf{Id}_E$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Si h vérifie (ii), $f \circ h(b) \preceq b$ pour tout $b \in F$, $h(b)$ est donc toujours solution de $f(x) \preceq b$. De plus, pour toute solution $y \in E$ vérifiant $f(y) \preceq b$, on a $h(f(y)) \preceq h(b)$ puisque h est isotone, et $y \preceq h \circ f(y)$ en raison de (ii), c'est-à-dire, $y \preceq h \circ f(y) \preceq h(b)$.

Toute solution y de $f(x) \preceq b$, et ce pour tout $b \in F$, est plus petite que $h(b)$.

L'élément $h(b)$ est donc la plus grande solution de (1.5) pour tout b, ou encore f est résiduable.

□

Remarque 1.28 (Unicité de h et h') Lorsque f est résiduable, l'application h vérifiant (ii) est unique. En effet, supposons qu'il existe une autre application g vérifiant (ii). On vérifie alors

$$h = \mathsf{Id}_E \circ h \preceq (g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) \preceq g \circ \mathsf{Id}_F = g,$$

$$g = \mathsf{Id}_E \circ g \preceq (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) \preceq h \circ \mathsf{Id}_F = h,$$

$$\Rightarrow h = g.$$

Pour les mêmes raisons, l'application h' vérifiant (i') et (ii') est unique. ◇

Notation 1.29 (Application Résiduée, Application Résiduée Duale) *Puisque h est unique, on notera $f^\sharp = h$ cette unique application, $f^\sharp$ sera dite application résiduée de f. De même, lorsque f est dualement résiduable, h' est unique et sera notée $f^\flat$. L'application $f^\flat$ sera dite application résiduée duale de f. Nous noterons par la suite $Res^\sharp(E,F)$ l'ensemble des applications résiduables de E dans F et $Res^\flat(E,F)$ l'ensemble des applications dualement résiduables de E dans F.*

Avant de poursuivre, nous fournissons quelques exemples pour lesquels la résiduabilité est facile à vérifier.

Exemple 1.30 (Partie entière) L'injection canonique $I : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ est résiduable et dualement résiduable. Habituellement, on utilise les notations suivantes $I^\sharp(x) = \lfloor x \rfloor$ et $I^\flat(x) = \lceil x \rceil$. ◇

Exemple 1.31 Considérons l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre $\preceq_{div}$ défini par la relation (1.2) dans l'exemple 1.13. Considérons l'application f d'un sous-ensemble $A \subset \mathbb{N}^*$ dans un sous-ensemble $B \subset \mathbb{N}^*$ avec $f(A) \subseteq B$:

$$\begin{array}{rccc} f: & (A, \preceq_{div}) & \to & (B, \preceq_{div}) \\ & x & \mapsto & 2 \times x \end{array}$$

Le problème de résiduation concerne ici la résolution de l'équation suivante pour tout $b \in B$

$$f(x) = 2 \times x \preceq_{div} b.$$

On va choisir des sous-ensembles finis A et B pour lesquels on pourra vérifier l'optimalité ou non des solutions de (1.5) pour tout b. On prendra dans tous les cas le même domaine de définition $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

On vérifie tout d'abord que dans tous les cas suivants f est isotone (pour l'ordre $\preceq_{div}$) et $f(A) \subseteq B$.

1- Si $B = \{2,3,4,5,6,8,10,12\}$, $f(x) \preceq_{div} b$ n'admet aucune solution pour $b \in \{3,5\}$

$\Rightarrow f$ n'est pas résiduable.

2- Si $B = \{2,4,6,8,10,12\}$,

$\Rightarrow f$ est résiduable (et inversible) (ici $B = \mathsf{Im} f$).

3- Si $B = \{2,4,6,8,10,12,14\}$, l'inéquation $f(x) \preceq_{div} 14$ admet $x = 1$ comme plus grande solution dans A (au sens de $\preceq_{div}$). Notons que cette plus grande solution ne vérifie pas l'égalité. Dans tous les autres cas ($b \in B$ et $b \neq 14$), l'équation $f(x) = b$ admet une solution unique.

$\Rightarrow f$ est résiduable (mais non inversible).

◇

Le théorème suivant fournit des résultats classiques de la théorie de la résiduation auxquels on fera fréquemment référence par la suite.

Théorème 1.32. *Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications résiduables et $h : H \to I$ une application dualement résiduable.*

$$f^\sharp \text{ est dualement résiduable et } (f^\sharp)^\flat = f \tag{1.8}$$
$$h^\flat \text{ est résiduable et } (h^\flat)^\sharp = h \tag{1.9}$$
$$f = f \circ f^\sharp \circ f \text{ et } f^\sharp = f^\sharp \circ f \circ f^\sharp \tag{1.10}$$
$$g \circ f \text{ est résiduable et } (g \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp \tag{1.11}$$
$$f \text{ est injective } \iff f^\sharp \circ f = \mathsf{Id}_E \iff f^\sharp \text{ est surjective} \tag{1.12}$$
$$f \text{ est surjective } \iff f \circ f^\sharp = \mathsf{Id}_F \iff f^\sharp \text{ est injective} \tag{1.13}$$

Preuve :

(1.8) D'après le théorème 1.27, si $f \in Res^\sharp(E,F)$, alors $f^\sharp \circ f \succeq \mathsf{Id}_E$ et $f \circ f^\sharp \preceq \mathsf{Id}_F$. Donc $f^\sharp$ vérifie également (ii') du théorème 1.27, $f^\sharp$ est donc dualement résiduable et f est sa résiduée duale.

(1.9) Preuve similaire.

(1.10) $f \in Res^\sharp(E,F) \Rightarrow f \circ f^\sharp \preceq \mathsf{Id}_F$ (th. 1.27). Puique f est isotone, $f \circ f^\sharp \circ f \preceq \mathsf{Id}_F \circ f = f$. Inversement, $f^\sharp \circ f \succeq \mathsf{Id}_E$, donc par isotonie de f, $f \circ f^\sharp \circ f \succeq f \circ \mathsf{Id}_E = f$. La démonstration de l'égalité $f^\sharp = f^\sharp \circ f \circ f^\sharp$ est similaire.

(1.11) Puisque g et f sont isotones (car résiduables), $g \circ f$ et $f^\sharp \circ g^\sharp$ sont également isotones (cf. remarque 1.25). De plus, puisque $f \in Res^\sharp(E,F)$ et $g \in Res^\sharp(F,G)$, alors d'après le théorème 1.27, d'une part $g \circ (f \circ f^\sharp) \circ g^\sharp \preceq g \circ \mathsf{Id}_F \circ g^\sharp = g \circ g^\sharp \preceq \mathsf{Id}_G$, et d'autre part, $f^\sharp \circ (g^\sharp \circ g) \circ f \succeq f^\sharp \circ \mathsf{Id}_F \circ f = f^\sharp \circ f \succeq \mathsf{Id}_E$. Puisque l'application h vérifiant $g \circ f \circ h \preceq \mathsf{Id}_G$ et $h \circ g \circ f \succeq \mathsf{Id}_E$ est unique (remarque 1.28), alors $g \circ f \in Res^\sharp(E,G)$ et $(g \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp$.

(1.12) ($f^\sharp \circ f = \mathsf{Id}_E \Rightarrow f^\sharp$ est surjective) $\forall x \in E, f^\sharp \circ f(x) = x$ implique $E = \mathsf{Im} f^\sharp$, c.-à-d. $f^\sharp$ est surjective.

($f^\sharp \circ f = \mathsf{Id}_E \Leftarrow f^\sharp$ est surjective) Inversement, si $f^\sharp$ est surjective, pour tout $y \in E$, il existe $x \in F$ tel que $f^\sharp(x) = y$ donc $f^\sharp \circ f(y) = f^\sharp \circ f \circ f^\sharp(x) = f^\sharp(x) = y$ (application de (1.10)).

($f^\sharp \circ f = \mathsf{Id}_E \Rightarrow f$ est injective) $f(x) = f(y) \Rightarrow x = f^\sharp \circ f(x) = f^\sharp \circ f(y) = y$ donc f est injective.

($f^\sharp \circ f = \mathsf{Id}_E \Leftarrow f$ est injective) Si f est injective, pour tout x l'égalité suivante $f \circ (f^\sharp \circ f(x)) = f(x)$ implique $f^\sharp \circ f(x) = x$.

(1.13) Preuve semblable à (1.12).

□

1.2.2 Restrictions d'applications

On entend par *restriction d'une application* la restriction de son domaine et/ou de son codomaine de définition. On cherche à déterminer ici des cas où la propriété de résiduabilité est conservée après restriction, ou à l'inverse, des cas où la restriction d'une application non résiduable devient résiduable.

Plus précisément, les problèmes étudiés ici sont les suivants. Soit $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$ une application définie sur des ensembles ordonnés. On s'intéresse d'une part à la restriction de f à un domaine $A \subset E$ et d'autre part à la restriction de f à un codomaine B tel que $\mathsf{Im} f \subseteq B \subset F$. Les questions traitées ici sont :

a- Si f est résiduable, la restriction de f au domaine A l'est-elle également ?

b- Si f n'est pas résiduable, existe-t-il une restriction de f à un codomaine B (tel que $\mathsf{Im} f \subseteq B \subset F$) qui soit résiduable ?

- La première question est liée à un problème de contrainte sur les solutions de l'équation $f(x) \preceq b$. Si f est résiduable, l'équation précédente admet toujours $f^\sharp(b)$ comme plus grande solution. Cependant, si l'on contraint x à appartenir à un sous-ensemble "admissible" de solutions A, le problème a-t-il toujours une solution optimale dans A?

- Le second problème est un peu différent. Sachant que f n'est pas résiduable, s'intéresser à une restriction de f à un codomaine B qui le soit revient à chercher si $f(x) \preceq b$ admet des solutions dont l'optimalité est garantie seulement pour certains éléments $b \in B$ (et non pour tout $b \in F$). Ce problème n'a naturellement de sens que si $\mathsf{Im} f \subseteq B$.

Les notations introduites ici s'inspirent de celles utilisées par Wonham dans [Wonham, 1979].

Définition 1.33 (Restriction d'une application à un domaine A) *Soit $f : E \to F$ et $A \subseteq E$. Nous noterons $f_{|A}$ l'application définie de A dans F, vérifiant*

$$f_{|A} = f \circ \mathsf{Id}_{|A}$$

où $\mathsf{Id}_{|A}$ représente l'injection canonique de A dans E. L'application $f_{|A}$ sera appelée restriction de f au domaine A. Le diagramme suivant commute[1]

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \\
A \arrow[u, "\mathsf{Id}_{|A}"] \arrow[ur, "f_{|A}"'] &
\end{tikzcd}$$

Remarque 1.34 On pourra remarquer qu'une injection canonique sera dorénavant notée comme la restriction d'une application identique. Notamment, l'injection canonique de A dans E est aussi la restriction de l'application identique sur E (Id_E) au domaine A, notée $\mathsf{Id}_{E|A}$ ou plus simplement $\mathsf{Id}_{|A}$ puisqu'il n'y pas d'ambiguité. $\diamond$

Définition 1.35 (Restriction d'une application à un codomaine B) *Soit $f : E \to F$ et $\mathsf{Im} f \subseteq B \subseteq F$. Nous noterons ${}_{B|}f$ l'application définie de E dans B par l'égalité*

$$f = \mathsf{Id}_{|B} \circ {}_{B|}f$$

où $\mathsf{Id}_{|B}$ représente l'injection canonique de B dans F. L'application ${}_{B|}f$ sera dite restriction de f au codomaine B. Le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "{}_{B|}f"'] & F \\
& B \arrow[u, "\mathsf{Id}_{|B}"']
\end{tikzcd}$$

On représente *via* ${}_{B|}f$ l'action de f non plus par rapport à F tout entier, mais seulement par rapport à un sous-ensemble B incluant l'image de f.

Définition 1.36 (Restriction double) *Soit $f : E \to F$, $A \subseteq E$ et $f(A) \subseteq B \subseteq F$. Nous noterons ${}_{B|}f_{|A}$ l'application définie de A dans B par l'égalité*

$$f_{|A} = \mathsf{Id}_{|B} \circ {}_{B|}f_{|A}.$$

Le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \\
A \arrow[u, "\mathsf{Id}_{|A}"] \arrow[r, "{}_{B|}f_{|A}"] & B \arrow[u, "\mathsf{Id}_{|B}"']
\end{tikzcd}$$

[1] un tel diagramme est dit commutatif lorsque les différentes applications permettant d'aller d'un point du diagramme à un autre sont égales

Remarque 1.37 Puisque tous les diagrammes précédents commutent, l'égalité suivante est également vérifiée

$$_{B|}f_{|A} = {}_{B|}f \circ \mathsf{Id}_{|A}.$$

D'autre part, pour $\mathsf{Im}f \subset B \subseteq F$, on peut remarquer qu'il est toujours possible d'établir la décomposition suivante

$$_{B|}f = {}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f} \circ {}_{\mathsf{Im}f|}f.$$

Le diagramme suivant montre donc plusieurs décompositions d'une application, ce qui nous permet également de nous familiariser avec les notations d'applications restreintes.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "{}_{B|}f"] \arrow[ddr, "{}_{\mathsf{Im}f|}f"'] & F \\
 & B \arrow[u, "\mathsf{Id}_{|B}"'] \\
 & \mathsf{Im}f \arrow[u, "{}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f}"']
\end{tikzcd}$$

◇

Remarque 1.38 (Isotonie des applications restreintes) Soit une application $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$. Quels que soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$, les sous-ensembles $(A, \preceq)$ et $(B, \preceq)$ sont ordonnés pour l'ordre $\preceq$ restreint à A et B respectivement. Lorsque f est isotone, on vérifie facilement que les restrictions $f_{|A}$, $_{B|}f$ et $_{B|}f_{|A}$ le sont également. Autrement dit, la propriété d'isotonie est conservée par restriction. ◇

L'introduction de ces restrictions d'application conduit directement aux résultats de la proposition suivante.

Proposition 1.39. *Soit $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

(i) si f est résiduable alors, pour tout sous-ensemble B de F tel que $\mathsf{Im}f \subseteq B \subseteq F$, l'application $_{B|}f$ est résiduable et

$$({}_{B|}f)^\sharp = f^\sharp \circ \mathsf{Id}_{|B} = (f^\sharp)_{|B}.$$

(i') si f est dualement résiduable alors, pour tout sous-ensemble B de F tel que $\mathsf{Im}f \subseteq B \subseteq F$, l'application $_{B|}f$ est dualement résiduable et

$$({}_{B|}f)^\flat = f^\flat \circ \mathsf{Id}_{|B} = (f^\flat)_{|B}.$$

(ii) si f est résiduable alors, pour tout sous-ensemble A de E tel que $\mathsf{Im}f^\sharp \subseteq A \subseteq E$, l'application $f_{|A}$ est résiduable et

$$(f_{|A})^\sharp = {}_{A|}f^\sharp.$$

(ii') si f est dualement résiduable alors, pour tout sous-ensemble A de E tel que $\mathsf{Im}f^\sharp \subseteq A \subseteq E$, l'application $f_{|A}$ est dualement résiduable et

$$(f_{|A})^\flat = {}_{A|}f^\flat.$$

Preuve :

(i) si f est résiduable alors ${}_{B|}f$ est isotone (cf. remarque 1.38). De plus si $f \in Res^\sharp(E, F)$, $\forall b \in F, f^\sharp(b)$ est la plus grande solution de $f(x) \preceq b$. En particulier, pour tout $b \in B \subseteq F$, il existe une plus grande solution à $f(x) \preceq b$. L'application ${}_{B|}f$ est donc, par définition, résiduable. Sa résiduée $({}_{B|}f)^\sharp$ est simplement la restriction de $f^\sharp$ au domaine B notée $(f^\sharp)_{|B}$.

(i') preuve similaire.

(ii) si $f \in Res^\sharp(E, F)$ alors $f^\sharp \in Res^\flat(F, E)$ (d'après (1.8)). En conséquence, d'après (i'), si A est tel que $\mathsf{Im} f^\sharp \subseteq A \subset E$, alors ${}_{A|}f^\sharp \in Res^\flat(F, A)$ et $({}_{A|}f^\sharp)^\flat = ((f^\sharp)^\flat)_{|A} = f_{|A}$ (d'après (1.8)). Autrement dit (d'après (1.9)), $f_{|A}$ est résiduable et $(f_{|A})^\sharp = {}_{A|}f^\sharp$.

(ii') preuve similaire.

□

Proposition 1.40. *Soit $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$.*

(i) soit $A \subseteq E$. Si f est résiduable et si l'injection canonique $\mathsf{Id}_{|A}$ est résiduable alors $f_{|A}$ est résiduable et

$$(f_{|A})^\sharp = (\mathsf{Id}_{|A})^\sharp \circ f^\sharp.$$

(i') soit $A \subseteq E$. Si f est dualement résiduable et si l'injection canonique $\mathsf{Id}_{|A}$ est dualement résiduable alors $f_{|A}$ est dualement résiduable et

$$(f_{|A})^\flat = (\mathsf{Id}_{|A})^\flat \circ f^\flat.$$

Preuve :

(i) si f et $\mathsf{Id}_{|A}$ sont résiduables, d'après (1.11), leur composition est également résiduable et

$$(f_{|A})^\sharp = (f \circ \mathsf{Id}_{|A})^\sharp = (\mathsf{Id}_{|A})^\sharp \circ f^\sharp.$$

(ii) preuve analogue.

□

Remarque 1.41 (Résiduation Contrainte) Les résultats des propositions 1.39 et 1.40 donnent un élément de réponse au problème de *résiduation contrainte*[2] que l'on reformule de la manière suivante: si f est résiduable et $\mathsf{Im} f^\sharp \subseteq A$, alors le problème contraint (1.14)

$$\begin{cases} f(x) \preceq b, \ b \in F \\ x \in A \ \ \text{(domaine admissible)} \end{cases} \tag{1.14}$$

admet une solution optimale (admissible) donnée par application directe du point (ii) de la proposition 1.39.

D'autre part, pour un sous-ensemble quelconque $A \subset E$ (n'incluant pas nécessairement $\mathsf{Im} f^\sharp$) si $\mathsf{Id}_{|A}$ est résiduable, par application de la proposition 1.40, on a $(f_{|A})^\sharp = (\mathsf{Id}_{|A})^\sharp \circ f^\sharp$. Le problème contraint (1.14) admet alors également une solution optimale. ◇

[2]cette dénomination provient de [Cohen, 1998, §1.3]

Proposition 1.42 (Décomposition en applications résiduables) *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications isotones telles que $g \circ f$ est résiduable, alors $g_{|\mathsf{Im} f}$ est résiduable.*

De plus, si f est résiduable, il est possible de factoriser $g \circ f$ en applications résiduables : $g_{|\mathsf{Im} f} \in Res^\sharp(\mathsf{Im} f, G)$ et ${}_{\mathsf{Im} f|}f \in Res^\sharp(E, \mathsf{Im} f)$

$$(g \circ f)^\sharp = (g_{|\mathsf{Im} f} \circ {}_{\mathsf{Im} f|}f)^\sharp = ({}_{\mathsf{Im} f|}f)^\sharp \circ (g_{|\mathsf{Im} f})^\sharp.$$

Preuve : Si $g \circ f$ est résiduable, d'après le théorème 1.27 on peut écrire

$$g_{|\mathsf{Im} f} \circ ({}_{\mathsf{Im} f|}f \circ (g \circ f)^\sharp) = g \circ f \circ (g \circ f)^\sharp \preceq \mathsf{Id}_G.$$

De même, toujours en accord avec le théorème 1.27, on a

$$(g \circ f)^\sharp \circ g \circ f \succeq \mathsf{Id}_E,$$

et puisque f est isotone (par hypothèse), $f \circ (g \circ f)^\sharp \circ g \circ f \succeq f$, ce qui est équivalent à

$$\forall a \in E,\ f \circ (g \circ f)^\sharp \circ g \circ f(a) \succeq f(a).$$

La dernière relation peut se lire également

$$\forall \alpha \in \mathsf{Im} f,\ f \circ (g \circ f)^\sharp \circ g(\alpha) \succeq \alpha,$$

ou différemment,

$${}_{\mathsf{Im} f|}f \circ (g \circ f)^\sharp \circ g_{|\mathsf{Im} f} \succeq {}_{\mathsf{Im} f|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im} f} = \mathsf{Id}_{\mathsf{Im} f} \text{ (application identique sur } \mathsf{Im} f).$$

Il existe donc une application isotone telle que $g_{|\mathsf{Im} f}$ vérifie le point (ii) du théorème 1.27. L'application $g_{|\mathsf{Im} f}$ est donc résiduable et sa résiduée est $(g_{|\mathsf{Im} f})^\sharp = {}_{\mathsf{Im} f|}f \circ (g \circ f)^\sharp$.

Si de plus f est résiduable, d'après la proposition 1.39, ${}_{\mathsf{Im} f|}f$ est résiduable et la décomposition est alors une application de (1.11). □

Le diagramme commutatif correspondant à cette décomposition est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "{}_{\mathsf{Im} f|}f"'] & F \arrow[r, "g"] & G \\
 & \mathsf{Im} f \arrow[u, "\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im} f}"'] \arrow[ur, "g_{|\mathsf{Im} f}"'] &
\end{tikzcd}$$

$$g \circ f \in Res^\sharp(E, G) \quad \Rightarrow \quad g_{|\mathsf{Im} f} \in Res^\sharp(\mathsf{Im} f, G)$$
$$g \circ f \in Res^\sharp(E, G) \text{ et } f \in Res^\sharp(E, F) \quad \Rightarrow \quad {}_{\mathsf{Im} f|}f \in Res^\sharp(E, \mathsf{Im} f) \text{ et } g_{|\mathsf{Im} f} \in Res^\sharp(\mathsf{Im} f, G)$$

Corollaire 1.43. *Si $f : E \to F$ est résiduable, alors il est possible de factoriser f en applications résiduables $\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im} f} \in Res^\sharp(\mathsf{Im} f, F)$ et ${}_{\mathsf{Im} f|}f \in Res^\sharp(E, \mathsf{Im} f)$. On a donc*

$$f = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im} f} \circ {}_{\mathsf{Im} f|}f \quad \text{et} \quad f^\sharp = ({}_{\mathsf{Im} f|}f)^\sharp \circ (\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im} f})^\sharp$$

Preuve : Il suffit de poser $g = \mathsf{Id}_F$ dans la proposition 1.42. $\square$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "{}_{\mathsf{Im}f|}f"'] & F \\ & \mathsf{Im}f \arrow[u, "\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f}"'] \end{tikzcd}$$

$$f \in Res^\sharp(E, F) \Rightarrow {}_{\mathsf{Im}f|}f \in Res^\sharp(E, \mathsf{Im}f) \text{ et } \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f} \in Res^\sharp(\mathsf{Im}f, F)$$

Remarque 1.44 En général, la résiduabilité de l'application $g \circ f$ ne permet pas d'affirmer que g est résiduable, et ce, même si f est résiduable, c.-à-d.

$$g \circ f \in Res^\sharp(E, G) \not\Rightarrow f \in Res^\sharp(E, F) \text{ et } g \in Res^\sharp(F, G).$$

Néanmoins, la proposition 1.42 donne une restriction de g résiduable quelle que soit l'application f. $\diamond$

Remarque 1.45 Si f est résiduable, toute restriction ${}_{B|}f$ (avec $\mathsf{Im}f \subseteq B$) est résiduable (cf. proposition 1.39). Notons que f peut se factoriser en $f = \mathsf{Id}_{|B} \circ {}_{B|}f$; cependant, l'injection canonique $\mathsf{Id}_{|B}$ n'est pas nécessairement résiduable. En revanche, l'application ${}_{B|}f$ peut se factoriser en applications résiduables d'après la proposition 1.42 et le corollaire 1.43 : ${}_{B|}f = {}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f} \circ {}_{\mathsf{Im}f|}f$ avec ${}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f} \in Res^\sharp(\mathsf{Im}f, B)$ et ${}_{\mathsf{Im}f|}f \in Res^\sharp(E, \mathsf{Im}f)$. Autrement dit, pour tout B tel que $\mathsf{Im}f \subseteq B \subseteq F$, la résiduabilité de f conduit donc à la résiduabilité de l'injection canonique ${}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f}$, mais pas nécessairement à celle de $\mathsf{Id}_{|B}$. $\diamond$

Remarque 1.46 (Résiduation Partielle) Par la suite on rencontrera des applications $f : E \to F$ non résiduables pour lesquelles on peut montrer que ${}_{\mathsf{Im}f|}f$ est résiduable. Cela signifie que l'inéquation $f(x) \preceq b$ (1.5) n'admet de solution optimale que pour certains seconds membres $b \in F$, notamment lorsque $b \in \mathsf{Im}f$.

Mais, la résiduabilité de ${}_{\mathsf{Im}f|}f$ n'implique pas nécessairement qu'il s'agisse de la seule restriction résiduable de f. Compte tenu des résultats précédents (cf. corollaire 1.43), dire que f n'est pas résiduable, alors que ${}_{\mathsf{Im}f|}f$ l'est, signifie simplement que l'injection canonique $\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f} : \mathsf{Im}f \to F$ n'est pas résiduable.

D'un point de vue purement ensembliste, on peut supposer néanmoins qu'il existe des éléments $b \in F \backslash \mathsf{Im}f$ tels que (1.5) admette une solution optimale. Selon l'ordre d'inclusion, il existe alors un plus grand ensemble $B \subset F$ vérifiant $\mathsf{Im}f \subseteq B \subset F$ et tel que ${}_{B|}f$ soit résiduable : B est simplement l'ensemble des éléments b tels que $f(x) \preceq b$ admette une solution optimale.

Trouver l'ensemble B revient en quelque sorte à déterminer la "plus petite restriction" de type ${}_{B|}f$, ou encore la restriction ${}_{B|}f$ la "moins resctrictive", qui soit résiduable. L'ensemble B est alors également le plus grand sous-ensemble de F vérifiant que l'injection canonique ${}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f}$ est résiduable (cf. remarque 1.45). $\diamond$

1.2.3 Fermetures

Nous étudions ici une classe particulière d'applications isotones : les fermetures. Les résultats de la théorie de la résiduation spécifiques à cette classe d'applications sont fournis dans un premier temps (théorème 1.49). Ensuite, le théorème 1.50 montre qu'une fermeture peut toujours s'exprimer modulo une application résiduable.

Définition 1.47 (Fermeture, Fermeture Duale) *On appelle fermeture une application isotone $f : E \to E$ vérifiant $f \circ f = f \succeq \mathsf{Id}_E$ et fermeture duale une application isotone $g : E \to E$ vérifiant $g \circ g = g \preceq \mathsf{Id}_E$.*

Lemme 1.48. *Soit $f : E \to E$ une application résiduable. On vérifie alors,*

$$\begin{array}{ll} (i) & f \preceq \mathsf{Id}_E \iff f^\sharp \succeq \mathsf{Id}_E \\ (ii) & f \succeq \mathsf{Id}_E \iff f^\sharp \preceq \mathsf{Id}_E. \end{array}$$

Preuve :

(*i*) $f^\sharp$ étant isotone, $f \preceq \mathsf{Id}_E$ implique $f^\sharp \circ f \preceq f^\sharp$. De plus, puisque f est résiduable, $\mathsf{Id}_E \preceq f^\sharp \circ f$. Finalement $\mathsf{Id}_E \preceq f^\sharp \circ f \preceq f^\sharp$. Réciproquement, $\mathsf{Id}_E \preceq f^\sharp$ implique, par isotonie de f, $f \preceq f \circ f^\sharp \preceq \mathsf{Id}_E$.

(*ii*) preuve similaire.

□

Théorème 1.49. *Soit $f : E \to E$ une application résiduable. Sont équivalents*

(i) f *est une fermeture.*
(ii) $f^\sharp$ *est une fermeture duale.*
(iii) $f^\sharp = f \circ f^\sharp$.
(iv) $f = f^\sharp \circ f$.

Preuve :

(*i*) ⇒ (*ii*) $f = f \circ f$ (f est une fermeture) $\Rightarrow f^\sharp = (f \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ f^\sharp$ (d'après (1.11)). De plus, le lemme 1.48 indique $f \succeq \mathsf{Id}_E \Rightarrow f^\sharp \preceq \mathsf{Id}_E$. Si f est une fermeture, l'application $f^\sharp$ est alors une fermeture duale.

(*ii*) ⇒ (*iii*) si $f^\sharp$ est une fermeture duale, alors $f \circ f^\sharp = f \circ f^\sharp \circ f^\sharp \preceq \mathsf{Id}_E \circ f^\sharp = f^\sharp$. De même, si $f^\sharp$ est une fermeture duale alors $f^\sharp \preceq \mathsf{Id}_E$ et, d'après le lemme 1.48, $f \succeq \mathsf{Id}_E$. Donc, par isotonie de $f^\sharp$, $f \circ f^\sharp \succeq f^\sharp$, d'où l'égalité.

(*iii*) ⇒ (*iv*) $f^\sharp = f \circ f^\sharp \Rightarrow f^\sharp \circ f = f \circ f^\sharp \circ f = f$ (par application de (1.10)).

(*iv*) ⇒ (*i*) $f^\sharp \circ f \succeq \mathsf{Id}_E$, puisque f est résiduable (th. 1.27), donc (*iv*) implique $f \succeq \mathsf{Id}_E$. D'autre part, (*iv*) implique également $f \circ f = f \circ f^\sharp \circ f = f$ (cf. (1.10)), ce qui implique finalement que f est une fermeture.

□

Théorème 1.50. *Soit $f : E \to E$ une application isotone. Sont équivalents*

(*i*) *f est une fermeture*

(*ii*) *il existe un ensemble ordonné B, et une application $g : E \to B$ résiduable, telle que $f = g^\sharp \circ g$.*

Nous introduisons une définition pour montrer le théorème précédent. Elle provient de [Cohen et al., 1996] et sera réutilisée par la suite.

Définition 1.51 (Noyau de f) *Soit $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$ une application isotone. Définissons la relation d'équivalence*

$$x \overset{\ker f}{\equiv} y \iff f(x) = f(y).$$

On dira que (x, y) appartient au noyau de f, noté $\ker f$, *si $x \overset{\ker f}{\equiv} y$. L'ensemble quotient $E_{/\ker f}$ est par définition l'ensemble des classes d'équivalence modulo* $\ker f$. *Une classe de $E_{/\ker f}$ sera notée $[x]_f$.*

Lemme 1.52. *Soit $f : E \to E$ une fermeture. Alors, $\forall x \in E$, $f(x)$ est le plus grand élément de $[x]_f$.*

Preuve : Puisque f est une fermeture, $f(x) = f \circ f(x)$, c'est-à-dire, $f(x) \in [x]_f$. De plus, tout élément $y \in [f(x)]_f$ vérifie $y \preceq f(y) = f(x)$ puisque par définition $f \succeq \mathsf{Id}_E$. L'élément $f(x)$ appartient donc à la classe $[x]_f$ et en est le plus grand élément. □

Preuve (Théorème 1.50): Cette preuve s'inspire de celle trouvée dans [Blyth and Janowitz, 1972, Th. 2.7].

(*ii*) $\Rightarrow$ (*i*) $g^\sharp \circ g = g^\sharp \circ (g \circ g^\sharp \circ g)$ (cf. (1.10)) et $g^\sharp \circ g \succeq \mathsf{Id}_E$ puisque g est résiduable. L'application $f = g^\sharp \circ g$ est donc une fermeture définie sur E.

(*i*) $\Rightarrow$ (*ii*) Le lemme 1.52 indique que chaque classe de $E_{/\ker f}$ dispose d'un représentant canonique dans E qui est le plus grand élément de la classe. On peut donc définir une relation d'ordre dans $E_{/\ker f}$ à partir de l'ordre de E de la manière suivante

$$[x]_f \preceq [y]_f \iff f(x) \preceq f(y).$$

La surjection canonique

$$\mathsf{S} : \begin{array}{ccc} E & \to & E_{/\ker f} \\ x & \mapsto & [x]_f \end{array}$$

est alors isotone.

Comme cela a été dit précédemment, chaque classe $[x]_f$ de $E_{/\ker f}$ a un représentant canonique qui est $f(x)$, on peut donc définir l'injection canonique suivante de $E_{/\ker f}$ dans E

$$\mathsf{I} : \begin{array}{ccc} E_{/\ker f} & \to & E \\ [x]_f & \mapsto & f(x) \end{array}$$

On vérifie alors,

$$\begin{cases} \mathsf{I} \circ \mathsf{S}(x) = f(x) \succeq x \\ \mathsf{S} \circ \mathsf{I}([x]_f) = \mathsf{S}(f(x)) = [f(x)]_f = [x]_f \end{cases}$$

Donc

$$\mathsf{I} \circ \mathsf{S} \succeq \mathsf{Id}_E \text{ et } \mathsf{S} \circ \mathsf{I} = \mathsf{Id}_{E/\ker f}.$$

Donc S est résiduable et $(\mathsf{S})^\sharp = \mathsf{I}$. L'application f s'ecrit par conséquent $f = \mathsf{S}^\sharp \circ \mathsf{S}$.

□

On a de plus le résultat suivant qui est simplement une reformulation du lemme 1.52.

Proposition 1.53. *Soit $f : E \to E$ une fermeture. La restriction ${}_{\mathsf{Im}f|}f$ est résiduable et sa résiduée*

$$({}_{\mathsf{Im}f|}f)^\sharp = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f}$$

est l'injection canonique de $\mathsf{Im}f$ dans E.

Si f est une fermeture duale, la restriction ${}_{\mathsf{Im}f|}f$ est dualement résiduable et

$$({}_{\mathsf{Im}f|}f)^\flat = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f}.$$

Preuve : D'après le lemme 1.52, si f est une fermeture, alors chaque classe $[x]_f$ de $E_{/\ker f}$ admet $f(x)$ comme plus grand élément. Autrement dit, si f est une fermeture et si $b \in \mathsf{Im}f$ alors $f(x) \preceq b$ admet b comme plus grande solution.

De la même manière, on montre que, pour f une fermeture duale, $f(x)$ est le plus petit élément de la classe $[x]_f$ de $E_{/\ker f}$ (dual du lemme 1.52). Exprimé différemment, si f est une fermeture duale et si $b \in \mathsf{Im}f$ alors $f(x) \succeq b$ admet b comme plus petite solution. □

Remarque 1.54 D'après la proposition 1.53, en posant $g = {}_{\mathsf{Im}f|}f$, une fermeture f s'écrit également

$$f = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}f} \circ {}_{\mathsf{Im}f|}f = ({}_{\mathsf{Im}f|}f)^\sharp \circ {}_{\mathsf{Im}f|}f = g^\sharp \circ g.$$

La décomposition du théorème 1.50 n'est donc pas unique. ◇

1.2.4 Projecteurs modulo des applications résiduables

Récemment, [Cohen et al., 1996] ont montré l'importance de certaines fermetures et fermetures duales formées à partir d'applications résiduables. En effet, les applications $f \circ f^\sharp$ et $f^\sharp \circ f$ sont des projecteurs[3] particuliers dans $\mathsf{Im}f$ et $\mathsf{Im}f^\sharp$ respectivement. Nous rappelons ici quelques-uns des résultats proposés dans [Cohen et al., 1996]. Les notations utilisées ci-après sont également issues de cette référence.

Notation 1.55 (Projecteurs Π_f et Π^f) *Soit $f : E \to F$ une application résiduable. On définit Π_f et Π^f les projecteurs suivants*

$$\Pi_f = f \circ f^\sharp \quad \text{et} \quad \Pi^f = f^\sharp \circ f.$$

[3] on entend par projecteur une application Π vérifiant $\Pi = \Pi \circ \Pi$

Le théorème 1.50 montre que Π^f est une fermeture (sur E). De même, on vérifie facilement que $\Pi_f = \Pi_f \circ \Pi_f \preceq \mathsf{Id}_F$ est une fermeture duale (sur F).

Lemme 1.56. *Soit $f : E \to F$ une application résiduable. Alors*

$$\mathsf{Im}\Pi_f = \mathsf{Im}f \quad et \quad \mathsf{Im}\Pi^f = \mathsf{Im}f^\sharp \tag{1.15}$$

$$\ker \Pi^f = \ker f \quad et \quad \ker \Pi_f = \ker f^\sharp \tag{1.16}$$

Preuve :

(1.15) $\mathsf{Im}(f \circ f^\sharp) \subseteq \mathsf{Im}f \Rightarrow \mathsf{Im}\Pi_f \subseteq \mathsf{Im}f$. D'autre part (1.10) donne $f \circ f^\sharp \circ f = \Pi_f \circ f = f \Rightarrow \mathsf{Im}f = \mathsf{Im}(\Pi_f \circ f) \subseteq \mathsf{Im}\Pi_f$. L'égalité $\mathsf{Im}\Pi^f = \mathsf{Im}f^\sharp$ se montre en remarquant tout d'abord $\mathsf{Im}\Pi^f \subseteq \mathsf{Im}f^\sharp$ et, d'après (1.10), $\Pi^f \circ f^\sharp = f^\sharp \Rightarrow \mathsf{Im}f^\sharp \subseteq \mathsf{Im}\Pi^f$.

(1.16) $f(x) = f(y) \Rightarrow f^\sharp \circ f(x) = f^\sharp \circ f(y)$. Donc $\ker f \subseteq \ker \Pi^f$. Inversement, si $(x, y) \in \ker \Pi^f \Rightarrow f^\sharp \circ f(x) = f^\sharp \circ f(y)$. D'après (1.10) on a donc $f \circ f^\sharp \circ f(x) = f(x) = f \circ f^\sharp \circ f(y) = f(y) \Rightarrow (x, y) \in \ker f$. Soit $\ker \Pi^f \subseteq \ker f$, d'où l'égalité.

□

Théorème 1.57. *Soit $f : E \to F$ une application résiduable.*

(i) $\forall b \in F$, *$\Pi_f(b)$ est le plus grand élément de $\mathsf{Im}f$ inférieur ou égal à b.*
(ii) $\forall x \in E$, *$\Pi^f(x)$ est le plus grand élément de la classe $[x]_f$.*

Preuve :

(i) en appliquant la proposition 1.53, puisque Π_f est une fermeture duale, alors ${}_{\mathsf{Im}\Pi_f|}\Pi_f$ est dualement résiduable et $({}_{\mathsf{Im}\Pi_f|}\Pi_f)^\flat = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\Pi_f}$. Or, d'après le lemme 1.56, $\mathsf{Im}\Pi_f = \mathsf{Im}f$, donc $({}_{\mathsf{Im}\Pi_f|}\Pi_f)^\flat = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}_f}$. D'après (1.9), ${}_{\mathsf{Im}\Pi_f|}\Pi_f = (\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}_f})^\sharp$, c.-à-d. l'injection de $\mathsf{Im}f$ dans F est résiduable et sa résiduée est la restriction du projecteur Π_f à son image.

(ii) il faut remarquer que Π^f est une fermeture, que $\ker f = \ker \Pi^f$ (lemme 1.56) et appliquer le lemme 1.52.

□

Remarque 1.58 Compte tenu des résultats du lemme 1.56 et du théorème 1.57, Π_f est appelé projecteur sur $\mathsf{Im}f$ parallèlement au noyau $\ker f$ dans [Cohen et al., 1996]. De même, Π^f est un projecteur sur $\mathsf{Im}f^\sharp$. On peut illustrer cette notion de projection dans l'image de f et $f^\sharp$ par les diagrammes commutatifs suivants:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "{}_{\mathsf{Im}\Pi^f|}\Pi^f"'] & F \arrow[dl, "{}_{\mathsf{Im}f^\sharp|}f^\sharp"] \\
\mathsf{Im}f^\sharp &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, "{}_{\mathsf{Im}f|}f"'] & F \arrow[l, "f^\sharp"'] \arrow[d, "{}_{\mathsf{Im}\Pi_f|}\Pi_f"] \\
& \mathsf{Im}f
\end{tikzcd}$$

◇

1.2.5 Morphismes de Treillis

On s'intéresse ici à l'action des applications résiduables par rapport aux lois de treillis.

Définition 1.59 (Sup-homomorphisme, Inf-homomorphisme) *Soit $f : E \to F$. Si $(E, \vee)$ et $(F, \cup)$ sont deux sup-demi-treillis, l'application f sera dite sup-homomorphisme si $\forall a, b \in E,\ f(a \vee b) = f(a) \cup f(b)$.*

Si $(E, \wedge)$ et $(F, \cap)$ sont deux inf-demi-treillis, l'application f sera dite inf-homomorphisme si $\forall a, b \in E, f(a \wedge b) = f(a) \cap f(b)$.

Définition 1.60 (Sup-homomorphisme Complet, Inf-homomorphisme Complet) *Soit $(E, \vee)$ et $(F, \cup)$ deux sup-demi-treillis. L'application $f : E \to F$ est un sup-homomorphisme complet si f est sup-homomorphisme et si pour toute famille non vide $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de E pour laquelle $\bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha$ existe, alors $\bigcup_{\alpha \in A} f(x_\alpha)$ existe et*

$$f(\bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha) = \bigcup_{\alpha \in A} f(x_\alpha).$$

Soit $(E, \wedge)$ et $(F, \cap)$ deux inf-demi-treillis. L'application $f : E \to F$ est un inf-homomorphisme complet si f est un inf-homomorphisme et si pour toute famille non vide $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de E pour laquelle $\bigwedge_{\alpha \in A} x_\alpha$ existe, alors $\bigcap_{\alpha \in A} f(x_\alpha)$ existe et

$$f(\bigwedge_{\alpha \in A} x_\alpha) = \bigcap_{\alpha \in A} f(x_\alpha).$$

Remarque 1.61 Il faut remarquer dans cette définition qu'un sup-homomorphisme peut être complet sans que les sup-demi-treillis sur lesquels le sup-homomorphisme est défini ne soient complets. ◇

Théorème 1.62. *Si $f : (E, \vee) \to (F, \cup)$ est une application résiduable sur des sup-demi-treillis, alors f est un sup-homomorphisme complet. De même, si $f : (E, \wedge) \to (F, \cap)$ est une application dualement résiduable sur des inf-demi-treillis, alors f est un inf-homomorphisme complet.*

Preuve : Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille d'éléments de E pour laquelle $x = \bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha$ existe. Puisque f est isotone, $\forall \alpha \in A,\ f(x) \succeq f(x_\alpha)$. L'élément $f(x)$ est donc un majorant (dans F) de l'ensemble $\mathcal{R} = \{f(x_\alpha)\}_{\alpha \in A}$.

Prenons $y \in F$ un majorant de $\mathcal{R}$. Comme f est résiduable, $f^\sharp \circ f \succeq \mathsf{Id}_E$ et donc $\forall \alpha \in A, f^\sharp(y) \succeq f^\sharp \circ f(x_\alpha) \succeq x_\alpha$, en particulier $f^\sharp(y) \succeq \bigvee_{\alpha \in A} x_\alpha = x$. Par conséquent, par isotonie de f, $f \circ f^\sharp(y) \succeq f(x)$ et puisque f est résiduable, $y \succeq f \circ f^\sharp(y) \succeq f(x)$. Tout majorant y de $\mathcal{R}$ majore $f(x)$ également. Autrement dit, $f(x)$ est le plus petit des majorants de $\mathcal{R}$. Puisque F est un sup-demi-treillis on a $f(x) = \bigcup_{\alpha \in A} f(x_\alpha)$. □

Au vu de ce théorème, une application f résiduable est nécessairement un sup-homomorphisme (complet), c'est-à-dire l'image du *Sup* d'un ensemble (lorsqu'il existe) est le *Sup* de l'image de cet ensemble.

Cette propriété de conservation du *Sup* reste vraie également lorsque le codomaine de l'application résiduable n'est pas un sup-demi-treillis. Dans ce cas, si $f : E \to F$ est résiduable et E est un sup-demi-treillis, on vérifie alors que l'image de f a elle-même nécessairement une structure de sup-demi-treillis, et ce, même si F n'est pas un demi-treillis. Ceci est présenté dans le résultat suivant.

Proposition 1.63. *Soit $f : (E, \vee) \to (F, \preceq)$ une application résiduable où E est un $\vee$-demi-treillis et F un ensemble partiellement ordonné. Alors, $\mathsf{Im} f$ est un sup-demi-treillis pour la loi $\overset{f}{\tilde{\vee}}$ definie sur $\mathsf{Im} f$ par*

$$\forall a, b \in \mathsf{Im} f, \ \ a \overset{f}{\tilde{\vee}} b = f(f^\sharp(a) \vee f^\sharp(b)).$$

Preuve : Soit $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ un sous-ensemble fini de $\mathsf{Im} f$, c'est-à-dire $\forall \alpha \in A$, $\exists a \in E$ tel que $f(a) = y_\alpha$.

1. $f(\bigvee_{\alpha \in A} f^\sharp(y_\alpha))$ est un majorant de $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$.
   D'après (1.10), $\forall \alpha \in A, \exists a \in E, f \circ f^\sharp(y_\alpha) = f \circ f^\sharp \circ f(a) = f(a) = y_\alpha$. Par ailleurs, puisque E est un $\vee$-demi-treillis et que A est un ensemble fini, $\bigvee_{\alpha \in A} f^\sharp(y_\alpha)$ est défini dans E et par isotonie de f

   $$\forall \alpha \in A, \ \ f(\bigvee_{\alpha \in A} f^\sharp(y_\alpha)) \succeq f \circ f^\sharp(y_\alpha) = y_\alpha.$$

   Dans l'ensemble $(\mathsf{Im} f, \preceq)$, $f(\bigvee_{\alpha \in A} f^\sharp(y_\alpha))$ est donc un majorant de $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$.

2. $f(\bigvee_{\alpha \in A} f^\sharp(y_\alpha))$ est le plus petit des majorants de $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$.
   Tout majorant $z \in \mathsf{Im} f$ de l'ensemble $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ vérifie, en raison de l'isotonie de $f^\sharp$,

   $$\forall \alpha \in A, \ \ z \succeq y_\alpha \Rightarrow f^\sharp(z) \succeq f^\sharp(y_\alpha).$$

   En particulier, puisque E est un sup-demi-treillis,

   $$f^\sharp(z) \succeq \bigvee_{\alpha \in A} f^\sharp(y_\alpha).$$

   Finalement, puisque $z \in \mathsf{Im} f$, $f \circ f^\sharp(z) = z$ et par isotonie de f

   $$f \circ f^\sharp(z) = z \succeq f(\bigvee_{\alpha \in A} f^\sharp(y_\alpha)).$$

   Donc $f(\bigvee\limits_{\alpha \in A} f^\sharp(y_\alpha))$ est le plus petit majorant (dans $\mathsf{Im} f$) de tout sous-ensemble fini $\{y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $\mathsf{Im} f$. Le sous-ensemble $\mathsf{Im} f$ a donc une structure de sup-demi-treillis pour l'ordre de F restreint à $\mathsf{Im} f$.

$\square$

Remarque 1.64 Pour la proposition précédente, il n'est pas nécessaire que F ait une structure de sup-demi-treillis. En revanche, si $(F, \cup)$ est un sup-demi-treillis, on vérifie facilement que la loi sup $\overset{f}{\tilde{\vee}}$ définie sur $\mathsf{Im} f$ vérifie d'après le théorème 1.62,

$$\forall a, b \in \mathsf{Im} f, \ \ a \overset{f}{\tilde{\vee}} b = f(f^\sharp(a) \vee f^\sharp(b)) = f \circ f^\sharp(a) \cup f \circ f^\sharp(b) = a \cup b.$$

Autrement dit, $\mathsf{Im} f$ est alors un sous-$\cup$-demi-treillis de F, c'est-à-dire, $a, b \in \mathsf{Im} f \Rightarrow a \cup b \in \mathsf{Im} f$.

$\diamond$

Proposition 1.65. *Soit $f : (E, \vee) \to (F, \cap)$ une application résiduable où E est un sup-demi-treillis et F un inf-demi-treillis. Alors, $(\mathsf{Im} f, \overset{f}{\tilde{\vee}}, \overset{f}{\tilde{\cap}})$ est un treillis en posant*

$$\forall a, b \in \mathsf{Im} f, \quad a \overset{f}{\tilde{\vee}} b = f(f^\sharp(a) \vee f^\sharp(b)) \quad et \quad a \overset{f}{\tilde{\cap}} b = \Pi_f(a \cap b) = f \circ f^\sharp(a \cap b).$$

Preuve : $(\mathsf{Im} f, \overset{f}{\tilde{\vee}})$ est un sup-demi-treillis en accord avec la proposition 1.63. De plus, puisque F est un inf-demi-treillis, $\forall a, b \in \mathsf{Im} f$, $a \cap b \in F$ est le plus grand minorant de $\{a, b\}$ (dans F). Mais $a \cap b$ n'appartient pas nécessairement à $\mathsf{Im} f$. En revanche, d'après le théorème 1.57, $\Pi_f(a \cap b)$ est le plus grand élément de $\mathsf{Im} f$ inférieur à $a \cap b$. Par conséquent, $\Pi_f(a \cap b)$ est la borne inf de l'ensemble $\{a, b\}$ dans $(\mathsf{Im} f, \preceq)$. En accord avec la définition 1.11, $\mathsf{Im} f$ a donc une structure de treillis pour les lois $\overset{f}{\tilde{\vee}}$ et $\overset{f}{\tilde{\cap}}$. $\square$

Proposition 1.66. *Soit $f : (E, \vee, \wedge) \to (F, \preceq)$ une application résiduable avec E un treillis complet et F un ensemble partiellement ordonné. Alors, $(\mathsf{Im} f, \overset{f}{\tilde{\vee}})$ est un treillis complet.*

Preuve : La preuve de la proposition 1.63 s'étend aux ensembles éventuellement infinis, c'est-à-dire si E est complet, on peut montrer que les sous-ensembles (finis ou infinis) de $\mathsf{Im} f$ ont un plus petit majorant. $(\mathsf{Im} f, \overset{f}{\tilde{\vee}})$ est donc un sup-demi-treillis sup-complet. De plus, puisque E est complet, il admet un plus petit élément 0_E. Par conséquent, $f(0_E) \in \mathsf{Im} f$ et $\forall x_\alpha \in E, x_\alpha \succeq 0_E \Rightarrow f(x_\alpha) \succeq f(0_E)$ par isotonie de f. Donc $f(0_E)$ est le plus petit élément de $\mathsf{Im} f$. Par application du théorème 1.17, $\mathsf{Im} f$ a donc une structure de treillis complet. $\square$

Remarque 1.67 Nous rappelons que la borne inf du treillis complet $(\mathsf{Im} f, \overset{f}{\tilde{\vee}})$, notée $\overset{f}{\tilde{\wedge}}$, est ici définie par

$$a, b \in \mathsf{Im} f, \quad a \overset{f}{\tilde{\wedge}} b = \overset{f}{\tilde{\bigvee}} \{x \in \mathsf{Im} f | x \preceq a, x \preceq b\}.$$

$\diamond$

Proposition 1.68. *Si f est une fermeture sur un treillis complet $(E, \vee, \wedge)$, $(\mathsf{Im} f, \overset{f}{\tilde{\vee}}, \wedge)$ est un treillis complet, c'est-à-dire que $\mathsf{Im} f$ est stable par la loi $\wedge$, ou encore $\mathsf{Im} f$ est un sous-$\wedge$-demi-treillis de E.*

Preuve : Si f est une fermeture, ${}_{\mathsf{Im} f|} f$ est résiduable d'après la proposition 1.53. Par conséquent, si E est un treillis complet, puisque l'image de l'application ${}_{\mathsf{Im} f|} f$ est simplement $\mathsf{Im} f$, il découle de la proposition 1.66 que $(\mathsf{Im} f, \overset{f}{\tilde{\vee}})$ est un treillis complet.

En outre, si $a, b \in \mathsf{Im} f$, d'une part $f(a \wedge b) \succeq a \wedge b$, puisque $f \succeq \mathsf{Id}_E$, d'autre part

$$\left\{ \begin{array}{l} a \wedge b \preceq a \Rightarrow f(a \wedge b) \preceq f(a) \\ a \wedge b \preceq b \Rightarrow f(a \wedge b) \preceq f(b) \end{array} \right. \Rightarrow f(a \wedge b) \preceq f(a) \wedge f(b) = a \wedge b.$$

Par conséquent, si $a, b \in \mathsf{Im} f$, $f(a \wedge b) = a \wedge b$ c'est-à-dire que $a \wedge b \in \mathsf{Im} f$. $\square$

Pour terminer sur les propriétés des applications résiduables vis-à-vis des lois de treillis, le théorème suivant caractérise les applications résiduables définies sur des treillis complets.

Théorème 1.69. *Soit $f : E \to F$ définie sur des treillis complets. L'application f est résiduable si, et seulement si, f est un sup-homomorphisme complet et $f(0_E) = 0_F$.*

Preuve :

($\Rightarrow$) si f est résiduable, alors d'après le théorème 1.62, f est un sup-homomorphisme complet. De plus, toute équation $f(x) \preceq b$ admet au moins une solution dans E, en particulier $f(x) \preceq 0_F$ admet au moins 0_E comme solution, or 0_F est le plus petit élément de F, il y a un donc nécessairement égalité.

($\Leftarrow$) si f est un sup-homomorphisme complet alors f est isotone, en effet

$$a \succeq b \iff a = a \vee b \Rightarrow f(a) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \iff f(a) \succeq f(b).$$

De plus, si $f(0_E) = 0_F$ alors toute équation $f(x) \preceq b$ admet au moins 0_E comme solution, par conséquent l'ensemble $X = \{x | f(x) \preceq b\}$ est non vide pour tout $b \in F$. De plus, $Sup(X)$ existe puisque E est sup-complet. On vérifie en particulier,

$$f(\bigvee_{\{x|f(x)\preceq b\}} x) = \bigvee_{\{x|f(x)\preceq b\}} f(x) \preceq b$$

puisque f est un sup-homomorphisme complet. Autrement dit, le sup de l'ensemble des solutions de $f(x) \preceq b$ est solution et c'est la plus grande. L'application f est donc, par définition, résiduable.

□

1.3 Eléments de la théorie des dioïdes

A la différence des demi-anneaux généraux, les demi-anneaux idempotents (ou dioïdes) peuvent être munis d'une structure ordonnée canonique. Un dioïde $\mathcal{D}$ apparaît naturellement comme un demi-treillis $(\mathcal{D}, \oplus)$. De plus, en complétant un dioïde, c'est-à-dire en définissant un élément maximum, un dioïde peut être muni d'une structure de treillis complet.

Les applications $x \mapsto a \otimes x$ et $x \mapsto x \otimes a$ définies sur un dioïde complet apparaissent alors comme des sup-homomorphismes complets de treillis complets, et sont donc à ce titre des applications résiduables. Par conséquent, certaines applications définies sur un dioïde complet $\mathcal{D}$, obtenues par exemple par composition des lois $\otimes$, $\oplus$ et d'éléments de $\mathcal{D}$, sont résiduables.

Notre travail sur les graphes d'événements temporisés s'appuie essentiellement sur le caractère résiduable de certaines applications ou de certaines de leurs restrictions. Les rappels sont donc principalement orientés sur l'application de la théorie de la résiduation aux dioïdes.

1.3.1 Dioïdes: définitions et exemples

Définition 1.70 (Monoïde) *$(M, \oplus, \varepsilon)$ est un monoïde si $\oplus$ est une loi interne, associative, et admettant un élément neutre ε ($\forall m \in M, m \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus m = m$). Si la loi $\oplus$ est commutative, le monoïde est dit commutatif.*

Définition 1.71 (Dioïde) *$(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est un dioïde si*

- *$(\mathcal{D}, \oplus, \varepsilon)$ est un monoïde commutatif idempotent, $\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$.*
- *$(\mathcal{D}, \otimes, e)$ est un monoïde*
- *la loi $\otimes$ distribue à gauche et à droite par rapport à $\oplus$*
- *ε est absorbant pour la loi $\otimes$, $\forall a \in \mathcal{D}, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$.*

Si $(\mathcal{D}, \otimes, e)$ est un monoïde commutatif, le dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est dit commutatif.

Puisqu'un dioïde $\mathcal{D}$ bénéficie naturellement d'une structure de monoïde commutatif idempotent $(\mathcal{D}, \oplus)$, $\mathcal{D}$ a naturellement une structure de $\oplus$-demi-treillis pour l'ordre suivant (cf. preuve du th. 1.9):

$$a \succeq b \iff a = a \oplus b. \tag{1.17}$$

Cet ordre, défini comme ordre naturel d'un dioïde, sera partiel pour certains dioïdes considérés par la suite. En particulier, l'ordre d'un dioïde est total si, et seulement si,

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \text{ soit } a \succeq b, \text{ soit } a \preceq b \iff a \oplus b = a \text{ ou } b.$$

Puisqu'un dioïde peut être vu comme un $\oplus$-demi-treillis, l'addition est isotone (cf. ex. 1.23) suivant l'ordre du dioïde. La multiplication est également isotone. Par distributivité de la loi $\otimes$ sur $\oplus$, on vérifie en effet

$$a \succeq b \iff a = a \oplus b \Rightarrow c \otimes a = c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b) \iff c \otimes a \succeq c \otimes b.$$

Il en est de même pour le produit à droite.

Exemple 1.72 Algèbres (max,+) et (min,+)

- $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ ou $\mathbb{Z}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ sont des dioïdes commutatifs pour lesquels $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. L'ordre $\preceq$ associé à $\mathbb{Z}_{\max}$ est total et coïncide avec l'ordre naturel $\leq$.
- $\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ ou $\mathbb{Z}_{\min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ sont des dioïdes commutatifs pour lesquels $\varepsilon = +\infty$ et $e = 0$. L'ordre naturel $\preceq$ associé à $\mathbb{Z}_{\min}$ est total et coïncide avec l'ordre inverse de $\leq$.

$\diamond$

Exemple 1.73 (Dioïde matriciel) L'ensemble des matrices de $\mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$ est un dioïde pour la somme et le produit de matrices définis par : $A, B \in \mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \text{ et } (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

L'ordre naturel sur le dioïde matriciel $\mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$ est partiel. $\diamond$

Définition 1.74 (Sous-dioïde) *Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde et $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$. $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ est dit sous-dioïde de $\mathcal{D}$ si $\varepsilon, e \in \mathcal{C}$ et si $\mathcal{C}$ est fermé pour les lois $\oplus$ et $\otimes$.*

Exemple 1.75 $\mathbb{Z}_{\max}$ est un sous-dioïde de $\mathbb{R}_{\max}$. $\diamond$

Définition 1.76 (Dioïde complet) *Un dioïde est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi $\otimes$ distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $c \in \mathcal{D}$ et tout sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{D}$,*

$$c \otimes (\bigoplus_{x \in A} x) = \bigoplus_{x \in A} c \otimes x.$$

Exemple 1.77 Le dioïde $\mathbb{Z}_{\max}$ complété par l'élément $+\infty$ est un dioide complet noté $\overline{\mathbb{Z}}_{max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$. $\diamond$

Puisque un dioïde $\mathcal{D}$ a une structure de sup-demi-treillis $(\mathcal{D}, \preceq)$, s'il est complet, il admet un plus grand élément. On notera T ce plus grand élément. L'élément T correspond à la somme de tous les éléments de $\mathcal{D}$: $T = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x$.

D'autre part, un dioïde admet toujours ε comme élément minimum. Un dioïde complet est donc un $\oplus$-demi-treillis complet avec un élément minimum. Par application du théorème 1.17, un dioïde complet a donc une structure de treillis complet pour l'ordre $\preceq$.

Notation 1.78 (Borne Inf) *Si $\mathcal{D}$ est un dioïde complet, nous noterons $\wedge$ la loi associative commutative et idempotente qui fait de $(\mathcal{D}, \oplus, \wedge)$ un treillis complet: $a \wedge b = \bigoplus_{x \preceq a, x \preceq b} x$. La loi $\wedge$ vérifie en conséquence*

$$a = a \oplus b \iff a \succeq b \iff b = a \wedge b.$$

Définition 1.79 (Dioïde distributif) *Un dioïde $\mathcal{D}$ est dit distributif s'il est complet et si le treillis $(\mathcal{D}, \oplus, \wedge)$ est distributif (cf. définition 1.19).*

Remarque 1.80 Les lois $\oplus$ et $\wedge$ sont des lois de treillis, elles sont donc isotones pour l'ordre $\preceq$. Si le dioïde n'est pas distributif, on vérifie néanmoins toujours les inégalités suivantes (cf. remarque 1.24 relations (1.7))

$$a \oplus (b \wedge c) \preceq (a \oplus b) \wedge (a \oplus c)$$

$$a \wedge (b \oplus c) \succeq (a \wedge b) \oplus (a \wedge c).$$

De même, bien que la loi $\otimes$ distribue sur la loi $\oplus$, il n'en est pas généralement de même vis-à-vis de la loi $\wedge$. Par contre, la sous-distributivité suivante est vérifiée :

$$c(a \wedge b) \preceq ca \wedge cb.$$ $\diamond$

Définition 1.81 (Homomorphisme, Isomorphisme) *Une application $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ définie sur des dioïdes est un homomorphisme si*

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \qquad f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \text{ et } f(\varepsilon) = \varepsilon \tag{1.18}$$

$$f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \text{ et } f(e) = e \tag{1.19}$$

Une application vérifiant seulement (1.18) est dite $\oplus$-morphisme et une application vérifiant seulement (1.19) est dite $\otimes$-morphisme. Un homomorphisme bijectif est appelé isomorphisme.

Définition 1.82 (Congruence) *Une congruence sur un dioïde $\mathcal{D}$ est une relation d'équivalence (notée $\equiv$) compatible avec les lois du dioïde, c'est-à-dire*

$$\forall a,b,c \in \mathcal{D}, a \equiv b \Rightarrow \begin{cases} a \oplus c \equiv b \oplus c \\ a \otimes c \equiv b \otimes c \end{cases} .$$

Théorème 1.83 (Dioïde Quotient) *Soit un dioïde $\mathcal{D}$ et $\equiv$ une congruence sur $\mathcal{D}$. En notant $[a] = \{x \in \mathcal{D} | x \equiv a\}$ la classe d'équivalence de $a \in \mathcal{D}$, le dioïde quotient de $\mathcal{D}$ par cette congruence est un dioïde noté $\mathcal{D}_{/\equiv}$ pour lequel la somme et le produit sont définis par*

$$\begin{aligned} [a] \oplus [b] &\overset{\text{déf}}{=} [a \oplus b] \\ [a] \otimes [b] &\overset{\text{déf}}{=} [a \otimes b] \end{aligned} \tag{1.20}$$

Preuve : Il convient de souligner qu'en raison de la compatibilité de $\equiv$ avec les lois du dioïde $\mathcal{D}$, en prenant a, a' et b, b' tels que $[a] = [a']$ et $[b] = [b']$ on obtient

$$[a \oplus b] = [a' \oplus b'] \text{ et } [a \otimes b] = [a' \otimes b'],$$

c'est-à-dire que les classes $[a \oplus b]$ et $[a \otimes b]$ dépendent seulement des classes $[a]$ et $[b]$ et non des représentants de ces classes. Les opérations sur le quotient données par (1.20) sont par conséquent parfaitement définies et confèrent au quotient $\mathcal{D}_{/\equiv}$ une structure de dioïde. $\square$

Théorème 1.84. *Soit Π un homomorphisme de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}$. La relation $\overset{\ker \Pi}{\equiv}$ définie sur $\mathcal{D}$ par*

$$a \overset{\ker \Pi}{\equiv} b \iff \Pi(a) = \Pi(b)$$

est une congruence. $\Pi(\mathcal{D})$ est un dioïde isomorphe au dioïde quotient $\mathcal{D}_{/\ker \Pi}$.

Preuve : Le fait que $\overset{\ker \Pi}{\equiv}$ soit une congruence est immédiat. D'autre part, puisque Π est un homomorphisme, l'ensemble $\Pi(\mathcal{D})$ est fermé pour les lois $\oplus$ et $\otimes$ de $\mathcal{C}$. De plus, les éléments neutres pour l'addition et le produit de $\mathcal{C}$ appartiennent également à $\Pi(\mathcal{D})$ (Π est un homomorphisme donc $\Pi(\varepsilon) = \varepsilon$ et $\Pi(e) = e$). Donc $\Pi(\mathcal{D})$ bénéficie d'une structure de dioïde. L'application $\mathcal{D}_{/\ker \Pi} \to \Pi(\mathcal{D}), [x]_\Pi \mapsto \Pi(x)$ définit alors un isomorphisme de dioïdes. $\square$

Exemple 1.85 (Dioïde de séries formelles, Dioïde de polynômes) Soit $\mathcal{D}$ un dioïde. On définit une série formelle en p variables (commutatives), notées z_1 à z_p, à coefficients dans $\mathcal{D}$ comme une application f de $\mathbb{Z}^p$ dans $\mathcal{D}$: $\forall k = (k_1, \cdots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, $f(k)$ représente le coefficient de $z_1^{k_1} \cdots z_p^{k_p}$. Une autre représentation équivalente de la série f est

$$f = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}^p} f(k_1, \cdots, k_p) z_1^{k_1} \cdots z_p^{k_p}.$$

L'ensemble des séries formelles doté des opérations suivantes

$$\begin{aligned} f \oplus g : \quad (f \oplus g)(k) &= f(k) \oplus g(k) \\ f \otimes g : \quad (f \otimes g)(k) &= \bigoplus_{i+j=k} f(i) \otimes g(j) \end{aligned}$$

est un dioïde noté $\mathcal{D}[\![z_1, \cdots, z_p]\!]$.

Si $\mathcal{D}$ est complet alors $\mathcal{D}[\![z_1, \cdots, z_p]\!]$ l'est également.

On appelle *support* de la série f l'ensemble

$$Supp(f) = \{k \in \mathbb{Z}^p | f(k) \neq \varepsilon\}.$$

La *valuation* et le *degré* de la série f sont définis respectivement comme la borne inf et la borne sup de $Supp(f)$:

$$\begin{aligned} val(f) &= Inf(Supp(f)) \\ deg(f) &= Sup(Supp(f)). \end{aligned}$$

Une série formelle à support fini est appelé *polynôme.* Une série formelle dont le support est un singleton (de $\mathbb{Z}^p$) est appelé *monôme.* Le sous-ensemble des polynômes est un sous-dioïde de $\mathcal{D}[\![z_1, \ldots, z_p]\!]$ noté $\mathcal{D}[z_1, \ldots, z_p]$. Par définition, le dioïde des polynômes $\mathcal{D}[z_1, \ldots, z_p]$ n'est pas complet. ◇

1.3.2 Equation implicite $x = ax \oplus b$

Certaines équations au point fixe définies sur des dioïdes complets admettent des solutions particulières extrêmes, c.-à-d. plus petite ou plus grande que toute autre solution. Des résultats généraux concernant l'étude d'équations au point fixe sur des dioïdes complets sont fournis dans [Baccelli et al., 1992, chap. 4]. Nous rappelons ici simplement le résultat concernant la résolution de l'équation implicite $x = ax \oplus b$.

Théorème 1.86 (Théorème de l'étoile) *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde complet, l'équation implicite*

$$x = ax \oplus b \tag{1.21}$$

admet $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$ comme plus petite solution.

L'opérateur $*$ est appelé couramment *étoile de Kleene* dans la littérature.

Preuve : On vérifie tout d'abord que $x = a^*b$ est solution de (1.21). On a

$$a(a^*b) \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus ...)b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 ...)b = a^*b.$$

De plus, si x est solution de (1.21), $x = ax \oplus b$, soit, par définition de l'ordre $\succeq$ de $\mathcal{D}$,

$$x \succeq ax \text{ et } x \succeq b.$$

Par isotonie du produit, on obtient donc

$$x \succeq ax \Rightarrow x \succeq ax \succeq a^2 x \succeq ... \succeq a^k x,$$

et, par sommation, $x \succeq \bigoplus_{k \geq 0} a^k x = a^* x$. Finalement,

$$x \succeq a^* x \text{ et } x \succeq b \Rightarrow x \succeq a^* b.$$

Toute solution de (1.21) est donc plus grande que la solution a^*b. □

Notation 1.87 (Etoile de Kleene) *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde complet. L'application étoile de Kleene, définie sur $\mathcal{D}$, sera notée $\mathcal{K}$ par la suite,*

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{K}: & \mathcal{D} & \to & \mathcal{D} \\ & x & \mapsto & x^* = \bigoplus_{k\geq 0} x^k. \end{array}$$

On utilisera également une notation particulière pour l'application "plus" dérivée de l'étoile

$$\begin{array}{rccl} \mathcal{P}: & \mathcal{D} & \to & \mathcal{D} \\ & x & \mapsto & x^+ = \bigoplus_{k\geq 1} x^k. \end{array}$$

Les applications $\mathcal{K}$ et $\mathcal{P}$ sont isotones (par composition d'applications isotones) et $a^* = e \oplus a^+$ ou $a^+ = a \otimes a^*$.

Les applications $\mathcal{K}$ et $\mathcal{P}$ vérifient les relations suivantes. Certains de ces résultats sont montrés également dans [Gaubert, 1992].

Théorème 1.88. *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde complet. $\forall a, b \in \mathcal{D}$*

$$a^+ \preceq a^* \tag{1.22}$$
$$(a^*)^* = a^* \quad (\mathcal{K} \text{ est une fermeture }) \tag{1.23}$$
$$(a^+)^* = a^* \tag{1.24}$$
$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{1.25}$$
$$(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = a^*(ba^*)^* = b^*(ab^*)^* = (b^*a)^*b^* \tag{1.26}$$
$$a^*a^* = a^* \tag{1.27}$$
$$(a^*)^+ = a^* \tag{1.28}$$
$$(a^+)^+ = a^+ \quad (\mathcal{P} \text{ est une fermeture }) \tag{1.29}$$
$$(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^* \tag{1.30}$$
$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \tag{1.31}$$
$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^*b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \tag{1.32}$$

En outre, lorsque $\mathcal{D}$ est commutatif

$$(a \oplus b)^* = a^*b^*. \tag{1.33}$$

Preuve :

(1.22) par définition, $\mathcal{P} \preceq \mathcal{K}$

(1.23) Par définition de l'étoile de Kleene,

$$(a^*)^* = \bigoplus_{k\geq 0}\bigoplus_{l\geq 0}(a^k)^l = \bigoplus_{k\geq 0}\bigoplus_{l\geq 0} a^{k+l} = \bigoplus_{j=k+l\geq 0} a^j = a^*.$$

On vérifie ainsi $\mathcal{K} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K} \succeq \mathsf{Id}$ ($\mathcal{K}$ est une fermeture).

(1.24) par définition de $\mathcal{P}$, $a \preceq a^+$ ce qui implique $a^* \preceq (a^+)^*$, en raison de l'isotonie de $\mathcal{K}$. D'autre part, $a^+ \preceq a^*$ implique également $(a^+)^* \preceq (a^*)^* = a^*$ d'après (1.23). On obtient donc l'égalité par l'encadrement $a^* \preceq (a^+)^* \preceq (a^*)^* = a^*$.

(1.25) $(ab)^*a = a \oplus aba \oplus ababa \oplus \cdots = a(ba)^*$.

(1.26) d'après le théorème 1.86, sont équivalents:

$$\begin{aligned} x &= (a \oplus b)^* \\ x &= ax \oplus bx \oplus e \\ x &= a^*bx \oplus a^* \\ x &= (a^*b)^*a^* \end{aligned}$$

De même, $x = (a \oplus b)^* \iff x = (b^*a)^*b^*$. D'après (1.25), on a l'égalité $(a^*b)^*a^* = a^*(ba^*)^* = (b^*a)^*b^* = b^*(ab^*)^*$.

(1.27) d'après (1.26) et en raison de l'idempotence de $\oplus$, $(a)^* = (a \oplus a)^* = (a^*a)^*a^* = (a^+)^*a^* = a^*a^*$ (en appliquant (1.24)).

(1.28) par définition de $\mathcal{P}$, $a^+ = aa^* \Rightarrow (a^*)^+ = a^*(a^*)^* = a^*a^* = a^*$ (en appliquant (1.23) et (1.27)).

(1.29) $(a^+)^+ = a^+(a^+)^* = a^+a^* = aa^*a^* = a^+$ (par applications successives de (1.24) et (1.27)). On vérifie ainsi que $\mathcal{P} \circ \mathcal{P} = \mathcal{P} \succeq \mathsf{Id}$ c.-à-d. $\mathcal{P}$ est une fermeture.

(1.30) $(ab^*)^+ = ab^*(ab^*)^* = a(b^*(ab^*)^*) = a(a \oplus b)^*$ grâce à (1.26).

(1.31) $(ab^*)^* = e \oplus (ab^*)^+ = e \oplus a(a \oplus b)^*$ d'après (1.30).

(1.32) $(a \oplus b^*)^* = (b^*)^*(a(b^*)^*)^*$ par application de (1.26), c.-à-d. $(a \oplus b^*)^* = b^*(ab^*)^* = (a \oplus b)^*$. On obtient de façon identique $(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a^* \oplus b^*)^*$. Par ailleurs, d'après (1.26) et (1.27), $(a \oplus b)^* = a^*(ba^*)^* = a^*a^*(ba^*)^* = a^*(a \oplus b)^*$. Finalement, en appliquant (1.31) puis en simplifiant, $(a^*b^*)^* = e \oplus a^*(a^* \oplus b)^* = e \oplus a^*(a \oplus b)^*$, soit finalement $(a^*b^*)^* = (a \oplus b)^*$.

(1.33) si $\mathcal{D}$ est commutatif, pour $k \geq 1$, $(a^*b)^k = (a^*)^k b^k = a^*b^k$. Dans ce cas, $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = (e \oplus \bigoplus_{k\geq 1} a^*b^k)a^* = a^* \oplus \bigoplus_{k\geq 1} a^*b^k = a^*(e \oplus \bigoplus_{k\geq 1} b^k) = a^*b^*$.

□

Remarque 1.89 Le théorème [Blyth and Janowitz, 1972, Th. 4.4 p.30] énonce: soit $f : E \to E$ et $g : E \to E$ deux fermetures, sont équivalents

$$f \preceq g \iff f \circ g = g \iff g \circ f = g.$$

Ceci relie les résultats (1.22), (1.24) et (1.28), c'est-à-dire

$$\mathcal{P} \preceq \mathcal{K} \iff \mathcal{K} = \mathcal{P} \circ \mathcal{K} \iff \mathcal{K} = \mathcal{K} \circ \mathcal{P}.$$

◇

Les résultats énoncés par le théorème 1.88 sont vérifiés pour tout dioïde complet, y compris matriciel. Dans le cas matriciel, on a en particulier le résultat suivant permettant de calculer l'étoile d'une matrice décomposée en 4 blocs.

Théorème 1.90. *Soit $A \in \mathcal{D}^{n\times n}$ partitionnée en quatre blocs*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La matrice A^* s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* \oplus a_{11}^* a_{12}(a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & a_{11}^* a_{12}(a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^* \\ (a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & (a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^* \end{pmatrix}.$$

Preuve : on renvoie le lecteur à [Cohen et al., 1989b] ou [Baccelli et al., 1992] pour ce résultat. □

1.3.3 Théorie de la résiduation appliquée aux dioïdes

Les principaux résultats présentés ici sont issus de [Baccelli et al., 1992] et [Gaubert, 1992]. Le lecteur retrouvera également la plupart de ces résultats dans [Cohen, 1998].

Il faut garder à l'esprit que les résultats généraux énoncés par les théorèmes 1.32 et 1.49 s'appliquent également dans le cadre des dioïdes puisqu'il s'agit de structures ordonnées. De plus, un dioïde est naturellement un $\oplus$-demi-treillis ou un treillis complet s'il s'agit d'un dioïde complet. Ceci nous permet donc d'appliquer certains des résultats énoncés au §1.2.5.

Sur les dioïdes complets, le théorème suivant donne une caractérisation des applications résiduables.

Théorème 1.91. *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont des dioïdes complets. Alors, f est résiduable si, et seulement si, pour tout sous-ensemble X de $\mathcal{D}$*

$$f(\bigoplus_{x\in X} x) = \bigoplus_{x\in X} f(x) \quad (1.34)$$

$$f(\varepsilon) = \varepsilon \quad (1.35)$$

Théorème 1.92. *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ où $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont des dioïdes complets. Alors, f est dualement résiduable si, et seulement si,*

$$f(\bigwedge_{x\in X} x) = \bigwedge_{x\in X} f(x) \quad (1.36)$$

$$f(T) = T \quad (1.37)$$

Preuve (théorèmes 1.91 et 1.92): C'est l'application du théorème 1.69 (et de son dual) en remarquant que les dioïdes complets ont une structure de treillis complet. □

De plus, l'image d'une application résiduable définie sur des dioïdes complets a une structure de treillis complet.

Proposition 1.93. *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ une application résiduable définie sur des dioïdes complets. Alors $\mathsf{Im}f$ a une structure de treillis complet noté $(\mathsf{Im}f, \oplus, \overset{f}{\wedge})$, la borne inf étant définie sur $\mathsf{Im}f$ par*

$$\alpha, \beta \in \mathsf{Im}f, \ \ \alpha \overset{f}{\wedge} \beta = f \circ f^\sharp(\alpha \wedge \beta) = \Pi_f(\alpha \wedge \beta).$$

En outre, l'élément minimum du treillis $(\mathsf{Im}f, \oplus, \overset{f}{\wedge})$ *est* $f(\varepsilon)$ *et l'élément maximum* $f(T)$.

Preuve : Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ sont des dioïdes complets, ce sont également des treillis complets notés $(\mathcal{D}, \oplus, \wedge)$ et $(\mathcal{C}, \oplus, \wedge)$. D'une part, d'après le théorème 1.62, f est un $\oplus$-homomorphisme de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}$. D'autre part, d'après la proposition 1.66, $(\mathsf{Im}f, \overset{f}{\oplus})$ a une structure de treillis complet. Par conséquent, avec $\alpha, \beta \in \mathsf{Im}f$, $\exists a, b \in \mathcal{D}$, tels que $\alpha = f(a), \beta = f(b)$, on vérifie alors

$$\begin{aligned}
\alpha \overset{f}{\oplus} \beta &= f(f^\sharp(\alpha) \oplus f^\sharp(\beta)) \\
&= f \circ f^\sharp \circ f(a) \oplus f \circ f^\sharp \circ f(b) \ \text{(puisque } f \text{ est un sup-homomorphisme)} \\
&= f(a) \oplus f(b) \ \text{(d'après (1.10))} \\
&= \alpha \oplus \beta
\end{aligned}$$

L'ensemble $\mathsf{Im}f$ est donc fermé pour $\oplus$ c'est-à-dire $(\mathsf{Im}f, \oplus)$ est un sous-$\oplus$-demi-treillis du treillis $(\mathcal{C}, \oplus, \wedge)$. Par ailleurs, puisque $\mathcal{C}$ est également un $\wedge$-demi-treillis, en appliquant le résultat de la proposition 1.65, pour α et β dans $\mathsf{Im}f$, l'élément $\Pi_f(\alpha \wedge \beta) = f \circ f^\sharp(\alpha \wedge \beta)$ est la borne inf du couple (α, β). □

Applications résiduables et dualement résiduables sur les dioïdes complets

On se propose ici d'étudier le caractère résiduable ou dualement résiduable de certaines applications de référence définies sur des dioïdes complets.

Soit L_a, R_a et T_a les applications[4] suivantes définies sur un dioïde complet $\mathcal{D}$

$$T_a \ : \ x \mapsto a \oplus x \tag{1.38}$$

$$L_a \ : \ x \mapsto a \otimes x \tag{1.39}$$

$$R_a \ : \ x \mapsto x \otimes a \tag{1.40}$$

• En référence à la définition 1.76, sur un dioïde complet, la multiplication distribue sur les sommes infinies, à gauche ou à droite. De plus, $L_a(\varepsilon) = \varepsilon$ et $R_a(\varepsilon) = \varepsilon$. En appliquant le théorème 1.91, L_a et R_a sont donc résiduables sur un dioïde complet. Lorsque $\mathcal{D}$ est commutatif, $L_a = R_a$ implique donc également $L_a^\sharp = R_a^\sharp$.

• Si $\mathcal{D}$ est complet et distributif, alors T_a est un $\wedge$-homomorphisme complet et $T_a(T) = T$. Donc T_a vérifie le théorème 1.92 et est par conséquent dualement résiduable.

Nous utiliserons les notations suivantes introduites notamment dans [Baccelli et al., 1992].

Notation 1.94 (Applications Résiduées de L_a, R_a) *Nous noterons*

$$L_a^\sharp(x) = a \backslash x = \frac{x}{a}$$

$$R_a^\sharp(x) = x / a = \frac{x}{a}$$

les applications résiduées respectives de L_a *et* R_a.

La résiduée duale de T_a *est notée* $T_a^\flat(x) = x \ominus a$ *dans la littérature.*

[4] nous conserverons par la suite ces mêmes notations

Théorème 1.95. *Les applications $L_a^\sharp$ et $R_a^\sharp$ vérifient les propriétés suivantes*

$$
\begin{array}{rclrcl}
a\frac{x}{a} & \preceq & x & \frac{x}{a}a & \preceq & x \qquad (1.41)\\[2mm]
\frac{ax}{a} & \succeq & x & \frac{xa}{a} & \succeq & x \qquad (1.42)\\[2mm]
a\frac{ax}{a} & = & ax & \frac{xa}{a}a & = & xa \qquad (1.43)\\[2mm]
\frac{a(a\backslash x)}{a} & = & \frac{x}{a} & \frac{(x/a)a}{a} & = & \frac{x}{a} \qquad (1.44)\\[2mm]
\frac{x\wedge y}{a} & = & \frac{x}{a}\wedge\frac{y}{a} & \frac{x\wedge y}{a} & = & \frac{x}{a}\wedge\frac{y}{a} \qquad (1.45)\\[2mm]
\frac{x}{a\oplus b} & = & \frac{x}{a}\wedge\frac{x}{b} & \frac{x}{a\oplus b} & = & \frac{x}{a}\wedge\frac{x}{b} \qquad (1.46)\\[2mm]
\frac{x\oplus y}{a} & \succeq & \frac{x}{a}\oplus\frac{y}{a} & \frac{x\oplus y}{a} & \succeq & \frac{x}{a}\oplus\frac{y}{a} \qquad (1.47)\\[2mm]
\frac{x}{a\wedge b} & \succeq & \frac{x}{a}\oplus\frac{x}{b} & \frac{x}{a\wedge b} & \succeq & \frac{x}{a}\oplus\frac{x}{b} \qquad (1.48)\\[2mm]
\frac{x}{ab} & = & \frac{a\backslash x}{b} & \frac{x}{ba} & = & \frac{x/a}{b} \qquad (1.49)\\[2mm]
\frac{x}{a}b & \preceq & \frac{xb}{a} & b\frac{x}{a} & \preceq & \frac{bx}{a} \qquad (1.50)
\end{array}
$$

Si b est inversible (c.-à-d. il existe $b^{-1} \in \mathcal{D}$ tel que $bb^{-1} = b^{-1}b = e$) alors

$$\frac{a}{b} = b^{-1}a \qquad (1.51)$$

Preuve :

(1.41)-(1.42) L_a et R_a vérifient le point (ii) du théorème 1.27.

(1.43)-(1.44) proviennent de l'identité (1.10).

(1.45) $L_a^\sharp$ est dualement résiduable (d'après (1.8)), c'est donc un inf-homomorphisme complet (th. 1.92), c.-à-d. $L_a^\sharp(a \wedge b) = L_a^\sharp(a) \wedge L_a^\sharp(b)$.

(1.46) $\frac{x}{a\oplus b}$ est la plus grande solution (en y) de $(a \oplus b)y \preceq x$.

$$ay \oplus by \preceq x \iff \begin{cases} ay \preceq x \\ by \preceq x \end{cases} \iff \begin{cases} y \preceq \frac{x}{a} \\ y \preceq \frac{x}{b} \end{cases} \iff y \preceq \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b}.$$

(1.47) $L_a^\sharp$ est isotone donc $L_a^\sharp(x \oplus y) \succeq L_a^\sharp(x)$ et $L_a^\sharp(x \oplus y) \succeq L_a^\sharp(y)$, c.-à-d. $L_a^\sharp(x \oplus y) \succeq L_a^\sharp(x) \oplus L_a^\sharp(y)$.

(1.48) d'après (1.46), $\frac{a}{x \oplus y} = \frac{a}{x} \wedge \frac{a}{y}$. Par conséquent, si $y \succeq x$, c.-à-d. $y = y \oplus x$, alors on vérifie $\frac{a}{y} = \frac{a}{x} \wedge \frac{a}{y}$ ou encore $\frac{a}{y} \preceq \frac{a}{x}$. L'application $x \mapsto \frac{a}{x}$ est donc antitone (inverse l'ordre). Revenons à (1.48), $a \wedge b \preceq a$ et $a \wedge b \preceq b$ implique $\frac{x}{a \wedge b} \succeq \frac{x}{a}$ et $\frac{x}{a \wedge b} \succeq \frac{x}{b}$ et donc également $\frac{x}{a \wedge b} \succeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b}$.

(1.49) d'après (1.11), $L_{ab} = L_a \circ L_b \Rightarrow (L_{ab})^\sharp = L_b^\sharp \circ L_a^\sharp$.

(1.50) d'après (1.41), $a\frac{x}{a} \preceq x$ ce qui implique $a\frac{x}{a}b \preceq xb$. En remarquant que $X = \frac{xb}{a}$ est la plus grande solution de $aX \preceq xb$, et que $\frac{x}{a}b$ est également solution de cette inéquation, nécessairement $\frac{x}{a}b \preceq \frac{xb}{a}$.

(1.51) si b a un inverse noté b^{-1}, alors d'une part $\frac{a}{b} = e \otimes \frac{a}{b} = b^{-1}b\frac{a}{b} \preceq b^{-1}a$ d'après (1.41), et d'autre part $\frac{a}{b} = \frac{e \otimes a}{b} = \frac{bb^{-1} \otimes a}{b} \succeq b^{-1}a$ d'après (1.42) soit $\frac{a}{b} = b^{-1}a$.

□

Remarque 1.96 Nous ne rappelons pas les résultats concernant la résiduée duale de T_a. Le lecteur trouvera ces résultats dans [Baccelli et al., 1992] ou [Gaubert, 1992]. ◇

Proposition 1.97 (Injection canonique) *Soit* $\mathsf{Id}_{|\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}} : \mathcal{D}_{\mathsf{sub}} \to \mathcal{D}$ *l'injection canonique d'un sous-dioïde complet dans un dioïde complet. L'injection* $\mathsf{Id}_{|\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}}$ *est résiduable et sa résiduée sera notée*

$$(\mathsf{Id}_{|\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}})^\sharp = \mathsf{Pr}_{\mathsf{sub}}.$$

Preuve : Si $\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}$ est complet alors l'injection canonique $\mathsf{Id}_{|\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}}$ est un sup-homomorphisme complet et $\mathsf{Id}_{|\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}}(\varepsilon) = \varepsilon$. Le théorème 1.91 donne le résultat. □

Remarque 1.98 La résiduée de l'injection canonique d'un sous-dioïde complet dans un dioïde complet, notée $\mathsf{Pr}_{\mathsf{sub}}$, est une projection de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}$. En effet, tout élément de $x \in \mathcal{D}_{\mathsf{sub}}$ est invariant par $\mathsf{Pr}_{\mathsf{sub}}$ (application de (1.12)) :

$$x \in \mathcal{D}_{\mathsf{sub}} \iff \mathsf{Pr}_{\mathsf{sub}}(x) = x.$$

Ceci justifie donc la notation $\mathsf{Pr}_{\mathsf{sub}}$. ◇

Remarque 1.99 (Résiduation contrainte) Nous rappelons que si $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ est résiduable et l'injection $\mathsf{Id}_{|\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}}$ est résiduable (où $\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}$ est un sous-dioïde complet de $\mathcal{D}$) alors l'application restreinte $f_{|\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}}$ est également résiduable (cf. théorème 1.32 (1.11)), sa résiduée est simplement $\mathsf{Pr}_{\mathsf{sub}} \circ f^\sharp$. Suite à la remarque 1.41, cela signifie donc que le problème contraint

$$\begin{cases} f(x) & \preceq & b \\ x & \in & \mathcal{D}_{\mathsf{sub}} \end{cases}$$

admet une solution optimale dans le sous-dioïde $\mathcal{D}_{\mathsf{sub}}$ pour tout b de $\mathcal{D}$. ◇

Propriétés de certaines fermetures définies sur un dioïde complet

• Si $\mathcal{D}$ est complet, T_a vérifie $T_a \circ T_a = T_a$, puisque la loi $\oplus$ est idempotente, et $T_a \succeq \mathsf{Id}_{\mathcal{D}}$, donc T_a est une fermeture. Cependant, T_a ne vérifie pas $T_a(\varepsilon) = \varepsilon$ (sauf si $a = \varepsilon$).

De même, on se rappelle que $\mathcal{K}$ et $\mathcal{P}$ sont des fermetures (cf. (1.23) (1.29)). Néanmoins, ni $\mathcal{K}$ ni $\mathcal{P}$ ne sont des $\oplus$-homomorphismes sur un dioïde complet. En conséquence, les fermetures T_a, $\mathcal{K}$ et $\mathcal{P}$ ne sont pas résiduables en tant qu'applications définies sur un dioïde complet $\mathcal{D}$ (cf. th. 1.91).

La proposition 1.53 permet néanmoins d'établir le résultat suivant.

Proposition 1.100. *Les restrictions ${}_{\mathsf{Im}T_a|}T_a$, ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$ et ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{P}|}\mathcal{P}$ sont résiduables. Leurs résiduées respectives sont les injections canoniques*

$$({}_{\mathsf{Im}T_a|}T_a)^\sharp = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}T_a}, \quad ({}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K})^\sharp = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\mathcal{K}}, \quad et \ ({}_{\mathsf{Im}\mathcal{P}|}\mathcal{P})^\sharp = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\mathcal{P}}.$$

• Si $\mathcal{D}$ est complet, nous avons vu précédemment que L_a et R_a sont résiduables, pour tout $a \in \mathcal{D}$. En particulier, en prenant un élément $a = b^* \in \mathsf{Im}\mathcal{K}$, L_{b^*} et R_{b^*} sont résiduables. Ces applications vérifient en outre $L_{b^*}(x) = b^*x = b^*b^*x = L_{b^*} \circ L_{b^*}(x)$ d'après (1.27) et $L_{b^*} \succeq \mathsf{Id}_\mathcal{D}$. L_{b^*} et R_{b^*} sont donc des fermetures résiduables. Leurs applications résiduées sont simplement $L^\sharp_{b^*}$ et $R^\sharp_{b^*}$.

L'application du théorème 1.49 conduit aux résultats suivants.

Théorème 1.101. *Soit $x, a \in \mathcal{D}$ un dioïde complet.*

$$\frac{x}{\llcorner a^* \urcorner} = \frac{a^* \backslash\!\!\circ x}{\llcorner a^* \urcorner} \qquad\qquad \frac{x}{\ulcorner a^* \lrcorner} = \frac{x \,/\!\!\circ\, a^*}{\ulcorner a^* \lrcorner} \tag{1.52}$$

$$a^*x = \frac{a^*x}{\llcorner a^* \urcorner} \qquad\qquad xa^* = \frac{xa^*}{\ulcorner a^* \lrcorner} \tag{1.53}$$

$$\frac{x}{\llcorner a^* \urcorner} = a^* \frac{x}{\llcorner a^* \urcorner} \qquad\qquad \frac{x}{\ulcorner a^* \lrcorner} = \frac{x}{\ulcorner a^* \lrcorner} a^* \tag{1.54}$$

Preuve :

(1.52) Puisque L_{a^*} est une fermeture résiduable, sa résiduée est une fermeture duale d'après le théorème 1.49-(*ii*), elle vérifie donc $L^\sharp_{a^*} = L^\sharp_{a^*} \circ L^\sharp_{a^*}$.

(1.53)- (1.54) Puisque L_{a^*} est une fermeture, elle vérifie également les points (*iii*) et (*iv*) du théorème 1.49.

□

Images d'applications résiduables et structures de treillis

On rappelle qu'une des propriétés des applications résiduables est de conserver les *Sup* (qui existent). Ceci se caractérise par le fait que l'image, par une application résiduable, d'un sup-demi-treillis est un sup-demi-treillis, l'image d'un sup-demi-treillis complet est un sup-demi-treillis complet et enfin l'image d'un treillis complet est un treillis complet.

En s'appuyant sur la proposition 1.93, on peut donc donner une structure de treillis à l'image d'une application résiduable définie sur un dioïde complet.

Notamment, puisque L_a et R_a sont résiduables sur un dioïde complet, les ensembles $\mathsf{Im}L_a$ et $\mathsf{Im}R_a$ ont donc des structures de treillis pour l'ordre $\preceq$ (plus exactement, pour l'ordre $\preceq$ de $\mathcal{D}$ restreint à $\mathsf{Im}L_a$ et $\mathsf{Im}R_a$).

• $(\mathsf{Im}La, \oplus, \overset{L_a}{\tilde{\wedge}})$ et $(\mathsf{Im}Ra, \oplus, \overset{R_a}{\tilde{\wedge}})$ sont des treillis complets d'élément minimum ε et d'éléments maxima respectifs[5] $a \otimes T$ et $T \otimes a$.

Cela signifie que pour deux éléments α et β de $\mathsf{Im}L_a$,

$\alpha \oplus \beta$ est le plus petit élément de $\mathsf{Im}L_a$ plus grand ou égal à α et β,
$a\frac{\alpha\wedge\beta}{a}$ est le plus grand élément de $\mathsf{Im}L_a$ plus petit ou égal à α et β.

De même les applications ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$ et ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{P}|}\mathcal{P}$ sont résiduables. Il faut remarquer que les ensembles $\mathsf{Im}\mathcal{K}$ et $\mathsf{Im}\mathcal{P}$ n'ont pas de structure de dioïde pour les lois $\oplus$ et $\otimes$ de $\mathcal{D}$. Néanmoins, en accord avec la proposition 1.68, ces ensembles peuvent être munis d'une structure de treillis de la manière suivante :

• $(\mathsf{Im}\mathcal{K}, \overset{\mathcal{K}}{\tilde{\oplus}}, \wedge)$ et $(\mathsf{Im}\mathcal{P}, \overset{\mathcal{P}}{\tilde{\oplus}}, \wedge)$ sont des treillis complets d'éléments minima respectifs e et ε et tous deux d'élément maximum T. Les lois de treillis sont respectivement (cf. proposition 1.68), quels que soient $a, b \in \mathcal{D}$

$$a^* \overset{\mathcal{K}}{\tilde{\oplus}} b^* = (a^* \oplus b^*)^*$$

$$a^+ \overset{\mathcal{P}}{\tilde{\oplus}} b^+ = (a^+ \oplus b^+)^+$$

Le treillis $\mathsf{Im}\mathcal{K}$ et le treillis $\mathsf{Im}\mathcal{P}$ sont donc des sous-$\wedge$-demi-treillis du treillis complet $\mathcal{D}$. Schématiquement, les éléments de $\mathcal{D}$ et de $\mathsf{Im}\mathcal{K}$ peuvent être représentés par la figure 1.5.

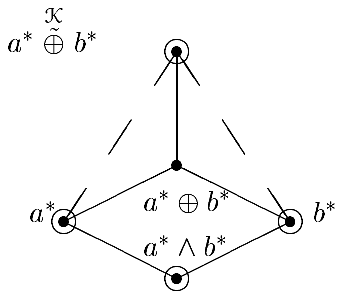


Figure 1.5 : •: éléments de $\mathcal{D}$ ∘: éléments de $\mathsf{Im}\mathcal{K}$

Remarque 1.102 Il faut remarquer ici que l'ordre de $\mathsf{Im}\mathcal{K}$ et $\mathsf{Im}\mathcal{P}$ sont des restrictions de l'ordre de $\mathcal{D}$ à $\mathsf{Im}\mathcal{K}$ et $\mathsf{Im}\mathcal{P}$ respectivement. Ceci illustre donc la remarque 1.21 puisque $\mathcal{K}$ est un treillis mais n'est pas un sous-treillis du treillis $\mathcal{D}$. En effet, on vérifie ici facilement que pour $a^*, b^* \in \mathsf{Im}\mathcal{K}$ on a

$$a^* \oplus b^* \preceq a^* \overset{\mathcal{K}}{\tilde{\oplus}} b^*.$$

◇

[5] si $\mathcal{D}$ est archimédien [Baccelli et al., 1992, def. 4.33], alors, $\forall a \neq \varepsilon$, $a \otimes T = T$.

Extension au cas matriciel : résiduation du produit

Les applications L_a et R_a sont résiduables sur un dioïde complet $\mathcal{D}$ (scalaire). Si l'on considère désormais l'application L_A définie sur le dioïde matriciel $\mathcal{D}^{n\times n}$

$$\begin{array}{rll} L_A : & \mathcal{D}^{n\times n} & \to \mathcal{D}^{n\times n} \\ & X & \mapsto AX \end{array}$$

on obtient le résultat suivant.

Théorème 1.103. *Soit $\mathcal{D}$ complet et $\mathcal{D}^{n\times n}$ le dioïde des matrices à valeurs dans $\mathcal{D}$. Soit $B \in \mathcal{D}^{n\times n}$, la plus grande solution de $AX \preceq B$ est la matrice $L_A^\sharp(B) \in \mathcal{D}^{n\times n}$, notée également $\frac{B}{A} = A\backslash B$. Les valeurs de cette matrice sont données par la relation*

$$(A\backslash B)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{n} A_{li}\backslash B_{lj}.$$

Preuve : $AX \preceq B$ équivaut à $\forall l, j \leq n$, $(A \otimes X)_{lj} = \bigoplus_{i=1}^{n}(A_{li}X_{ij}) \preceq B_{lj}$. Donc, ceci équivaut encore à $\forall l, j, i \leq n$, $(A_{li}X_{ij}) \preceq B_{lj}$. Puisque L_a définie sur $\mathcal{D}$ est résiduable, $AX \preceq B$ est donc équivalent à $\forall l, j, i \leq n$, $X_{ij} \preceq A_{li}\backslash B_{lj}$ ou $\forall i, j$, $X_{ij} \preceq \bigwedge_{l=1}^{n} A_{li}\backslash Blj$. □

Se placer dans un dioïde matriciel revient à manipuler exclusivement des matrices carrées. Néanmoins, on s'autorisera également la définition plus générale des applications L_A et $R_{A'}$ suivantes, où les tailles des matrices sont compatibles

$$\begin{array}{rlll} L_A : & \mathcal{D}^{p\times q} & \to \mathcal{D}^{n\times q} & \\ & X & \mapsto AX & (A \in \mathcal{D}^{n\times p}) \end{array} \qquad \begin{array}{rlll} R_{A'} : & \mathcal{D}^{q\times p} & \to \mathcal{D}^{q\times n} & \\ & X & \mapsto XA' & (A' \in \mathcal{D}^{p\times n}) \end{array}$$

Les équations $AX \preceq B$ et $XA' \preceq B'$ admettent alors $L_A^\sharp(B)$ et $R_{A'}^\sharp(B)$ comme plus grandes solutions respectives. Les valeurs de ces matrices s'obtiennent par la relation

$$B \in \mathcal{D}^{n\times q},\ (A\backslash B)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{n} A_{li}\backslash B_{lj}$$

$$B' \in \mathcal{D}^{q\times n},\ (B'/A')_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{n} B'_{il}/A'_{jl}$$

Remarque 1.104 Les ensembles de définition de L_A et $R_{A'}$ considérés précédemment, ne peuvent pas, à première vue, êtres considérés comme des dioïdes matriciels (le produit de matrices n'est pas alors une opération interne). Pour que ces applications puissent être vues comme étant définies sur des dioïdes complets (matriciels) il faudrait en fait considérer le dioïde matriciel $\mathcal{D}^{m\times m}$, où $m = \max(n, q, p)$. L'ensemble des matrices $\mathcal{D}^{n\times q}$ est alors vu comme un sous-ensemble de $\mathcal{D}^{m\times m}$ de matrices dont certaines lignes et/ou certaines colonnes ne contiennent que l'élément ε de $\mathcal{D}$. L'inconvénient de cette écriture réside alors dans la manipulation de matrices pouvant être principalement constituées de valeurs nulles, notamment lorsqu'on manipule des vecteurs. On s'autorisera donc par la suite l'écriture simplifiée des applications L_A et $R_{A'}$ où les matrices X et A considérées ne sont pas nécessairement de même taille mais de tailles compatibles pour le produit de matrices. On gardera tout de même à l'esprit la possibilité de tout réécrire dans un dioïde matriciel $\mathcal{D}^{m\times m}$. ◇

1.3.4 Complément sur l'étoile de Kleene

Nous achevons cette présentation des outils algébriques nécessaires à l'étude des graphes d'événements temporisés par des résultats complétant l'étude de l'application $\mathcal{K}$ dans le cas matriciel.

Le lemme 1.105 et le théorème 1.106 proviennent de la référence [Max Plus, 1991b].

Lemme 1.105. *Soit* $\mathcal{K} : \mathcal{D}^{n\times n} \to \mathcal{D}^{n\times n}, X \mapsto X^*$. *Soit* $A \in \mathcal{D}^{p\times n}$ *et* $B \in \mathcal{D}^{n\times q}$. *Il existe* $X, X' \in \mathcal{D}^{n\times n}$ *tels que*

$$A \backslash\!\!\!\circ A = X^* \text{ et } B /\!\!\!\circ B = (X')^*.$$

Autrement dit, $A \backslash\!\!\!\circ A \in \mathsf{Im}\mathcal{K}$ *et* $B /\!\!\!\circ B \in \mathsf{Im}\mathcal{K}$.

Preuve : D'après (1.42), $A \backslash\!\!\!\circ A \succeq E$, où E est la matrice identité de $\mathcal{D}^{n\times n}$. D'autre part, d'après (1.43), $A = A(A \backslash\!\!\!\circ A)$ donc $A \backslash\!\!\!\circ A = A \backslash\!\!\!\circ [A(A \backslash\!\!\!\circ A)]$. Or d'après (1.50), $A \backslash\!\!\!\circ [A(A \backslash\!\!\!\circ A)] \succeq A \backslash\!\!\!\circ A \otimes A \backslash\!\!\!\circ A$. On peut donc établir l'encadrement suivant

$$E \preceq (A \backslash\!\!\!\circ A)^2 \preceq A \backslash\!\!\!\circ A,$$

et même pour tout $n \geq 1$, $E \preceq (A \backslash\!\!\!\circ A)^n \preceq A \backslash\!\!\!\circ A$. Par sommation on obtient donc $(A \backslash\!\!\!\circ A)^* = A \backslash\!\!\!\circ A$. Une autre façon de lire ce résultat est "$A \backslash\!\!\!\circ A$ *est une étoile*". □

Théorème 1.106. *Soit* $A \in \mathcal{D}^{n\times n}$, *sont équivalents*

- (i) $A = A^*$
- (ii) $A = A \backslash\!\!\!\circ A$

Preuve :

- $(i) \Rightarrow (ii)$ si $A = A^*$ alors d'après (1.53) $A^* = A^* \backslash\!\!\!\circ A^* = A \backslash\!\!\!\circ A$.
- $(i) \Leftarrow (ii)$ si $A = A \backslash\!\!\!\circ A$ alors d'après le lemme 1.105, $A = A \backslash\!\!\!\circ A = (A \backslash\!\!\!\circ A)^* = A^*$.

□

Remarque 1.107 Ces résultats donnent un moyen pratique de vérifier qu'une matrice $A \in \mathcal{D}^{n\times n}$ appartient à l'image de $\mathcal{K}$ définie sur $\mathcal{D}^{n\times n}$. D'une part une étoile est invariante par l'application $x \mapsto x \backslash\!\!\!\circ x$, et elle est également invariante par l'étoile elle-même (puisque $\mathcal{K}$ est une fermeture). ◇

Remarque 1.108 (L'application $x \mapsto x \backslash\!\!\!\circ x$: un projecteur particulier) Le lemme 1.105, associé au théorème 1.106, indique que l'application $x \mapsto x \backslash\!\!\!\circ x$ est un "projecteur" dans l'ensemble des étoiles : pour $\mathcal{D}$ un dioïde complet, on a

$$\forall x \in \mathcal{D} \qquad x \backslash\!\!\!\circ x \in \mathsf{Im}\mathcal{K}$$
$$\forall x \in \mathcal{D} \qquad \frac{x \backslash\!\!\!\circ x}{x \backslash\!\!\!\circ x} = x \backslash\!\!\!\circ x.$$

Mais ce projecteur n'est pas isotone. On en a pour preuve que $\varepsilon \backslash\!\!\!\circ \varepsilon = T$, $e \backslash\!\!\!\circ e = e$, et $T \backslash\!\!\!\circ T = T$. En conséquence, on ne peut pas l'étudier via la théorie de la résiduation. ◇

1.4 Conclusions

Les restrictions d'applications introduites dans ce chapitre nous permettent d'aborder l'étude de l'étoile de Kleene comme l'étude d'une application "partiellement" résiduable. Plus exactement, $\mathcal{K} : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, x \mapsto x^*$ définie sur un dioïde complet $\mathcal{D}$ n'est pas résiduable mais sa restriction à l'image ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$ l'est. On peut en conséquence se demander s'il s'agit de la seule restriction résiduable de $\mathcal{K}$.

A titre d'exemple, prenons $\mathcal{K}$ définie sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$. On obtient alors $\mathcal{K}(x) = 0$ si $x \preceq 0$ et $\mathcal{K}(x) = +\infty$ sinon. L'image de $\mathcal{K}$ définie sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ est simplement $\mathsf{Im}\mathcal{K} = \{0, +\infty\}$. On vérifie alors facilement que ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$ est résiduable. Cependant, on remarquera également que pour tout b (fini) appartenant à l'intervalle $[0, +\infty[$, l'inéquation $\mathcal{K}(x) \preceq b$ admet $x = 0$ comme plus grande solution. Il est alors clair que sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$ n'est pas la seule restriction résiduable de $\mathcal{K}$ puisque la restriction ${}_{[0,+\infty]|}\mathcal{K}$ l'est également.

On évoquait lors de la remarque 1.46 qu'en raison de la résiduabilité de ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$, il doit nécessairement exister un plus grand codomaine B (au sens ensembliste) incluant $\mathsf{Im}\mathcal{K}$ et tel que la restriction ${}_{B|}\mathcal{K}$ soit résiduable. Notamment, pour $\mathcal{K}$ définie sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, on vient d'établir intuitivement que le plus grand codomaine B tel que ${}_{B|}\mathcal{K}$ soit résiduable est $B = [0, +\infty]$. Nous rappelons que B est alors également le plus grand ensemble tel que l'injection canonique ${}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\mathcal{K}}$ soit résiduable.

Pour un dioïde complet $\mathcal{D}$ quelconque, le problème est de caractériser algébriquement B. Plus exactement, il serait intéressant de pouvoir déterminer si B a, ou n'a pas, de structure de demi-treillis ou de treillis.

Supposons que B ait une structure de sup-demi-treillis dont la loi sup est notée $\sqcup$. Nous rappelons que l'injection canonique ${}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\mathcal{K}}$ n'est résiduable que s'il s'agit d'un sup-homomorphisme complet (d'après le théorème 1.62). En conséquence, si $(B, \sqcup)$ a une structure de sup-demi-treillis, ce demi-treillis est tel que

$$\forall a^*, b^* \in \mathsf{Im}\mathcal{K}, \quad {}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\mathcal{K}}(a^* \overset{\mathcal{K}}{\tilde{\oplus}} b^*) = a^* \sqcup b^*$$

c'est-à-dire plus simplement (puisque ${}_{B|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\mathcal{K}}$ est simplement une injection canonique),

$$\forall a^*, b^* \in \mathsf{Im}\mathcal{K}, \quad a^* \overset{\mathcal{K}}{\tilde{\oplus}} b^* = a^* \sqcup b^*.$$

Si B a une structure de sup-demi-treillis, alors $(\mathsf{Im}\mathcal{K}, \overset{\mathcal{K}}{\tilde{\oplus}})$ est nécessairement un sous-sup-demi-treillis de B, c'est-à-dire que les sup existants dans $\mathsf{Im}\mathcal{K}$ doivent exister également dans B.

Mais il n'est pas *a priori* nécessaire que B ait une structure de sup-demi-treillis (pour l'ordre de $\mathcal{D}$ restreint à B) pour que ${}_{B|}\mathcal{K}$ soit résiduable. Nous n'avons donc pas exploré plus loin la recherche de restrictions résiduables de $\mathcal{K}$ moins restrictives que ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$.

Après avoir rappelé dans ce premier chapitre les principaux outils algébriques nécessaires à l'étude et la commande de GET, nous présentons dans le chapitre suivant tout d'abord quelques notions sur la modélisation de systèmes à événements discrets par des réseaux de Petri, puis différentes représentations rencontrées dans la littérature(représentation aux dateurs, aux compteurs ou par des séries formelles) du comportement des GET.

Chapitre 2

Comportement linéaire des GET dans les dioïdes

2.1 Introduction

L'étude des systèmes à événements discrets (SED) constitue, depuis le début des années 70, un domaine de recherche très actif (de par son intérêt théorique et économique) ayant donné lieu à de nombreuses publications. De cette littérature se dégagent de multiples classes de systèmes mettant en jeu des phénomènes de natures différentes : parallélisme, saturation, synchronisation, exclusion mutuelle, choix, séquencement ... En raison de la dynamique complexe de ces systèmes, les modèles mathématiques utilisés pour les décrire n'en permettent pas toujours une analyse efficace.

Certaines sous-classes de SED bénéficient néanmoins de modèles bien adaptés pour aborder les problèmes d'évaluation de performance ou de commande. En particulier, au début des années 80, une nouvelle théorie, permettant d'étudier une classe particulière de systèmes, a vu le jour sous l'impulsion de chercheurs réunis par la suite dans le groupe Max Plus. Leurs premiers travaux montrent que certains réseaux de Petri[1] (RdP), les graphes d'événements temporisés[2] (GET), peuvent être munis d'une représentation d'état linéaire sur une structure algébrique de dioïde.

A la différence du modèle d'état classiquement associé à un RdP, l'état considéré pour aboutir à cette représentation linéaire est associé non plus aux places des GET mais à leurs transitions. Les variables d'état considérées sont de type *dateurs d'événements* ou *compteurs d'événements*. La structure algébrique utilisée pour cette représentation est un dioïde.

En considérant ces nouvelles variables d'état et une structure algébrique différente, la représentation d'état d'un GET est, dans la forme, très proche de la représentation d'état d'un système linéaire continu.

[1]les réseaux de Petri constituent un des modèles de description des systèmes à événements discrets les plus répandus

[2]il est clair aujourd'hui que ce ne sont d'ailleurs pas les seuls modèles analysables via l'approche (max,+). On peut citer notamment [Gaubert and Mairesse, 1997],[Gaubert, 1995a] pour les automates (max,+) et les empilements de pièces, ainsi que [Lahaye et al., 1999a] et [Lahaye et al., 1999b] pour l'étude des GET non-stationnaires.

Nous rappelons dans ce chapitre les modèles mathématiques couramment rencontrés dans la littérature (max,+). Le lecteur trouvera un exposé détaillé de ces modèles et de leur étude dans les références suivantes : [Cohen et al., 1985a], [Cohen et al., 1985b], [Cohen et al., 1986], [Cohen et al., 1989b], [Max Plus, 1990], [Max Plus, 1991a], [Max Plus, 1991b], [Gaubert and Klimann, 1991], [Baccelli et al., 1992], [Gaubert, 1992], [Cohen et al., 1993]. On dispose également aujourd'hui de quelques états de l'art dans cette théorie, les plus récents étant [Cohen, 1993], [Cohen et al., 1998] et [Gaubert, 1998], [Olsder, 1998](ces deux derniers ont été présentés lors d'une école de printemps dédiée à l'approche (max,+) en automatique et informatique).

Le dioïde privilégié pour la représentation entrée-sortie des GET sera par la suite le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. Nous rappelons quelques caractéristiques de cette structure algébrique et renvoyons le lecteur à [Cohen et al., 1989b], [Cohen, 1993] et [Baccelli et al., 1992] pour une présentation plus approfondie.

2.2 Les graphes d'événements temporisés

Après de brefs rappels sur les réseaux de Petri (ordinaires), cette première partie rappelle les définitions et certaines caractéristiques générales des graphes d'événements (non temporisés puis temporisés).

2.2.1 Les réseaux de Petri

Les Réseaux de Petri (RdP) sont des modèles, à la fois graphiques et mathématiques, principalement dédiés à la représentation du comportement des systèmes dynamiques à événements discrets. En raison de leur grande puissance de modélisation, ces modèles ont fait l'objet de très nombreux travaux de recherche ces 30 dernières années. On ne propose ici que de brefs rappels sur ces outils. Le lecteur intéressé par de plus amples développements trouvera une présentation générale et des références bibliographiques dans [Murata, 1989], ainsi que des résultats particuliers sur les RdP temporisés dans [Chrétienne, 1983].

Un RdP (non temporisé) est constitué d'une part d'un graphe orienté comportant deux types de sommets (places et transitions), et d'autre part, d'un marquage, c'est-à-dire, d'un ensemble de jetons.

On notera $\mathcal{N} = (\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{E})$ le graphe bipartite orienté associé à un réseau de Petri, où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des places, $\mathcal{Q}$ est l'ensemble des transitions et $\mathcal{E} \subset \mathcal{P} \times \mathcal{Q} \cup \mathcal{Q} \times \mathcal{P}$ l'ensemble des arcs orientés. Graphiquement, les places sont représentées par des cercles et les transitions par des barres. On remarquera qu'il n'y a pas d'arc de place à place, ni de transition à transition. La figure 2.1 représente un tel graphe.

Une transition sans place amont est dite *transition source* et une transition sans place aval est dite *transition puits*.

Remarque 2.1 (Théorie des Graphes) Une partie du vocabulaire utilisé pour décrire les RdP d'un point de vue structurel est issue de la théorie des graphes. Nous invitons donc le

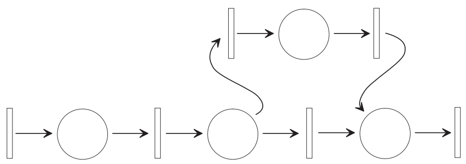


Figure 2.1 : Représentation graphique d'un réseau de Petri (non marqué)

lecteur à consulter l'annexe A pour certaines définitions (chemins, circuits, connexité ...). ◇

La différence majeure entre les RdP et les graphes orientés conventionnels réside dans l'introduction d'un *marquage* noté $\mathcal{M} : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$. Cette application associe à toute place $p_i \in \mathcal{P}$ le nombre de jetons qu'elle contient. La particularité de ce marquage est de pouvoir *évoluer* lors d'occurences d'événements associés aux transitions du RdP. Un RdP doit donc être vu comme un modèle dynamique, le marquage de ses places étant représentatif de son *état*. Le marquage déterminant l'état du RdP initialement est dit *marquage initial* et est noté $\mathcal{M}_0$. Il est important de noter qu'un RdP est complétement caractérisé par le couple $(\mathcal{N}, \mathcal{M}_0)$.

La dynamique d'un RdP (ordinaire) est régie par les règles d'évolution du marquage suivantes:
- une transition est dite *franchissable* si toutes les places amont à cette transition contiennent au moins une marque (un jeton)
- une transition franchissable peut être, ou ne pas être, franchie selon l'occurence ou non de l'événement associé à cette transition.
- le *franchissement* de la transition prélève un jeton dans chacune de ses places amont et ajoute un jeton dans chacune de ses places aval.

Remarque 2.2 La définition du RdP donnée ici correspond à celle d'un réseau dit *ordinaire*, c'est-à-dire tel que chaque franchissement prélève (resp. restitue) exactement 1 jeton dans chacune des places amont (resp. aval). A titre d'information, on rappelle que les RdP ordinaires ne sont qu'un cas particulier des RdP dits *généralisés* qui possèdent des arcs pondérés. De ces pondérations dépendent le nombre de jetons prélevés (resp. retitués) au cours d'un franchissement. ◇

Pour un RdP $(\mathcal{N}, \mathcal{M}_0)$, on dit qu'un marquage $\mathcal{M}'$ est *atteignable* s'il existe, depuis le marquage $\mathcal{M}_0$, une séquence de franchissements de transitions, notée σ, permettant d'atteindre le marquage $\mathcal{M}'$. Plus synthétiquement, l'atteignabilité du marquage $\mathcal{M}'$ depuis le marquage initial sera représentée par la notation $\mathcal{M}_0 \xrightarrow{\sigma} \mathcal{M}'$.

Puisque l'état d'un RdP est caractérisé par son marquage, une autre vision du comportement d'un RdP consiste dans la description de son graphe des marquages atteignables, aussi appelé graphe d'atteignabilité. Chaque noeud de ce graphe orienté est un marquage atteignable du système $(\mathcal{N}, \mathcal{M}_0)$. Les arcs de ce graphe sont parfois étiquetés des événements (transitions) donnant lieu à des changements d'états. On note $R(\mathcal{M}_0)$ ce graphe d'atteignabilité: $R(\mathcal{M}_0) = \{\mathcal{M}_i | \exists \sigma, \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\sigma} \mathcal{M}_i\}$.

Exemple 2.3 Le RdP de la figure 2.2 représente un système, par exemple informatique, où 2 tâches requièrent une même ressource renouvelable. Pour ce RdP, on a $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ et $\mathcal{Q} = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$. Le marquage initial du RdP est $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$. Un jeton dans la place

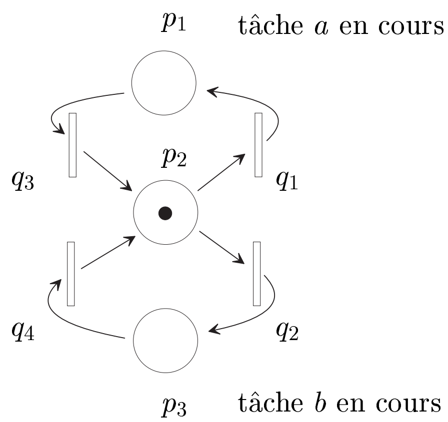


Figure 2.2 : Réseau modélisant le comportement d'un système à ressource partagée

p_2 signifie que la ressource est disponible. Un jeton dans la place p_1 (resp. p_2) signifie que la tâche a (resp. b) dispose de la ressource commune. Les événements associés aux transitions q_1 et q_2 signifient respectivement "réservation de la ressource par la tâche a" ou "réservation de la ressource par la tâche b", et ceux associés à q_3 et q_4 concernent la restitution de la ressource.

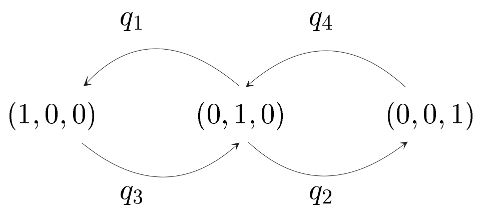


Figure 2.3 : Graphe des marquages atteignables du réseau figure 2.2.

La figure 2.3 présente le graphe $R(\mathcal{M}_0)$ correspondant à ce RdP. Le graphe $R(\mathcal{M}_0)$ résume les seuls états possibles du système ainsi que les événements (transitions) à l'origine des changements d'état. $\diamond$

Concurrence et synchronisation Parmi les phénomènes rencontrés dans les systèmes à événements discrets, certains peuvent être modélisés par des structures élémentaires de RdP. Les quatre structures représentées par la figure 2.4 sont appelées respectivement

- concurrence à la consommation de jetons d'une place (a) : lorsque plusieurs arcs divergent à partir d'une même place; ce "conflit" structurel nécessite un arbitrage, un choix. Les systèmes faisant apparaître ce type de conflit sont dits non-déterministes.

- concurrence à la fourniture de jetons dans une place (b) : lorsque plusieurs arcs convergent sur une même place.

- synchronisation dans la consommation de jetons de plusieurs places (c) : lorsque plusieurs arcs convergent sur une même transition.
- synchronisation dans la fourniture de jetons à plusieurs places (d) : lorsque plusieurs arcs divergent depuis une même transition.

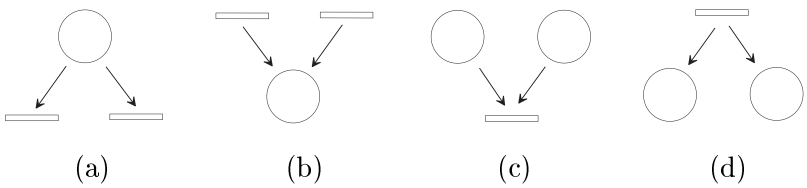


Figure 2.4 : Concurrence et synchronisation dans les RdP.

Quelques propriétés des RdP

Le graphe de marquages $R(\mathcal{M}_0)$ associé à un RdP fournit des indications essentielles sur le fonctionnement du système qu'il représente. Suivant que $R(\mathcal{M}_0)$ est fini ou infini, qu'il présente ou non des circuits, ce graphe des marquages reflète certaines propriétés caractéristiques du système modélisé.

Définition 2.4 (Bornitude) *Un RdP $(\mathcal{N}, \mathcal{M}_0)$ est dit borné si pour tout marquage $\mathcal{M}' \in R(\mathcal{M}_0)$, le marquage de chaque place est borné, c'est-à-dire qu'il existe un entier K vérifiant*

$$\forall p_i \in \mathcal{P}, \forall \mathcal{M}' \in R(\mathcal{M}_0), \mathcal{M}'(p_i) \leq K.$$

Remarque 2.5 Un RdP borné a donc un graphe des marquages $R(\mathcal{M}_0)$ fini, ou de manière équivalente, les états possibles du RdP sont dénombrables. $\diamond$

Lorsqu'un RdP modélise un système manufacturier, certaines places représentent des convoyeurs ou bien des zones de stockages intermédiaires. La bornitude du marquage du modèle est alors synonyme de limitation de la taille des stocks internes du système. La bornitude du RdP reflète alors en quelque sorte une propriété de "stabilité" du système de production modélisé.

Définition 2.6 (Vivacité) *Un RdP $(\mathcal{N}, \mathcal{M}_0)$ est dit vivant si pour tout marquage $\mathcal{M}_1 \in R(\mathcal{M}_0)$ et pour toute transition $q_i \in \mathcal{Q}$, il existe au moins un marquage $\mathcal{M}_2$ atteignable depuis $\mathcal{M}_1$ ($\exists \sigma | \mathcal{M}_1 \xrightarrow{\sigma} \mathcal{M}_2$) par une séquence de franchissements qui inclut q_i ($q_i \in \sigma$).*

Pour un RdP vivant, toute transition q_i peut être franchie après une séquence de franchissements σ finie, et ce depuis n'importe quel marquage atteignable $\mathcal{M}' \in R(\mathcal{M}_0)$. A l'inverse, un RdP non vivant est tel qu'au moins une transition q_j n'est, à partir d'un marquage $\mathcal{M}' \in R(\mathcal{M}_0)$, plus jamais franchissable. Ces transitions qui ne sont plus jamais franchissables après un nombre fini de franchissements sont dites mortes. La non-vivacité révèle souvent un problème de conception du système modélisé; elle montre qu'une partie du système n'est, à partir d'un état donné, plus sensible aux événements externes.

2.2.2 Les graphes d'événements temporisés

Suite à ces quelques notions sur les RdP, notre intérêt va se porter désormais tout particulièrement sur la sous-classe appelée classe des graphes d'événements. On définit formellement cette classe de RdP ainsi que certaines de leurs propriétés.

Définition 2.7 (Graphe d'événements) *Un graphe d'événements est un RdP tel que toute place a exactement une transition amont et une transition aval.*

En conséquence, les systèmes faisant apparaître des phénomènes de concurrence (fig. 2.4 (a)-(b)) ne peuvent pas être modélisés par des graphes d'événements. En raison de cette particularité, les graphes d'événements sont souvent appelés des modèles déterministes.

Remarque 2.8 On évoquait en introduction la nécessité de classifier les systèmes afin de leur associer un modèle mathématique adapté. Parmi ces classes, deux se dégagent facilement. D'une part, celle des systèmes faisant apparaître uniquement des phénomènes de concurrence, d'autre part celle des systèmes ne présentant que des phénomènes de synchronisation, les graphes d'événements étant représentatifs de cette dernière classe.

La classe des RdP ne faisant apparaître que des phénomènes de concurrence, c'est-à-dire pour lesquels les transitions ont exactement une place amont et une place aval (voir fig. 2.2), est appelée classe des *machines d'état.* Pour cette classe de systèmes, le modèle mathématique le plus adapté a été introduit par Ramadge et Wonham [Ramadge and Wonham, 1989] et s'appuie sur la théorie des langages.

Notons également la classe des RdP à choix libre pour laquelle Baccelli propose un modèle [Baccelli et al., 1995],[Baccelli et al., 1996]. Cette classe contient l'ensemble des RdP pour lesquels les transitions en concurrence sur la consommation des jetons d'une place (fig. 2.4 (a)) ne synchronisent pas la consommation de jetons de plusieurs places (fig. 2.4 (c)). $\diamond$

Propriétés des graphes d'événements

On rappelle brièvement quelques caractéristiques des graphes d'événements au travers des théorèmes suivants.

Théorème 2.9. *Dans un graphe d'événements, le nombre de jetons d'un circuit élémentaire est constant.*

Preuve : Si une transition franchissable appartenant à un circuit élémentaire est franchie, son franchissement prend un jeton dans une des places du circuit pour la remettre immédiatement dans une autre place du circuit. L'opération de franchissement d'une transition d'un circuit laisse donc invariant le nombre de jetons du circuit. $\square$

Un graphe d'événements sera dit *autonome* s'il ne contient pas de transition source.

Théorème 2.10. *Un graphe d'événements autonome est vivant si, et seulement si, il ne contient pas de circuit sans jeton.*

Preuve : Si un circuit d'un graphe d'événements autonome ne contient pas de jeton, en référence au théorème 2.9, ce circuit n'en contiendra jamais et donc toutes ses transitions sont en permanence non franchissables : le graphe d'événements est alors non vivant. Inversement, pour un graphe d'événements autonome non vivant, si une transition n'est franchie pour aucune séquence de franchissements (transition morte), c'est qu'une de ses transitions amont n'est, elle-même, jamais franchie. En remontant ainsi d'une transition morte à une autre située en amont, on aboutit finalement à la transition d'un circuit qui est donc nécessairement sans jeton. □

Remarque 2.11 Les graphes d'événements considérés dorénavant seront systématiquement vivants. ◇

Introduction du temps dans les graphes d'événements

Les modèles de SED étudiés par la suite sont temporisés. On rappelle qu'il y a deux façons naturelles d'introduire le temps dans un RdP. On peut associer un temps de franchissement aux transitions ou un temps de séjour aux places (ou les deux à la fois). Il a été montré que les réseaux P-temporisés (temporisés sur les places) peuvent toujours se ramener à des réseaux T-temporisés (temporisés sur les transitions) et inversement (cf. [Murata, 1989]). Le choix de l'un ou l'autre de ces modèles temporisés est donc arbitraire. Par souci d'homogénéité avec la littérature (max,+), nous ne considérons par la suite que des réseaux P-temporisés. Les graphes d'événements temporisés (GET) présentés dorénavant seront donc des graphes d'événements P-temporisés.

On note $\mathcal{T} : \mathcal{P} \to \mathbb{N}$ l'application qui à toute place $p_i \in \mathcal{P}$ associe sa temporisation $\mathcal{T}(p_i)$. On note $\mathcal{T}_0$ l'ensemble des temporisations initiales, cette temporisation sera considérée ici comme *invariante* au cours de l'évolution du réseau. De tels GET sont considérés comme stationnaires, en opposition aux graphes d'événements non-stationnaires (temporisations variables) voire stochastiques (les temporisations sont des variables aléatoires caractérisées par des lois de distribution).

Pour les GET stationnaires, les règles d'évolution du marquage s'énoncent de la façon suivante : lorsqu'un jeton arrive dans une place p_i munie d'une temporisation égale à $\mathcal{T}_0(p_i)$, le jeton doit séjourner au minimum $\mathcal{T}_0(p_i)$ unités de temps dans cette place avant de pouvoir contribuer au franchissement de la transition aval (unique) à cette place.

Sur la figure 2.5, le marquage initial de la place située entre la transition a et b étant nul, si la transition a est franchie à la date t, la transition b n'est pas franchissable avant la date $t + 2$.

Pour illustrer ce type de modèle temporisé, nous proposons l'exemple d'un GET représentant le fonctionnement d'une machine.

Exemple 2.12 Le GET de la figure 2.5 représente une machine capable de traiter une pièce à la fois, de temps de traitement égal à 2 u.t. (unités de temps) et de temps de reconfiguration égal à 1 u.t.. Pour ce modèle, la place contenant initialement un jeton doit se voir attribuer le sens suivant : machine disponible ou en reconfiguration. Les événements associés à a et b sont de type "réservation" et "libération" de la machine. La transition u correspond à l'alimentation du stock amont à la machine en pièces brutes et y au prélèvement de pièces finies dans le stock aval à la machine. ◇

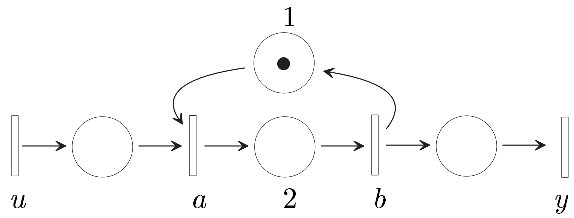


Figure 2.5 : Modèle GET d'une machine.

2.3 Représentation d'état des graphes d'événements temporisés

Jusqu'à présent, la variable représentative de l'état d'un RdP a été le marquage. Classiquement, la variation du marquage d'un RdP, notée $\Delta\mathcal{M}$, peut s'écrire comme l'expression du produit d'une matrice, appelée matrice d'incidence, par un vecteur de tirs de transitions. L'évolution du marquage est représentée par une équation de la forme $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_0 + \Delta\mathcal{M}$. Il s'agit du modèle mathématique le plus couramment associé aux RdP (le lecteur intéressé par ce modèle mathématique pourra se reporter à [Murata, 1989]).

Si l'on se réfère à la figure 2.5, la seule caractéristique que reflète une telle représentation d'état concerne l'état de la machine : machine libre ou occupée.

Pour pouvoir discuter les performances du système temporisé, c'est-à-dire déterminer son régime transitoire ou son régime permanent (temps de cycle), il semble nécessaire de passer à un autre type de représentation.

2.3.1 Equations d'état des GET dans les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$

En effet, pour la classe des GET, un autre modèle mathématique, correspondant au choix d'un vecteur d'état différent du marquage, semble plus pertinent.

Tout d'abord, l'état qu'il nous faut considérer désormais n'est plus lié aux places, mais aux transitions. Nous introduisons pour ce faire deux types d'applications :

Soit $x_j \in \mathcal{Q}$ une transition d'un GET, nous utiliserons les notations suivantes :

$x_j(k)$	:	date à laquelle l'événement numéroté k (tir) associé à x_j a lieu
$x_j(t)$	:	nombre de tirs de la transition x_j ayant eu lieu jusqu'à la date t

Le premier type d'application est dit *dateur* d'événements et le second *compteur* d'événements.

Conditions initiales et numérotation Par convention, les événements (les tirs des transitions) seront numérotés à partir de 0; le tir n° 0 est le premier tir d'une transition. De plus, $x_j(k) = +\infty$ signifie, par convention, que l'événement numéroté k (ainsi que tous les événements suivants) n'a jamais lieu. D'autre part, les marques présentes dans le GET seront supposées disponibles depuis "l'origine des temps" c'est-à-dire depuis la date $-\infty$. C'est ce que l'on appelle des conditions initiales canoniques.

Les vecteurs $X(k) = \left(x_1(k) \dots x_{|\mathcal{Q}|}(k)\right)^t$ et $X(t) = \left(x_1(t) \dots x_{|\mathcal{Q}|}(t)\right)^t$ définissent ainsi de nouveaux vecteurs d'état pour un GET. A la différence du marquage, ces variables d'état ont par nature une propriété de monotonie qui doit être soulignée: $\forall x_j \in \mathcal{Q}$,

$$x_j(k+1) \geq x_j(k) \text{ et } x_j(t+1) \geq x_j(t).$$

Hypothèse de fonctionnement FIFO Le mode de fonctionnement des places des graphes GET considérés par la suite sera de type FIFO (First-In, First-Out), c'est-à-dire que le k-ième jeton rentré dans une place sera également le k-ième à contribuer au franchissement de la transition aval à cette place.

L'introduction de cette hypothèse de fonctionnement permet d'établir un système d'inéquations sur les variables d'états (dateurs ou compteurs). On présente simplement les inéquations relatives aux deux graphes élémentaires de la figure 2.6. On obtient pour ces modèles les inégalités suivantes faisant intervenir les dateurs et compteurs associés aux transitions :

1. Représentation par des dateurs

$$x_n(k) \geq \max(x_m(k), x_l(k)) \tag{2.1}$$
$$x_j(k) \geq x_i(k-\nu) + \tau \tag{2.2}$$

2. Représentation par des compteurs

$$x_n(t) \leq \min(x_m(t), x_l(t)) \tag{2.3}$$
$$x_j(t) \leq x_i(t-\tau) + \nu \tag{2.4}$$

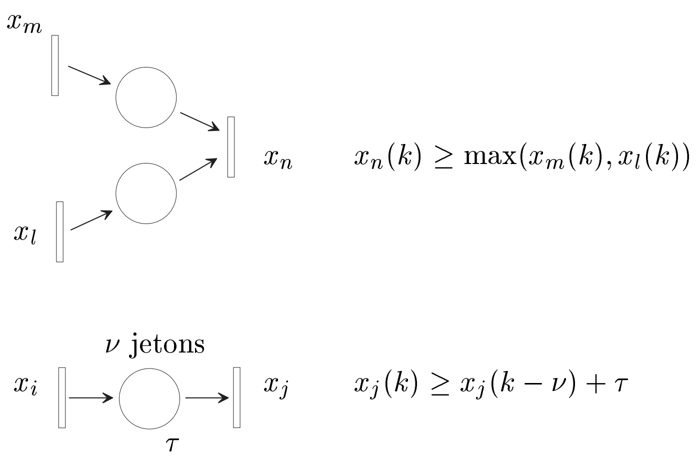


Figure 2.6 : Equations aux dateurs sur des graphes d'événements temporisés élémentaires

Les inégalités (2.1) à (2.4) restent valides pour n'importe quelle séquence de tir des transitions x_i, x_j, x_l, x_m et x_n et par conséquent tiennent compte de toute évolution possible du réseau.

Notamment, les inégalités (2.1) et (2.3) représentent le phénomène de synchronisation. En effet, pour la figure 2.6, la transition x_n ne peut être franchie k fois que si x_m et x_l ont été franchies également au moins k fois chacune. Du point de vue compteur, la synchronisation se caractérise donc par la présence d'un opérateur *min*, et du point de vue dateur, par un opérateur *max*.

Néanmoins, l'obtention d'inégalités sur les variables d'état n'est pas encore pleinement satisfaisante. Ces inégalités prennent en compte "trop" d'évolutions possibles du système. Pour pouvoir caractériser l'évolution des variables d'état par des équations récurrentes, il nous faut donc considérer un cas "limite" de fonctionnement appelé fonctionnement au plus tôt.

Fonctionnement au plus tôt Nous partitionnons l'ensemble des transitions de la façon suivante, $\mathcal{Q} = \mathcal{I} \cup \mathcal{S} \cup \mathcal{O}$, où

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{I} & : & \text{ensemble des transitions sources} \\ \mathcal{O} & : & \text{ensemble des transitions puits} \\ \mathcal{S} & : & \text{ensemble des transitions internes } (\mathcal{S} = \mathcal{Q} \backslash \{\mathcal{I} \cup \mathcal{O}\}) \end{array}$$

On utilisera désormais les notations suivantes:

$$\begin{array}{ll} u_i(.) & \text{désignera un compteur ou un dateur associé à une transition de } \mathcal{I} \\ x_i(.) & \text{sera associé à une transition de } \mathcal{S} \\ y_i(.) & \text{sera associé à une transition de } \mathcal{O}. \end{array}$$

On appellera couramment transitions d'entrée et de sortie respectivement les transitions de $\mathcal{I}$ et de $\mathcal{O}$.

On appelle *fonctionnement au plus tôt* le mode de fonctionnement d'un GET suivant :
- les transitions de $\mathcal{S} \cup \mathcal{O}$ sont franchies dès qu'elles sont franchissables
- les transitions de $\mathcal{I}$ sont en permanence franchissables, mais ne sont franchies que sur l'occurence d'événements associés à ces transitions.

En fonctionnement au plus tôt, seules les transitions d'entrée sont franchies sur des séquences d'événements externes. Par analogie avec la théorie de la commande classique, on appellera plus tard *commandes* ces séquences associées aux transitions d'entrée.

Sous l'hypothèse de fonctionnement au plus tôt qui, nous le rappelons, est un comportement limite du GET, l'évolution des composantes x_i de l'état est alors exprimée par les équations suivantes :

$$\text{représentation par des dateurs} \left\{ \begin{array}{lcl} x_n(k) & = & \max(x_m(k), x_l(k)) \\ x_j(k) & = & x_i(k-\nu) + \tau \end{array} \right.$$

$$\text{représentation par des compteurs} \left\{ \begin{array}{lcl} x_n(t) & = & \min(x_m(t), x_l(t)) \\ x_j(t) & = & x_i(t-\tau) + \nu \end{array} \right.$$

Ces équations récurrentes se réécrivent désormais facilement dans les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$. Dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, les dateurs associés aux transitions de la figure 2.6 vérifient les égalités suivantes

$$\begin{array}{lcl} x_n(k) & = & x_m(k) \oplus x_l(k) \\ x_j(k) & = & \tau \otimes x_i(k-\nu) \end{array}$$

et, dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$, les compteurs associés à ces mêmes transitions vérifient les équations récurrentes suivantes

$$\begin{aligned} x_n(t) &= x_m(t) \oplus x_l(t) \\ x_j(t) &= \nu \otimes x_i(t-\tau) \end{aligned}$$

Dans les deux cas, l'opérateur $\oplus$ du dioïde correspond à l'opération de synchronisation pour le GET.

Le théorème suivant fournit la forme générale des équations récurrentes obtenues pour un GET quelconque dans les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$.

Théorème 2.13. *Soit un graphe d'événements temporisé $(\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{E}, \mathcal{M}_0, \mathcal{T}_0)$. Pour toute place $p_i \in \mathcal{P}, \mathcal{M}_0(p_i)$ désigne le marquage initial de la place p_i et $\mathcal{T}_0(p_i)$ la temporisation initiale (et définitive) de cette place. Soit $\mathsf{M} = \max_{p_i \in \mathcal{P}}(\mathcal{M}_0(p_i))$ et $\mathsf{T} = \max_{p_i \in \mathcal{P}}(\mathcal{T}_0(p_i))$.*

Si l'on associe un dateur à chaque transition $q_j \in \mathcal{Q}$, on obtient alors la représentation d'état suivante sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$

$$\left\{ \begin{aligned} X(k) &= \bigoplus_{i=0}^{\mathsf{M}} A_i X(k-i) \oplus \bigoplus_{i=0}^{\mathsf{M}} B_i U(k-i) \\ Y(k) &= \bigoplus_{i=0}^{\mathsf{M}} C_i X(k-i) \end{aligned} \right. \tag{2.5}$$

Si l'on associe un compteur à chaque transition $q_j \in \mathcal{Q}$, on obtient alors la représentation d'état suivante sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$

$$\left\{ \begin{aligned} X(t) &= \bigoplus_{j=0}^{\mathsf{T}} A_j X(t-j) \oplus \bigoplus_{j=0}^{\mathsf{T}} B_j U(t-j) \\ Y(t) &= \bigoplus_{j=0}^{\mathsf{T}} C_j X(t-j) \end{aligned} \right.$$

Exemple 2.14 Nous fournissons ici la représentation d'état sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ correspondant au GET de la figure 2.7. Les variables d'état de ce GET sont reliées par les relations aux dateurs suivantes:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 1x_2(k) \oplus 1u_1(k-1) \\ x_2(k) &= x_1(k-1) \oplus u_2(k) \\ x_3(k) &= 2x_1(k-2) \oplus x_2(k) \\ y(k) &= x_3(k) \end{aligned}$$

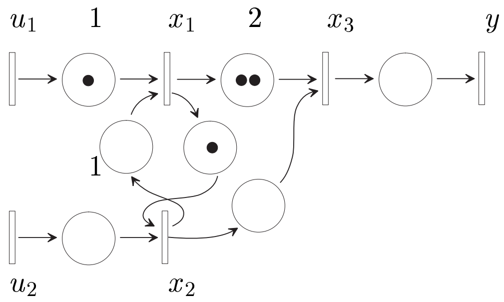


Figure 2.7 : GET à deux entrées et une sortie

Ce qui conduit à la représentation d'état suivante:

$$\left\{\begin{array}{rcl} X(k) & = & \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} X(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} X(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} X(k-2) \\ & & \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(k) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(k-1) \\ Y(k) & = & \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} X(k) \end{array}\right.$$

avec $X(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) & x_2(k) & x_3(k) \end{pmatrix}^t$ et $U(k) = \begin{pmatrix} u_1(k) & u_2(k) \end{pmatrix}^t$.

$\diamond$

Forme récurrente explicite La représentation d'état sous une forme ARMA d'un GET fournie par le théorème 2.13 peut toujours se ramener à une forme récurrente markovienne du type :

$$\text{sur } \overline{\mathbb{Z}}_{max} : \qquad \left\{\begin{array}{rcl} X(k) & = & AX(k-1) \oplus BU(k) \\ Y(k) & = & CX(k) \end{array}\right. \tag{2.6}$$

ou

$$\text{sur } \overline{\mathbb{Z}}_{min} : \qquad \left\{\begin{array}{rcl} X(t) & = & AX(t-1) \oplus BU(t) \\ Y(t) & = & CX(t) \end{array}\right.$$

au prix d'une extension du vecteur d'état $X(k)$ ou $X(t)$.

Pour obtenir la forme récurrente explicite (2.6) à partir de la forme ARMA (2.5) sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, on doit exprimer un GET dont le comportement est équivalent à celui représenté par (2.5) et tel que les matrices A_i soient nulles pour $i \neq 1$ et que les matrices B_i, C_i soient nulles pour $i > 0$.

Pour le GET équivalent cela signifie:

- aucune place située entre deux transitions internes ($\in \mathcal{S}$) ne doit contenir plus d'un jeton

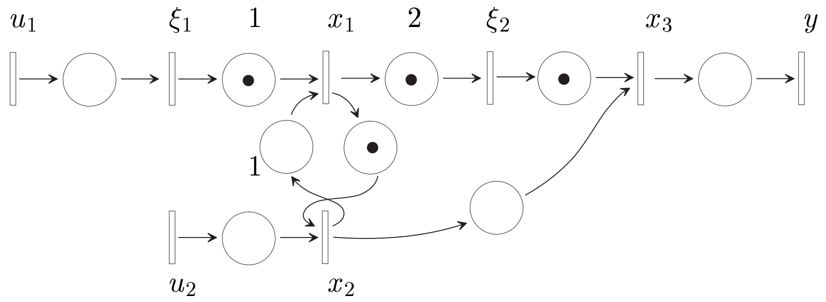


Figure 2.8 : GET équivalent à celui de la figure 2.7 en vue d'une représentation markovienne.

- toutes les places situées entre une transition source ($\in \mathcal{I}$) et une transition interne doivent être sans jeton
- toutes les places situées entre une transition interne et une transition puits ($\in \mathcal{O}$) doivent être sans jeton

Exemple 2.15 La figure 2.8 représente un GET dont le comportement entrée-sortie est équivalent à celui de la figure 2.7. En introduisant des états intermédiaires ξ_1 et ξ_2, on aboutit à la représentation d'état suivante sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ avec $X(k) = \begin{pmatrix}\xi_1(k) & x_1(k) & x_2(k) & \xi_2(k) & x_3(k)\end{pmatrix}^t$

$$\left\{\begin{array}{lcl} X(k) & = & \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} X(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} X(k-1) \oplus \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(k) \\ \\ Y(k) & = & \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} X(k) \end{array}\right.$$

Il suffit alors de supprimer la partie implicite de l'équation d'état grâce au théorème 1.86. La plus petite solution[3] en $X(k)$ de l'équation implicite $X(k) = A_0X(k) \oplus A_1X(k-1) \oplus BU(k)$ est $X(k) = (A_0)^*A_1X(k-1) \oplus (A_0)^*BU(k)$ avec $A_0^* = E \oplus A_0 \oplus A_0^2 \oplus \dots$ où E est la matrice identité. La forme récurrente explicite de ce GET est donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} X(k) & = & \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} X(k-1) \oplus \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \end{pmatrix} U(k) \\ \\ Y(k) & = & \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} X(k) \end{array}\right.$$

$\diamond$

[3]qui correspond à l'évolution de l'état du GET en fonctionnement au plus tôt

2.3.2 Rappels sur la théorie spectrale des matrices (max,+) et (min,+)

On rappelle ici certains des plus anciens résultats obtenus via la représentation d'état (max,+) ou (min,+) des GET. En effet, les premiers travaux réalisés via cette approche mirent en évidence la caractérisation algébrique de critères de performances tels que le temps de cycle ou le taux de production des GET. Nous ne rappelons ici que l'approche (max,+), le raisonnement étant identique dans l'algèbre (min,+).

Considérons un GET dont la forme récurrente explicite sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ a pour équation d'état

$$X(k) = AX(k-1) \oplus BU(k).$$

Si les entrées de ce système sont $U(k) = (\varepsilon \dots \varepsilon)^t$, $\forall k \in \mathbb{Z}$ l'évolution de l'état s'exprime simplement par la récurrence

$$X(k) = AX(k-1).$$

Une telle entrée correspond pratiquement à tirer toutes les transitions d'entrée une infinité de fois à la date $-\infty$, c'est-à-dire que l'entrée n'est pas une contrainte pour l'évolution de l'état du GET. Le fonctionnement du GET pour ce type d'entrée est appelé *régime autonome.*

Le problème de recherche de valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A s'exprime comme la recherche de couples (λ, v), avec $v \neq \varepsilon$ tels que

$$A \otimes v = \lambda \otimes v.$$

Pour l'évolution de l'état du système en régime autonome, si λ est valeur propre de A et $X(0)$, le vecteur d'état initial, est vecteur propre de A alors

$$X(k) = \lambda^k X(0) = \lambda X(k-1)$$

soit, dans l'algèbre usuelle, pour chacune des variables d'état $x_i(.)$

$$x_i(k) = \lambda + x_i(k-1)$$

autrement dit, toutes les variables d'état sont incrémentées de λ lorsque k est incrémenté de 1.

En résumé, si A dispose d'une valeur propre, en partant d'un état initial $X(0)$ égal à un vecteur propre de A, alors le GET fonctionne en régime autonome de façon périodique de période 1 dès l'état initial et la valeur propre λ correspond au *temps de cycle du GET*, c'est-à-dire au temps séparant deux tirs consécutifs d'une transition. L'analyse spectrale de la matrice A vise donc à fournir un critère de performance sur le système modélisé.

Les résultats de théorie spectrale des matrices (max,+) fournis par la suite permettent donc d'aborder l'évaluation de performance des GET d'un point de vue algébrique. Le lecteur trouvera une démonstration de ces résultats dans [Gondran and Minoux, 1985], [Baccelli et al., 1992] ou [Gaubert, 1992].

Théorème 2.16. *Soit $A \in \mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$. Si A est irréductible*[4] *alors A admet une valeur propre λ unique égale au rayon spectral*

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathsf{tr}(A^k)^{1/k}$$

[4] $\mathcal{G}(A)$, le graphe de précédence associé à A, est fortement connexe (cf annexe A)

où $\mathsf{tr}(A^k) = \bigoplus_{i=1}^{n} [A^k]_{ii}$.

Remarque 2.17 Il est possible de calculer cette valeur propre en termes de graphe. En notant c_i un circuit élémentaire du GET, $N(c_i)$ le nombre de jetons de ce circuit et $T(c_i)$ la somme des temporisations de ce circuit, on obtient la valeur propre λ unique, et donc le temps de cycle du GET, par l'expression

$$\lambda = \max_{\text{circuits élémentaires}} \frac{T(c_i)}{N(c_i)}.$$

$\diamond$

Remarque 2.18 (Cas réductible) Le cas où A est irréductible signifie que toutes les transitions internes du GET sont dans une même composante fortement connexe. Le cas plus général où A est réductible a été également traité dans [Gaubert, 1992]. Les résultats énoncés dans le cas réductible s'appuient sur une décomposition du graphe de précédence de A en composantes fortement connexes, et une étude séparée de chacune de ces composantes. Ce qui se dégage de cette étude est qu'il n'y a plus nécessairement unicité de la valeur propre lorsque A est réductible. Cependant, le rayon spectral $\rho(A)$ demeure valeur propre de A (c'est la plus grande pour les matrices (max,+)). $\diamond$

L'établissement d'une valeur propre de A permet d'évaluer le comportement périodique d'un GET en régime autonome lorsque la condition initiale $X(0)$ est vecteur propre. On peut se demander comment se comporte le graphe pour une condition initiale quelconque. Le théorème suivant et son interprétation fournissent la réponse à cette question.

Théorème 2.19 ([Cohen et al., 1983],[Chrétienne, 1983]) *Soit* $A \in \mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$ *irréductible. Il existe deux entiers* N *et* c *tels que*

$$n \geq N \Rightarrow A^{n+c} = \rho(A)^c A^n,$$

c *est appelé cyclicité de* A.

Si A est irréductible, on peut donc écrire en régime autonome

$$\begin{aligned} X(k) &= A^{n+c} X(k-n-c) \\ &= \rho(A)^c \otimes X(k-c). \end{aligned}$$

Autrement dit, en régime autonome, pour k suffisamment grand ($k \geq N$)

$$X(k) = c + \rho(A) + X(k-c).$$

Ceci peut s'énoncer: *un GET en régime autonome atteint après un régime transitoire fini un régime périodique.*

2.4 Relation entrée-sortie d'un GET

La commande avec modèle de référence pour les GET qui sera développée au chapitre 3 s'appuie essentiellement sur une représentation entrée-sortie des systèmes. Nous dédions donc la dernière partie de ce chapitre aux rappels des différentes représentations de ce type rencontrées dans la littérature.

Nous privilégierons finalement, pour le développement d'exemples, la représentation des GET par des séries formelles en deux variables commutatives γ et δ sur le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$.

2.4.1 Réponse impulsionnelle

Partant de la forme récurrente explicite (2.6), le développement de la récurrence donne

$$\begin{aligned}
Y(k) &= CX(k) \\
&= CAX(k-1) \oplus CBU(k) \\
&= CA^2X(k-2) \oplus CABU(k-1) \oplus CBU(k) \\
&= \dots \\
&= CA^pX(k-p) \oplus \bigoplus_{i=0}^{p-1} CA^iBU(k-i).
\end{aligned}$$

En adoptant la convention ($x(k) = \varepsilon$ et $u(k) = \varepsilon$ pour $k < 0$, c.-à-d. des conditions initiales nulles), on peut réécrire le comportement entrée-sortie du GET

$$Y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H(i) \otimes U(k-i)$$

avec

$$H(i) = \begin{cases} \varepsilon & i < 0 \\ CA^iB & i \geq 0 \end{cases} .$$

Interprétation de $[H(k)]_{ij}$ L'élément $[H(k)]_{ij}$ de la matrice $H(k)$ est simplement la date du k^{ieme} tir de la sortie $y_i(.)$ dépendant de l'entrée $u_j(.)$ du type

$$u_j(k) = \begin{cases} \varepsilon & k < 0 \\ e & k \geq 0 \end{cases}$$

toutes les autres entrées étant $u_l(k) = \varepsilon, \forall l \neq j \in \mathbb{Z}$.

Une telle entrée $u_j(.)$, qui correspond au tir d'une infinité de jetons à la date 0, peut être interprétée comme l'équivalent d'une *impulsion* appliquée à l'entrée u_j du GET et l'élément $[H(k)]_{ij}$ est alors la réponse impulsionnelle correspondante.

En considérant un GET mono-entrée mono-sortie, on peut remarquer que la sortie correspond alors à une convolution, plus exactement une sup-convolution, de la réponse impulsionnelle par l'entrée

$$y(k) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} h(i)u(k-i) \stackrel{def}{=} (h * u)(k).$$

L'analogie avec la relation entrée-sortie d'un système linéaire continu est alors évidente.

2.4.2 Transformée en γ et en δ

Les transformées en γ et en δ rappelées ici jouent un rôle analogue à la transformée en z dans la théorie des systèmes linéaires continus en temps dicret. Elles transforment les sup-convolutions (présentées précédemment) en des produits de séries formelles. La sortie d'un GET mono-entrée mono-sortie apparaît alors comme le produit d'une série de transfert par une série d'entrée. La structure algébrique qu'il convient d'utiliser pour une telle représentation est en conséquence celle d'un dioïde de séries formelles (cf. exemple 1.85).

Transformée en γ Soit $\{d(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ un dateur associé à une transition d'un GET. La transformée en γ de $\{d(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est définie comme la série formelle

$$D(\gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} d(k)\gamma^k.$$

Supposons deux dateurs reliés par l'égalité $x_1(k) = x_2(k-1)$, ce qui correspond à deux transitions séparées par une place contenant un seul jeton. Alors la transformée en γ de chacun des dateurs devient

$$X_1(\gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} x_1(k)\gamma^k = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} x_2(k-1)\gamma^k = \gamma \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} x_2(k-1)\gamma^{(k-1)} = \gamma X_2(\gamma).$$

On peut donc interpréter l'opérateur γ comme opérateur de décalage "événementiel", ce que l'on écrit parfois formellement $x(k-1) = \gamma x(k)$.

Transformée en δ De la même manière, on peut introduire une série formelle pour coder une trajectoire décrite par un compteur $\{c(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$.

La transformée en δ de $\{c(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ est définie comme la série formelle

$$C(\delta) = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} c(t)\delta^t.$$

L'opérateur δ joue le rôle d'opérateur de décalage "temporel", soit formellement $c(t-1) = \delta c(t)$.

Dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$ Comme nous l'avons rappelé dans l'exemple 1.85, un ensemble de séries formelles à coefficients sur un dioïde complet peut également être muni d'une structure de dioïde complet dont la loi $\oplus$ est la somme de séries formelles et la loi $\otimes$ le produit de séries formelles. Les transformées en γ (resp. δ) des dateurs (resp. compteurs) peuvent donc être considérées comme appartenant à des dioïdes de séries formelles en γ (resp. δ).

Nous noterons $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ le dioïde complet des séries formelles en γ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et exposants dans $\mathbb{Z}$, et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$ le dioïde des séries formelles en δ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ et exposants dans $\mathbb{Z}$. On rappelle que l'élément neutre de l'addition de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ est la série $\varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \varepsilon\gamma^k$ (où $\varepsilon = -\infty$ est l'élément neutre de l'addition dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$) et l'élément neutre de la multiplication est la série $e(\gamma) = e\gamma^0$ (où $e = 0$ est l'élément neutre de la multiplication de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$).

Notons que ces dioïdes permettent de coder tout type de trajectoire. Or, l'évolution des dateurs $x_i(k)$ ou des compteurs $x_i(t)$ associés aux transitions des GET sont par nature monotones: le k^{ieme} tir d'une transition est toujours postérieur au $(k-1)^{ieme}$. Par conséquent, le modèle mathématique utilisé pour représenter le comportement d'un GET doit tenir compte de ce caractère monotone.

Monotonie des trajectoires de tir d'un GET Soit $\{d(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ un dateur défini sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\{c(t)\}_{t\in\mathbb{Z}}$ un compteur défini sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$. En se rappelant que l'ordre défini sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ est l'inverse de l'ordre naturel $\leq$, la monotonie de ces variables s'écrit :

$$\forall k, t \in \mathbb{Z} \quad d(k) \succeq d(k-1) \;\text{ et }\; c(t+1) \preceq c(t).$$

Les variables dateurs sont donc monotones non décroissantes sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et les variables compteurs monotones non croissantes sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$.

Un dateur et un compteur vérifient respectivement sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$

$$\begin{aligned} d(k) &= d(k-1) \oplus d(k) \\ c(t) &= c(t+1) \oplus c(t). \end{aligned}$$

Les transformées respectives en γ et δ de ces égalités produisent les relations suivantes, simplifiées en accord avec le théorème 1.86 :

$$\begin{array}{rclcrcl} D(\gamma) &=& \gamma D(\gamma) \oplus D(\gamma) & \Rightarrow & D(\gamma) &=& \gamma^* D(\gamma) \\ C(\delta) &=& \delta^{-1} C(\delta) \oplus C(\delta) & \Rightarrow & C(\delta) &=& (\delta^{-1})^* C(\delta). \end{array}$$

Autrement dit, pour pouvoir prendre en compte les qualités de monotonie des séries formelles associées aux transitions d'un GET, il nous faut donc considérer, parmi les séries de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$, celles qui restent invariantes lorsqu'on les multiplie par la série γ^*. Le théorème suivant montre que cet ensemble de "séries croissantes" a également une structure de dioïde qui est en outre isomorphe à un dioïde quotient.

Théorème 2.20.

1. *Le sous ensemble $\gamma^*\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ des éléments de la forme $\gamma^* D(\gamma)$ est un dioïde d'élément neutre $\varepsilon(\gamma)$ pour l'addition et γ^* pour la multiplication. Ce dioïde sera noté $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$.*

2. *Soit la congruence $\mathcal{R}_\gamma$ suivante définie sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ par*

$$\{D_1(\gamma)\mathcal{R}_\gamma D_2(\gamma)\} \iff \{\gamma^* D_1(\gamma) = \gamma^* D_2(\gamma)\}.$$

   Chaque classe du dioïde quotient $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$ contient un plus grand élément qui appartient à $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$.

3. *Les dioïdes $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$ sont isomorphes.*

Preuve :

1. il faut remarquer que l'ensemble $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ est stable pour la somme et le produit de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ et admet $\varepsilon(\gamma)$ comme élément neutre de l'addition et γ^* comme élément neutre de la multiplication. Cet ensemble a donc une structure de dioïde complet. En revanche, puisque $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ n'ont pas les mêmes éléments neutres, $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ n'est pas un sous-dioïde de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$.

2. l'application $x \mapsto \gamma^* x$ est une fermeture. D'après le lemme 1.52, chaque classe $[x]_{\mathcal{R}_\gamma}$ du dioïde quotient admet donc $\gamma^* x$ comme plus grand représentant de la classe. Ce représentant appartient justement à $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$.
3. l'application $x \mapsto \gamma^* x$ définit un homomorphisme du dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ dans $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$. Le théorème 1.84 fournit le résultat.

□

Au vu de ce théorème, il faut en conclure que le (véritable) dioïde des "transformées en γ des applications dateurs" est donc le dioïde $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ et non $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$. On peut évidemment formuler un résultat équivalent pour les transformées en δ des compteurs.

Manipulation des éléments de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$ et simplification d'écriture Puisque les trajectoires de tir des GET sont codées par des séries de $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ et que ce dioïde est isomorphe à $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$, on manipulera indifféremment des séries de $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ ou des classes de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$.

D'après le théorème 1.83, les opérations d'addition et de multiplication sur les classes de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$ ne dépendent pas des séries de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ choisies pour représenter ces classes. On peut donc ramener les opérations sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$ à des opérations sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ pour des représentants quelconques.

Par la suite, on adoptera la simplification d'écriture consistant à omettre les crochets $[.]_{\mathcal{R}_\gamma}$ pour désigner un élément de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$. Les éléments manipulés seront donc tacitement des classes, bien que les écritures employées ne fassent figurer que des représentants particuliers de ces classes.

En remarquant que sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$, on a

$$\gamma^*(\gamma^n \oplus \gamma^{n'}) = \gamma^* \gamma^{\min(n,n')},$$

et en appliquant l'allègement d'écriture proposé précédemment, on peut écrire la règle de simplification suivante sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$:

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n,n')}. \tag{2.7}$$

Remarque 2.21 La manipulation des représentants de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$ peut donc être assimilée à la manipulation des éléments de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]$ à laquelle on ajoute la règle de simplification (2.7). ⋄

Pour des raisons identiques, et en utilisant le même allègement d'écriture (qui consiste à ne pas faire de distinction entre un représentant d'une classe et la classe elle-même), on obtient la règle de simplification suivante sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]_{/\mathcal{R}_{\delta^{-1}}}$

$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')}. \tag{2.8}$$

Exemple 2.22 Pour l'exemple de la figure 2.7, on obtient la représentation par des séries formelles en γ suivante

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X(\gamma) & = & \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ 2\gamma^2 & e & \varepsilon \end{pmatrix} X(\gamma) \oplus \begin{pmatrix} 1\gamma & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(\gamma) \\ \\ Y(\gamma) & = & \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} X(\gamma) \end{array} \right.$$

◇

2.5 Représentation bi-dimensionnelle : dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

On rappelle ici la démarche qui permet de coder les trajectoires de tir des GET par des séries formelles en deux variables commutatives, γ et δ, à exposants dans $\mathbb{Z}$ et à coefficients booléens. Les aspects événementiel et temporel d'un GET sont alors considérés de manière symétrique.

On rappelle tout d'abord formellement comment certaines séries en ces deux variables commutatives permettent la prise en compte de la monotonie des trajectoires de tir.

2.5.1 Définition formelle de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

Soit $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$ le dioïde des séries formelles en deux variables commutatives γ et δ à exposants dans $\mathbb{Z}$ et coefficients dans le dioïde de Boole $\mathbb{B}$.

Théorème 2.23. *Nous appelons $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ le dioïde $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$ quotienté par la congruence*

$$X_1(\gamma, \delta)\mathcal{R}_{\gamma\oplus\delta^{-1}}X_2(\gamma, \delta) \iff X_1(\gamma, \delta) = (\gamma \oplus \delta^{-1})^*X_2(\gamma, \delta).$$

$\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est un dioïde complet isomorphe à $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ et $\mathcal{D}[\![\delta]\!]$.

Preuve : L'isomorphisme entre $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ et les dioïdes $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ et $\mathcal{D}[\![\delta]\!]$ est montré par exemple dans [Baccelli et al., 1992]. □

Cela signifie que les classes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ sont également bien adaptées à représenter les trajectoires de tir d'un graphe d'événements temporisé.

Avant de présenter $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ comme outil de modélisation, nous rappelons quelques caractéristiques de ce dioïde.

2.5.2 Manipulation des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ et règles de simplification

De même que pour les éléments des dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\![\gamma]\!]_{/\mathcal{R}_\gamma}$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]_{/\mathcal{R}_{\delta^{-1}}}$, l'écriture des classes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ sera par la suite systématiquement allégée (les crochets $[.]_{/\mathcal{R}_{\gamma\oplus\delta^{-1}}}$ seront omis systématiquement). La somme et le produit des classes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ étant indépendants des représentants de $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$ choisis (th. 1.83), un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ sera désigné par un représentant quelconque dans $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$.

La manipulation des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ se fait donc avec les règles de somme et de produit du dioïde $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$ auxquelles on ajoute les règles de simplifications issues de (2.7) et (2.8) suivantes

$$\gamma^n\delta^t \oplus \gamma^{n'}\delta^t = \gamma^{\min(n,n')}\delta^t \tag{2.9}$$
$$\gamma^n\delta^t \oplus \gamma^n\delta^{t'} = \gamma^n\delta^{\max(t,t')} \tag{2.10}$$

On peut donc rappeler les principales caractéristiques de ce dioïde. $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est un dioïde complet distributif d'élément neutre $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \delta)$ (la série nulle de $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$) pour $\oplus$ et d'élément maximum $T = (\gamma^{-1})^*\delta^*$.

Remarque 2.24 On utilisera parfois abusivement les notations suivantes pour le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$: $\varepsilon = \gamma^{+\infty}\delta^{-\infty}$ et $T = \gamma^{-\infty}\delta^{+\infty}$. $\diamond$

Du fait de la structure de quotient de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, on peut donner plusieurs expressions de l'élément neutre e pour la multiplication

$$e = \gamma^*(\delta^{-1})^* = \gamma^* = (\delta^{-1})^* = \gamma^0 = \delta^0 = \gamma^0\delta^0.$$

Ces éléments sont effectivement "équivalents" modulo $\mathcal{R}_{\gamma\oplus\delta^{-1}}$ (mais ne sont évidemment pas identiques en tant qu'éléments de $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$).

L'ordre naturel $\preceq$ défini sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ à partir de la loi $\oplus$ permet d'établir l'équivalence suivante

$$\gamma^n\delta^t \preceq \gamma^{n'}\delta^{t'} \iff n \geq n \text{ et } t \leq t'.$$

Enfin, puisque $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ est complet, tout couple $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ admet un plus grand minorant noté $a \wedge b$. Dans le cas où a et b sont des monômes, on obtient la relation

$$\gamma^n\delta^t \wedge \gamma^{n'}\delta^{t'} = \gamma^{\max(n,n')}\delta^{\min(t,t')} \tag{2.11}$$

qui permet, puisque le dioïde est distributif, d'établir la borne inf de deux éléments quelconques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$.

2.5.3 Représentation graphique des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

On remarque tout d'abord que l'application

$$\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!] \to \mathcal{P}(\mathbb{Z}^2),\ F(\gamma,\delta) \mapsto Supp(F(\gamma,\delta))$$

qui à toute série de $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$ associe son support (cf. exemple 1.85) définit un isomorphisme entre les parties du plan $\mathbb{Z}^2$ et les séries de $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$. Cette application associe à une série quelconque de $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$ l'ensemble des exposants (k,t) de monômes de $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$ dont le coefficient est non nul.

Partant de cet isomorphisme, il paraît naturel de représenter une série de $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$ par la collection des points (k,t) du plan $\mathbb{Z}^2$ appartenant au support de cette série. Pratiquement, la série $\gamma^1\delta^4 \oplus \gamma^2\delta^3 \in \mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$ sera représentée par les points de coordonnées $(1,4)$ et $(2,3)$ de $\mathbb{Z}^2$.

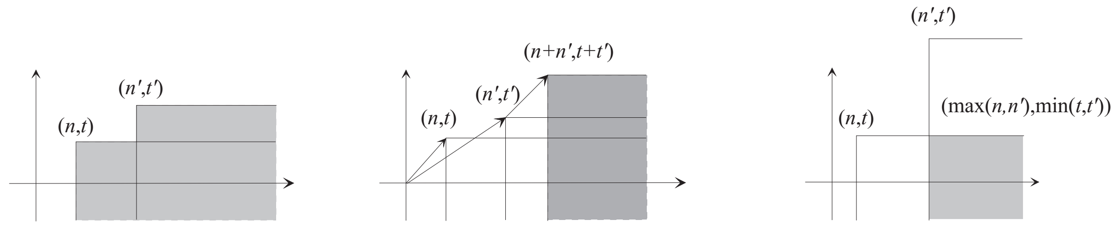
Nous nous appuyons sur cette représentation des éléments de $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$ pour définir également une représentation graphique des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$.

Représentant maximal Les dioïdes $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ et $\gamma^*(\delta^{-1})^*\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$ sont isomorphes. En d'autres termes, tout élément $a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ vérifie l'égalité $a = \gamma^*(\delta^{-1})^*a$. En particulier, $\gamma^*(\delta^{-1})^*a$ est le plus grand élément de la classe de a dans $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$. Graphiquement, le représentant dans $\mathbb{Z}^2$ de $\gamma^*(\delta^{-1})^*a$ est en quelque sorte le représentant qui "couvre" la plus grande surface de $\mathbb{Z}^2$, c'est-à-dire qui inclut effectivement tous les représentants possibles de cette classe. Ce représentant maximal de la classe de $a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ étant canonique, il sera choisi pour représenter graphiquement l'élément a.

Prenons un monôme $\gamma^n\delta^t$ de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. Le représentant maximal de ce monôme est l'élément $\gamma^n\delta^t\gamma^*(\delta^{-1})^*$. Multiplier $\gamma^n\delta^t$ par $\gamma^*(\delta^{-1})^*$ revient simplement à "attacher" au point de coordonnées (n,t) tous les points contenus dans le cône sud-est de sommet (n,t) du plan. Pour un élément quelconque $a = \bigoplus_{(n_i,t_i)\in A} \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, le représentant graphique de a est donc l'union des cônes sud-est de sommets $(n_i, t_i) \in A$.

On obtient la correspondance suivante entre les opérations sur les monômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ et sur les cônes de $\mathbb{Z}^2$:

1. la somme de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représentée graphiquement par l'union des cônes sud-est de sommets respectifs (n, t) et (n', t').
2. le produit de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représenté par le cône de sommet $(n+n', t+t')$ (ce qui correspond au cône dont le sommet est la somme vectorielle des sommets (n, t) et (n', t')).
3. l'inf de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représenté par l'intersection des cônes sud-est de sommets respectifs (n, t) et (n', t').



$\gamma^n\delta^t \oplus \gamma^{n'}\delta^{t'}$	$\gamma^n\delta^t \otimes \gamma^{n'}\delta^{t'} = \gamma^{n+n'}\delta^{t+t'}$	$\gamma^n\delta^t \wedge \gamma^{n'}\delta^{t'}$
union de cônes	somme vectorielle	intersection de cônes

Figure 2.9 : Représentation graphique des opérations sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

Représentant minimal De même que tout élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ admet un représentant maximal dans $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$, il est montré, notamment dans [Baccelli et al., 1992], que certains éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ admettent également un représentant minimal dans $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$. C'est le cas notamment des polynômes et des séries périodiques. Graphiquement, on obtient ce représentant minimal en ne codant que les sommets du représentant de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. A titre d'exemple, pour l'élément $\gamma^1\delta^4 \oplus \gamma^2\delta^3$ de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, l'élément $\gamma^*(\delta^{-1})^*\gamma^1\delta^4$ est le représentant maximal (graphiquement, correspond à toute la surface du cône de sommet $(1, 4)$) et $\gamma^1\delta^4$ est son représentant minimal (seulement le sommet du cône).

Le représentant minimal est également le représentant obtenu après avoir effectué toutes les simplifications d'écritures résultant des règles (2.9) et (2.10). On présentera par la suite systématiquement les résultats sous leur forme minimale lorsqu'elle existe.

2.5.4 Exemples de calculs sur des polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

On définira par la suite le support d'un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ comme le support de son représentant minimal dans $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$. De même, la valuation et le degré d'un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ seront définis comme la valuation et le degré de son représentant minimal.

On notera $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma,\delta]$ l'ensemble des polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments à support fini (cf exemple 1.85). On propose ici quelques calculs sur des polynômes de manière à se familiariser avec cette structure algébrique.

Soit $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, $a = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^3\delta^4$ et $b = \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^5$. On peut vérifier graphiquement que ces éléments sont sous leur forme minimale.

$$a \oplus b = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5 \text{ (on remarque en effet } \gamma^4\delta^3 \preceq \gamma^3\delta^4).$$

$$a \otimes b = (\gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^3\delta^4) \otimes (\gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^5) = \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^7\delta^7 \oplus \gamma^8\delta^9.$$

En remarquant que $\gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^6\delta^6 \preceq \gamma^5\delta^6$, on obtient le représentant minimal

$$a \otimes b = \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^7\delta^7 \oplus \gamma^8\delta^9.$$

Enfin, on obtient la borne inf de ces éléments

$$a \wedge b = \gamma^2\delta^1 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4.$$

Nous terminons cette présentation en évoquant le moyen pratique de calculer la résiduée $a \diagdown\!\!\!\circ\, b$.

Les monômes $\gamma^n\delta^t$ de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ sont inversibles : $(\gamma^n\delta^t)^{-1} = \gamma^{-n}\delta^{-t}$. En s'appuyant sur l'identité (1.51) du théorème 1.95, la résiduée d'un élément quelconque b par un monôme $\gamma^n\delta^t$ est donc obtenue par

$$\gamma^n\delta^t \diagdown\!\!\!\circ\, b = \gamma^{-n}\delta^{-t} \otimes b.$$

D'autre part, puisque un élément a de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ s'écrit comme une somme de monômes (finie ou infinie) soit $a = \bigoplus_{i\in I} \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$, on peut écrire explicitement d'après (1.46)

$$a \diagdown\!\!\!\circ\, b = (\bigoplus_{i\in I} \gamma^{n_i}\delta^{t_i}) \diagdown\!\!\!\circ\, b = \bigwedge_{i\in I} \gamma^{-n_i}\delta^{-t_i} b = \gamma^{-n_1}\delta^{-t_1} b \wedge \gamma^{-n_2}\delta^{-t_2} b \wedge \dots .$$

Lorsque a et b sont des polynômes, le calcul $a \diagdown\!\!\!\circ\, b$ revient à calculer la borne inf d'un nombre fini de polynômes.

Avec $a = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^3\delta^4$ et $b = \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4$ on obtient

$$\begin{aligned} a \diagdown\!\!\!\circ\, b &= \gamma^{-1}\delta^{-1} b \wedge \gamma^{-3}\delta^{-4} b \\ &= (\gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^3) \wedge (\gamma^{-1}\delta^{-2} \oplus \gamma^1\delta^{-1} \oplus \gamma^2) \\ &= \gamma^1\delta^{-1} \oplus \gamma^2. \end{aligned}$$

2.5.5 Modélisation des graphes d'événements temporisés sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

La démarche, similaire à celle adoptée pour le codage dans $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ ou $\mathcal{D}[\![\delta]\!]$, est la suivante :

1. les trajectoires de tir des transitions du GET sont codées par des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$
2. d'un point de vue dynamique, le GET peut alors être vu comme un système induisant des décalages (événementiels et temporels) sur ces trajectoires, les opérateurs permettant de caractériser ces décalages étant l'opérateur γ dans le domaine événementiel et l'opérateur δ dans le domaine temporel.

On rappelle tout d'abord comment coder les trajectoires de tir d'un GET par des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$.

Soit $x(\gamma,\delta)$ un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ associé à une transition x d'un GET. Le représentant maximal dans $\mathbb{B}[\![\gamma,\delta]\!]$ de cet élément peut être écrit $x(\gamma,\delta)\gamma^*(\delta^{-1})^* = \bigoplus_{i\in I}\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$. Il faut interpréter chacun des monômes $\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ de $x(\gamma,\delta)\gamma^*(\delta^{-1})^*$ comme une information élémentaire connue sur l'histoire de la transition x. L'information élémentaire associée au monôme $\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ est :

le tir numéro n_i de la transition x a lieu au plus tôt à la date t_i

En résumé, un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ représente une infinité d'informations élémentaires concernant les tirs d'une transition, parmi lesquelles certaines peuvent sembler redondantes. Le représentant minimal d'un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ (lorsqu'il existe) associé à une transition x tient lieu d'information "essentielle" concernant la trajectoire de tir de cette transition. Autrement dit, connaissant le représentant minimal d'un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ codant la trajectoire de tir d'une transition, on est capable de déduire à quelles dates ont eu lieu effectivement les tirs, ou symétriquement, pour une date donnée, combien de tirs ont eu lieu à cette date. Pour fixer les idées on illustre ceci par un exemple.

Exemple 2.25 Soit $x(\gamma,\delta) = \gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^3$ un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ codant la trajectoire de tir de la transition x d'un GET. C'est ici le représentant minimal de sa classe. On peut également donner une autre expression équivalente de ce même élément

$$x(\gamma,\delta) = \gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^3 = \ldots \oplus \gamma^{-1}\delta^{-\infty} \oplus \gamma^0\delta^{-\infty} \oplus \gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \ldots$$

Par convention, le premier tir est le tir numéro 0. L' élément $x(\gamma,\delta)$ contient donc l'information *le premier tir a lieu à la date* $-\infty$. Cet élément contient également l'information *le tir numéroté 1 a lieu au plus tôt à la date* 2. Néanmoins, il n'existe aucun autre monôme de $x(\gamma,\delta)$ s'écrivant $\gamma^1\delta^t$ avec $t > 2$, ce qui signifie également que *le tir numéro 1 a lieu "au plus tard" à la date 2.* On en déduit que le tir numéro 1 a lieu *exactement* à la date 2. Enfin, par un raisonnement analogue, on voit que tous les tirs numérotés k pour $k \geq 2$ ont lieu exactement à la date 3.

En résumé, dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, la série $x(\gamma,\delta) = \gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^3$ contient les informations équivalentes à celles décrites par le dateur suivant :

$$\begin{array}{ll} x(k) = -\infty & k \leq 0 \\ x(1) = 2 & \\ x(k) = 3 & k \geq 2. \end{array}$$

◇

Les jetons initialement dans le GET et les temporisations des places jouent alors le rôle d'opérateurs de décalage sur les trajectoires de tir, et donc sur les éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ représentant ces trajectoires. A titre d'exemple, pour la figure 2.10, l'élément $x_2(\gamma,\delta)$ codant la trajectoire de tir de x_2 se déduit de l'élément $x_1(\gamma,\delta)$, codant la trajectoire de tir de x_1, par un décalage (en fonctionnement au plus tôt) de $\gamma\delta^2$, soit

$$x_2(\gamma,\delta) = \gamma\delta^2 x_1(\gamma,\delta)$$

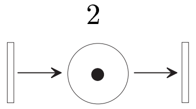


Figure 2.10 : Décalages induits par le marquage initial

Exemple 2.26 Nous formulons ici la représentation d'état du GET de la figure 2.7. On utilise la même notation pour désigner les transitions et les éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ codant leurs tirs. Les trajectoires sont reliées par les égalités suivantes :

$$x_1 = \delta x_2 \oplus \gamma\delta u_1 \tag{2.12}$$
$$x_2 = \gamma x_1 \oplus u_2 \tag{2.13}$$
$$x_3 = \gamma^2\delta^2 x_1 \oplus x_2 \tag{2.14}$$
$$y = x_3 \tag{2.15}$$

ce que l'on peut écrire également

$$\begin{cases} X = \begin{pmatrix} \varepsilon & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \gamma^2\delta^2 & e & \varepsilon \end{pmatrix} X \oplus \begin{pmatrix} \gamma\delta & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U \\ \\ Y = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} X \end{cases}$$

◇

Matrice de transfert Dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, tout GET peut être muni d'une représentation de la forme

$$\begin{cases} X = AX \oplus BU \\ Y = CX \end{cases}$$

En supprimant la partie implicite de l'équation d'état $X = AX \oplus BU$ en accord avec le théorème 1.86, on obtient l'état (au plus tôt) explicitement comme fonction de l'entrée par

$$X = A^*BU,$$

et donc finalement

$$Y = CA^*BU.$$

La matrice $H = CA^*BU$ est appelée matrice de transfert entrée-sortie du GET.

Exemple 2.27 Pour le GET de la figure 2.7, plutôt que de calculer l'étoile de la matrice A obtenue précédemment (à l'aide du théorème 1.90), on va se contenter d'enlever dans les équations (2.12) à (2.15) les parties implicites par application répétée du théorème 1.86.

En remplaçant, dans l'égalité (2.13), la variable x_1 par son expression dans (2.12), on obtient

$$x_2 = \gamma(\delta x_2 \oplus \gamma\delta u_1) \oplus u_2 = \gamma\delta x_2 \oplus \gamma^2\delta u_1 \oplus u_2$$

puis en suppprimant la partie implicite en x_2 par application du théorème 1.86

$$x_2 = \gamma^2\delta(\gamma\delta)^* u_1 \oplus (\gamma\delta)^* u_2.$$

En introduisant cette expression dans (2.12) on obtient de même

$$x_1 = \gamma^2\delta^2(\gamma\delta)^* u_1 \oplus \delta(\gamma\delta)^* u_2 \oplus \gamma\delta u_1.$$

Cette dernière expression se réécrit également (on peut le vérifier graphiquement)

$$x_1 = \gamma\delta(\gamma\delta)^* u_1 \oplus \delta(\gamma\delta)^* u_2.$$

Enfin, en remplaçant dans (2.14) les variables x_1 et x_2 par leurs expressions respectives, après simplification on a

$$x_3 = (\gamma^2\delta \oplus \gamma^3\delta^3(\gamma\delta)^*)u_1 \oplus (e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3(\gamma\delta)^*)u_2.$$

Finalement, y peut s'écrire en fonction du vecteur d'entrée $U = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}^t$

$$y = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta \oplus \gamma^3\delta^3(\gamma\delta)^* & e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3(\gamma\delta)^* \end{pmatrix} U = HU.$$

◇

Remarque 2.28 On souligne ici le lien qui apparaît entre les résultats fournis par la théorie spectrale et l'expression du transfert du GET de la figure 2.7.

Puisque les transitions internes n'appartiennent pas à une même composante fortement connexe, il n'y a pas nécessairement un temps de cycle unique pour l'ensemble du graphe fig. 2.7. Néanmoins, la structure du graphe de la fig.2.7 est telle que le circuit (x_1, x_2, x_1) impose son temps de cycle au reste du système. Le rayon spectral $\rho(A)$ fournit alors le temps de cycle de ce circuit critique (c'est ici le seul circuit), soit $\rho(A) = 1$, ce qui correspond à un taux de production de 1 jeton par unité de temps.
On peut noter que l'expression du transfert donnée dans l'exemple précédent met également en évidence ce résultat. En effet, la forme du transfert du GET de la fig. 2.7 fait apparaître le caractère ultimement périodique de la réponse impulsionnelle : cette période ultime est décrite par la présence d'une seule étoile de monôme, ici $(\gamma\delta)^*$. L'expression du transfert est donnée sous la forme d'une série périodique, ce qui facilite la "lecture" des performances du graphe. ◇

L'objet de la dernière partie de ce chapitre est de rappeler que tout transfert de GET peut se représenter par une matrice constituée de séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$.

2.6 Réalisabilité, rationalité et périodicité

Les définitions sont ici fournies dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$, mais s'étendent naturellement aux dioïdes $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$ et $\mathcal{D}[\![\delta]\!]$.

Définition 2.29 (Causalité) *Une série $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est dite causale si $s = \varepsilon$ (la série est nulle) ou si $val_\gamma(h) \geq 0$ et $h \geq val_\gamma(h)$.*

Remarque 2.30 Ainsi $\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^{-4}$ est un élément causal de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, son représentant minimal (obtenu après simplification) étant le monôme $\gamma^2\delta^3$. De manière naïve, un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ est causal si les sommets de son représentant graphique appartiennent au cadran Nord-Est du plan $\mathbb{Z}^2$. ◇

Notation 2.31 **($\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!]$)** *L'ensemble des séries causales de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ est stable pour la somme et le produit de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. Cet ensemble forme un sous-dioïde complet de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ noté $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!]$ par la suite. Notons que l'élément maximum de $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!]$ est δ^*.*

Définition 2.32 (Rationalité) *Un élément $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ est dit rationnel si son représentant minimal appartient à la clôture rationnelle de l'ensemble $\{\gamma,\delta,e,\varepsilon\}$, c'est-à-dire peut s'écrire avec un nombre fini de sommes, produits et d'étoiles d'éléments de l'ensemble $\{\gamma,\delta,e,\varepsilon\}$. Une matrice est dite rationnelle si toutes ses composantes sont rationnelles.*

Remarque 2.33 Par définition, un élément rationnel est également causal. ◇

Définition 2.34 (Réalisabilité) *Une matrice $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times m}$ est dite réalisable si il existe quatre matrices A_1, A_2, B et C de tailles respectivement $n\times n$, $n\times n$, $n\times m$ et $p\times n$ à coefficients dans l'ensemble $\{\varepsilon, e\}$ telles que $H = C(\gamma A_1 \oplus \delta A_2)^* B$.*

Définition 2.35 (Périodicité) *Une série s est dite périodique s'il existe deux polynômes p et q de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$*

$$p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i}\delta^{t_i} \text{ et } q = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{N_j}\delta^{T_j}$$

et un monôme causal $r = \gamma^{\nu}\delta^{\tau}$ tels que

$$s = p \oplus qr^*.$$

Remarque 2.36 Notons que cette définition de la périodicité n'impose pas la causalité de la série. ◇

Théorème 2.37 ([Cohen et al., 1989b]) *Soit $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times m}$. Sont équivalents*

(i) H est réalisable

(ii) H est rationnelle

(iii) H est périodique et causale

Preuve : On renvoie le lecteur à [Cohen et al., 1989b] pour une preuve exhaustive de ce résultat. Nous ne montrons pas ici l'équivalence $(i) \iff (ii)$. En ce qui concerne l'implication $(iii) \Rightarrow (ii)$, il est clair que les séries périodiques et causales ont, par définition, une expression rationnelle. Seule la réciproque doit donc être prouvée. Cette réciproque repose sur des résultats que nous rappelons ci-dessous. □

Définition 2.38 (Pente ultime) *La pente ultime d'une série périodique $s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ est notée $\sigma_\infty(s)$ et est définie comme le ratio $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau$.*

Théorème 2.39. *L'ensemble des séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est stable pour la somme, le produit, l'inf et la résiduation. En outre, pour s_1 et s_2 deux séries périodiques non dégénérées (telles que $\nu_1, \nu_2 \neq 0$ et $\tau_1, \tau_2 \neq 0$), on obtient les résultats suivants*

$$\begin{aligned}
\sigma_\infty(s_1 \oplus s_2) &= \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)), \\
\sigma_\infty(s_1 \otimes s_2) &= \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)), \\
\sigma_\infty(s_1 \wedge s_2) &= \max(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)).
\end{aligned}$$

Si $\sigma_\infty(s_1) \leq \sigma_\infty(s_2)$ alors

$$\sigma_\infty(s_2 \backslash\!\!\!\circ\, s_1) = \sigma_\infty(s_1),$$

sinon, $s_2 \backslash\!\!\!\circ\, s_1 = \varepsilon$.

Preuve : L'étude des séries périodiques est abordée par Gaubert dans [Gaubert, 1992, Chap. 7, Annexe A]. Le lecteur y trouvera les preuves des résultats énoncés par ce théorème. Certains de ces résultats sont également rappelés dans l'annexe B. □

Corollaire 2.40. *L'ensemble des séries périodiques et causales de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est stable pour la somme, le produit et l'étoile de Kleene.*

Preuve : La somme et le produit de séries périodiques et causales sont périodiques d'après le théorème 2.39 et causales puisque $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma, \delta]\!]$ est un sous-dioïde complet de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$. Par ailleurs, l'étoile de Kleene d'une série périodique et causale s'écrit $s^* = (p \oplus qr^*)^*$ où les polynômes p, q et r sont causaux. En accord avec les résultats (1.26) et (1.31) du théorème 1.88, s^* s'écrit également

$$\begin{aligned}
s^* &= p^*(qr^*)^* \\
&= p^*(e \oplus q(q \oplus r)^*)
\end{aligned}$$

où p^* et $(q \oplus r)^*$ sont simplement l'étoile de polynômes. En réutilisant les notations de la définition 2.35 et en remarquant que $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est commutatif et donc que l'égalité (1.33) du théorème 1.88 s'applique, on peut réécrire par exemple p^*

$$\begin{aligned}
p^* &= \left(\bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}\right)^* \\
&= \bigotimes_{i=0}^{\alpha} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i})^*
\end{aligned}$$

ce qui se ramène donc à un nombre fini de produits de séries périodiques et causales. Puisqu'il en va de même pour $(q \oplus r)^*$, l'étoile d'une série périodique et causale peut donc s'écrire comme un nombre fini de sommes et de produits de séries périodiques et causales. Le résultat est donc périodique et causal. □

Preuve (théorème 2.37): Pour conclure sur l'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ du théorème 2.37, un monôme (ou un polynôme) causal $\gamma^n \delta^t$ est une série périodique dégénérée particulière. Il en découle qu'une expression rationnelle est également un nombre fini de sommes, produits et étoiles de séries périodiques et causales, c'est-à-dire une série périodique et causale d'après le corollaire 2.40. □

Proposition 2.41. *L'injection canonique* $\mathsf{Id}_{|+} : \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!] \to \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ *est résiduable. Sa résiduée sera notée* Pr_+.

Preuve : $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!]$ est un sous-dioïde complet de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, on applique donc directement la proposition 1.97. □

Le calcul pratique de Pr_+ est le suivant. Soit $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ que l'on écrit

$$s = \bigoplus_{i\in I} s(n_i,t_i)\gamma^{n_i}\delta^{t_i}.$$

$\mathsf{Pr}_+(s)$ s'obtient simplement en "annulant" dans s les monômes non causaux, c'est-à-dire à exposants strictement négatifs, soit

$$\mathsf{Pr}_+(s) = \mathsf{Pr}_+(\bigoplus_{i\in I} s(n_i,t_i)\gamma^{n_i}\delta^{t_i}) = \bigoplus_{i\in I} s_+(n_i,t_i)\gamma^{n_i}\delta^{t_i},$$

$$\text{où } s_+(n_i,t_i) = \begin{cases} s(n_i,t_i) \text{ si } (n_i,t_i) \geq (0,0) \\ \varepsilon \textit{ sinon} \end{cases}.$$

Exemple 2.42 (Calcul de Pr_+ sur un élément périodique) $\mathsf{Pr}_+(\gamma^{-2}\delta^{-3}(\gamma\delta)^*) = \mathsf{Pr}_+(\gamma^{-2}\delta^{-3} \oplus \gamma^{-1}\delta^{-2} \oplus \delta^{-1} \oplus \gamma \oplus \gamma^2\delta \oplus \dots) = \gamma(\gamma\delta)^*$. Graphiquement, le représentant de $\mathsf{Pr}_+(s)$ ne conserve que les sommets du représentant de s contenus dans le cadran Nord-Est du plan $\mathbb{Z}^2$. ◇

Remarque 2.43 En accord avec la remarque 1.98, il faudra par la suite garder à l'esprit que si une série s est causale, elle est invariante par Pr_+, c.-à-d.

$$s \in \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!] \iff s = \mathsf{Pr}_+(s).$$

◇

Notation 2.44 ($\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ et $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!]$) *L'ensemble des séries rationnelles de* $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ *constitue un sous-dioïde de* $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ *noté* $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$. *Par définition,* $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ *n'est pas complet, une somme infinie d'éléments rationnels n'est pas nécessairement rationnelle. De même, l'ensemble des séries périodiques est un sous-dioïde (non complet) de* $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ *est donc défini par l'intersection suivante*

$$\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!] = \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!] \cap \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!].$$

Proposition 2.45. *L'injection canonique* ${}_{\mathsf{per}|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{rat}} : \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!] \to \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!]$ *est résiduable. Sa résiduée est la double restriction de* Pr_+ *au domaine des séries périodiques et au codomaine des séries rationnelles notée* ${}_{\mathsf{rat}|}\mathsf{Pr}_{+|\mathsf{per}}$. *Autrement dit, pour une série périodique* s, $\mathsf{Pr}_+(s)$ *est le plus grand élément rationnel inférieur à* s. *En outre,* $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(\mathsf{Pr}_+(s))$.

Preuve : La preuve consiste à vérifier simplement que l'application de Pr_+ à un élément périodique quelconque est rationnel (c'est-à-dire périodique et causal). Soit une série périodique $s = p \oplus qr^*$ que l'on préfère écrire dans un premier temps $s = \bigoplus_{i\in I} s(n_i,t_i)\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$. Soit il n'existe aucun monôme $\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ à exposants positifs et coefficient non nul, et $\mathsf{Pr}_+(s) = \varepsilon$ (la série nulle) qui est par définition rationnelle. Soit la série s est ultimement causale, c'est-à-dire qu'il existe $K \in \mathbb{N}$ tel que l'on puisse écrire

$$s = p \oplus q(e \oplus r \oplus \cdots r^{K-1}) \oplus qr^K r^*$$

où la série $qr^K r^*$ est causale. Une telle écriture présente la série s comme la somme d'un polynôme non causal et d'une série périodique et causale. L'annulation du polynôme non causal par l'action de Pr_+ conserve malgré tout la périodicité ultime de s, et donc la pente ultime de s. Le résultat de $\mathsf{Pr}_+(s)$ est alors simplement périodique et causal, ou encore rationnel. □

Remarque 2.46 (Résiduation du produit sur $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!]$ et $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$) Les dioïdes $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!]$ et $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ ne sont pas complets. Il n'existe donc pas de condition suffisante pour que le produit défini sur ces dioïdes soit résiduable[5].

Néanmoins, d'après le théorème 2.39, pour a et b des éléments périodiques quelconques, que $a \lcirclearrowleft b$ soit périodique signifie également que l'équation $ax \preceq b$ admet une plus grande solution périodique. Par définition, cela signifie également que l'application

$$\begin{array}{rccc} L_a^{\mathsf{per}} : & \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!] & \to & \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!] \\ & x & \mapsto & ax \end{array}$$

est résiduable (ou encore, que le produit du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!]$ est résiduable).

D'autre part, en appliquant la proposition 2.45 et la remarque 1.99, la restriction de l'application précédente L_a^{per} au domaine des éléments rationnels est également résiduable

$$\begin{array}{rccc} L_a^{\mathsf{per}}{}_{|\mathsf{rat}} : & \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!] & \to & \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!] \\ & x & \mapsto & ax \end{array}$$

autrement dit, pour a et b périodiques, il existe un plus grand élément rationnel x (périodique et causal) tel que $ax \preceq b$ donné par $\mathsf{Pr}_+ \circ L_a^{\mathsf{per}\sharp}(b) = \mathsf{Pr}_+(a \lcirclearrowleft b)$.

En particulier, pour a et b rationnels quelconques, donc périodiques, il découle que l'inéquation $ax \preceq b$ admet une plus grande solution rationnelle. Par définition, ceci équivaut à dire que le produit du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ est résiduable, c'est-à-dire

$$\begin{array}{rccc} L_a^{\mathsf{rat}} : & \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!] & \to & \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!] \\ & x & \mapsto & ax \end{array}$$

est résiduable.

On rappelle néanmoins que le calcul de la plus grande solution rationnelle de l'inéquation $ax \preceq b$ se fait en deux étapes. En effet, si les monômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!]$ sont inversibles ($\gamma^n\delta^t \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!] \Rightarrow \gamma^{-n}\delta^{-t} \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!]$), les monômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ ne le sont pas (puisque non causaux). Par conséquent, le calcul pratique de $L_a^{\mathsf{rat}\sharp}(b)$ est donné par : soit $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!] \subset \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!]$

[5] il existe seulement une condition nécessaire donnée par le théorème 1.62

- $L_a^{\mathsf{per}\sharp}(b)$ donne le plus grand élément périodique solution de $ax \preceq b$
- $\mathsf{Pr}_+(L_a^{\mathsf{per}\sharp}(b))$ donne ensuite la plus grande solution rationnelle de $ax \preceq b$

On pourra donc se rappeler que l'application résiduée de L_a^{rat} est donnée par l'équivalence

$$\forall x \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!], L_a^{\mathsf{rat}\sharp}(x) = {}_{\mathsf{rat}|}\mathsf{Pr}_{+|\mathsf{per}} \circ L_a^{\mathsf{per}\sharp}(x)$$

Pour alléger l'écriture, on utilisera également la notation abusive[6]

$$L_a^{\mathsf{rat}\sharp}(x) = \mathsf{Pr}_+ \circ L_a^{\sharp}(x).$$

◇

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté différents dioïdes permettant la représentation du comportement des GET. Nous avons concentré une part importante des rappels sur les représentations entrée-sortie et notamment sur la présentation du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, ainsi que certains de ses sous-dioïdes, auxquels on fera constamment référence par la suite.

Nous avons également insisté sur les caractéristiques périodiques de la réponse impulsionnelle d'un GET. En particulier, le calcul du transfert des GET se ramène à la manipulation de séries périodiques causales pour lesquelles certains algorithmes ont été développés et sont rappelés en annexe B.

En outre, une partie du problème de synthèse de correcteurs, proposée dans le chapitre suivant, repose sur le calcul de la résiduation du produit du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ - dioïde des séries rationnelles- qui, comme nous l'avons présenté précédemment, s'exprime à partir de la résiduation du produit de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ ainsi que de la résiduée de l'injection canonique du dioïde des éléments causaux -noté $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!]$- dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$.

[6]en toute rigueur $\mathsf{Pr}_+ \circ L_a^{\sharp}(x)$ est définie de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ dans $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!]$ et $L_a^{\mathsf{rat}\sharp}$ est définie sur $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$.

Chapitre 3

Commande avec modèle de référence

3.1 Introduction

De manière analogue aux systèmes continus, on entend par *commande* de systèmes à événements discrets le *pilotage* d'un système par le contrôle de ses entrées. Plus précisément, on cherche à obtenir, *via* la commande, certaines performances[1] spécifiées au préalable. Les premiers résultats concernant la commande des GET, obtenus par une approche (max,+), apparaissent dans [Cohen et al., 1989b]. La commande optimale proposée est élaborée dans un objectif de *poursuite de trajectoire de sortie*[2]. Le problème résolu est le suivant. Partant d'un GET (m entrées, p sorties) dont on connaît la matrice de transfert $H \in \mathcal{D}^{p\times m}$ et une trajectoire de sortie désirée $Y_c \in \mathcal{D}^{p\times 1}$ (consigne de sortie), il est montré qu'il existe une plus grande entrée $U_{opt} \in \mathcal{D}^{m\times 1}$ telle que la sortie résultant de cette entrée ($Y_{opt} = HU_{opt}$) soit inférieure à la sortie désirée Y_c. La commande U_{opt} est alors optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps (la sortie Y_{opt} est en juste-à-temps).

Le problème de commande abordé dans ce mémoire diffère de ce problème de poursuite de trajectoire. En effet, nous cherchons ici à synthétiser un *correcteur* modifiant le comportement d'un système nominal. En termes de GET, la correction va consister à ajouter des arcs au système nominal et par conséquent à en modifier la dynamique. Les performances attendues par le système corrigé sont alors spécifiées sous forme de modèle dit *de référence*. Ce problème est généralement qualifié de "poursuite de modèle".

Le système nominal (système libre), qui sera de manière générale un GET multi-entrées multi-sorties à m entrées et p sorties, sera représenté par son transfert $H \in \mathcal{D}^{p\times m}$ et le transfert souhaité après application de la correction (le modèle de référence) sera noté $G_{ref} \in \mathcal{D}^{p\times m}$.

La démarche adoptée ici, empruntée à l'automatique classique, est de "compenser" la dynamique du système nominal H par l'action d'un autre système, noté C (un *correcteur*), lui-même (max,+) linéaire, dont on sait maîtriser (ou paramétrer) la dynamique (c'est à dire ici le transfert). Le système H muni du correcteur C possède alors un transfert différent noté G_C par la suite.

[1] dans le cadre de la commande de systèmes continus, les performances recherchées sont par exemple la stabilité, la rapidité de réponse, la précision etc.

[2] le lecteur trouvera également des travaux récents concernant le problème de poursuite de trajectoires en présence d'une désadaptation entre le système et le modèle dans [Menguy, 1997].

Structurellement le correcteur C s'interpose entre la consigne d'entrée V (qui devient l'entrée du système corrigé G_C) et la commande U du système nominal H (voir figure 3.1). La commande U est élaborée par le correcteur C à partir de la consigne V et éventuellement à partir de l'observation de la sortie Y du système H voire de l'état interne X.

De la relation de transfert $Y = HU$ (pour le système libre) on passe à une relation de transfert $Y = G_C V$ pour le système corrigé. La synthèse du correcteur est effectuée dans

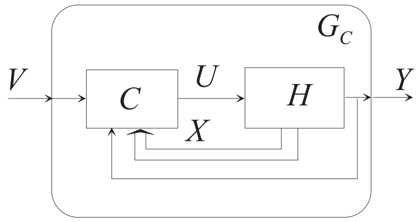


Figure 3.1 : Action du correcteur C sur le système nominal H

l'objectif d'atteindre pour le système commandé G_C :

- soit un transfert entrée-sortie égal au transfert de référence ($G_C = G_{ref}$)
- soit un transfert aussi *proche* que possible du transfert de référence.

Motivations Il peut sembler nécessaire de justifier cette approche avant d'aller plus loin dans son étude.

A l'image de la commande optimale proposée dans [Cohen et al., 1989b], la commande avec modèle de référence se justifie particulièrement dans le domaine de la gestion de production. L'exemple suivant devrait contribuer à une meilleure compréhension des enjeux d'un tel problème de commande.

La figure 3.2 fournit un modèle simple d'atelier d'assemblage constitué de trois machines M_1, M_2 et M_3. Les pièces sont traitées en parallèle sur M_1 et M_2 puis assemblées par la machine M_3. Les machines M_1 et M_2 ont clairement des temps de cycle différents : la première peut produire une pièce en deux unités de temps tandis que la seconde traite une pièce en 3 unités de temps. La machine M_3 peut également assumer un taux de production d'une pièce toutes les deux unités de temps. Par conséquent, en régime permanent, le système d'assemblage peut au mieux produire à la vitesse de la machine M_2 (qui est la plus lente).

Si cet atelier fonctionne en flux tendu, c'est-à-dire que les machines M_1 et M_2 sont approvisionnées en pièces brutes dès qu'elles deviennent disponibles, alors des pièces s'accumulent (inutilement) en sortie de M_1. Ce stock interne non borné peut être considéré comme une instabilité du système.

Dans ce cas précis, cette instabilité, qui provient de la désadaptation des cadences maximales des machines M_1 et M_2, apparaît dans la matrice de transfert du système. Dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ on obtient pour le GET de la figure 3.2 l'expression de la matrice de transfert suivante

$$H = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}.$$

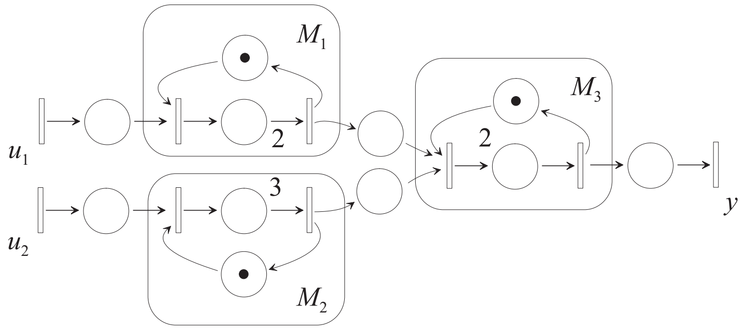


Figure 3.2 : Exemple d'atelier d'assemblage

Les deux composantes de H, qui sont ici données sous forme de séries périodiques, présentent en effet des pentes asymptotiques différentes.

Par conséquent, un des objectifs de la commande peut être dans ce cas l'uniformisation des vitesses des chemins $u_1 \to y$ et $u_2 \to y$ en vue d'atténuer (voire de supprimer) l'instabilité. Cette spécification peut, par exemple, s'exprimer au travers d'un transfert de référence du type

$$G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^3)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}.$$

Pour une telle spécification, on imagine facilement que le rôle du correcteur va être de "filtrer" les flux d'entrée u_1 et u_2 de manière à uniformiser les performances des branches $u_1 \to y$ et $u_2 \to y$ de l'atelier, par exemple en ralentissant l'alimentation de la machine M_1 en pièces brutes.

Choix d'un correcteur "le plus lent" Supposons qu'il existe plusieurs correcteurs $C_1, \ldots,$ C_n conduisant au même transfert de système corrigé noté $G = G_{C_1} = \ldots = G_{C_n}$. Dans ce cas, quel correcteur choisir ?

Sous cette hypothèse, tous les systèmes corrigés G_{C_i} ont en commun qu'ils produisent pour une même consigne d'entrée V une même trajectoire de sortie $Y = G_{C_1}V = \ldots = G_{C_n}V = GV$. Néanmoins, les commandes U_i, produites par les correcteurs C_i, pour cette même entrée V peuvent différer d'un correcteur à un autre.

Or les trajectoires U_i sont d'une importance particulière : elles correspondent à l'entrée effective des jetons dans le système H. Lorsque H représente un système manufacturier, la commande U caractérise l'entrée effective de pièces brutes en production. En conséquence, sous l'hypothèse qu'il soit possible de comparer la dynamique des correcteurs C_i entre eux, le correcteur le plus intéressant est alors le correcteur "le plus lent", c'est-à-dire celui qui, pour une consigne V donnée, produit la "commande U la plus tardive", ou encore, celui pour lequel les jetons entrent le plus tardivement possible dans le système H.

L'effet recherché par le correcteur, outre le contrôle des performances entrée-sortie du système, est également une diminution du temps de séjour des jetons dans le GET ou, de manière équivalente, une diminution du marquage instantané[3].

[3]dans le contexte de production, ce marquage instantané correspond aux en-cours de production.

En résumé, la commande avec modèle de référence proposée ici prend en compte deux aspects :

- **contrôle des performances :** synthétiser un correcteur C tel que G_C soit aussi proche que possible de G_{ref}
- **diminution du marquage instantané :** si plusieurs solutions s'offrent à nous, le choix se porte sur le correcteur le plus lent (lorsqu'il existe), c'est à dire celui qui conduit à un marquage interne du système H le plus faible pour des performances de G_C équivalentes.

On propose dans ce chapitre plusieurs structures de commande avec modèle de référence.

La première, consistant à modifier la dynamique du système H par l'ajout d'un précompensateur P, a déja fait l'objet d'études notamment dans [Menguy et al., 1996], [Libeaut, 1996], [Libeaut and Loiseau, 1996], [Hardouin et al., 1997] et [Boimond and Ferrier, 1996].

La seconde est à notre connaissance originale. La dynamique du système H est modifiée par l'ajout d'un correcteur F entre la sortie et l'entrée (correcteur feedback). Le contrôle des entrées tient ainsi compte de la mesure réelle des sorties. Ceci permet dans certains cas, comme nous le verrons au chapitre 4, d'améliorer la stabilité du système, y compris en présence de dysfonctionnements du système (par exemple, machine M_1 en panne).

Enfin, nous présentons deux structures de commande supplémentaires utilisant également un compensateur placé en feedback. L'une correspond à un feedback de l'état sur l'entrée U et l'autre à un feedback de la sortie sur l'état. Cette dernière structure, qui peut ne pas sembler naturelle, prend tout son sens dans le domaine de la gestion de production où l'on se soucie parfois des flux de matière dans le système lui-même.

3.2 Commande avec modèle de référence : synthèse d'un précompensateur

3.2.1 Synthèse du correcteur

La correction de la dynamique d'un système $H \in \mathcal{D}^{p\times m}$ (correspondant à un GET) se fait ici par l'action d'un précompensateur $P \in \mathcal{D}^{m\times m}$ (situé entre la consigne V et la commande U).

Le problème de commande consiste simplement à choisir la dynamique (le transfert) du précompensateur P de telle sorte que le système contrôlé G_P possède la dynamique décrite par un modèle de référence $G_{ref} \in \mathcal{D}^{p\times m}$ spécifié sous forme de matrice de transfert.

Cette structure de commande est classique dans le cadre des systèmes linéaires continus.

Remarque 3.1 Le problème est ici traité de manière générale pour un correcteur P préservant au système G_P la taille du système H (c'est-à-dire le même nombre d'entrées). La synthèse de P pourrait également être effectuée de telle sorte que la consigne V du système soit de taille différente de celle de U dans l'objectif, par exemple, de ramener le pilotage d'un système à une seule entrée. $\diamond$

Il convient tout d'abord d'exprimer le transfert du système muni du précompensateur. On a simplement

$$Y = G_P V = HPV,$$

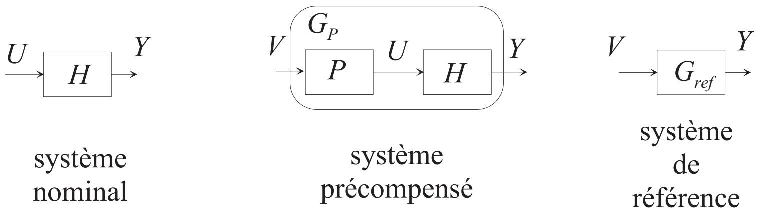


Figure 3.3 : Commande avec modèle de référence : correction d'un système H par un précompensateur P

soit, en utilisant les notations du §1.3,

$$Y = L_H(P)V. \tag{3.1}$$

Le problème de commande traité ici consiste à calculer un système P tel que

$$\begin{cases} G_P \preceq G_{ref} \\ P \text{ soit le plus grand possible} \end{cases}$$

⇒ La contrainte $G_P \preceq G_{ref}$ signifie pratiquement que pour toute entrée V

$$Y_{G_P} = G_P V \preceq G_{ref} V = Y_{G_{ref}}.$$

En représentation dateur ceci correspond à : pour une trajectoire d'entrée donnée $\{V(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$,

$$\forall k \in \mathbb{Z},\ Y_{G_P}(k) \preceq Y_{G_{ref}}(k),$$

c'est-à-dire que pour une même entrée V appliquée aux systèmes G_P et G_{ref}, le jeton numéroté k sort du système G_P au plus tard avant le jeton numéroté k issu du système G_{ref}. En termes de production de jetons par unité de temps, les performances attendues par G_{ref} pourront également être assumées par G_P.

⇒ La motivation pour la recherche d'un plus grand P vérifiant la contrainte précédente a déja été donnée en introduction.

Le problème de calcul de précompensateur se ramène sous cette forme à un problème de résiduabilité de L_H déja étudié au §1.3. Les résultats suivants sont alors directs. Nous donnons les résultats lorsque H et G_{ref} sont des matrices à valeurs dans $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$.

Proposition 3.2.

1. *Pour tout modèle de référence $G_{ref} \in (\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!])^{p\times m}$ réalisable, il existe un plus grand précompensateur P périodique ($P \in (\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!])^{p\times m}$) tel que $G_P \preceq G_{ref}$. Le précompensateur P est donné par le calcul*

$$P = H \circ\!\!\!\!\backslash\, G_{ref}.$$

2. *Pour tout modèle de référence G_{ref} réalisable, il existe un plus grand précompensateur P_{rat} réalisable tel que $G_{P_{\mathsf{rat}}} \preceq G_{ref}$. Le précompensateur P_{rat} est donné par le calcul*

$$P_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_{+}(H \lnot\!\!\setminus G_{ref}).$$

En définissant[4] $L_H^{\mathsf{rat}} : (\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!])^{m\times m} \to (\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!])^{p\times m}, X \mapsto HX$, *on a de manière équivalente*

$$P_{\mathsf{rat}} = (L_H^{\mathsf{rat}})^{\sharp}(G_{ref}).$$

3. *Pour tout modèle de référence réalisable G_{ref} appartenant à $\mathsf{Im}L_H^{\mathsf{rat}}$ le plus grand précompensateur P_{rat} réalisable est tel que $H \otimes P_{\mathsf{rat}} = G_{ref}$.*

Preuve : Pour tout ces résultats, il convient de se référer à la discussion menée dans la remarque 2.46 sur la résiduabilité du produit sur les dioïdes $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{per}}[\![\gamma,\delta]\!]$ et $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$.

1. L_H est résiduable, l'inéquation $L_H(P) \preceq G_{ref}$ admet toujours $L_H^{\sharp}(G_{ref})$ comme plus grande solution. En outre, si G_{ref} est réalisable, G_{ref} est également périodique (et causal) et $H \lnot\!\!\setminus G_{ref}$ est en conséquence périodique d'après le théorème 2.39, mais non nécessairement causal.

2. nous avons vu (remarque 2.46) que L_H^{rat} est résiduable. Par conséquent, $\mathsf{Pr}_{+}(H \lnot\!\!\setminus G_{ref}) = (L_H^{\mathsf{rat}})^{\sharp}(G_{ref})$ est la plus grande solution périodique et causale (donc rationnelle ou réalisable) de $HX \preceq G_{ref}$.

3. si $G_{ref} \in \mathsf{Im}L_H^{\mathsf{rat}}$, alors il existe un élément rationnel D (et donc réalisable) tel que $G_{ref} = HD = L_H^{\mathsf{rat}}(D)$. Soit d'après (1.10), $L_H^{\mathsf{rat}}(D) = L_H^{\mathsf{rat}} \circ (L_H^{\mathsf{rat}})^{\sharp} \circ L_H^{\mathsf{rat}}(D)$ avec $(L_H^{\mathsf{rat}})^{\sharp} \circ L_H^{\mathsf{rat}}(D) = \mathsf{Pr}_{+}(H \lnot\!\!\setminus G_{ref}) = P_{\mathsf{rat}}$. D'où finalement, $HP_{\mathsf{rat}} = G_{ref}$.

□

Corollaire 3.3. *Il existe un plus grand précompensateur P_{rat} réalisable tel que $L_H^{\mathsf{rat}}(P_{\mathsf{rat}}) = H$. P_{rat} est fourni par le calcul*

$$P_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_{+}(H \lnot\!\!\setminus H) = (L_H^{\mathsf{rat}})^{\sharp}(H).$$

Preuve : H appartient à $\mathsf{Im}L_H^{\mathsf{rat}}$ puisque l'on peut toujours écrire $H = HE$ où E est la matrice identité qui est réalisable. Le résultat repose sur le point 3 de la proposition 3.2. □

Remarque 3.4 Le corollaire précédent exprime simplement le fait que l'on peut toujours "filtrer" le flux d'entrée d'un système H par un précompensateur causal en conservant pour le système corrigé le transfert entrée-sortie du système non corrigé. ◇

3.2.2 Illustration

On peut reprendre ici l'exemple de l'atelier décrit en introduction (voir fig. 3.2). Le transfert du système libre est décrit dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ par la matrice

$$H = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}.$$

[4]se reporter à la remarque 2.46 où la résiduabilité du produit du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ a été discutée

On se fixe comme modèle de référence le transfert réalisable suivant

$$G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^3)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}.$$

En accord avec la proposition 3.2, le calcul de P nécessite le calcul de $H \lcirclearrowright G_{ref}$. En accord avec le théorème 1.103,

$$\begin{aligned} P &= H \backslash G_{ref} \\ &= \begin{pmatrix} (\delta^4(\gamma\delta^2)^*) \backslash (\delta^4(\gamma\delta^3)^*) & (\delta^4(\gamma\delta^2)^*) \backslash (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \\ (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \backslash (\delta^4(\gamma\delta^3)^*) & (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \backslash (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\gamma\delta^3)^* & \delta(\gamma\delta^3)^* \\ \delta^{-1}(\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le système P n'est pas causal (l'élément $P_{21} = \delta^{-1}(\gamma\delta^3)^*$ n'est pas causal), il n'a par conséquent pas de réalisation par un GET (à temporisations dans $\mathbb{N}$). Notamment, *via* le précompensateur P, u_2 dépend de v_1 et v_2 suivant l'égalité

$$u_2 = \delta^{-1}(\gamma\delta^3)^* v_1 \oplus (\gamma\delta^3)^* v_2.$$

Une forme implicite de cette dynamique est la suivante

$$u_2 = \gamma\delta^3 u_2 \oplus \delta^{-1} v_1 \oplus v_2,$$

ce qui conduit en représentation dateur sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ à la récurrence suivante

$$u_2(k) = 3u_2(k-1) \oplus (-1)v_1(k) \oplus v_2(k).$$

Il est clair sous cette forme que l'élaboration de la commande $u_2(k)$ (par le correcteur P) nécessite le "futur" de la consigne d'entrée v_1. La mise en oeuvre d'un tel correcteur nécessite donc la "prédiction" possible d'une partie de V.

Le correcteur $P_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(H \backslash G_{ref})$ résoud ce problème de causalité. Pour cet exemple, on obtient

$$P_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(H \backslash G_{ref}) = \begin{pmatrix} \mathsf{Pr}_+((\gamma\delta^3)^*) & \mathsf{Pr}_+(\delta(\gamma\delta^3)^*) \\ \mathsf{Pr}_+(\delta^{-1}(\gamma\delta^3)^*) & \mathsf{Pr}_+((\gamma\delta^3)^*) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\gamma\delta^3)^* & \delta(\gamma\delta^3)^* \\ \gamma\delta^2(\gamma\delta^3)^* & (\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}.$$

Ce correcteur est désormais réalisable (puisqu'il est rationnel) par un GET. Une réalisation de ce précompensateur causal est donnée fig. 3.4. Les équations récurrentes donnant l'expression de la commande U en fonction de la consigne V sont les suivantes sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$:

$$\begin{aligned} u_1(k) &= v_1(k) \oplus 3u_1(k-1) \oplus 1v_2(k) \\ u_2(k) &= 2v_1(k-1) \oplus 3u_2(k-1) \oplus v_2(k). \end{aligned}$$

De plus, le corollaire 3.3 indique qu'il existe, pour tout GET, un précompensateur réalisable optimal laissant inchangé le transfert du système. Pour le système H étudié ici, ce précompensateur est obtenu par le calcul suivant

$$\begin{aligned} P_{\mathsf{rat}} &= \mathsf{Pr}_+(H \backslash H) = \begin{pmatrix} \mathsf{Pr}_+((\delta^4(\gamma\delta^2)^*) \backslash (\delta^4(\gamma\delta^2)^*)) & \mathsf{Pr}_+((\delta^4(\gamma\delta^2)^*) \backslash (\delta^5(\gamma\delta^3)^*)) \\ \mathsf{Pr}_+((\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \backslash (\delta^4(\gamma\delta^2)^*)) & \mathsf{Pr}_+((\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \backslash (\delta^5(\gamma\delta^3)^*)) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\gamma\delta^2)^* & \delta(\gamma\delta^3)^* \\ \varepsilon & (\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

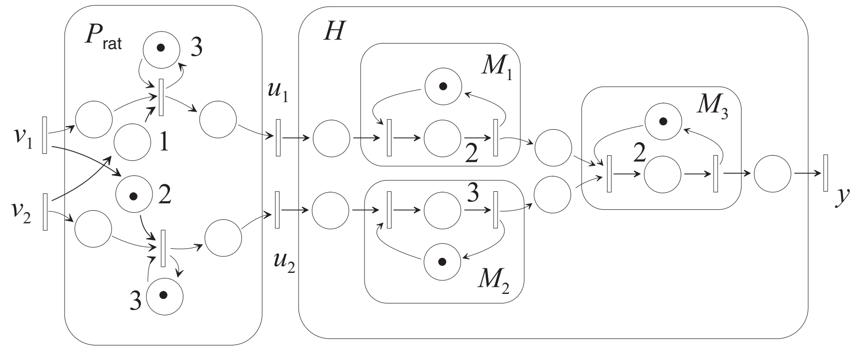


Figure 3.4 : Réalisation du précompensateur permettant d'approcher au mieux G_{ref}

3.2.3 Discussion des résultats

Marquage initial du précompensateur

La proposition 3.2 indique que le problème de synthèse de précompensateur, dans un objectif d'atteinte de modèle de référence, admet toujours une solution optimale en raison de la résiduabilité de l'application L_H. Cependant, pour un modèle de référence réalisable quelconque, la solution optimale $P = H \backslash\!\!\!\backslash G_{ref}$ est périodique mais non nécessairement causale. Le problème de causalité est ensuite résolu en ne conservant que la partie causale du précompensateur périodique.

Mais à quel prix résoud-on ce problème d'anticipation ?

En effet, la "projection" (par Pr_+) d'un élément périodique non causal dans $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma,\delta]\!]$ peut conduire à une solution à valuation en γ et/ou en δ strictement positive. Que signifie un correcteur causal à valuation en γ strictement positive ?

Intuitivement, un transfert P_{rat} causal à valuation en γ strictement positive représente un précompensateur (une réalisation de P_{rat}) capable de "fournir" des jetons. La question est : quand ces jetons sont-ils fournis par P_{rat} ?

Cette notion est plus facile à appréhender au travers d'un exemple. Prenons le cas d'un système mono-entrée mono-sortie. Soit un GET de transfert $h = \delta^3(\gamma^2\delta^2)^*$ et un modèle de référence $g_{ref} = (\gamma\delta)^*$. Notons qu'ici $g_{ref} \prec h$ ce qui signifie en quelque sorte que le système de référence est "plus rapide" que le système nominal.

Le précompensateur p_{rat} réalisable optimal (pour l'objectif fixé par g_{ref}) est obtenu par

$$p_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(h \backslash\!\!\!\backslash g_{ref}) = \mathsf{Pr}_+(\delta^3(\gamma^2\delta^2)^* \backslash\!\!\!\backslash (\gamma\delta)^*) = \mathsf{Pr}_+(\delta^{-3}(\gamma\delta)^*) = \gamma^3(\gamma\delta)^*.$$

Une réalisation de p_{rat} est donnée figure 3.5.

Il faut néanmoins veiller à interpréter correctement le modèle (de type GET) obtenu par la mise en série de la réalisation de p_{rat} et de celle de h donné figure 3.5. Il s'agit en fait d'une "image" du système corrigé à l'origine des temps (date $-\infty$) et non à la date 0. On aurait donc tort de croire que les jetons dessinés en amont de la transition de sortie du précompensateur sont disponibles uniquement à la date 0.

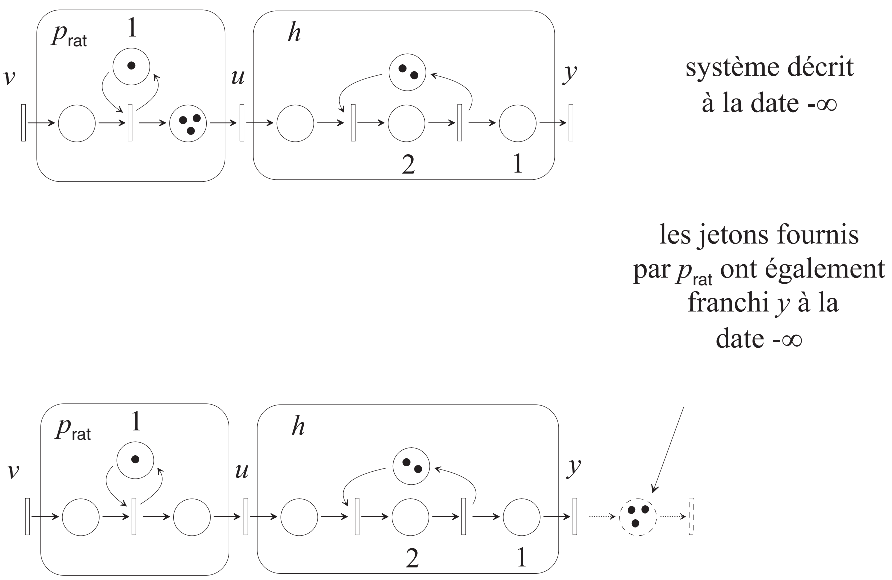


Figure 3.5 : Précompensateur causal à valuation non nulle

En effet, il faut se rappeler que les systèmes modélisés sont supposés en fonctionnement au plus tôt. Par conséquent, les 3 jetons représentés sur la réalisation de p_{rat} sont des jetons dont le correcteur dispose depuis l'origine des temps. Puisque le franchissement des transitions est de type "au plus tôt", ces jetons situés en amont de la transition u peuvent franchir u dès la date $-\infty$ de telle sorte qu'ils "traversent" finalement l'ensemble du graphe d'événements du système h à la date $-\infty$ également. Finalement, la transition y a été franchie 3 fois dès la date $-\infty$.

On obtient d'ailleurs la même interprétation lorsqu'on calcule $y = g_{p_{\mathsf{rat}}} = h \otimes p_{\mathsf{rat}} = \gamma^3\delta^3(\gamma\delta)^*$. La réponse du système $g_{p_{\mathsf{rat}}}$ à une impulsion (qui correspond à placer une infinité de jetons en amont de v à la date 0) montre que les jetons numérotés 0, 1, et 2 ont quitté le système à la date $-\infty$.

Si l'on se replace maintenant dans un souci de contrôle manufacturier, un précompensateur P_{rat} causal à valuation strictement positive signifie que le système doit disposer initialement d'un capital de "pièces déja produites" pour que la spécification entrée-sortie décrite par g_{ref} puisse être atteinte. Autrement dit, le problème d'anticipation lié à l'expression d'un précompensateur périodique non causal n'est résolu qu'au prix d'un stock de pièces finies dont on peut disposer initialement.

Choix du modèle de référence

Au vu de la proposition 3.2, il n'existe, d'un point de vue mathématique, aucune restriction sur le choix de G_{ref} (hormis qu'il soit réalisable) pour que la spécification G_{ref} soit atteinte *via* un précompensateur lui-même réalisable. L'interprétation pratique faite dans le paragraphe précédent montre néanmoins les limites de ce type de correction.

En effet, quelle que soit la précompensation appliquée, une limite physique du système corrigé demeure la vitesse maximale (le taux de production) du système nominal. Par application directe du théorème 2.39, il est clair dans le cas mono-entrée mono-sortie que

$$\sigma_\infty(g_{p_{\mathsf{rat}}}) = \min(\sigma_\infty(p_{\mathsf{rat}}), \sigma_\infty(h)).$$

Autrement dit, on ne peut structurellement pas accélérer le système $g_{p_{\mathsf{rat}}}$ par rapport au système h par ajout d'un précompensateur réalisable.

Notamment, dans le cas de GET mono-entrée mono-sortie, pour un modèle de référence tel que $\sigma_\infty(g_{ref}) > \sigma_\infty(h)$, le seul précompensateur réalisable vérifiant la spécification g_{ref} est alors $p = \varepsilon$. Ce qui semble acceptable d'un point de vue mathématique a alors difficilement un sens pratique puisque $p = \varepsilon$ symbolise l'absence de lien entre v et u.

Dans la pratique, notamment en tant qu'application à la gestion de production, la correction par précompensation n'aura donc de sens que pour des spécifications telles que $\sigma_\infty(g_{ref}) \leq \sigma_\infty(h)$, c'est-à-dire que le taux de production du modèle de référence soit inférieur ou égal à celui du système contrôlé.

Le problème de réalisation du correcteur

Nous avons jusqu'ici proposé des réalisations de correcteur sans expliciter la méthode utilisée pour les obtenir. Le plus souvent, les réalisations données précédemment ont été déterminées intuitivement de manière à ce qu'elles soient concises et lisibles.

On peut néanmoins fournir une méthode systématique. Une réalisation possible d'un transfert (scalaire) de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, exprimé sous forme de série périodique $y = hu = (p \oplus qr^*)u$, repose sur la réalisation de polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$. En effet, on peut toujours introduire une variable x telle que le système

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & rx \oplus qu \\ y & = & x \oplus pu \end{array} \right.$$

ait le transfert $y = (p \oplus qr^*)u$.

Ainsi, une réalisation d'un transfert périodique scalaire, puis ensuite d'un transfert matriciel, repose simplement sur la réalisation de polynômes. Or, on réalise facilement un transfert polynômial $p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ par deux transitions séparées par $\alpha + 1$ places numérotées de 0 à α, la place i contenant n_i jetons et une temporisation de t_i unités de temps. Cette réalisation peut ensuite se ramener à une réalisation du type de celle donnée dans la définition 2.34 (un quadruplet (A_1, A_2, B, C)), c'est-à-dire à un GET pour lequel chaque place contient au plus un jeton et a une temporisation d'au plus une unité de temps.

Le problème de *réalisation minimale*, c'est-à-dire l'obtention d'un quadruplet (A_1, A_2, B, C) dont les matrices sont de tailles minimales, trouve donc un intérêt pour ce genre de problème. En effet, si la précompensation P_{rat} doit être calculée "en ligne", c'est-à-dire par une récurrence (max,+), il est intéressant d'obtenir une réalisation qui minimise le nombre d'états à mémoriser à chaque itération. Mais ce problème de réalisation minimale demeure aujourd'hui un problème ouvert. Nous renvoyons le lecteur à [Gaubert et al., 1998] pour des références.

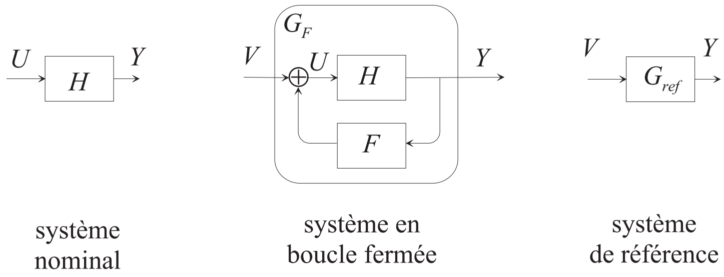


Figure 3.6 : Commande avec modèle de référence : correction d'un système H par un compensateur F en feedback

3.3 Commande avec modèle de référence : synthèse d'un feedback de sortie

Nous abordons dans ce paragraphe le problème de synthèse de feedback de sortie permettant au système corrigé de s'approcher au mieux d'un modèle de référence. A notre connaissance, les retours de sortie sur l'entrée pour des graphes d'événements temporisés ont, jusqu'ici, surtout fait l'objet d'études dans le domaine de la minimisation de ressources mais avec des approches différentes[5] de celle présentée dans ce mémoire.

L'approche proposée ici prend pour point de départ des résultats donnés dans [Cottenceau et al., 1999] et illustrés dans [Cohen, 1998] et [Cohen et al., 1998].

3.3.1 Formulation du problème

Il s'agit ici de modifier la dynamique d'un système $H \in \mathcal{D}^{p\times m}$ par l'ajout d'un feedback $F \in \mathcal{D}^{m\times p}$ (situé entre la sortie et l'entrée de H). La dynamique du système en boucle fermée est alors paramétrée par la dynamique du feedback.

L'objectif de commande est d'imposer au système bouclé la dynamique décrite par un modèle de référence $G_{ref} \in \mathcal{D}^{p\times m}$ spécifié sous forme de matrice de transfert. La figure 3.6 présente le schéma bloc du système nominal, du système en boucle fermée et du modèle de référence.

Formulation du problème Il convient tout d'abord de déterminer le transfert d'un système H muni d'un feedback F. D'après la fig. 3.6, le système en boucle fermée vérifie

$$\begin{cases} U &= V \oplus FY \\ Y &= HU \end{cases}$$

[5]dans [Gaubert, 1995a], Gaubert ramène le problème de minimisation de ressources d'un GET, pour une contrainte de taux de production donnée, à un problème de programmation linéaire. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 4.

En accord avec le théorème 1.86 et en fonctionnement au plus tôt, le système bouclé possède donc la dynamique suivante entre V et Y

$$Y = H(FH)^*V = G_F V. \tag{3.2}$$

D'un point de vue algébrique, ce problème nécessite donc l'étude de l'application M_H suivante définie sur des dioïdes complets

$$\begin{array}{rccc} \mathsf{M}_H : & \mathcal{D}^{m\times p} & \to & \mathcal{D}^{p\times m} \\ & X & \mapsto & H(XH)^*. \end{array}$$

Remarque 3.5 En raison de l'égalité (1.25), $\mathsf{M}_H(X)$ s'écrit indifféremment

$$\mathsf{M}_H(X) = H(XH)^* = (HX)^*H.$$

$\diamond$

En utilisant les notations d'applications définies au §1.3, et en tenant compte de la remarque précédente, M_H se décompose de deux façons

$$\mathsf{M}_H = L_H \circ \mathcal{K} \circ R_H = R_H \circ \mathcal{K} \circ L_H.$$

Les diagrammes suivants résument ces décompositions

$$\begin{array}{rccccccc} \mathsf{M}_H : & \mathcal{D}^{m\times p} & \xrightarrow{R_H} & \mathcal{D}^{m\times m} & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \mathcal{D}^{m\times m} & \xrightarrow{L_H} & \mathcal{D}^{p\times m} \\ & F & \longmapsto & FH & \longmapsto & (FH)^* & \longmapsto & H(FH)^* \end{array}$$

$$\begin{array}{rccccccc} \mathsf{M}_H : & \mathcal{D}^{m\times p} & \xrightarrow{L_H} & \mathcal{D}^{p\times p} & \xrightarrow{\mathcal{K}} & \mathcal{D}^{p\times p} & \xrightarrow{R_H} & \mathcal{D}^{p\times m} \\ & F & \longmapsto & HF & \longmapsto & (HF)^* & \longmapsto & (HF)^*H \end{array}$$

Le problème d'atteinte (exacte) d'un modèle de référence par l'action d'un feedback F s'exprime donc comme la résolution de l'équation

$$\mathsf{M}_H(F) = G_{ref}.$$

Mais, ce problème d'atteinte exacte de modèle de référence peut ne pas avoir de solution ou, à l'inverse, avoir plusieurs solutions pour certains G_{ref}.

Par conséquent, et pour les mêmes raisons que dans la section 3.2.1, on préfèrera traiter le problème suivant :

$$\text{existe-t-il un plus grand feedback } F \text{ tel que } G_F \preceq G_{ref} \text{ ?} \tag{3.3}$$

Mathématiquement, la solution du problème (3.3) découle de la résiduabilité (ou non) de M_H sur un dioïde. Or, il est possible de statuer rapidement sur cette question lorsque M_H est définie sur des dioïdes complets .

M_H n'est pas résiduable. Soit $\mathcal{D}^{m\times p}$ et $\mathcal{D}^{p\times m}$ des dioïdes complets. D'après le théorème 1.91, M_H est résiduable si, et seulement si, elle vérifie les deux égalités suivantes

$$\begin{aligned} \mathsf{M}_H(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \mathsf{M}_H(a\oplus b) &= \mathsf{M}_H(a)\oplus \mathsf{M}_H(b) \end{aligned}$$

Or, d'une part $\mathsf{M}_H(\varepsilon)=H$ et d'autre part $\mathsf{M}_H(a\oplus b)=H(aH\oplus bH)^*\neq H(aH)^*\oplus H(bH)^*=\mathsf{M}_H(a)\oplus\mathsf{M}_H(b)$.

M_H définie de $\mathcal{D}^{m\times p}$ dans $\mathcal{D}^{p\times m}$ n'est donc par résiduable.

Problème traité Notre démarche consiste à montrer qu'il existe néanmoins des restrictions de M_H du type ${}_{\mathcal{B}|}\mathsf{M}_H$ ($\mathsf{Im}\mathsf{M}_H\subset\mathcal{B}$) qui soient résiduables.

Pratiquement, cela revient à montrer que le problème (3.3) n'admet de réponse positive que pour un ensemble restreint de modèles de références pris dans $\mathcal{D}^{p\times m}$.

Que signifie "M_H n'est pas résiduable" ? Il peut y avoir deux significations à cela.

Il n'y a pas de solution à $G_F\preceq G_{ref}$. Le seul effet attendu d'un feedback de sortie F est de "ralentir" le système H et en aucun cas de l'accélérer. Formellement, ceci s'écrit simplement

$$\forall F,\ \mathsf{M}_H(F)\succeq H.$$

L'équation $\mathsf{M}_H(F)\preceq G_{ref}$ n'admet donc pas de solution pour $G_{ref}\prec H$, en effet nous avons vu que $\mathsf{M}_H(\varepsilon)=H$.

L'ensemble des solutions de $G_F\preceq G_{ref}$ n'a pas de borne sup. Lorsque l'existence d'une solution est garantie, il est possible qu'il n'en existe pas d'optimale. Lorsque $H\preceq G_{ref}$, l'inéquation $\mathsf{M}_H(x)\preceq G_{ref}$ admet toujours ε comme solution, mais celà n'implique pas qu'il en existe une plus grande.

Le problème de synthèse de feedback F posé ici ne trouve donc pas de réponse immédiate. Il est nécessaire d'étudier au préalable M_H. La section suivante propose des restrictions de M_H résiduables, c'est-à-dire conduisant à l'existence d'une plus grande solution au problème $\mathsf{M}_H(x)\preceq G_{ref}$ pour certains modèles de référence G_{ref}.

3.3.2 Restrictions résiduables de M_H

De manière générale, pour qu'une restriction ${}_{\mathcal{B}|}\mathsf{M}_H$, où $\mathsf{Im}\mathsf{M}_H\subseteq\mathcal{B}$, soit résiduable, il est nécessaire tout d'abord que la restriction ${}_{\mathsf{Im}\mathsf{M}_H|}\mathsf{M}_H$ le soit. En effet, si ${}_{\mathcal{B}|}\mathsf{M}_H\in Res^\sharp(\mathcal{D}^{m\times p},\mathcal{B})$, alors par application du corollaire 1.43 on a l'implication

$${}_{\mathcal{B}|}\mathsf{M}_H\in Res^\sharp(\mathcal{D}^{m\times p},\mathcal{B}\subset\mathcal{D}^{p\times m})\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} {}_{\mathcal{B}|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\mathsf{M}_H}\in Res^\sharp(\mathsf{Im}\mathsf{M}_H,\mathcal{B}) \\ {}_{\mathsf{Im}\mathsf{M}_H|}\mathsf{M}_H\in Res^\sharp(\mathcal{D}^{m\times p},\mathsf{Im}\mathsf{M}_H) \end{array}\right.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D}^{m\times p} \arrow[r, "{}_{\mathcal{B}|}\mathsf{M}_H"] \arrow[dr, "{}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H"'] & \mathcal{B} \\
 & \mathsf{ImM}_H \arrow[u, "{}_{\mathcal{B}|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{ImM}_H}"']
\end{tikzcd}$$

La proposition suivante montre que M_H restreinte à son image est résiduable.

Proposition 3.6. *Soit* $\mathsf{M}_H : \mathcal{D}^{m\times p} \to \mathcal{D}^{p\times m}, X \to H(XH)^*$ *définie sur des dioïdes complets. Alors l'application* ${}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H$ *est résiduable, sa résiduée s'exprime*

$$\begin{array}{rccc} ({}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H)^\sharp : & \mathsf{ImM}_H & \to & \mathcal{D}^{m\times p} \\ & x & \to & H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} x \mathbin{/\!\!\!\circ} H \end{array}$$

Preuve : $G \in \mathsf{ImM}_H \iff \exists A \in \mathcal{D}^{m\times p}, G = H(AH)^*$. Montrer que ${}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H$ est résiduable est équivalent à montrer que l'inéquation $H(XH)^* \preceq H(AH)^*$ admet une plus grande solution $\forall A \in \mathcal{D}^{m\times p}$.

Tout d'abord, l'équivalence suivante provient du fait que L_H est résiduable

$$H(XH)^* \preceq H(AH)^* \iff (XH)^* \preceq H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (H(AH)^*).$$

On s'intéresse désormais à l'élément $H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (H(AH)^*)$. Les égalités suivantes sont vérifiées

$$\begin{array}{rcll} H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (H(AH)^*) & = & H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} ((HA)^*H) & (\text{ cf } (1.25)) \\ & = & H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} [(HA)^* \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} ((HA)^*H)] & (\text{cf } (1.53)) \\ & = & [(HA)^*H] \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} [(HA)^*H] & (\text{cf } (1.49)) \end{array}$$

Cela signifie qu'il existe un élément $B \in \mathcal{D}^{p\times m}$ tel que $H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (H(AH)^* = B \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} B$. D'après le lemme 1.105, cela signifie que $H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (H(AH)^*$ est "une étoile" pour tout $A \in \mathcal{D}^{m\times p}$, c'est-à-dire appartient à l'image de l'application $\mathcal{K} : \mathcal{D}^{m\times m} \to \mathcal{D}^{m\times m}$.

Puisque $\mathcal{K} : \mathcal{D}^{m\times m} \to \mathsf{Im}\mathcal{K}$ est résiduable (cf. proposition 1.100), et que $({}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K})^\sharp = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\mathcal{K}}$, il y a donc équivalence

$$(XH)^* \preceq H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (H(AH)^*) \iff XH \preceq H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (H(AH)^*).$$

Rechercher une plus grande solution en X à l'inéquation

$$H(XH)^* \preceq H(AH)^*$$

revient à chercher une plus grande solution en X à l'inéquation

$$XH \preceq H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (H(AH)^*).$$

Puisque R_H est résiduable, cette dernière inéquation admet comme plus grande solution

$$X = H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (H(AH)^*) \mathbin{/\!\!\!\circ} H.$$

En résumé, pour tout $G \in \mathsf{ImM}_H$, alors $H \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} G \mathbin{/\!\!\!\circ} H$ est la plus grande solution de l'inéquation

$$H(XH)^* \preceq G,$$

ce qui signifie que ${}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H$ est résiduable. □

Corollaire 3.7. *Si $G \in \mathsf{ImM}_H$ alors l'équation $H(XH)^* = G$ admet $X = H \circ\!\!\!\backslash G \circ\!\!\!/ H$ comme plus grande solution.*

Preuve : ${}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H$ est surjective donc, d'après l'identité (1.13), ${}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H \circ ({}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H)^\sharp = \mathsf{Id}_{\mathsf{ImM}_H}$, ou formulé autrement, lorsque $G \in \mathsf{ImM}_H$ la plus grande solution de $H(XH)^* \preceq G$ vérifie l'égalité. □

Puisque l'on s'est assuré que la restriction ${}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H$ est résiduable, il est désormais naturel de chercher un codomaine $\mathcal{B}$ plus grand que ImM_H tel que ${}_{\mathcal{B}|}\mathsf{M}_H$ soit résiduable, l'objectif recherché étant de restreindre le moins possible l'ensemble des modèles de référence conduisant à la synthèse d'un feedback optimal.

La proposition suivante fournit un élément de réponse dans cette direction.

Notation 3.8. *Soit $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ les sous-ensembles de $\mathcal{D}^{p\times m}$ définis par*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{G \in \mathcal{D}^{p\times m} | \exists A \in \mathcal{D}^{p\times p}, G = A^* H\} \\ \mathcal{G}_2 &= \{G \in \mathcal{D}^{p\times m} | \exists B \in \mathcal{D}^{m\times m}, G = HB^*\} \end{aligned}$$

On a clairement $\mathsf{ImM}_H \subseteq \mathcal{G}_1$ et $\mathsf{ImM}_H \subseteq \mathcal{G}_2$.

Remarque 3.9 Les ensembles $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ peuvent être vus respectivement comme l'image des applications $R_H \circ \mathcal{K} : \mathcal{D}^{p\times p} \to \mathcal{D}^{p\times m}$ et $L_H \circ \mathcal{K} : \mathcal{D}^{m\times m} \to \mathcal{D}^{p\times m}$. ◇

Proposition 3.10. *Les restrictions ${}_{\mathcal{G}_1|}\mathsf{M}_H$ et ${}_{\mathcal{G}_2|}\mathsf{M}_H$ sont résiduables. Leurs résiduées sont les applications suivantes*

$$\begin{array}{rcl} ({}_{\mathcal{G}_1|}\mathsf{M}_H)^\sharp : \mathcal{G}_1 & \longrightarrow & \mathcal{D}^{m\times p} \\ x & \longmapsto & H \circ\!\!\!\backslash x \circ\!\!\!/ H \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} ({}_{\mathcal{G}_2|}\mathsf{M}_H)^\sharp : \mathcal{G}_2 & \longrightarrow & \mathcal{D}^{m\times p} \\ x & \longmapsto & H \circ\!\!\!\backslash x \circ\!\!\!/ H \end{array}$$

Preuve : Nous développons la preuve uniquement pour la restriction ${}_{\mathcal{G}_1|}\mathsf{M}_H$, la seconde preuve étant similaire.

Prenons $G \in \mathcal{G}_1 \iff \exists A \in \mathcal{D}^{p\times p},\ G = A^* H$.

Chercher si ${}_{\mathcal{G}_1|}\mathsf{M}_H$ est résiduable est équivalent à chercher si l'inéquation $H(XH)^* \preceq A^* H$ admet une plus grande solution $\forall A \in \mathcal{D}^{p\times p}$.

On a l'équivalence suivante en raison de la résiduabilité de L_H

$$H(XH)^* \preceq A^* H \iff (XH)^* \preceq H \circ\!\!\!\backslash (A^* H).$$

L'élément $H \circ\!\!\!\backslash A^* H$ peut s'écrire indifféremment

$$H \circ\!\!\!\backslash (A^* H) = \frac{A^* \circ\!\!\!\backslash (A^* H)}{H} = \frac{A^* H}{A^* H} \text{ (application de (1.53) puis de (1.49)).}$$

D'après le lemme 1.105, $H \circ\!\!\!\backslash (A^* H)$ est donc une étoile, c'est-à-dire appartient à l'image de $\mathcal{K} : \mathcal{D}^{m\times m} \to \mathcal{D}^{m\times m}$.

Puisque ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K} : \mathcal{D}^{m\times m} \to \mathsf{Im}\mathcal{K}$ est résiduable, il y a équivalence

$$(XH)^* \preceq H \lcirclearrowleft (A^*H) \iff XH \preceq H \lcirclearrowleft (A^*H).$$

Finalement, ceci nous permet d'établir que $\forall A \in \mathcal{D}^{p\times p}$,

$$X = H \lcirclearrowleft (A^*H) \rcirclearrowleft H$$

est la plus grande solution de l'inéquation $\mathsf{M}_H(X) \preceq A^*H$.

Exprimé différemment, si $G \in \mathcal{G}_1$, alors $H \lcirclearrowleft G \rcirclearrowleft H$ est la plus grande solution de

$$H(XH)^* \preceq G,$$

c'est-à-dire la restriction ${}_{\mathcal{G}_1|}\mathsf{M}_H$ est résiduable. □

L'étude de M_H faite précédemment met en évidence l'existence de restrictions ${}_{\mathcal{G}_1|}\mathsf{M}_H$ et ${}_{\mathcal{G}_2|}\mathsf{M}_H$ résiduables. La proposition 1.42 nous indique la possibilité de trouver des décompositions de ${}_{\mathcal{G}_1|}\mathsf{M}_H$ et ${}_{\mathcal{G}_2|}\mathsf{M}_H$ en applications résiduables. Nous faisons ici certaines décompositions à titre d'exercice.

On pourra à chaque étape se reporter au diagramme commutatif figure 3.7 qui illustre les résultats énoncés ici.

1. Tout d'abord $R_H : \mathcal{D}^{m\times p} \to \mathcal{D}^{m\times m}$ est résiduable. D'après le corollaire 1.43, on peut décomposer R_H en applications résiduables $R_H = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}R_H} \circ {}_{\mathsf{Im}R_H|}R_H$. Ce qui conduit tout d'abord à
$$\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}R_H} \in Res^\sharp(\mathsf{Im}R_H, \mathcal{D}^{m\times m})$$
$${}_{\mathsf{Im}R_H|}R_H \in Res^\sharp(\mathcal{D}^{m\times p}, \mathsf{Im}R_H).$$

2. De plus, $\mathcal{K} : \mathcal{D}^{m\times m} \to \mathcal{D}^{m\times m}$ n'est pas résiduable mais la restriction à son image l'est (d'après la proposition 1.100), c'est-à-dire
$${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K} \in Res^\sharp(\mathcal{D}^{m\times m}, \mathsf{Im}\mathcal{K}).$$

3. Puisque la composition d'applications résiduables est résiduable (d'après (1.11)), la double restriction ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K} \circ \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}R_H} = {}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}_{|\mathsf{Im}R_H}$ est par conséquent résiduable soit
$${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}_{|\mathsf{Im}R_H} \in Res^\sharp(\mathsf{Im}R_H, \mathsf{Im}\mathcal{K}).$$

4. D'après le corollaire 1.43, et sachant que $\mathsf{Im}(\mathcal{K} \circ R_H) = \mathsf{Im}(\mathcal{K}_{|\mathsf{Im}R_H})$, puisque l'application ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}_{|\mathsf{Im}R_H}$ est résiduable, on a également
$${}_{\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)|}\mathcal{K}_{|\mathsf{Im}R_H} \in Res^\sharp(\mathsf{Im}R_H, \mathsf{Im}(\mathcal{K} \circ R_H))$$
$${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)} \in Res^\sharp(\mathsf{Im}(\mathcal{K} \circ R_H), \mathsf{Im}\mathcal{K}).$$

5. Enfin, puisque ${}_{\mathcal{G}_2|}\mathsf{M}_H = {}_{\mathsf{Im}(L_H\circ\mathcal{K})|}\mathsf{M}_H = {}_{\mathsf{Im}(L_H\circ\mathcal{K})|}L_{H|\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)} \circ {}_{\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)|}(\mathcal{K} \circ R_H)$ est résiduable (proposition 3.10 et remarque 3.9), l'application de la proposition 1.42 conduit au fait que la restriction suivante est résiduable
$${}_{\mathsf{Im}(L_H\circ\mathcal{K})|}L_{H|\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)} \in Res^\sharp(\mathsf{Im}(\mathcal{K} \circ R_H), \mathsf{Im}(L_H \circ \mathcal{K}))$$

$$\begin{tikzcd}
\mathsf{M}_H : \mathcal{D}^{m\times p} \arrow[r, dotted, "R_H"] \arrow[dr, dotted] & \mathcal{D}^{m\times m} \arrow[r, "\mathcal{K}"] \arrow[dr, dotted] & \mathcal{D}^{m\times m} \arrow[r, dotted, "L_H"] \arrow[dr, dotted] & \mathcal{D}^{p\times m} \\
 & \mathsf{Im}R_H \arrow[u, dotted] \arrow[r, dotted] \arrow[dr, dotted] & \mathsf{Im}\mathcal{K} & \mathsf{Im}L_H \arrow[u, dotted] \\
 & & \mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H) \arrow[u, dotted] \arrow[r, dotted] \arrow[dr, dotted] & \mathsf{Im}(L_H\circ\mathcal{K})(=\mathcal{G}_2) \\
 & & & \mathsf{ImM}_H \arrow[u, dotted]
\end{tikzcd}$$

Figure 3.7 : Décompositions de M_H : les applications résiduables sont représentées par des flèches en pointillés

6. En appliquant une nouvelle fois le corollaire 1.43 à cette double restriction résiduable, et en remarquant que $\mathsf{ImM}_H = \mathsf{Im}(L_H \circ \mathcal{K} \circ R_H) = \mathsf{Im}({}_{\mathsf{Im}(L_H\circ\mathcal{K})|}L_{H|\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)})$ on obtient également les applications résiduables suivantes

$$\begin{array}{r}
{}_{\mathsf{ImM}_H|}L_{H|\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)} \in Res^\sharp(\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H), \mathsf{ImM}_H) \\
{}_{\mathsf{Im}(L_H\circ\mathcal{K})|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{ImM}_H} \in Res^\sharp(\mathsf{ImM}_H, \mathsf{Im}(L_H\circ\mathcal{K})).
\end{array}.$$

Le diagramme commutatif de la figure 3.7 résume les différentes restrictions résiduables exhibées précédemment. On représente par une flèche en pointillés une restriction résiduable.

De plus, d'après des résultats énoncés au §1.2.5, puisque le domaine de l'application M_H ($\mathcal{D}^{m\times p}$) est un treillis complet (car un dioïde complet), alors il est possible de définir des structures de treillis pour les ensembles $\mathsf{Im}R_H$, $\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)$ et enfin pour ImM_H.

Nous avons déja défini la structure du treillis $\mathsf{Im}R_H$ dans le premier chapitre au §1.3.3. Seule l'étude des ensembles $\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)$ et ImM_H est donc abordée ici.

Proposition 3.11. *Si $\mathcal{D}^{m\times p}$ est un dioïde complet, alors*

1. *$(\mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H), \overset{\mathcal{K}\circ R_H}{\tilde{\oplus}}, \overset{\mathcal{K}\circ R_H}{\tilde{\wedge}})$ est un treillis complet où pour deux éléments $D_1, D_2 \in \mathsf{Im}(\mathcal{K}\circ R_H)$*

$$\begin{array}{rcl}
D_1 \overset{\mathcal{K}\circ R_H}{\tilde{\oplus}} D_2 & \overset{déf}{=} & ((D_1 \phi H \oplus D_2 \phi H)H)^* \\
D_1 \overset{\mathcal{K}\circ R_H}{\tilde{\wedge}} D_2 & \overset{déf}{=} & (((D_1 \wedge D_2)\phi H)H)^*
\end{array}$$

2. $(\mathsf{ImM}_H, \overset{\mathsf{M}_H}{\tilde{\oplus}}, \overset{\mathsf{M}_H}{\tilde{\wedge}})$ *est un treillis complet où pour deux éléments* $M_1, M_2 \in \mathsf{ImM}_H$

$$\begin{aligned} M_1 \overset{\mathsf{M}_H}{\tilde{\oplus}} M_2 &\overset{déf}{=} H((H \lcirclearrowleft M_1 \phi H \oplus H \lcirclearrowleft M_2 \phi H)H)^* \\ M_1 \overset{\mathsf{M}_H}{\tilde{\wedge}} M_2 &\overset{déf}{=} H((H \lcirclearrowleft (M_1 \wedge M_2) \phi H)H)^* \end{aligned}$$

Preuve :

1. Nous savons que si $\mathcal{D}^{m\times p}$ est un dioïde complet, alors $(\mathsf{Im}\mathcal{K}, \overset{\mathcal{K}}{\tilde{\oplus}}, \wedge)$ a une structure de treillis complet (cf. proposition 1.68 et son application à $\mathsf{Im}\mathcal{K}$ dans la partie 1.3.3). Par conséquent, $\mathcal{K} \circ R_H$ est une application définie d'un treillis complet dans un treillis complet. On peut donc appliquer le résultat énoncé par la proposition 1.65.

2. Si $\mathcal{D}^{m\times p}$ est un dioïde complet, il s'agit également d'un treillis complet, donc l'application de la proposition 1.66 conduit au fait que ImM_H a une structure de treillis complet pour l'ordre de $\mathcal{D}^{p\times m}$ restreint à ImM_H. Le sup du treillis ImM_H est donné par (cf. proposition 1.63)
$$M_1 \overset{\mathsf{M}_H}{\tilde{\oplus}} M_2 = {}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H(({}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H)^\sharp(M_1) \oplus ({}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H)^\sharp(M_2))$$
Il nous reste à déterminer la borne inf de ImM_H. On sait que $M_1 \overset{\mathsf{M}_H}{\tilde{\wedge}} M_2$ est le plus grand élément de ImM_H inférieur à M_1 et M_2. Autrement dit, pour M_1 et M_2 appartenant à ImM_H,
$$\begin{aligned} M_1 \overset{M_H}{\tilde{\wedge}} M_2 &= \overset{\mathsf{M}_H}{\tilde{\bigoplus_{\{X|X\preceq M_1 \text{ et } X\preceq M_2\}}}} X \\ &= {}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H \left(\bigoplus_{\{X|X\preceq M_1 \text{ et } X\preceq M_2\}} ({}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H)^\sharp(X) \right) \\ &= {}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H \left(\bigoplus_{\{X|X\preceq M_1 \text{ et } X\preceq M_2\}} (H \lcirclearrowleft X \phi H) \right) \\ &= {}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H \left(\bigoplus_{\{Y|Y\preceq H \lcirclearrowleft M_1 \phi H \text{ et } Y\preceq H \lcirclearrowleft M_2 \phi H\}} Y \right) \\ &= {}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H \left((H \lcirclearrowleft M_1 \phi H) \wedge (H \lcirclearrowleft M_2 \phi H)\right) \\ &= {}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H \left(H \lcirclearrowleft (M_1 \wedge M_2) \phi H\right) \quad \text{(d'après 1.45).} \end{aligned}$$

□

3.3.3 Synthèse de feedbacks de sortie

Le problème de synthèse de feedbacks de sortie optimaux, dans un objectif de répondre au mieux à l'atteinte d'un modèle de référence, est une application assez directe des résultats donnés précédemment. Là encore, les solutions recherchées seront réalisables.

Proposition 3.12. *Soit $H \in \mathcal{D}^{p\times m}$ le transfert d'un GET. Pour tout modèle de référence $G_{ref} \in \mathcal{D}^{p\times m}$ s'exprimant $G_{ref} = \mathsf{M}_H(A)$ où $A \in \mathcal{D}^{m\times p}$ est un transfert réalisable, il existe un plus grand feedback réalisable F tel que le transfert du système bouclé soit celui de G_{ref}. Ce feedback est*

$$F_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\phi} H).$$

Preuve : ${}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H : (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!])^{m\times p} \to (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!])^{p\times m}$ définie sur des dioïdes complets est résiduable d'après la proposition 3.6. La preuve consiste donc à montrer que ${}_{\mathsf{ImM}_H|}\mathsf{M}_H^{\mathsf{rat}}$: $(\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!])^{m\times p} \to (\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!])^{p\times m}$ définie sur l'ensemble des rationnels est également résiduable, bien qu'il ne s'agisse plus de dioïdes complets.

A réalisable est équivalent à A rationnel (cf. théorème 2.37). L'application M_H n'est qu'une composition finie d'opérations rationnelles (produits et étoile de Kleene), donc A rationnel $\Rightarrow$ $G_{ref} = \mathsf{M}_H(A)$ est rationnel. Grâce au théorème 2.39, $H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\phi} H$ est une matrice périodique (non nécessairement causale). En raison de la proposition 2.45, $\mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\phi} H)$ est le plus grand élément rationnel solution de $\mathsf{M}_H(X) \preceq G_{ref}$. Puisque l'inéquation précédente a une solution rationnelle qui est A, en se rappelant que l'application Pr_+ est isotone, on vérifie $A = \mathsf{Pr}_+(A) \preceq \mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\phi} H)$ et, puisque M_H est isotone, $G_{ref} = \mathsf{M}_H(A) \preceq \mathsf{M}_H(\mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\phi} H)) \preceq G_{ref}$. Autrement dit, $\mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\phi} H)$, la plus grande solution rationnelle de $\mathsf{M}_H(X) \preceq G_{ref}$, vérifie également l'égalité $\mathsf{M}_H(X) = G_{ref}$. Exprimé différemment, si $G_{ref} = \mathsf{M}_H(A)$ où A est rationnel, alors il existe un plus grand feedback rationnel, donc réalisable (cf th. 2.37), tel que le système bouclé ait exactement le transfert G_{ref}. □

Corollaire 3.13. *Soit $H \in \mathcal{D}^{p\times m}$ le transfert d'un GET. Il existe un plus grand feedback réalisable laissant inchangé le tranfert du système, c'est à dire $\mathsf{M}_H(F) = H$. Exprimé dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$,*

$$F_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} H \mathbin{\phi} H).$$

Preuve : Par définition, ε est rationnel, donc en prenant $G = \mathsf{M}_H(\varepsilon) = H$ on obtient le résultat énoncé. □

Remarque 3.14 Ce plus grand feedback laissant inchangé le transfert pourrait être qualifié de *feedback neutre.* ◇

Proposition 3.15. *Soit $H \in \mathcal{D}^{p\times m}$ le transfert d'un GET. Pour tout modèle de référence s'écrivant $G_{ref} = A^*H$ ou $G_{ref} = HB^*$, avec $A \in \mathcal{D}^{p\times p}$ et $B \in \mathcal{D}^{m\times m}$ rationnels, il existe un plus grand feedback réalisable $F \in \mathcal{D}^{m\times p}$ tel que le transfert du système bouclé soit inférieur ou égal G_{ref}. Ce feedback est*

$$F_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\phi} H).$$

Preuve : Si le modèle de référence s'écrit $G_{ref} = A^*H$, avec A rationnelle, alors G_{ref} est rationnelle et donc périodique et causale. Par conséquent $H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\phi} H$ est périodique (non nécessairement causale) et $\mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\phi} H)$ est la plus grande solution périodique et causale de l'équation $\mathsf{M}_H(F) \preceq G_{ref}$. Cette solution est par conséquent la plus grande solution réalisable. □

3.3.4 Illustration

On reprend ici comme support le GET de la figure 3.2. On rappelle que son transfert est

$$H = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^2)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}.$$

D'après la proposition 3.15, en choisissant un modèle de référence $G_{ref} = A^*H$ alors il existe un feedback optimal réalisable tel que

$$\mathsf{M}_H(F_{\mathsf{rat}}) \preceq G_{ref}.$$

Nous choisissons ici $G_{ref} = (\gamma\delta^3)^*H$, soit

$$G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^4(\gamma\delta^3)^* & \delta^5(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}.$$

Le feedback réalisable optimal tel que $\mathsf{M}_H(F_{\mathsf{rat}}) \preceq G_{ref}$ est donné par le calcul de

$$F_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\circ\!\!\!\!/} H).$$

On a tout d'abord

$$\begin{aligned} H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} &= \begin{pmatrix} (\delta^4(\gamma\delta^3)^*) \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} (\delta^4(\gamma\delta^3)^*) & (\delta^4(\gamma\delta^3)^*) \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \\ (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} (\delta^4(\gamma\delta^3)^*) & (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\gamma\delta^3)^* & \delta(\gamma\delta^3)^* \\ \delta^{-1}(\gamma\delta^3)^*) & (\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et ensuite

$$\begin{aligned} (H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref}) \mathbin{\circ\!\!\!\!/} H &= \begin{pmatrix} (\gamma\delta^3)^* \mathbin{\circ\!\!\!\!/} (\delta^4(\gamma\delta^3)^*) \wedge (\delta(\gamma\delta^3)^*) \mathbin{\circ\!\!\!\!/} (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \\ (\delta^{-1}(\gamma\delta^3)^*) \mathbin{\circ\!\!\!\!/} (\delta^4(\gamma\delta^3)^*) \wedge (\gamma\delta^3)^* \mathbin{\circ\!\!\!\!/} (\delta^5(\gamma\delta^3)^*) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta^{-4}(\gamma\delta^3)^*) \\ \delta^{-5}(\gamma\delta^3)^*) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$F_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\circ\!\!\!\!/} H) = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta^2(\gamma\delta^3)^* \\ \gamma^2\delta^1(\gamma\delta^3)^* \end{pmatrix}.$$

Une réalisation de ce feedback est donnée figure 3.8.

On peut de même rechercher le plus grand feedback réalisable laissant inchangé le transfert du système. Son expression est $F_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} H \mathbin{\circ\!\!\!\!/} H)$.

On laisse au lecteur vérifier que

$$H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} H \mathbin{\circ\!\!\!\!/} H = \begin{pmatrix} \delta^{-4}(\gamma\delta^2)^* \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

et donc

$$F_{\mathsf{rat}} = \mathsf{Pr}_+(H \mathbin{\circ\!\!\!\!\backslash} H \mathbin{\circ\!\!\!\!/} H) = \begin{pmatrix} \gamma^2(\gamma\delta^2)^* \\ \varepsilon \end{pmatrix}$$

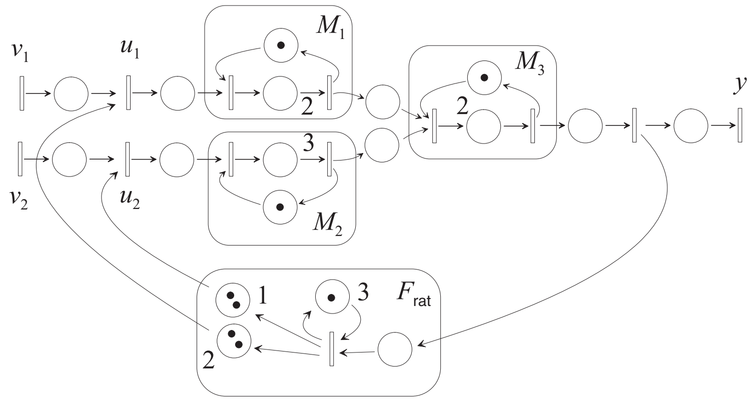


Figure 3.8 : Réalisation du feedback F_{rat}

Remarque 3.16 Pour ce dernier exemple, on constate que le feedback neutre (conservant le transfert H) est sans arc entre y et u_2. Ceci provient du fait qu'il est impossible, dans cet exemple, de rendre le graphe fortement connexe tout en conservant le transfert du système en boucle ouverte. ◇

3.3.5 Conclusion

D'un point de vue essentiellement pratique, les points principaux qui se dégagent de cette étude sont les suivants

- Les comportements possibles d'un système H muni d'un feedback de sortie réalisable correspondent à l'image de l'application M_H définie sur l'ensemble des éléments rationnels, c'est-à-dire $\mathsf{M}_H^{\mathsf{rat}} : (\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!])^{m\times p} \to (\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!])^{p\times m}, X \mapsto H(XH)^*$. En outre, pour chaque comportement possible $G \in \mathsf{Im}\mathsf{M}_H^{\mathsf{rat}}$ du système, il existe un feedback réalisable F_{rat} optimal tel $\mathsf{M}_H(F_{\mathsf{rat}}) = G$.

- Pour tout modèle de référence $G_{ref} = A^*H$ ou $G_{ref} = HB^*$ il existe également un feedback réalisable optimal F_{rat} tel que $\mathsf{M}_H(F_{\mathsf{rat}}) \preceq G_{ref}$. Le modèle de référence n'est plus atteint exactement mais approché au plus près (par valeur inférieure).

On peut remarquer également que l'ensemble des "comportements possibles du système H muni d'un feedback" a une structure de treillis (cf. proposition 3.11). Autrement dit, si G et G' sont deux transferts du système en boucle fermée (obtenus par deux feedbacks différents) alors $G \overset{\mathsf{M}_H}{\tilde{\wedge}} G'$ et $G \overset{\mathsf{M}_H}{\oplus} G'$ sont également deux comportements possibles du système en boucle fermée.

Ce qu'il faut néanmoins garder à l'esprit est que nous n'avons pas fourni de condition nécessaire sur G_{ref} pour qu'il existe un feedback optimal F vérifiant $\mathsf{M}_H(F) \preceq G_{ref}$. On peut dire à ce sujet que l'existence d'une condition nécessaire est liée à la connaissance du plus grand codomaine $\mathcal{B}$ tel que ${}_{\mathcal{B}|}\mathsf{M}_H$ soit résiduable. Or, les preuves des propositions 3.6 et 3.10

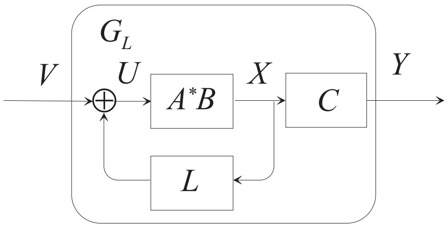


Figure 3.9 : Commande avec modèle de référence : correction d'un système H par un compensateur L en feedback de l'état X sur l'entrée

montrent que ce problème est également lié à la connaissance d'une restriction résiduable de $\mathcal{K}$ moins restrictive que ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$.

Tout ce que l'on peut dire jusqu'ici est qu'il est suffisant que $H \circ\!\!\!\!\setminus G_{ref}$ ou $G_{ref} \circ\!\!\!\!/ H$ soit "une étoile" (c'est à dire appartienne à $\mathsf{Im}\mathcal{K}$) pour que l'optimalité d'un feedback F vérifiant $\mathsf{M}_H(F) \preceq G_{ref}$ soit garantie.

3.4 Autres structures de commande avec feedback

Pour clore ce chapitre sur la commande avec modèle de référence, nous présentons deux problèmes de synthèse de feedback qui admettent des réponses optimales pour certains modèles de référence.

Le premier concerne la synthèse d'un feedback de l'état sur l'entrée, c'est-à-dire que la commande U est produite à partir de la consigne d'entrée V et d'informations provenant de l'état interne X du système.

Le second traite d'un feedback de la sortie Y sur l'état X dans la mesure où il est possible d'ajouter des contrôles sur les transitions internes d'un GET.

3.4.1 Feedback de l'état sur l'entrée

L'idée est ici d'utiliser, outre la consigne d'entrée V, les trajectoires de tir des transitions internes X du GET pour l'élaboration de la commande U. On suppose donc possible l'observation des tirs des transitions internes du GET que l'on cherche à contrôler.

Le correcteur L est appliqué en feedback de l'état sur l'entrée comme cela est montré figure 3.9.

On rappelle qu'il est toujours possible d'obtenir la représentation d'état d'un GET sous la forme

$$\begin{cases} X &= AX \oplus BU \\ Y &= CX \end{cases}$$

ce qui conduit à une autre représentation où l'équation d'état est explicitement fonction de U

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & A^*BU \\ Y & = & CX \end{array}\right. .$$

La connexion d'un feedback L de l'état X sur l'entrée U modifie la dynamique du système de la manière suivante : la commande s'exprime

$$U = LX \oplus V,$$

la représentation d'état du système corrigé par L devient donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & A^*B(LX \oplus V) \\ Y & = & CX \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} X & = & (A^*BL)^*A^*BV \\ Y & = & CX \end{array}\right. .$$

Finalement, le transfert entrée-sortie du système muni du correcteur L devient

$$Y = C(A^*BL)^*A^*BV = CA^*B(LA^*B)^*V = G_LV.$$

Le problème de commande avec modèle de référence se formule donc de la manière suivante.

Soit un transfert G_{ref} donné,

existe-t-il un plus grand compensateur L tel que $G_L \preceq G_{ref}$?

Le résultat est donné immédiatement au vu des développements déja effectués précédemment dans ce chapitre.

Proposition 3.17. *Soit un GET de transfert $H \in \mathcal{D}^{p\times m}$ et $G_{ref} \in \mathcal{D}^{p\times m}$ un modèle de référence réalisable. S'il existe une matrice rationnelle $D \in \mathcal{D}^{p\times p}$ telle que $G_{ref} = D^*H$, alors il existe un plus grand compensateur réalisable L (feedback d'état sur l'entrée) tel que $G_L \preceq G_{ref}$. L'expression de ce feedback d'état est*

$$L = \mathsf{Pr}_+(H \backslash\!\!\!\!\circ\, G_{ref} /\!\!\!\!\circ\, A^*B).$$

Preuve : Tout d'abord, nous avons les équivalences suivantes

$$G_L \preceq G_{ref} \iff CA^*B(LA^*B)^* \preceq G_{ref} \iff (LA^*B)^* \preceq (CA^*B) \backslash\!\!\!\!\circ\, G_{ref} = H \backslash\!\!\!\!\circ\, G_{ref}.$$

Or, il a été montré dans la section précédente que s'il existe $D \in \mathcal{D}^{p\times p}$ tel que $G_{ref} = D^*H$, alors $H \backslash\!\!\!\!\circ\, G_{ref}$ appartient à l'image de $\mathcal{K} : \mathcal{D}^{m\times m} \to \mathcal{D}^{m\times m}$. Puisque l'application ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K} : \mathcal{D}^{m\times m} \to \mathsf{Im}\mathcal{K}$ est résiduable, sont équivalents

$$G_L \preceq G_{ref} \iff (LA^*B)^* \preceq H \backslash\!\!\!\!\circ\, G_{ref} \iff LA^*B \preceq H \backslash\!\!\!\!\circ\, G_{ref}.$$

La matrice $L = H \backslash\!\!\!\!\circ\, G_{ref} /\!\!\!\!\circ\, (A^*B)$ est alors la plus grande solution de l'inéquation $G_L \preceq G_{ref}$. D'après le théorème 2.39, $L = H \backslash\!\!\!\!\circ\, G_{ref} /\!\!\!\!\circ\, (A^*B)$ est périodique et d'après la proposition 2.45 $L = \mathsf{Pr}_+(H \backslash\!\!\!\!\circ\, G_{ref} /\!\!\!\!\circ\, (A^*B))$ est alors la plus grande solution périodique et causale, donc réalisable, de $G_L \preceq G_{ref}$. $\square$

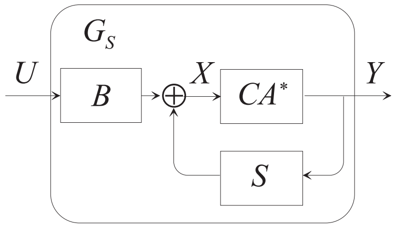


Figure 3.10 : Commande avec modèle de référence : correction d'un système H par un compensateur S en feedback de la sortie Y sur l'état X

3.4.2 Feedback de sortie sur l'état

Nous supposons ici que les transitions internes peuvent être munies d'un *contrôle* supplémentaire qui va être fonction de la sortie Y. Ce contrôle doit être vu comme une *autorisation* ou une *interdiction* de franchir une transition du GET. La nature de ces contrôles internes est donc différente de la commande U.

Pour illustrer ceci, on peut imaginer que, dans un contexte manufacturier, la commande U correspond à l'entrée de pièces brutes dans un système de production H, tandis que les contrôles associés aux transitions X, générés par feedback de sortie, correspondent seulement à une gestion des flux de matière dans le système. L'objectif recherché ici est donc une meilleure maîtrise des flux de jetons dans le système lui-même.

Ce qui nous importe ici est d'obtenir un certain transfert entre U et Y tout en contrôlant le flux des jetons à différents endroits du système grâce à un correcteur S situé entre la sortie et les états internes X.

Nous utilisons encore une fois tout d'abord la représentation d'état. La dynamique du système va être modifiée de la façon suivante

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & = & AX \oplus BU \oplus SY \\ Y & = & CX \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} X & = & A^*BU \oplus A^*SY \\ Y & = & CX \end{array}\right. .$$

Le transfert entrée-sortie devient

$$Y = C(A^*BU \oplus A^*SY),$$

ou explicitement

$$Y = (CA^*S)^*CA^*BU.$$

Le problème de synthèse de feedback s'exprime de la manière suivante :

existe-t-il un plus grand S tel que $G_S = (CA^*S)^*CA^*B \preceq G_{ref}$?

Cette structure de commande est décrite figure 3.10.

Proposition 3.18. *Soit G_{ref} un modèle de référence réalisable. S'il existe une matrice rationnelle $D \in \mathcal{D}^{m\times m}$ telle que $G_{ref} = HD^*$, alors il existe un plus grand compensateur réalisable S (feedback de sortie sur l'état) tel que $G_S \preceq G_{ref}$. Il s'exprime*

$$S = \mathsf{Pr}_+(CA^* \circ\!\!\!\!\backslash G_{ref} \phi H).$$

Preuve : Tout d'abord, nous avons les équivalences suivantes

$$G_S \preceq G_{ref} \iff (CA^*S)^* CA^*B \preceq G_{ref} \iff (CA^*S)^* \preceq G_{ref} \phi (CA^*B) = G_{ref} \phi H.$$

Or, s'il existe $D \in \mathcal{D}^{m\times m}$ tel que $G_{ref} = HD^*$, alors $G_{ref} \phi H = (HD^*) \phi H = (HD^*) \phi (HD^*)$ est une étoile de taille $p \times p$ (cf. preuve de la proposition 3.10).

On a alors l'équivalence

$$G_S \preceq G_{ref} \iff (CA^*S)^* \preceq G_{ref} \phi H \iff CA^*S \preceq G_{ref} \phi H.$$

$S = CA^* \circ\!\!\!\!\backslash G_{ref} \phi H$ est alors la plus grande solution de $G_S \preceq G_{ref}$. Cette solution est périodique puisque G_{ref} l'est et $S = \mathsf{Pr}_+(CA^* \circ\!\!\!\!\backslash G_{ref} \phi H)$ est alors la plus grande solution périodique et causale, donc réalisable, de $G_L \preceq G_{ref}$. □

3.4.3 Illustrations : applications en gestion de production

Les deux structures de commande présentées précédemment se justifient en particulier dans le domaine de la gestion de production, c'est-à-dire lorsque les GET considérés représentent des systèmes de production. Les calculs sont effectués ici dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$. Pour simplifier les développements, nous considérons un exemple mono-entrée mono-sortie.

Feedback de l'état sur l'entrée

Calcul du système L de manière à conserver le transfert entrée-sortie Le GET de la figure 3.11 représente (en trait plein) un système de production comprenant deux machines en série séparées d'un buffer de capacité infinie.

On va tout d'abord calculer ici un feedback causal de l'état sur l'entrée laissant inchangé le transfert entrée-sortie de cette ligne de production.

Par souci de clarté, nous n'allons cependant pas prendre en compte tous les états internes (c.-à-d. toutes les transitions internes) décrits par le GET de la figure 3.11. Certains états ne sont en effet pas pertinents et contribuent uniquement à améliorer la lisibilité du modèle réseau de Petri. Seuls les états qui nous semblent les plus pertinents pour la commande vont être utilisés pour la synthèse du feedback L. Nous considérons ici uniquement les états x_1 et x_2 (décrits fig. 3.11) qui correspondent à la fin des processus de fabrication des machines M_1 et M_2.

De manière générale, la matrice A^*B décrit le transfert entre l'entrée u et chacun des états internes considérés. Pour cet exemple nous avons donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^*Bu = \begin{pmatrix} \delta^3(\gamma^2\delta^3)^* \\ \delta^5(\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix} u.$$

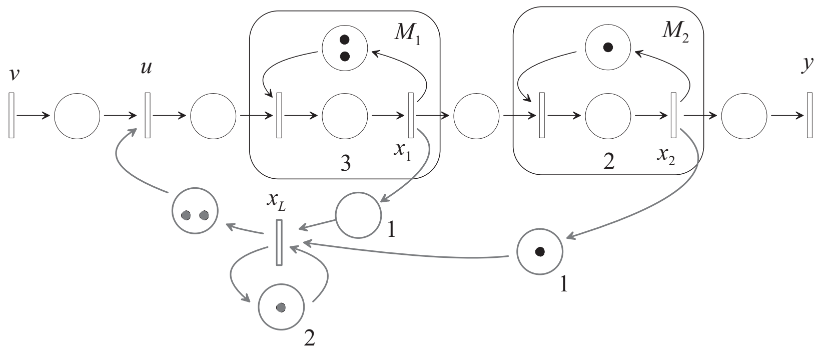


Figure 3.11 : Contrôle des entrées d'un système manufacturier

De plus, le transfert général entrée-sortie de ce GET est $y = hu = \delta^5(\gamma\delta^2)^*u$.

En appliquant la proposition 3.17, le plus grand retour de l'état $(x_1\ x_2)^T$ sur l'entrée u qui soit réalisable et qui laisse le transfert entrée-sortie inchangé (c'est à dire $g_{ref} = h$) est

$$\begin{aligned} L &= \mathsf{Pr}_+(h \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} h \mathbin{/\!\!\!\circ} (A^*B)) \\ &= \mathsf{Pr}_+\left((\delta^5(\gamma\delta^2)^*) \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} (\delta^5(\gamma\delta^2)^*) \mathbin{/\!\!\!\circ} (\delta^3(\gamma^2\delta^3)^*\ \delta^5(\gamma\delta^2)^*)^T\right). \end{aligned}$$

On laisse au lecteur vérifier que

$$\begin{aligned} h \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} h \mathbin{/\!\!\!\circ} (A^*B) &= (\gamma\delta^2)^* \mathbin{/\!\!\!\circ} \begin{pmatrix} \delta^3(\gamma^2\delta^3)^* \\ \delta^5(\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta^{-3}(\gamma\delta^2)^* & \delta^{-5}(\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

par conséquent

$$L = \mathsf{Pr}_+(h \mathbin{\backslash\!\!\!\circ} h \mathbin{/\!\!\!\circ} (A^*B)) = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta(\gamma\delta^2)^* & \gamma^3\delta(\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix}.$$

Une réalisation de ce feedback est donnée (en grisé) sur la figure 3.11.

Intérêt du système L D'un point de vue pratique, si le système de production modélisé par le GET de la figure 3.11 conserve un fonctionnement proche du modèle (c'est-à-dire que les temps de cycle des machines peuvent être considérés constants), le retour de l'état sur l'entrée proposé ici ne présente pas plus d'intérêt que le retour de sortie.

Si l'on suppose désormais que les machines M_1 et M_2 peuvent être sujettes à des pannes, augmenter le nombre de circuits du GET, grâce au système L, présente alors l'intérêt suivant. Supposons que la machine M_1 tombe en panne, ce qui revient à supprimer les arcs du GET situés entre u et x_1. Dans ce cas, quel que soit l'état du système, après au plus 2 tirs de la transition u il y a pénurie de jetons dans la place située entre x_L et u. En effet, tous les jetons du circuit (u, x_1, x_L, u) auront alors été consommés.

En revanche, s'il n'y avait pas d'arc entre x_1 et x_L (ce qui revient à ne pas prendre en compte l'état x_1 pour la commande), la pénurie de jetons dans la place située entre x_L et u aurait

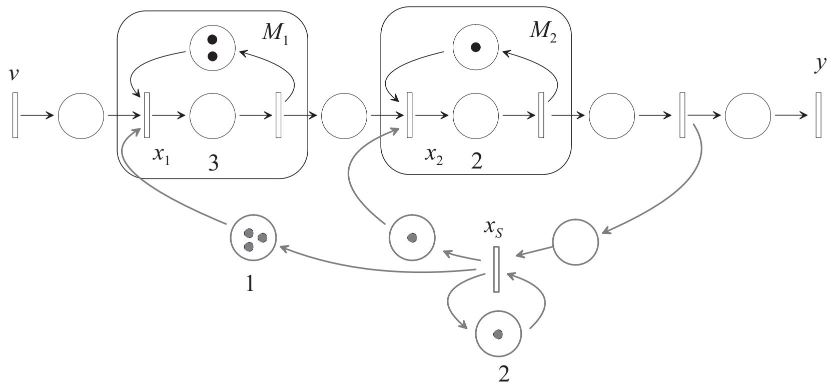


Figure 3.12 : Contrôle du flux interne d'un système manufacturier

lieu, dans le cas le plus dévaforable, après au plus 3 tirs de u (le nombre de jetons du circuit (u, x_2, x_L, u)).

Pratiquement, cela signifie que le système L répercute les défaillances internes du système de production sur l'entrée (en interdisant l'entrée de jetons) plus rapidement que ne le ferait un feedback de sortie. C'est en quelque sorte le principe des gestions en Kanban (cf. chapitre 4) qui est mis en oeuvre ici.

En résumé, en mode de fonctionnement normal, le système L agit comme un feedback de sortie, et en mode dégradé, le système L " informe les entrées plus vite" des défaillances internes.

Feedback de sortie sur l'état

Calcul du système S de manière à conserver le transfert entrée-sortie Nous illustrons également cette commande par le même GET (figure 3.12).

Là encore, tous les états ne sont pas considérés. Seuls les états x_1 et x_2 décrits sur la figure 3.12 seront sujets à des contrôles supplémentaires (c'est-à-dire, des synchronisations supplémentaires sur le graphe). Ces états correspondent à l'entrée dans les processus de fabrication M_1 et $M2$.

La matrice CA^* décrit le transfert entre chaque état considéré et la sortie. Ici, on a

$$y = CA^* \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^5(\gamma\delta^2)^* & \delta^2(\gamma\delta^2)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Par application de la proposition 3.18, le plus grand feedback S de la sortie sur l'état qui soit réalisable et qui laisse inchangé le transfert entrée-sortie est

$$\begin{aligned} S &= \mathsf{Pr}_+((CA^*) \circ\!\!\!\backslash h \circ\!\!\!/ h) \\ &= \mathsf{Pr}_+\left((\delta^5(\gamma\delta^2)^* \ \delta^2(\gamma\delta^2)^*) \circ\!\!\!\backslash (\delta^5(\gamma\delta^2)^*) \circ\!\!\!/ (\delta^5(\gamma\delta^2)^*)\right). \end{aligned}$$

On laisse au lecteur vérifier que

$$\begin{aligned}(CA^*)\backslash h \not/ h &= \begin{pmatrix}\delta^5(\gamma\delta^2)^* & \delta^2(\gamma\delta^2)^*\end{pmatrix} \backslash (\gamma\delta^2)^* \\ &= \begin{pmatrix}\delta^{-5}(\gamma\delta^2)^* \\ \delta^{-2}(\gamma\delta^2)^*\end{pmatrix},\end{aligned}$$

soit

$$S = \mathsf{Pr}_+((CA^*)\backslash h \not/ h) = \begin{pmatrix}\gamma^3\delta(\gamma\delta^2)^* \\ \gamma(\gamma\delta^2)^*\end{pmatrix}.$$

Une réalisation de ce feedback est donnée sur la figure 3.12.

Intérêt du système S Dans le domaine de la gestion de production, on sait que les stocks internes ont un coût. Ce coût de stockage n'est d'ailleurs pas le même à tous les stades de la production. En fait, plus une pièce est proche de la fin de ligne, plus une pièce a de valeur ajoutée et donc plus grand est son coût de stockage. En résumé, à taille égale, un stock coûte moins cher en début qu'en fin de ligne.

Intuitivement, on voit que le rôle du système S est de "retenir" le plus possible les pièces en amont du système, là où leur coût de stockage est moins important. Le système S joue donc un rôle de filtre, ou de frein (comme le feedback de sortie), mais ce, à différents endroits du système (ceux que le concepteur choisit). L'intérêt pratique du système S est donc de conserver le plus longtemps possible les pièces là où leur coût est le moins important.

3.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre plusieurs structures de contrôle de la dynamique entrée-sortie d'un GET. La compensation de la dynamique du système nominal est obtenue soit par l'ajout d'un précompensateur, soit par l'ajout de correcteurs feedbacks. La synthèse du correcteur est systématiquement effectuée dans l'objectif d'atteindre pour le système corrigé[6], un comportement de référence spécifié sous forme de matrice de transfert.

Pour une spécification G_{ref} rationnelle quelconque, on montre que $\mathsf{Pr}_+(H \backslash G_{ref})$ est le plus grand précompensateur réalisable (par un GET) tel que le transfert du système corrigé soit inférieur au transfert de référence. Pratiquement, il s'agit du correcteur réalisable "le plus lent" tel que le système corrigé soit "au moins aussi rapide" que la spécification.

En revanche, pour la correction par feedback de sortie, l'optimalité du correcteur n'est garantie que pour une classe restreinte de modèles de référence. Notamment, nous avons montré que lorsque la spécification G_{ref} appartient à l'un des ensembles $\mathcal{G}_1$ ou $\mathcal{G}_2$, alors le feedback $\mathsf{Pr}_+(H \backslash G_{ref} \not/ H)$ est optimal vis-à-vis de la spécification. De même, pour les correcteurs de type feedback de l'état sur l'entrée et feedback de la sortie sur l'état, l'optimalité du correcteur n'est garantie que pour des ensembles restreints de modèles de référence.

Notons que, pour une même spécification appartenant à $\mathcal{G}_1$, le précompensateur calculé pour cette spécification offre, au regard de la correction par feedback, une trajectoire de commande

[6]ou plus exactement d'approcher au plus près par valeur inférieure

U plus tardive pour une consigne d'entrée équivalente V. En effet, si $G_{ref} \in \mathcal{G}_1$ alors, à la restriction Pr_+ près, le transfert entre la consigne et la commande est $U = (H \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} G_{ref})V$ pour la précompensation et $U = ((H \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\circ\!\!\!/} H)H)^*V$ pour la correction par feedback. Or, si $G_{ref} \in \mathcal{G}_1$ alors $H \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} G_{ref}$ est une étoile, et donc par isotonie du produit et de l'étoile de Kleene on a donc les inégalités suivantes

$$((H \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} G_{ref} \mathbin{\circ\!\!\!/} H)H)^* \preceq (H \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} G_{ref})^* = H \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} G_{ref},$$

ce qui montre que la commande U est plus tardive pour la précompensation dynamique.

En contrepartie, on peut se persuader que les correcteurs utilisant une mesure des sorties ou des états présentent une meilleure "robustesse" en présence d'aléas, notamment en ce qui concerne la propriété de stabilité discutée au chapitre suivant. Mais une étude supplémentaire serait nécessaire pour quantifier cette notion de "robustesse" face à une dérive éventuelle des paramètres d'un système. Notons néanmoins qu'une première discussion est proposée dans cette direction dans l'annexe C où un correcteur, calculé à partir d'un modèle déterministe, est évalué dans un environnement stochastique. Cette discussion est rattachée à l'étude de systèmes à flux tirés également abordée dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Applications

Nous proposons dans ce chapitre deux types d'applications des structures de commande vues au chapitre précédent.

Dans un premier temps, nous étudions des systèmes de gestion dits *à flux tirés*. Pour ces systèmes, les ordres de fabrication d'une cellule de production son générés via un feedback placé entre la sortie et l'entrée de la cellule. Lorsque le système peut être représenté par un GET, nous proposons des évolutions possibles du système de gestion de production, c'est à dire du feedback, en vue de diminuer les en-cours par rapport au système original. Les résultats sont donnés tout d'abord de manière formelle puis sont appliqués à deux types de gestion couramment étudiés dans la littérature : le système Kanban et le système Kanban Généralisé.

Dans un second temps, notre intérêt se porte sur la stabilisation des GET. Nous proposons des structures de correction avec précompensateur ou feedback de sortie permettant d'éviter l'accumulation de jetons dans un GET. Ceci nous permet notamment de dégager des résultats intéressants lorsque les GET considérés sont mono-entrée/mono-sortie.

4.1 Systèmes à flux tirés

Les systèmes à flux tirés ont déja fait l'objet d'études via l'approche (max,+) notamment dans [Gaubert, 1992] et plus récemmment dans [Cottenceau et al., 1997a] , [Cottenceau et al., 1997b] et [Cottenceau et al., 1999].

4.1.1 Introduction

Les systèmes de production sont dits *à flux tirés* lorsque leur gestion de production est basée sur des demandes réelles[1]. Le schéma de la figure 4.1 résume la structure générale de tels systèmes. H représente le système de production, U symbolise les lancements en production (l'entrée de pièces brutes dans le processus de fabrication) et S correspond à l'apparition des produits finis dans le stock de sortie du système de production.

Le principe de la gestion à flux tirés est le suivant : si un produit fini (S) est disponible

[1]par opposition aux systèmes dont la gestion est basée sur des demandes prévisionnelles.

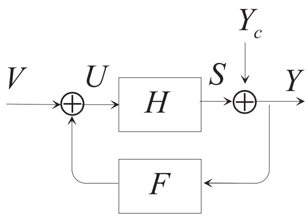


Figure 4.1 : Structure d'un système à flux tiré

lorsqu'une demande (notée Y_c) arrive, ce produit est immédiatement livré au client (ce départ effectif de pièces finies est noté Y), sinon la demande est mise en attente jusqu'à l'apparition d'un produit fini dans le stock de sortie. Le départ d'un produit fini (Y) donne lieu, instantanément ou non (selon le type de gestion), à un nouvel ordre de fabrication[2]. Les $\oplus$, représentés sur la figure 4.1, désignent la somme de signaux (au sens (max,+)), c'est-à-dire les phénomènes de synchronisation entre différents flux apparaissant dans le système[3].

La gestion des ordres de fabrication, qui dépendent des sorties effectives Y et indirectement de la demande Y_c, est assurée par le système F (un feedback). Ce système a pour fonction principale de "remonter" l'information concernant le départ de produits finis de l'aval vers l'amont du système. Par conséquent, un système à flux tiré est en quelque sorte "piloté par la sortie". De manière générale, c'est le système F (par sa structure ou ses paramètres) qui différencie les méthodes de gestion à flux tirés entre elles.

Remarque 4.1 Dans la pratique, un sytème de production est le plus souvent partitionné en sous-systèmes, appelés *étages* ou bien *cellules*, chacun de ces sous-systèmes dispose alors de son propre mécanisme de gestion à flux tirés. Le schéma de la figure 4.1 représente alors la structure d'une cellule. ◇

Notion de Juste-à-Temps. L'objectif recherché par l'application de cette politique de gestion se résume principalement en deux points : produire uniquement ce qu'il faut, juste quand il le faut. Pour ces raisons, les systèmes à flux tirés sont généralement regroupés sous l'appellation plus générale de systèmes dits en "Juste-à-Temps". L'application du concept de Juste-à-Temps a pour but de réduire autant que possible les stocks internes et ainsi diminuer les coûts de fabrication.

Cependant, pour un système à flux tirés dont la structure est décrite figure 4.1, la diminution du stock de pièces finies correspond également à une diminution de la qualité de service[4]. Plus précisément, le bon fonctionnement d'un système à flux tirés repose sur une anticipation de la demande : un stock de pièces finies permet de pallier d'éventuelles variations ponctuelles de la demande. Par conséquent, moins on anticipe (en diminuant la taille du stock des pièces déja produites), plus on augmente la probabilité de voir des demandes mises en attente. De manière

[2]c'est-à-dire qu'une pièce du stock de produits bruts (symbolisé V) est autorisée à entrer dans le système de production

[3]cette notation est issue de [Max Plus, 1991a]

[4]qui se caractérise, par exemple, par une augmentation du nombre de demandes mises en attente ou de leur temps d'attente.

générale, la qualité de service pour une gestion à flux tirés dépendra de la taille des stocks internes et de la vitesse à laquelle ces stocks se reconstituent.

La méthode de gestion à flux tirés la plus répandue, et certainement la plus étudiée à ce jour, est la méthode Kanban. Elle doit sa popularité à une grande simplicité de mise en œuvre. Plusieurs méthodes se sont ensuite inspirées du Kanban dont la méthode *Kanban Généralisé*, présentée et étudiée dans [Di Mascolo, 1990] et [Duri, 1997], et plus récemment la méthode *Kanban Etendu* [Dallery and Liberopoulos, 1995].

Toutes ces méthodes de gestion à flux tirés ont fait l'objet de nombreux travaux de recherche concernant l'évaluation de performances (détermination du taux de production, du niveau moyen des en-cours, du pourcentage de demandes mises en attente ...) mais également le dimensionnement (comment paramétrer F pour une qualité de service souhaitée). Notamment, des méthodes analytiques approchées permettent d'évaluer, avec des temps de calcul faibles comparés à ceux nécessaires à la simulation, les performances de lignes à flux tirés (voir [Di Mascolo, 1990]), ce qui rend possible d'une part la comparaison de gestion entre elles (le système Kanban, Kanban Généralisé et Base Stock sont comparés dans [Duri, 1997]) et d'autre part le dimensionnement (le problème de dimensionnement de la gestion Kanban, ce qui correspond au choix du nombre optimal de kanbans à affecter à chaque cellule, est traité dans [De Araujo, 1994]). Tous ces travaux s'appuient sur une analyse probabiliste des systèmes de production.

L'approche (max,+) présentée ici nous permet d'analyser des systèmes déterministes à temporisations invariantes et ensuite de proposer des évolutions possibles pour ces systèmes. Les modifications proposées concerneront essentiellement la façon dont les ordres de production sont gérés dans un système à flux tirés. Les machines constituant le système de production auront donc, par hypothèse, des temps de cycle et des capacités invariantes dans le temps. Pour simplifier, on peut dire que l'on étudie ainsi un système de production dans son mode de fonctionnement "idéal", c'est-à-dire lorsqu'aucune défaillance n'a lieu.

Les hypothèses de travail seront donc les suivantes :

- le système de production H et le système de gestion des ordres de production F peuvent être représentés par des GET

- les temporisations sont invariantes (GET stationnaires)

- le système a été dimensionné au préalable (F est connu)

Sous ces hypothèses, le système global peut être étudié comme un système (max,+)-linéaire stationnaire dont on sait évaluer certaines caractéristiques telles que le transfert entrée-sortie. Notre objectif est alors d'apporter une modification au système F tout en conservant certaines caractéristiques dynamiques du système original (en particulier la qualité de service). Comme nous l'avons fait précédemment, nous cherchons à retarder ainsi le plus possible le déclenchement des ordres de production de façon à diminuer les en-cours par rapport au système original.

Les résultats seront illustrés dans le cadre de modèles de systèmes Kanban et Kanban Généralisé mono-produit déja rencontrés dans la littérature.

4.1.2 Etude déterministe de systèmes à flux tirés

Dans un premier temps, nous abordons le problème de manière formelle. Nous considérons tout d'abord le cas où le système n'est constitué que d'une seule cellule de production à flux tirés avec un transfert entrée-sortie quelconque, puis nous traitons le cas plus général où le système comporte plusieurs étages en série.

Cas monocellule

Nous rappelons que le système de production H et le système de gestion des ordres de production F sont ici supposés tous deux représentables par un GET stationnaire. Nous étudions dans un premier temps un système ne comportant qu'une seule cellule de production. Le schéma 4.1 représente une telle cellule.

Le formalisme (max,+) nous permet notamment d'appréhender l'étude d'un tel système d'un point de vue entrée-sortie. Dans cet objectif, les transferts d'un intérêt particulier sont le transfert entre la demande Y_c et la sortie effective des pièces Y et le transfert entre la demande Y_c et le stock de pièces finies S. Le premier transfert caractérise la dynamique entre les demandes et la satisfaction de ces demandes tandis que le second caractérise plus spécialement la façon dont le stock de pièces finies de la cellule se reconstitue.

Le système de production H sera, de manière générale, un système comportant m entrées et p sorties et F un système comportant p entrées et m sorties.

D'après la figure 4.1, on peut écrire les relations suivantes

$$\begin{aligned} Y &= Y_c \oplus H(V \oplus FY) \\ &= Y_c \oplus HV \oplus HFY. \end{aligned}$$

La résolution de cette équation implicite en Y (cf. th. 1.86) conduit au transfert

$$Y = (HF)^* Y_c \oplus (HF)^* HV. \tag{4.1}$$

On a également les relations suivantes

$$\begin{aligned} S &= H(V \oplus FY) \\ Y &= Y_c \oplus S \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} S &= HV \oplus HFY \\ &= HV \oplus HF(Y_c \oplus S) \\ &= HV \oplus HFY_c \oplus HFS. \end{aligned}$$

Ceci conduit au transfert suivant

$$S = (HF)^+ Y_c \oplus (HF)^* HV \tag{4.2}$$

en rappelant que $(HF)^+ = (HF)^* HF$.

Nous cherchons ici une modification du système de gestion des ordres de production F qui conserve néanmoins soit le transfert (4.1), soit le transfert (4.2).

On cherchera donc le plus grand $\hat{F}_Y$ tel que

$$(H\hat{F}_Y)^* = (HF)^*, \tag{4.3}$$

ainsi que le plus grand $\hat{F}_S$ tel que

$$(H\hat{F}_S)^+ = (HF)^+. \tag{4.4}$$

En effet, il faut remarquer l'implication suivante

$$(H\hat{F}_Y)^* = (HF)^* \Rightarrow (H\hat{F}_Y)^* H = (HF)^* H.$$

Par conséquent, en accord avec la relation de transfert (4.1), si le système $\hat{F}_Y$ conserve le transfert entre Y_c et Y (soit $(HF)^*$), alors le système $\hat{F}_Y$ conserve également le transfert entre V et Y (soit $(HF)^* H$). La seule équation à résoudre est donc bien l'équation (4.3). La même remarque s'applique pour le transfert (4.2) et l'equation (4.4).

Remarque 4.2 On remarquera également que $(H\hat{F}_S)^+ = (HF)^+$ implique $(H\hat{F}_S)^* = (HF)^*$. Donc, le plus grand $\hat{F}_S$ satisfaisant la relation (4.4) satisfait également la relation (4.3) et laisse inchangé le transfert (4.1). Autrement dit, le plus grand feedback laissant inchangé le comportement de S (le stock de sortie), laisse également inchangé le comportement de Y (la sortie). $\diamond$

Le problème apparaît clairement comme un problème de résiduation. Le résultat est donné ici pour H et F des matrices de $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ (des matrices rationnelles et, par conséquent, réalisables).

Proposition 4.3. *Soit $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times m}$ et $F \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{m\times p}$ des matrices réalisables. Le plus grand $\hat{F}_Y \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{m\times p}$ réalisable tel que $(H\hat{F}_Y)^* = (HF)^*$ est donné par*

$$\hat{F}_Y = \mathsf{Pr}_+(H \backslash\!\!\circ (HF)^*).$$

Le plus grand $\hat{F}_S \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{m\times p}$ réalisable tel que $(H\hat{F}_S)^+ = (HF)^+$ est donné par

$$\hat{F}_S = \mathsf{Pr}_+(H \backslash\!\!\circ (HF)^+).$$

(où $\backslash\!\!\circ$ désigne la résiduée à gauche du produit défini sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$).

Preuve : En accord avec la remarque 2.46, on peut considérer que le produit défini sur le dioïde des éléments rationnels ($\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$) est résiduable. En notant $L_H^{\mathsf{rat}} : \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{m\times p} \to \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times p}, X \mapsto HX$, on vérifie $(L_H^{\mathsf{rat}})^\sharp = \mathsf{Pr}_+ \circ L_H^\sharp$ où L_H désigne le produit à gauche par H sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$.

Rappelons que l'application $\mathcal{K} : x \mapsto x^*$ est une fermeture (cf. th. 1.88) et que la restriction ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$ est par conséquent résiduable (cf. proposition 1.100). Notamment, si l'application $\mathcal{K}$ est définie uniquement sur l'ensemble des éléments rationnels, c'est à dire $\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} : \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times p} \to \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times p}$, on a alors naturellement

$$({}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}|}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}})^\sharp = \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}}.$$

Finalement, l'application ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}|}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}}$ est résiduable comme composée d'applications résiduables (cf. théorème 1.32 (1.11)).

D'après le corollaire 1.43, en posant

$$f = {}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}|}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}} = {}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}|}\mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})} \circ {}_{\mathsf{Im}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})|}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}}),$$

l'application ${}_{\mathsf{Im}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})|}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})$ est également résiduable, sa résiduée étant explicitement

$$\left({}_{\mathsf{Im}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})|}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})\right)^\sharp = {}_{\mathsf{rat}|}\mathsf{Pr}_+ \circ L_H^\sharp \circ \mathsf{Id}_{|\mathsf{Im}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})}. \tag{4.5}$$

Par hypothèse H et F sont des matrices rationnelles, c.-à-d. $(HF)^* \in \mathsf{Im}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})$, par conséquent, d'après (4.5) $\hat{F}_Y = \mathsf{Pr}_+(H \backslash\!\!\backslash (HF)^*)$ est la plus grande solution rationnelle de l'inéquation

$$(H\hat{F}_Y)^* \preceq (HF)^*. \tag{4.6}$$

En outre, puisque l'application ${}_{\mathsf{Im}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})|}(\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} \circ L_H^{\mathsf{rat}})$ est surjective, d'après le résultat (1.13) du théorème 1.32, $\hat{F}_Y$ réalise également l'égalité

$$(H\hat{F}_Y)^* = (HF)^*, \tag{4.7}$$

c.-à-d. la plus grande solution de l'inéquation (4.6) est solution de l'équation (4.7).

En considérant la même démarche pour la fermeture $\mathcal{P} : \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times p} \to \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times p}, x \mapsto x^+$, on aboutit à $\hat{F}_S = \mathsf{Pr}_+(H \backslash\!\!\backslash (HF)^+)$ est la plus grande solution rationnelle, et par conséquent réalisable, de l'équation

$$(H\hat{F}_S)^+ = (HF)^+.$$

□

Cas multicellule

Comme nous l'avons souligné dans la remarque 4.1, les systèmes à flux tirés sont généralement découpés en étages de production, chacun des étages disposant de son propre système de gestion à flux tirés. Un étage peut être constitué d'une seule machine ou bien d'un atelier complet de plusieurs machines.

Lorsqu'un système dispose de p cellules de production en série, chacune étant à flux tirés, la structure globale du système peut être représentée par la figure 4.2. Les ordres de production permettant l'entrée de pièces brutes dans le système, ainsi que l'entrée dans chacun des étages de production, ne proviennent plus directement de la consommation de pièces (Y). L'information remonte d'étage en étage par l'intermédiaire des feedbacks F_i.

Le transfert global d'une ligne à flux tirés dépend donc de chacun des F_i. Les systèmes H_i et F_i sont supposés tels que le nombre de sorties de H_i soit égal au nombre d'entrées de F_i, le nombre d'entrées de H_i soit égal au nombre de sorties de F_i et le nombre de sorties de H_i soit égal au nombre d'entrées de H_{i+1}.

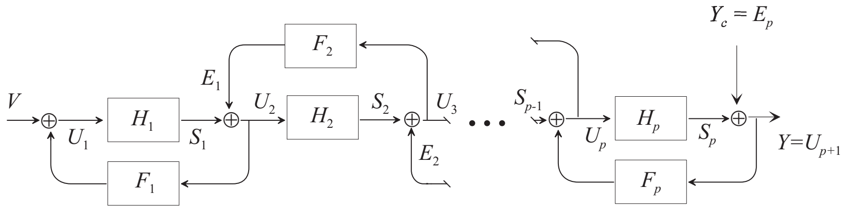


Figure 4.2 : Structure d'un système à flux tiré comportant plusieurs étages en série

Proposition 4.4. *Pour une ligne à flux tirés comportant p cellules en série, les transferts relatifs à S_p (le stock de pièces finies de la ligne) et Y sont*

$$Y = (\alpha_p F_p)^* Y_c \oplus (\alpha_p F_p)^* \beta_p V \tag{4.8}$$
$$S_p = (\alpha_p F_p)^+ Y_c \oplus (\alpha_p F_p)^* \beta_p V \tag{4.9}$$

où α_p et β_p sont donnés par la récurrence suivante

$$\alpha_{i+1} = H_{i+1}(\alpha_i F_i)^*, \ \beta_{i+1} = \alpha_{i+1}\beta_i \ \textit{et} \ \alpha_1 = \beta_1 = H_1. \tag{4.10}$$

Preuve : Les notations utilisées ici sont données sur la figure 4.2; U_i correspond à l'entrée dans la cellule i, S_i correspond à l'entrée dans le stock de pièces finies de la cellule i et E_i correspond à l'autorisation d'entrer dans la cellule $i+1$.

Supposons qu'il existe α_i et β_i tels que l'on puisse écrire

$$\begin{cases} U_{i+1} = (\alpha_i F_i)^* E_i \oplus (\alpha_i F_i)^* \beta_i V \\ S_i = (\alpha_i F_i)^+ E_i \oplus (\alpha_i F_i)^* \beta_i V \end{cases} \tag{4.11}$$

alors, puisque $E_i = F_{i+1}U_{i+2}$, on a

$$U_{i+1} = (\alpha_i F_i)^*(F_{i+1}U_{i+2}) \oplus (\alpha_i F_i)^* \beta_i V.$$

En outre, $U_{i+2} = H_{i+1}U_{i+1} \oplus E_{i+1}$, ce qui conduit à

$$U_{i+2} = H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* F_{i+1} U_{i+2} \oplus H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* \beta_i V \oplus E_{i+1}.$$

La résolution de cette équation implicite (cf. théorème 1.86) en U_{i+2} conduit à la plus petite solution suivante

$$U_{i+2} = (H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* F_{i+1})^* \, E_{i+1} \oplus (H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* F_{i+1})^* \, H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* \beta_i V. \tag{4.12}$$

D'autre part, $E_i = F_{i+1}U_{i+2} = F_{i+1}(S_{i+1} \oplus E_{i+1})$, donc, en partant de (4.11), on obtient tout d'abord

$$U_{i+1} = (\alpha_i F_i)^* \left(F_{i+1}(S_{i+1} \oplus E_{i+1})\right) \oplus (\alpha_i F_i)^* \beta_i V,$$

et, puisque $S_{i+1} = H_{i+1}U_{i+1}$, on a également

$$S_{i+1} = H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* \left(F_{i+1}(S_{i+1} \oplus E_{i+1})\right) \oplus H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* \beta_i V.$$

Après résolution de l'équation implicite en S_{i+1} on obtient

$$S_{i+1} = (H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* F_{i+1})^+ E_{i+1} \oplus (H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* F_{i+1})^* H_{i+1}(\alpha_i F_i)^* \beta_i V. \tag{4.13}$$

Si l'on peut écrire les expressions (4.11), alors on peut également écrire

$$\left\{ \begin{array}{lcl} U_{i+2} & = & (\alpha_{i+1}F_{i+1})^* E_{i+1} \oplus (\alpha_{i+1}F_{i+1})^* \beta_{i+1} V \\ S_{i+1} & = & (\alpha_{i+1}F_{i+1})^+ E_{i+1} \oplus (\alpha_{i+1}F_{i+1})^* \beta_{i+1} V \end{array} \right. \tag{4.14}$$

en posant $\alpha_{i+1} = H_{i+1}(\alpha_i F_i)^*$ et $\beta_{i+1} = \alpha_{i+1}\beta_i$.

Au rang $i = 1$, la relation (4.11) est vérifiée pour $\alpha_1 = \beta_1 = H_1$. Les expressions de S_p et Y sont donc obtenues pour $i = p$ en remarquant que $U_{p+1} = Y$ et $E_p = Y_c$. □

Proposition 4.5. *Le transfert (4.8) reste inchangé lorsque l'on remplace chacun des feedbacks F_i par*

$$\hat{F}_{i_Y} = \mathsf{Pr}_+(\alpha_i \circ\!\!\!\!\backslash (\alpha_i F_i)^*).$$

Le transfert (4.9) reste inchangé lorsque l'on remplace chacun des feedbacks F_i par

$$\hat{F}_{i_S} = \mathsf{Pr}_+(\alpha_i \circ\!\!\!\!\backslash (\alpha_i F_i)^+),$$

où α_i est donné par la récurrence (4.10).

De plus, $\hat{F}_{i_Y} \succeq \hat{F}_{i_S} \succeq F_i$ pour tout i.

Preuve : Les transferts (4.8) et (4.9) s'expriment grâce à la récurrence (4.10). Or, on a vu que l'équation

$$(\alpha_i \hat{F}_{i_Y})^* = (\alpha_i F_i)^*$$

admet $\hat{F}_{i_Y} = \mathsf{Pr}_+(\alpha_i \circ\!\!\!\!\backslash (\alpha_i F_i)^*)$ comme plus grande solution réalisable. En remplaçant chacun des F_i par $\hat{F}_{i_Y}$ on vérifie donc pour tout i que $H_{i+1}(\alpha_i \hat{F}_{i_Y})^* = H_{i+1}(\alpha_i F_i)^*$, c'est-à-dire que la récurrence (4.10) n'est pas modifiée et par conséquent le transfert (4.8) non plus.

De la même manière, $\hat{F}_{i_S} = \mathsf{Pr}_+(\alpha_i \circ\!\!\!\!\backslash (\alpha_i F_i)^+)$ est la plus grande solution réalisable de l'équation

$$(\alpha_i \hat{F}_{i_S})^+ = (\alpha_i F_i)^+.$$

En remplaçant F_i par $\hat{F}_{i_S}$, on laisse donc également inchangée la récurrence (4.10)[5], le transfert (4.9) ainsi que la façon dont se reconstitue le stock S_i en fonction des ordres de production E_i provenant de la cellule amont, et ce pour chaque cellule i (l'expression (4.11) montre en effet que pour chaque cellule i on a $S_i = (\alpha_i F_i)^+ E_i \oplus (\alpha_i F_i)^* \beta_i V$).

Enfin, $(\alpha_i F_i)^+ = \alpha_i F_i (\alpha_i F_i)^*$. Donc d'après (1.42), $\alpha_i \circ\!\!\!\!\backslash (\alpha_i F_i)^+ \succeq F_i(\alpha_i F_i)^* \succeq F_i$. De plus, puisque $(\alpha_i F_i)^* \succeq (\alpha_i F_i)^+$, on a tout d'abord par l'isotonie de $L^\sharp_{\alpha_i}$

$$\alpha_i \circ\!\!\!\!\backslash (\alpha_i F_i)^* \succeq \alpha_i \circ\!\!\!\!\backslash (\alpha_i F_i)^+ \succeq F_i$$

et, finalement, puisque l'application Pr_+ est isotone et que F_i est supposé réalisable (donc causal), c'est-à-dire $\mathsf{Pr}_+(F_i) = F_i$, on vérifie donc

$$\mathsf{Pr}_+(\alpha_i \circ\!\!\!\!\backslash (\alpha_i F_i)^*) \succeq \mathsf{Pr}_+(\alpha_i \circ\!\!\!\!\backslash (\alpha_i F_i)^+) \succeq \mathsf{Pr}_+(F_i) = F_i$$

[5]il suffit de remarquer $(\alpha_i \hat{F}_{i_S})^+ = (\alpha_i F_i)^+ \Rightarrow (\alpha_i \hat{F}_{i_S})^* = (\alpha_i F_i)^*$

soit

$$\hat{F}_{i_Y} \succeq \hat{F}_{i_S} \succeq F_i.$$

□

Remarque 4.6 Nous tenons à insister sur le fait que les modifications des systèmes F_i proposées précédemment ne sont pas nécessairement optimales au sens du p-uplet $(\hat{F}_{1_Y}, \dots, \hat{F}_{p_Y})$, c'est-à-dire qu'en adoptant cette approche, on ne peut pas garantir qu'il n'existe pas un autre p-uplet plus grand que $(\hat{F}_{1_Y}, \dots, \hat{F}_{p_Y})$ conservant également le transfert (4.8) ou le transfert (4.9). En revanche, par construction, on sait que $(\hat{F}_{1_Y}, \dots, \hat{F}_{p_Y}) \succeq (F_1, \dots, F_p)$. Il faut donc voir cela seulement comme une "amélioration" possible du système, sans que cette modification ait un critère d'optimalité globale. ◇

Les résultats précédents sont vérifiés dans le cas où chacun des étages de production H_i est un système multi-entrées multi-sorties. Lorsque les étages sont mono-entrée mono-sortie on obtient le résultat suivant.

Proposition 4.7. *Lorsque les cellules de production sont mono-entrée mono-sortie de transferts* $h_i \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma, \delta]\!]$ *alors le transfert entre* y_c *et* y *reste inchangé en remplaçant chacun des* $f_i \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma, \delta]\!]$ *par*

$$\hat{f}_i = \mathsf{Pr}_+(h_i \mathbin{\rlap{$\backslash$}{\,\circ}} (h_i f_i)^+).$$

Preuve : Lorsque chacune des cellules est mono-entrée mono-sortie, leurs transferts sont des séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$. Par conséquent, le produit commute. On a alors, en accord avec (4.8) et la récurrence (4.10), en faisant abstraction du transfert entre v et y

$$\begin{aligned} y &= (h_p(h_{p-1}(\dots(h_2(h_1 f_1)^* f_2)^* \dots)^* f_{p-1})^* f_p)^* y_c \\ &= (h_p f_p(h_{p-1} f_{p-1}(\dots(h_2 f_2(h_1 f_1)^*)^* \dots)^*)^*)^* y_c. \end{aligned}$$

On peut donner une autre expression de ce transfert en remarquant que $(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* = e \oplus a(a^* b^*) = e \oplus a^+ b^* = e \oplus a^+(e \oplus b^+) = e \oplus a^+ \oplus a^+ b^+$ (voir théorème 1.88) .

Pour fixer les idées, pour $p = 3$, on peut par exemple réécrire le transfert entre y_c et y

$$\begin{aligned} y &= (h_3 f_3(h_2 f_2(h_1 f_1)^*)^*)^* y_c \\ &= (h_3 f_3(e \oplus (h_2 f_2)^+ \oplus (h_1 f_1)^+ (h_2 f_2)^+))^* y_c \\ &= [e \oplus (h_3 f_3)^+ \oplus (h_3 f_3)^+ (h_2 f_2)^+ \oplus (h_3 f_3)^+ (h_2 f_2)^+ (h_1 f_1)^+] y_c. \end{aligned}$$

En généralisant, pour tout p le transfert entre y_c et y est de la forme

$$y = \left[e \oplus (h_p f_p)^+ \oplus (h_p f_p)^+ (h_{p-1} f_{p-1})^+ \oplus \dots \oplus \bigotimes_{i=1}^{p} (h_i f_i)^+ \right] y_c.$$

En posant $\hat{f}_i = \mathsf{Pr}_+(h_i \mathbin{\rlap{$\backslash$}{\,\circ}} (h_i f_i)^+)$, on a vu précédemment que $\hat{f}_i$ vérifie l'égalité $(h_i \hat{f}_i)^+ = (h_i f_i)^+$ (c'est le plus grand élément réalisable vérifiant l'égalité). Par conséquent, on vérifie également l'égalité

$$\begin{aligned} y &= \left[e \oplus (h_p f_p)^+ \oplus (h_p f_p)^+ (h_{p-1} f_{p-1})^+ \oplus \dots \oplus \bigotimes_{i=1}^{p} (h_i f_i)^+ \right] y_c \\ &= \left[e \oplus (h_p \hat{f}_p)^+ \oplus (h_p \hat{f}_p)^+ (h_{p-1} \hat{f}_{p-1})^+ \oplus \dots \oplus \bigotimes_{i=1}^{p} (h_i \hat{f}_i)^+ \right] y_c. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.8 Les modifications des systèmes F_i (dans le cas multi-entrées multi-sorties) données par la proposition 4.5 impliquent que chaque système réalisable $\hat{F}_{i_Y}$ ou $\hat{F}_{i_S}$ soit calculé à partir du transfert d'une partie de la ligne, voire de toute la ligne pour le calcul de $\hat{F}_{p_Y}$ et $\hat{F}_{p_S}$.

Dans le cas de cellules mono-entrée mono-sortie, la proposition 4.7 montre qu'il est possible d'apporter une modification à la ligne de production en étudiant chaque cellule en isolation. Dans le cas de systèmes de grande taille, cette modification s'obtient plus facilement. ⋄

4.1.3 Modification de lignes Kanban et Kanban Généralisé

Nous illustrons les résultats des propositions 4.5 et 4.7 sur deux types de gestion à flux tirés : la gestion Kanban et la gestion Kanban Généralisé[6]. Nous donnerons, pour chacune des méthodes, une explication de la gestion des ordres de production pour chaque étage puis décrirons le modèle de type GET correspondant. Les modèles donnés ici[7] sont issus de la thèse de Di Mascolo [Di Mascolo, 1990] et sont également repris dans [Chaouiya and Dallery, 1997].

Le Kanban

Cette technique de gestion de production est apparue au Japon dans les années 60. Elle fut notamment appliquée dans les usines Toyota. Comme nous le disions en introduction, la mise en oeuvre de ce type de gestion est très simple. Nous décrivons rapidement les principes de cette méthode.

Chaque cellule de production dispose d'un tableau contenant des *kanbans* (kanban signifie *étiquette* en japonais). Lorsque la cellule i dispose d'un kanban libre présent sur le tableau et qu'une pièce brute est disponible dans la cellule amont (la cellule $i-1$), le kanban et la pièce s'associent pour entrer en production dans la cellule i. Le kanban ne sera rendu disponible (c-à-d figurera sur le tableau de kanbans libres) qu'au moment où la cellule aval (la cellule $i+1$) consommera la pièce qui lui est associée.

Remarque 4.9 Les kanbans décrits précédemment peuvent être de réelles "marques" physiques telles que des cartes, des badges, des bordereaux, ou peuvent être réalisés par le biais d'un système informatisé capable de gérer les autorisations ou les interdictions d'accès dans chaque cellule de production. ⋄

Lorsqu'une cellule de production mono-produit numérotée i dispose de n_i machines de capacité égale à 1 et capables de travailler en parallèle, chacune de ces machines ayant un temps de cycle de t_i unités de temps, alors le système de production muni du système de gestion kanban peut être représenté par le GET de la figure 4.3.

Il est facile d'identifier, à partir du modèle de la figure 4.3, le transfert de la cellule de production numéro i, noté h_i, et le transfert du système de gestion noté f_i de cette cellule. On

[6]notons que d'autres méthodes de gestion à flux tirés, comme le Kanban Etendu [Dallery and Liberopoulos, 1995], pourraient également faire l'objet de ce genre d'études

[7]le modèle du Kanban a également été repris dans la thèse de Stéphane Gaubert [Gaubert, 1992]

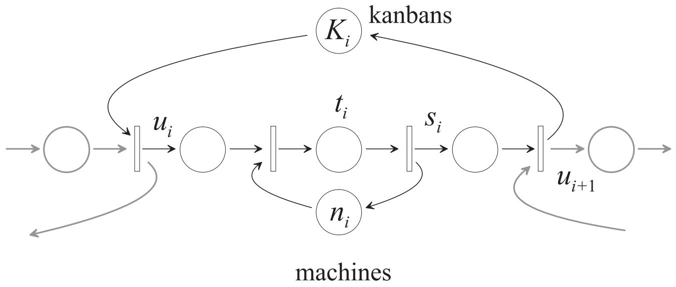


Figure 4.3 : Modèle graphe d'événements temporisé d'une cellule de production mono-produit gérée en Kanban

a, pour ce modèle,

$$\begin{array}{rcl} h_i & = & \delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* \\ f_i & = & \gamma^{K_i}. \end{array}$$

La proposition 4.7 nous indique que le transfert global de la ligne reste inchangé en remplaçant chacun des f_i par le feedback réalisable suivant

$$\hat{f}_i = \mathsf{Pr}_+(h_i \circ\!\!\!\!\diagdown (h_i f_i)^+).$$

On obtient donc ici l'expression suivante des $\hat{f}_i$:

$$\hat{f}_i \quad = \quad \mathsf{Pr}_+\left((\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*) \circ\!\!\!\!\diagdown (\gamma^{K_i}\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*)^+\right).$$

L'élément $h_i \circ\!\!\!\!\diagdown (h_i f_i)^+$ s'écrit de la manière suivante

$$\begin{array}{rcll} h_i \circ\!\!\!\!\diagdown (h_i f_i)^+ & = & (\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*) \circ\!\!\!\!\diagdown (\gamma^{K_i}\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*)^+ & \\ & = & (\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*) \circ\!\!\!\!\diagdown \left[\gamma^{K_i}\delta^{t_i}(\gamma^{K_i}\delta^{t_i} \oplus \gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*\right] & \text{(d'après (1.30))} \\ & = & (\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*) \circ\!\!\!\!\diagdown \left[\gamma^{K_i}\delta^{t_i}(\gamma^{\min(K_i,n_i)}\delta^{t_i})^*\right]. & \end{array} \tag{4.15}$$

Si, pour chaque cellule, on suppose qu'il y a plus de kanbans (K_i) que de machines (n_i), alors on peut simplifier l'expression précédente de la façon suivante

$$\begin{array}{rcl} h_i \circ\!\!\!\!\diagdown (h_i f_i)^+ & = & (\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*) \circ\!\!\!\!\diagdown (\gamma^{K_i}\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*) \\ & = & \delta^{t_i} \circ\!\!\!\!\diagdown \left[(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* \circ\!\!\!\!\diagdown (\gamma^{K_i}\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*)\right] \quad \text{(d'après (1.49))} \\ & = & (\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* \circ\!\!\!\!\diagdown [\delta^{-t_i}(\gamma^{K_i}\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*)] \text{ (d'après (1.51))} \\ & = & \gamma^{K_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* \text{ (d'après (1.53))}. \end{array}$$

Remarque 4.10 Notons que si $K_i < n_i$, alors le taux de production de la cellule de production numéro i est dégradé par rapport au taux de production de la cellule sans le système Kanban (cf. relation (4.15)). Par conséquent, le nombre de kanbans alloués à une cellule de production

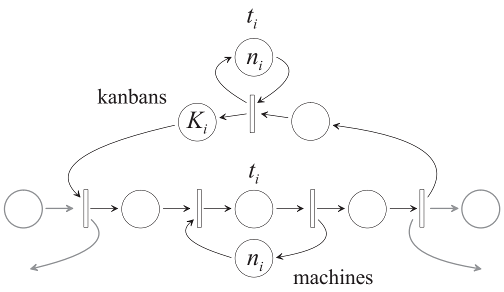


Figure 4.4 : Modification de la politique de gestion Kanban mono-produit laissant inchangé le transfert entre la demande (y_c) et la sortie des pièces (y)

est généralement supérieur au nombre de machines; l'hypothèse $K_i \geq n_i$ n'est donc pas très restrictive. $\diamond$

Puisque l'élément $\gamma^{K_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*$ est causal (K_i, n_i et t_i sont positifs), on vérifie $\mathsf{Pr}_+(h_i \diamond\!\!\!\backslash (h_i f_i)^+) = h_i \diamond\!\!\!\backslash (h_i f_i)^+$. Une modification possible des feedbacks f_i, préservant néanmoins le même transfert entre y et y_c pour la ligne modifiée, s'exprime de la manière suivante

$$\hat{f}_i = \gamma^{K_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*.$$

Sous l'hypothèse que chaque cellule de production dispose de plus de kanbans que de machines, la politique de gestion en Kanban peut être modifiée conformément à la figure 4.4 sans que le transfert entre y_c et y ne soit modifié.

Remarque 4.11 La politique de gestion à flux tirés $\hat{f}_i$ obtenue par calcul en remplacement du système de gestion Kanban classique est évidemment moins facile à mettre en oeuvre avec des étiquettes physiques (badges, bordereaux ...) puisque le feedback $\hat{f}_i$ possède une dynamique (max,+)-linéaire que n'a pas le feedback du Kanban classique. En revanche, l'implémentation informatique en est relativement simple puisque la dynamique du système $\hat{f}_i$ peut être facilement réalisée par une récurrence (max,+). $\diamond$

Exemple 4.12 (Système Kanban 2 cellules) Nous illustrons ici les résultats précédents par une simulation sur un système Kanban comportant deux cellules de production en série.

Nous comparons le comportement de cette ligne gérée en kanban de façon classique avec la même ligne pour laquelle les systèmes f_1 et f_2 ont été remplacés respectivement par $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ où $\hat{f}_i = \gamma^{K_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*(i = 1, 2)$ (figure 4.5).

Pour réaliser cette simulation, nous avons choisi les caractéristiques suivantes : $n1 = 2, t1 = 3, K1 = 4$, $n2 = 3, t2 = 4, K2 = 5$.

La consigne appliquée aux deux systèmes est donnée sous forme d'un polynôme de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$:

$$y_c = e \oplus \gamma^5\delta^4 \oplus \gamma^8\delta^8 \oplus \gamma^{12}\delta^{12} \oplus \gamma^{14}\delta^{15} \oplus \gamma^{16}\delta^{20} \oplus \gamma^{17}\delta^{+\infty}.$$

Nous rappelons que l'information codée par cet élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est la suivante : les pièces 0 à 4 sont demandées à l'instant 0, les pièces 5 à 7 à l'instant 4, ..., la pièce 17 à l'instant $+\infty$

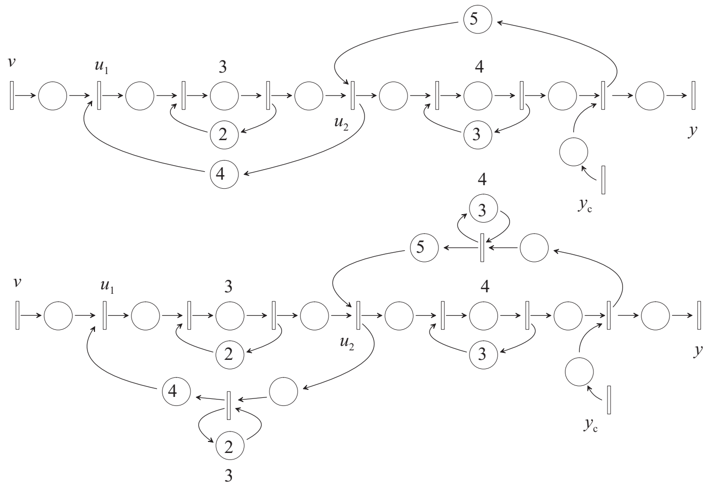


Figure 4.5 : Système Kanban classique et système dont la gestion des kanbans est modifiée.

(jamais).

Remarque 4.13 On verra qu'il n'est pas ici nécessaire d'appliquer une trajectoire de consigne y_c plus longue pour mettre en évidence l'influence des systèmes $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$ sur la ligne. $\diamond$

Nous obtenons alors les résultats suivants.

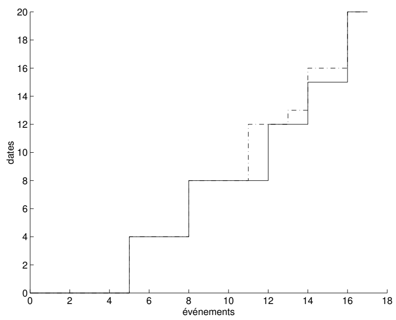


Figure 4.6 : Comparaison de la sortie y (pointillés) par rapport à la demande de pièces finies y_c (trait plein)

La figure 4.6 représente la consigne y_c (trait plein) et la sortie effective y pour les deux systèmes (pointillés). Nous rappelons que les deux systèmes ont le même transfert entre y_c et y. Cette consigne étant légèrement contraignante pour les deux systèmes, la sortie ne peut respecter l'objectif de consigne, c'est à dire que la demande client y_c est satisfaite avec un retard pour les pièces 11,13,14 et 15.

La figure 4.7 représente le tir de la transition u_2, c'est à dire l'entrée dans la deuxième cellule dans le cadre du Kanban classique ou après modification du système de gestion des kanbans.

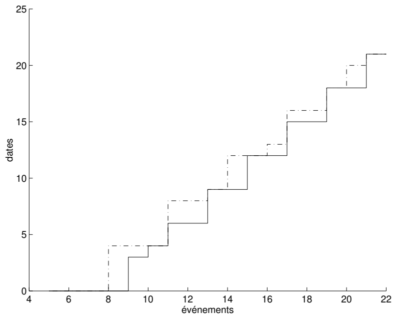


Figure 4.7 : Comparaison de la trajectoire de tir de la transition u_2 (entrée dans la seconde cellule) entre le Kanban classique (trait plein) et le système muni de feedbacks $\hat{f}_i$ (pointillés)

L'action du système $\hat{f}_2$ est ici très claire puisque les pièces sont introduites plus tardivement dans la seconde cellule.

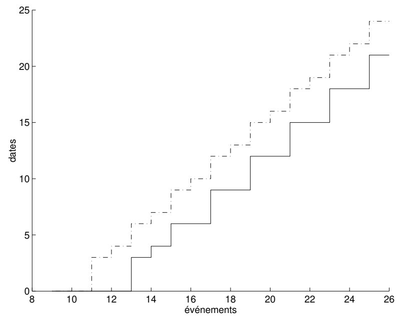


Figure 4.8 : Comparaison de la trajectoire de tir de la transition u_1 (lancements en production) dans la cas du Kanban classique (trait plein) et après modification des systèmes f_i

Enfin, la figure 4.8 représente la trajectoire d'entrée dans la première cellule (c.-à-d. , l'entrée de la matière première) pour le système kanban classique (trait plein) et pour la ligne dont les systèmes de gestion sont modifiés (pointillé). Il est encore plus flagrant ici que l'entrée de matière première est retardée par l'action conjointe des systèmes $\hat{f}_1$ et $\hat{f}_2$.

En résumé, la qualité de service des clients est conservée bien que les pièces entrent plus tardivement dans les cellules. $\diamond$

Remarque 4.14 Nous n'avons illustré précédemment que la modification suggérée par la proposition 4.7. On peut également calculer les systèmes $\hat{f}_{i_y}$ donnés par la proposition 4.5. Dans ce dernier cas, on obtient l'expression suivante des systèmes $\hat{f}_{i_y}$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_{1_y} &= \mathsf{Pr}_+(h_1 \circ\!\!\!\backslash (h_1 f_1)^*) \\
\hat{f}_{2_y} &= \mathsf{Pr}_+((h_2(h_1 f_1)^*)) \circ\!\!\!\backslash (h_2(h_1 f_1)^* f_2)^*).
\end{aligned}
$$

Numériquement, pour la ligne traitée dans l'exemple 4.12, on obtient

$$\begin{array}{rcl} \hat{f}_{1_y} & = & \gamma^4(\gamma^2\delta^3)^* \\ \hat{f}_{2_y} & = & \gamma^5\delta^0 \oplus \gamma^8\delta^4 \oplus \gamma^{11}\delta^8 \oplus \gamma^{13}\delta^9 \oplus \gamma^{14}\delta^{12} \oplus \gamma^{16}\delta^{13} \oplus \gamma^{17}\delta^{16} \oplus \gamma^{19}\delta^{18} \oplus \gamma^{20}\delta^{20} \\ & & \oplus(\gamma^{21}\delta^{21} \oplus \gamma^{22}\delta^{22})(\gamma^2\delta^3)^* \end{array}$$

Le système $\hat{f}_{2_y}$ est alors plus grand que celui obtenu dans l'exemple 4.12 puisque son calcul prend en compte la totalité du transfert de la ligne. Notamment, puisque le transfert de la cellule 1 est pris en compte, il apparaît que le système $\hat{f}_2$ peut avoir un transfert périodique de pente ultime $\sigma_\infty(\hat{f}_{2_y}) = 2/3$ sans que le transfert total du système ne soit dégradé. ⋄

Le Kanban Généralisé

Le système Kanban Généralisé peut être vu comme une extension du système Kanban, il s'agit également d'un système de gestion basé sur l'utilisation d'étiquettes. A la différence du système Kanban classique, dans le système Kanban Généralisé, les étiquettes sont détachées des pièces dès que ces dernières sont terminées, et non lorsqu'elles sont consommées par la cellule suivante. La cellule i dispose donc d'un stock de pièces finies (S_i pièces initialement) et d'un stock de kanbans (K_i initialement) pouvant être de tailles différentes.

Le principe de fonctionnement est le suivant. Une demande parvenant à la cellule i (provenant de la cellule $i+1$) est séparée en un kanban et une demande: le kanban va être associé à une pièce finie du stock de pièces finies de la cellule i et permettra ainsi son passage dans la cellule $i+1$, et la demande va être associée à un kanban de la maille i et permettra son retour vers la maille $i-1$. Si aucun kanban ou aucune pièce finie n'est disponible lors d'une demande, les requêtes sont mises en attente. Le modèle de type GET d'une cellule de production gérée en Kanban Généralisé est donné figure 4.9. Il s'agit du modèle du système à l'état relaxé, lorsqu'aucune demande n'a eu lieu depuis un temps suffisamment long : les stocks de kanbans et de produits finis sont à leur niveau maximal. Il faut remarquer que si $K_i > S_i$ certaines demandes provenant de la cellule $i+1$ peuvent être à l'origine d'ordres de production (pour la cellule i) sans que la cellule i ne dispose de pièces finies disponibles. Ceci n'est pas possible dans le cas du Kanban classique. Notamment, le système Kanban Généralisé est vivant même pour $S_i = 0$.

Pour ce système à flux tiré, il est plus difficile d'identifier les systèmes H_i et F_i, c'est-à-dire le modèle du système de fabrication et le modèle du système de gestion des ordres de production. Une façon de représenter les étages de ce système de production est de considérer que chaque étage est de type deux entrées deux sorties comme présenté figure 4.10 avec $U_i = (u_{(i,1)}\ u_{(i,2)})^T$.

Le transfert du processus de production de la cellule i est donné par la relation

$$H_i = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^{K_i}\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* \\ \varepsilon & \gamma^{S_i}\delta^{t_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* \end{pmatrix}.$$

Le système de gestion des ordres de fabrication F_i (représenté en grisé sur la figure 4.10) est lui-même un système multi-entrées multi-sorties représenté par le transfert suivant

$$F_i = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ e & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

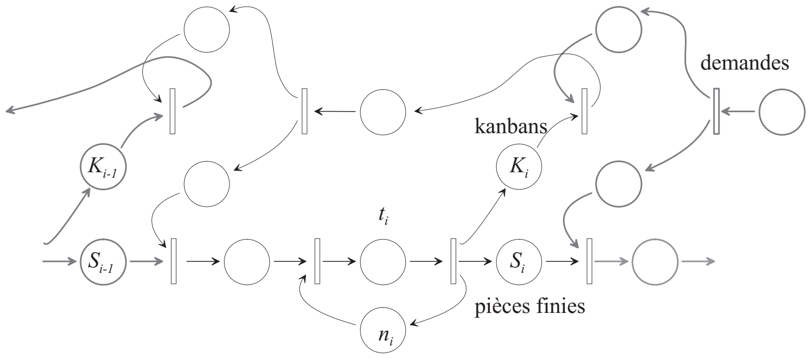


Figure 4.9 : Modèle GET d'une cellule de production mono-produit gérée en Kanban Généralisé

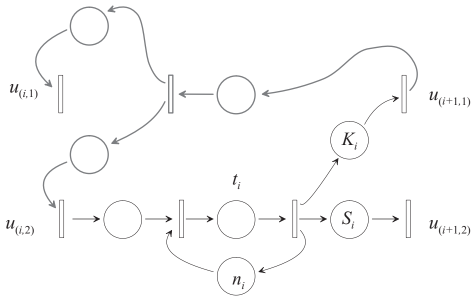


Figure 4.10 : Décomposition d'une cellule de production mono-produit gérée en Kanban Généralisé

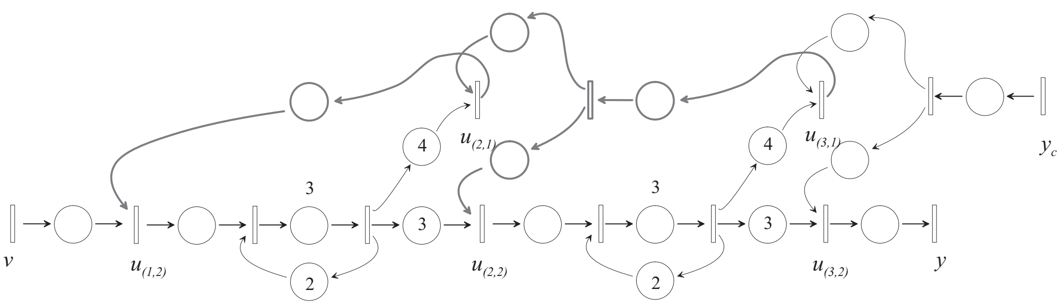


Figure 4.11 : Système Kanban Généralisé deux cellules

Connaissant cette décomposition des étages d'un système Kanban Généralisé, on peut désormais appliquer le résultat de la proposition 4.5 dans l'exemple suivant.

Exemple 4.15 (Système Kanban Généralisé à deux cellules en série) Nous illustrons le résultat de la proposition 4.5 sur un système Kanban Généralisé à deux cellules. Comme cela est présenté précédemment, on peut considérer chaque étage comme un système multi-entrées multi-sorties.

Dans cet exemple nous avons choisi deux étages identiques (dans le souci de simplifier les développements numériques). Leurs caractéristiques sont $K_1 = K_2 = 4$, $S_1 = S_2 = 3$, $n_1 = n_2 = 2$ et $t_1 = t_2 = 3$.

Les transferts H_i et F_i pour ce système sont

$$H_1 = \begin{pmatrix} \gamma^4\delta^3(\gamma^2\delta^3)^* \\ \gamma^3\delta^3(\gamma^2\delta^3)^* \end{pmatrix}, F_1 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^4\delta^3(\gamma^2\delta^3)^* \\ \varepsilon & \gamma^3\delta^3(\gamma^2\delta^3)^* \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ e & \varepsilon \end{pmatrix}$$

On remarque par ailleurs que le modèle de la première cellule diffère de celui des autres cellules.

La proposition 4.5 indique que le transfert entre y_c et y reste inchangé en remplaçant F_1 et F_2 (en grisé sur la figure 4.11) par $\hat{F}_1$ et $\hat{F}_2$ donnés par

$$\hat{F}_1 = \mathsf{Pr}_+(H_1 \circ\!\!\!\backslash (H_1F_1)^*) \text{ et } \hat{F}_2 = \mathsf{Pr}_+(H_2(H_1F_1)^*) \circ\!\!\!\backslash (H_2(H_1F_1)^*F_2)^*.$$

Sans développer plus les calculs, on obtient ici

$$\hat{F}_1 = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta^3 & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et } \hat{F}_2 = \begin{pmatrix} e \oplus \gamma^1\delta^3(\gamma^2\delta^3)^* & \varepsilon \\ (\gamma^2\delta^3)^* & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Une réalisation de ces feedbacks est donnée figure 4.12 (en trait épais grisé).

La figure 4.13 donne les trajectoires de tir correspondant à une même demande appliquée aux deux systèmes décrits figure 4.11 et figure 4.12. La sortie des deux systèmes est identique, mais il apparaît clairement que les lancements en production pour le système décrit figure 4.12 (Kanban Généralisé modifié) ont lieu plus tardivement que pour le Kanban Généralisé classique.

◇

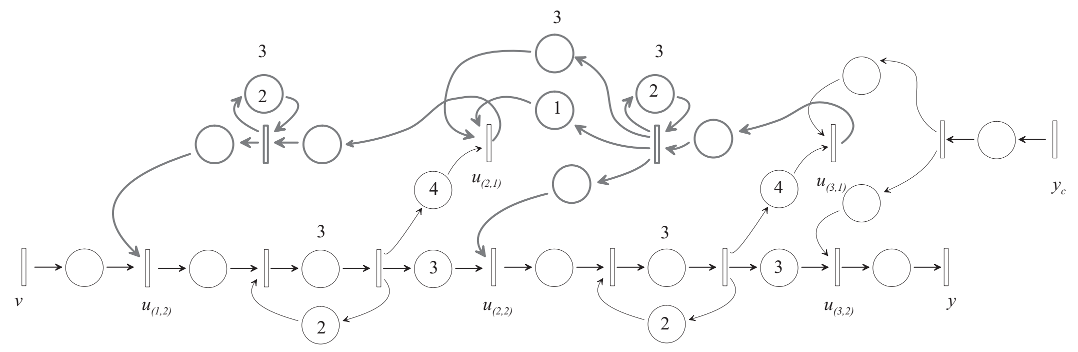


Figure 4.12 : Système Kanban Généralisé deux cellules dont la gestion est modifiée

4.1.4 Conclusion

Dans cette première partie, nous nous sommes intéressés à certaines politiques de gestion à flux tirés pour lesquelles les ordres de fabrication de chacun des étages d'un système de production sont générés par l'intermédiaire d'un feedback reliant la sortie à l'entrée de l'étage de production. Lorsque les étages de production sont représentables par des GET stationnaires (c.-à-d. à temporisations fixes), nous avons montré que la politique de gestion existante (représentée par un ensemble de feedbacks sur le GET) peut être modifiée, dans l'objectif de diminuer les en-cours, sans que la qualité de service du système ne soit altérée par cette modification.

La modification de la politique de gestion est calculée à partir du modèle GET de la ligne de production et du modèle de la gestion existante. Il faut donc comprendre que la démarche proposée ici vise essentiellement à faire évoluer des méthodes de gestion à flux tirés existantes et non à en créer de nouvelles.

Pour le système Kanban, la politique de gestion obtenue par cette méthode correspond en quelque sorte à un Kanban "Dynamique" dans le sens où la remise en circulation des kanbans libérés par une cellule est "filtrée" par une récurrence (max,+). Dans le cas de systèmes déterministes (GET stationnaires), la présence de la dynamique (max,+) sur le retour des kanbans de la sortie vers l'entrée d'une cellule conduit au final à une diminution des en-cours de la ligne pour une qualité de service équivalente à celle du Kanban classique. Qualitativement, on peut ajouter que la réduction des en-cours du système Kanban Dynamique par rapport au Kanban classique est d'autant plus importante que la demande est forte.

Notons que cette approche repose sur une modélisation par un GET stationnaire. Or, un système de production est l'objet d'aléas qui induisent des fluctuations des temps de service.

En guise de perspectives pour ce travail, il serait donc intéressant d'effectuer une comparaison des performances du Kanban Dynamique par rapport au Kanban Classique dans un contexte stochastique, c'est-à-dire lorsque le GET utilisé pour représenter le système de production est stochastique : les temps de traitement des machines sont alors des variables aléatoires. Une telle étude aurait pour objectif de quantifier la "robustesse" des correcteurs proposés.

En préalable à cette étude il est nécessaire d'effectuer un choix de modèle conduisant à la synthèse de la gestion modifiée. Nous proposons dans l'annexe C une première réponse

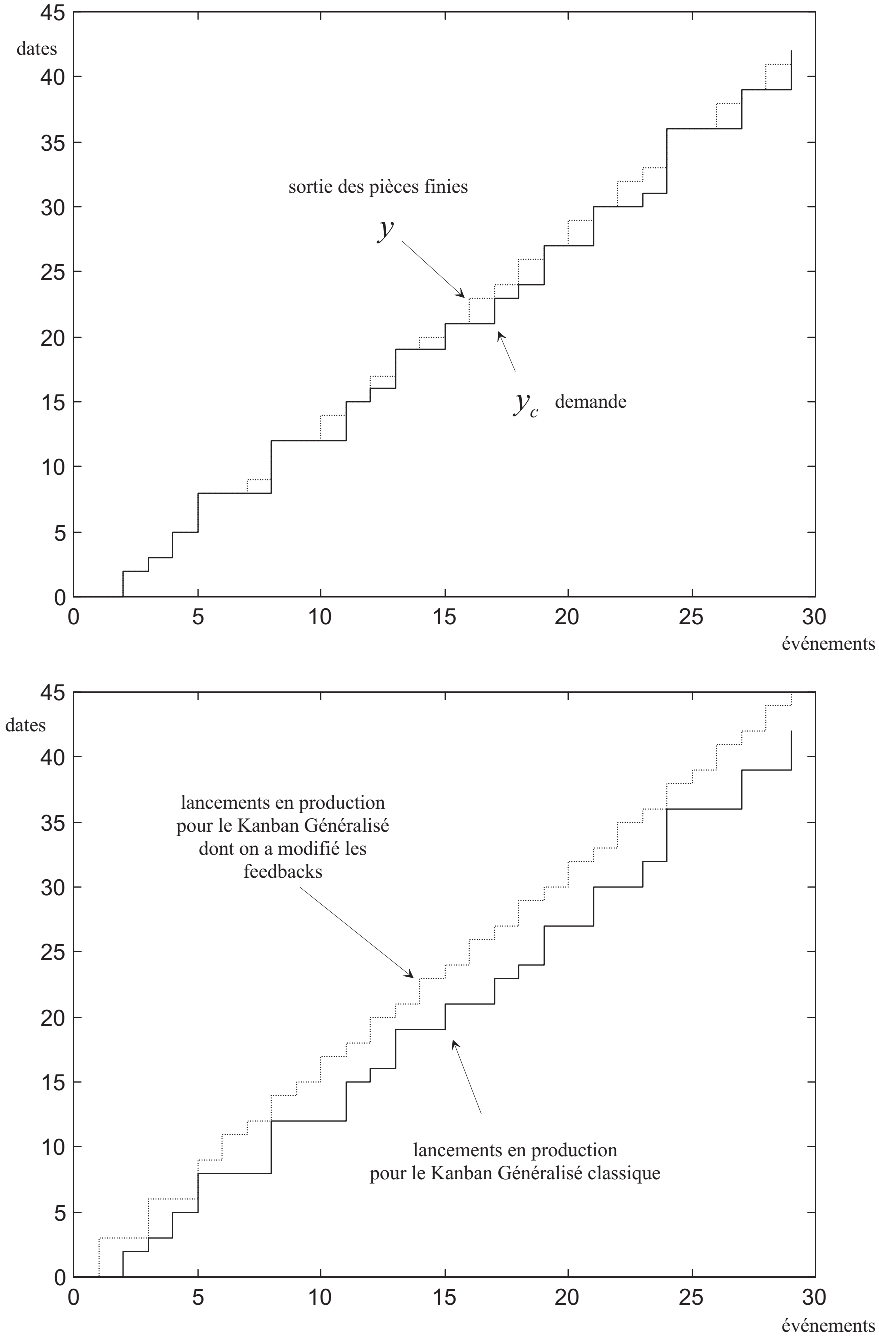


Figure 4.13 : Comparaison des trajectoires de tir des transitions d'entrée du Kanban Généralisé classique et du Kanban Généralisé dont on a modifié les feedbacks

à ce problème. L'idée principale est de retenir comme modèle du système, celui qui offre le comportement le plus rapide. Ce choix repose sur l'hypothèse qu'une temporisation associée à une place peut se décomposer comme suit :

$$t_i = t_{i_{\min}} + \Delta t_i,$$

où la valeur $t_{i_{\min}}$ représente une durée de traitement incompressible et Δt_i un délai qui permet de prendre en compte les aléas du système (défaillances, changement d'outils ...).

Les résultats et conclusions obtenus pour l'exemple traité sont les suivants :

- pour tous les niveaux de demande et toutes les valeurs de Δt_i simulées, la qualité de service des deux systèmes est identique : pour une même demande, les sorties effectives des pièces sont identiques.
- la réduction des en-cours[8], du Kanban Dynamique par rapport au Kanban classique, est d'autant plus importante que le niveau de la demande est élevé et que les variations des temporisations sont faibles par rapport aux temporisations minimales $t_{i_{\min}}$.

Il reste sans nul doute à étendre cette étude afin de définir pour quelle classe de systèmes la synthèse de correcteur déterministe reste valide.

4.2 Stabilisation de graphes d'événements temporisés

4.2.1 Introduction

Nous avons vu au chapitre 2 que l'accumulation "possible" (pas nécessairement effective) de jetons dans un RdP (ou non bornitude) peut être vue comme un phénomène d'instabilité du modèle. Dans le cadre de l'étude de systèmes manufacturiers, l'instabilité du modèle est également synonyme d'une possible "explosion" de la taille des stocks internes du système modélisé. Il est donc clair que savoir vérifier si un modèle est stable ou, mieux encore, savoir le stabiliser, constitue un enjeu important, notamment dans la phase de conception ou de validation d'un système. Nous étudions ici cette propriété en nous restreignant aux modèles de type GET.

Pour les GET, la stabilité est une propriété liée aux caractéristiques structurelles du modèle. En effet, on se rappelle que le nombre de jetons d'un circuit d'un GET est invariant. Aussi, il est suffisant que le GET soit fortement connexe pour qu'il soit stable. Le problème de stabilisation de GET est par conséquent souvent relié au problème de synthèse de feedback de sortie dans la littérature .

Ici, nous traitons le problème de stabilisation comme une application des structures de commande présentées dans le chapitre 3. Nous montrons que la stabilité d'un modèle peut être atteinte non seulement par l'ajout de correcteurs en feedback de sortie, comme cela a été proposé dans [Cohen et al., 1984],[Max Plus, 1991b],[Baccelli et al., 1992], mais également par précompensation.

[8]nous avons surtout évalué la diminution du temps séjour moyen

Il nous faut, pour aborder cette notion, tout d'abord introduire quelques définitions et hypothèses sur la structure des GET étudiés.

Hypothèses structurelles Les GET considérés par la suite comporteront m transitions d'entrée u_i $(i = 1, \ldots, m)$, p transitions de sortie y_j $(j = 1, \ldots, p)$ et q transitions internes notées x_l $(l = 1, \ldots, q)$. Ils seront supposés tels que toute place en aval (resp. en amont) d'une transition d'entrée (resp. de sortie) ait un marquage initial nul et une temporisation nulle. Ils seront de plus supposés structurellement commandables et observables. Cette définition provient de la référence [Cohen et al., 1984] et est reprise dans [Baccelli et al., 1992].

Définition 4.16 (Commandabilité et observabillité structurelle) *Un GET est dit structurellement commandable (resp. observable) si pour toute transition interne x_l il existe un chemin depuis au moins une entrée u_i (resp. vers au moins une sortie y_j).*

Enfin, les GET considérés seront supposés connexes (voir définition dans l'annexe A), c'est-à-dire tels qu'on ne puisse pas les décomposer en "sous-graphes" d'événements temporisés totalement indépendants. Dit autrement, si l'on fait abstraction du sens des arcs du GET, pour tout couple de transitions du GET (x_i, x_j), il existe un chemin de x_i à x_j.

Sous ces hypothèses, la stabilité concerne essentiellement le sous-graphe interne dont on rappelle maintenant la définition.

Définition 4.17 (Sous-graphe interne) *Nous appellerons sous-graphe interne le graphe d'événements temporisé obtenu en supprimant toutes les transitions u_i $(i = 1, \ldots, m)$ et y_j $(j = 1, \ldots, p)$ ainsi que tout arc entre ces transitions et une transition x_l $(l = 1, \ldots, q)$. Les places du sous-graphe interne seront appelées places internes.*

Définition 4.18 (Stabilité interne) *Un GET est dit stable si le marquage de son sous-graphe interne (c-à-d de ses places internes) reste borné pour toute séquence de tir des transitions d'entrée.*

Remarque 4.19 On laissera au lecteur se convaincre du fait que le marquage des places en aval des transitions d'entrée ne peut pas être borné, c'est pourquoi la stabilité ne concerne que le sous-graphe interne. $\diamond$

Nous suivrons le plan suivant. Nous rappellerons tout d'abord les outils algébriques permettant de traiter les problèmes de stabilité des GET. Ces résultats ont été fournis par l'équipe Max Plus dans [Max Plus, 1991b] (condition nécessaire et suffisante de stabilité d'un GET). Nous fournirons ensuite des méthodes pratiques de stabilisation de GET. Nous traiterons dans un premier temps le cas des systèmes mono-entrée mono-sortie. Nous vérifierons simplement qu'il est possible de stabiliser un GET mono-entrée mono-sortie soit par précompensation, soit par feedback, sans dégrader son transfert. C'est une application directe de résultats donnés dans le chapitre 3. Nous montrerons qu'en outre il est possible de calculer un feedback de sortie (optimal) qui stabilise et conserve le taux de production du système en boucle ouverte.

Dans un second temps, nous montrerons que les GET multi-entrées multi-sorties peuvent également être stabilisés, soit par l'ajout d'un précompensateur, soit par l'ajout d'un feedback de sortie. A la différence du cas mono-entrée mono-sortie, il n'existe alors pas de feedback optimal (plus grand que tout autre feedback) tel que le système soit stable et conserve son taux de production en boucle ouverte, c'est pourquoi ce problème est généralement traité par d'autres approches [Gaubert, 1995b].

4.2.2 Rappels

Soit une place p ayant u comme transition amont et v comme transition aval. En représentant les trajectoires de tir des transitions u et v par des fonctions compteurs, on relie le marquage (ou stock) de la place p évalué à la date t, noté $\overline{S}_{uv}(t)$, le marquage initial $\overline{S}_{uv}(0)$, et les compteurs $u(t)$ et $v(t)$ par la relation suivante (dans l'algèbre usuelle)

$$\underbrace{\overline{S}_{uv}(t)}_{\text{stock à la date } t} = \underbrace{\overline{S}_{uv}(0)}_{\text{stock initial}} + \underbrace{u(t)}_{\text{jetons entrés}} - \underbrace{v(t)}_{\text{jetons sortis}} \tag{4.16}$$

Remarque 4.20 Notons qu'en outre si un seul chemin sépare la transition u de la transition v, $\overline{S}_{uv}(t)$ donné par la relation la relation (4.16) désigne alors le marquage de cet unique chemin de u à v. $\diamond$

La variable $S_{uv}(t) = \overline{S}_{uv}(t) - \overline{S}_{uv}(0)$ décrit alors l'évolution du stock de la place (ou des chemins) située entre u et v de la date 0 à la date t.

Déterminer si le GET est stable revient donc à déterminer si la variation du stock $S_{x_i x_j}(t)$ reste finie pour tout t, pour tout couple de transitions internes (x_i, x_j) $(i, j = 1, \ldots, q)$ et pour toute séquence de tir des transitions d'entrée du GET.

Nous rappelons maintenant l'approche proposée dans [Max Plus, 1991b].

Soit Σ l'ensemble des fonctions compteurs $\mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Z}}_{min}$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions non décroissantes[9] de $\mathbb{Z}$ dans $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$, que l'on munit du min comme addition ($\oplus$) et du produit de convolution suivant comme produit

$$u(t), v(t) \in \Sigma,\ (u * v)(t) \overset{déf}{=} \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} u(t-\tau) \otimes v(\tau),$$

$(\Sigma, \oplus, *)$ a alors une structure de dioïde complet.

On rappelle que sur ce dioïde on peut écrire la sortie d'un GET mono-entrée mono-sortie $y(t) \in \Sigma$ comme le produit (de convolution) de l'entrée $u(t)$ par la réponse impulsionnelle[10] $h(t)$ du graphe. On a sur Σ la relation entrée-sortie suivante

$$\begin{aligned} y(t) &= (h * u)(t) \\ &\overset{déf}{=} \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h(t-\tau) \otimes u(\tau) \qquad \left(= \operatorname*{Min}_{\tau \in \mathbb{Z}} \left(h(t-\tau) + u(\tau)\right)\right). \end{aligned}$$

Puisque Σ est complet, le produit de convolution est par conséquent résiduable. L'expression

[9] nous avons vu dans le chapitre 2 que l'étude du comportement des GET revient à considérer uniquement des trajectoires de tir monotones

[10] on rappelle que la réponse impulsionnelle est la sortie du GET lorsque l'on place une infinité de jetons en entrée à la date 0

de la résiduée du produit $*$ de Σ est la suivante : soit $u(t)$ et $v(t)$ deux fonctions de Σ

$$\begin{aligned}(v \backslash u)(t) &\overset{déf}{=} \bigoplus \{c(t) \in \Sigma | (v * c)(t) \preceq u(t)\} \\ &= \bigwedge_{\tau \in \mathbb{Z}} (u(\tau) - v(\tau - t)) \qquad \left(= \operatorname*{Max}_{\tau \in \mathbb{Z}} (u(\tau) - v(\tau - t)\right)\end{aligned} \tag{4.17}$$

Le résultat suivant provient de cette expression.

Théorème 4.21. *Soit $u(t), v(t) \in \Sigma$ deux fonctions compteurs. Alors*

$$\forall t,\ S_{uv}(t) \leq (v \backslash u)(0).$$

Preuve : D'après (4.17), l'expression $(v \backslash u)(0)$ s'écrit également

$$(v \backslash u)(0) = \operatorname*{Max}_{\tau \in \mathbb{Z}} (u(\tau) - v(\tau))$$

ce qui représente le max de l'évolution du stock $S_{uv}(t)$ pour tout t. □

Remarque 4.22 Il faut noter qu'il existe $t \in \mathbb{Z}$ tel que $S_{uv}(t) = (v \backslash u)(0)$. C'est-à-dire que pour deux compteurs $u(t)$ et $v(t)$, la borne du stock fournie par le calcul de $(v \backslash u)(0)$ est atteinte pour une date t. ◇

Nous avons vu au §2.4 qu'en codant les fonctions dateurs ou compteur par des séries formelles de $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$, $\mathcal{D}[\![\delta]\!]$ ou de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$, le comportement entrée-sortie d'un GET, qui apparaît comme un produit de convolution sur Σ, s'exprime alors comme un simple produit de séries formelles. Il y a en fait un isomorphisme entre le dioïde Σ et le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$. Cet isomorphisme s'exprime de la manière suivante[11].

Soit s une série de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$. On notera $\mathcal{C}_s(t)$ la fonction compteur de Σ définie par

$$s = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \gamma^{\mathcal{C}_s(t)} \delta^t$$

avec pour convention $\gamma^{+\infty} = \varepsilon$ et $\gamma^{-\infty} = (\gamma^{-1})^*$.

L'application $s \mapsto \mathcal{C}_s$ définit un isomorphisme de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ dans Σ. Notamment, pour $u, v \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$, on a alors

$$(\mathcal{C}_v \backslash \mathcal{C}_u)(t) = \mathcal{C}_{(v \backslash u)}(t)$$

où $\backslash$ désigne la résiduée du produit de Σ dans le membre de gauche et la résiduée du produit de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ dans le membre de droite.

Le résultat du théorème 4.21 se réécrit donc également :

soit $u, v \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$, alors $\forall t$

$$S_{\mathcal{C}_u \mathcal{C}_v}(t) \leq \mathcal{C}_{(v \backslash u)}(0).$$

Pratiquement, pour u et v deux séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ décrivant les trajectoires de tir de deux transitions d'un GET, l'évaluation pour $t = 0$ de la fonction compteur associée à la série $v \backslash u$

[11] pour plus de détails concernant cet isomorphisme de Σ dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$, nous renvoyons le lecteur à [Gaubert, 1992, chap. VII]

donne une borne supérieure aux marquages possibles entre les transitions u et v (qu'il s'agisse d'une seule place entre u et v, ou bien d'un chemin du GET).

A partir de ce résultat, le théorème 4.23 fournit une condition nécessaire et suffisante de stabilité interne pour un GET décrit sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ par la représentation d'état suivante

$$\begin{cases} X &= AX \oplus BU \\ Y &= CX \end{cases}$$

avec $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{q\times q}$, $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{q\times m}$ et $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times q}$.

Théorème 4.23 ([Max Plus, 1991b]) *Le GET décrit par le triplet (A,B,C) est stable si et seulement si pour $i,j = 1,\dots,q$,*

$$\left[\mathcal{C}_{(A^*B \not\phi A^*B)}\right]_{ij}(0) < +\infty. \tag{4.18}$$

Pour prouver ceci nous introduisons un résultat intermédiaire.

Lemme 4.24. *Soit $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{q\times q}$ et $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{q\times m}$. Pour tout $U \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{m}$,*

$$(A^*BU)\not\phi(A^*BU) \succeq (A^*B)\not\phi(A^*B).$$

Preuve : D'après les résultats du théorème 1.95

$$\begin{aligned} \frac{A^*BU}{A^*BU} &= \frac{(A^*BU)\not\phi U}{A^*B} \text{ (application de (1.49))} \\ &\succeq \frac{A^*B(U\not\phi U)}{A^*B} \text{ (d'après (1.42) et en raison de l'isotonie de } R_A^\sharp) \end{aligned}$$

Enfin, puisque $U\not\phi U \succeq E$, où E représente la matrice identité, on vérifie finalement

$$\frac{A^*B(U\not\phi U)}{A^*B} \succeq \frac{A^*B}{A^*B}.$$

□

Preuve (théorème 4.23):

Suffisance Le vecteur d'état $X \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!])^q$ dépend de l'entrée $U \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!])^m$ par la relation

$$X = A^*BU.$$

En accord avec le théorème 1.103, pour une entrée U donnée, $(\mathcal{C}_X \not\phi \mathcal{C}_X)(t)$ est une matrice de $\Sigma^{q\times q}$ telle que

$$(\mathcal{C}_X \not\phi \mathcal{C}_X)_{ij}(t) = (\mathcal{C}_{x_i} \not\phi \mathcal{C}_{x_j})(t).$$

Donc en particulier, pour une entrée U donnée, d'après le théorème 4.21 l'élément (i,j) de la matrice suivante

$$\mathcal{C}_{(X\not\phi X)}(0) = \mathcal{C}_{(A^*BU\not\phi A^*BU)}(0)$$

est une borne du marquage de tous les chemins allant de la transition x_i à la transition x_j.

Par ailleurs, d'après le lemme 4.24, quel que soit U on a

$$X \oint X \succeq A^*B \oint A^*B.$$

Donc, puisque l'application $s \mapsto \mathcal{C}_s$ est isotone (c'est un isomorphisme de dioïde), on a également

$$\mathcal{C}_{(X \oint X)}(0) \succeq \mathcal{C}_{(A^*B \oint A^*B)}(0)$$

et, comme l'ordre de Σ est l'inverse de l'ordre classique, on vérifie que pour toute entrée U

$$\mathcal{C}_{(X \oint X)}(0) \leq \mathcal{C}_{(A^*B \oint A^*B)}(0).$$

Par conséquent, si $\mathcal{C}_{(A^*B \oint A^*B)}(0)$ est fini, alors le marquage de chaque place interne est borné pour toute entrée U, ou encore le GET décrit par le triplet (A, B, C) est stable.

Nécessité On rappelle tout d'abord que l'élément $(A^*B)_{kl}$ représente la trajectoire de tirs de la transition x_k lorsque l'on applique une impulsion sur l'entrée l (c.-à-d. $u_l = e$ et $\forall j \neq l,\ u_j = \varepsilon$), et par conséquent $\mathcal{C}_{(A^*B)_{kl}}$ représente le compteur associé à cette trajectoire de tir.

D'après le théorème 1.103, $(A^*B \oint A^*B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^{m} (A^*B)_{ik} \oint (A^*B)_{jk}$. Par conséquent, $\mathcal{C}_{(A^*B \oint A^*B)_{ij}}(0) = +\infty$ signifie qu'il existe i, j et k tels que $\mathcal{C}_{((A^*B)_{ik} \oint (A^*B)_{jk})}(0) = +\infty$. Cela signifie également qu'en appliquant en entrée $u_k = e$ et $\forall l \neq k, u_l = \varepsilon$, il existe deux transitions internes x_i et x_j telles que le chemin entre x_i et x_j n'est pas borné. Autrement dit, il existe une entrée particulière pour laquelle le GET n'est pas borné.

□

Nous allons déduire de la condition nécessaire et suffisante de stabilité (4.18) certaines conditions structurelles sur le GET pour que le graphe soit stable. Il suffit pour cela de connaître la structure de la matrice A^*B. On a le résultat suivant.

Proposition 4.25. *La condition (4.18) est vérifiée si et seulement si tous les éléments de la matrice $A^*B \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma, \delta]\!]^{q \times m}$ (rationnelle) sont non nuls et ont même pente asymptotique finie et non nulle.*

Preuve : Nous rappelons que les polynômes causaux sont des séries rationnelles à pente infinie.

suffisance si tous les éléments $(A^*B)_{ij}$ sont des séries rationnelles non nulles de même pente asymptotique finie $\sigma_\infty((A^*B)_{ij}) = \lambda \neq 0$, alors, d'après le théorème 1.103 et le théorème 2.39, la matrice $A^*B \oint A^*B$ est une matrice périodique dont tous les éléments sont également non nuls et ont la même pente asymptotique λ. En conséquence, $\mathcal{C}_{(A^*B \oint A^*B)_{ij}}(0) < +\infty$ pour tout couple (i, j).

nécessité Si deux éléments de A^*B sont tels que $\sigma_\infty((A^*B)_{ij}) > \sigma_\infty((A^*B)_{kj})$, alors d'après le théorème 2.39, $(A^*B)_{ij} \oint (A^*B)_{kj} = \varepsilon$ et donc $\mathcal{C}_{(A^*B \oint A^*B)_{ik}}(0) = +\infty$. La condition (4.18) est mise en défaut.

On laisse au lecteur le soin de compléter la preuve pour les cas dégénérés où tous les éléments de A^*B sont de pente identique infinie ou nulle. Il s'agit alors de GET instables qui ne présentent pas d'intérêt ici. Dans le premier cas, il s'agit des GET dont le transfert est polynomial, ce qui correspond à "une sorte de retard pur"; une infinité de jetons peut donc être présente dans le système à un moment donné. Le second cas correspond à des systèmes dont certains circuits sans jeton sont temporisés, il s'agit donc de GET non vivants.

□

L'interprétation de la proposition précédente nous donne des indications concernant la structure d'un GET stable. Un GET stable est tel que

1. depuis toute entrée u_i, il existe un chemin vers toute transition interne x_j (puisque la matrice A^*B est pleine).
2. ce chemin possède le taux de production λ du GET (puisque tous les éléments de A^*B ont même pente), c'est-à-dire : pour tout couple (u_i, x_j) il existe un chemin allant de la transistion u_i à la transition x_j dont une transition appartient à un circuit de taux de production λ.

De ces considérations structurelles on peut déduire les deux conditions suffisantes de stabilité suivantes.

Proposition 4.26 (CS de stabilité) *Un GET de taux de production λ est stable si*

CS1 son sous-graphe interne est fortement connexe

CS2 le graphe réduit de son sous-graphe interne possède un seul noeud source de taux de production λ.

Preuve :

CS1 si le sous-graphe interne est fortement connexe et de taux de production λ, alors la matrice A^*B n'est constituée que de séries périodiques de pente asymptotique λ.

CS2 on rappelle que le graphe réduit est une décomposition d'un graphe orienté en composantes fortement connexes notées C_{x_i} (cf. annexe A). Aussi, lorsqu'il s'agit d'un GET, chaque composante fortement connexe se caractérise par un taux de production qui lui est propre.

Si le graphe réduit du sous-graphe interne d'un GET possède un seul noeud source noté C_s de taux de production λ, alors sous réserve que le graphe soit commandable et observable, pour toute transition interne x_i, il existe depuis toute transition u_j un chemin dont une transition x_l appartient à la composante fortement connexe C_s.

□

Les conditions suffisantes données dans la proposition 4.26 suggèrent donc deux méthodes de stabilisation. La condition CS1 indique que les GET de taux de production (non nul) peuvent être stabilisés par feedback de sortie. La condition CS2 montre que la stabilité dépend de la façon dont les composantes fortement connexes d'un GET sont disposées. Pratiquement, si toutes les entrées sont connectées à la même composante fortement connexe, et que cette composante possède le taux de production le plus lent du système, alors le système est stable. Ceci indique que l'on peut donc également stabiliser un système par un précompensateur (un filtre) qui tiendra le rôle de cette composante d'entrée fortement connexe. Cette condition CS2 est équivalente à celle introduite dans [Commault, 1998].

4.2.3 Stabilisation de graphes d'événements temporisés

Nous traitons indépendamment le cas mono-entrée mono-sortie (ou SISO[12]) et le cas multi-entrées multi-sorties (ou MIMO[13]).

Nous rappelons que le problème de stabilisation des GET par feedback de sortie a déja été abordé dans [Cohen et al., 1984] et [Max Plus, 1991b]. Nous proposons ici quelques résultats particuliers sur la stabilisation des GET mono-entrée mono-sortie. L'idée de stabiliser un GET par l'ajout d'un précompensateur provient de [Commault, 1998].

Stabilisation de GET SISO

Stabilisation par précompensation

Proposition 4.27. *Soit un GET SISO instable, noté $\mathcal{H}$, de transfert $h \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ tel que $\sigma_\infty(h) = \lambda$ avec $\lambda \notin \{0, +\infty\}$. L'ajout d'un précompensateur (un GET) $\mathcal{P}$ de transfert $p \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ et tel que $\sigma_\infty(p) = \lambda$ stabilise le GET $\mathcal{H}$.*

Remarque 4.28 Il faut évidemment comprendre ici que l'on stabilise les places du GET $\mathcal{H}$, puisqu'en revanche la stabilité du précompensateur $\mathcal{P}$ nous importe peu. ◇

Preuve : Nous noterons X le vecteur d'état interne du GET $\mathcal{H}$. Sans précompensation, X s'écrit $X = A^*Bu$. Sous l'hypothèse de commandabilité structurelle, si $\mathcal{H}$ est instable, tous les éléments de A^*B sont non nuls mais n'ont pas la même pente asymptotique (d'après la proposition 4.25). On vérifie néanmoins pour tout i, $\sigma_\infty((A^*B)_i) \leq \lambda$. En ajoutant un précompensateur $\mathcal{P}$, de transfert $p \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$, entre la consigne d'entrée v et la commande u, l'état du système[14] $\mathcal{H}$ s'écrit $X = A^*Bpv$. Par conséquent, si $\sigma_\infty(p) = \lambda$, d'après le théorème 2.39, le vecteur A^*Bp est alors tel que $\sigma_\infty((A^*Bp)_i) = \lambda$ pour tout i. Les places internes du GET $\mathcal{H}$ sont alors stables. □

Corollaire 4.29. *Soit un GET SISO instable, noté $\mathcal{H}$, de transfert $h \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ tel que $\sigma_\infty(h) = \lambda$ avec $\lambda \notin \{0, +\infty\}$ et $p = \mathsf{Pr}_+(h \mathbin{\lozenge\!\!\backslash} h)$. Une réalisation notée $\mathcal{P}$ de p stabilise le GET $\mathcal{H}$ sans dégrader le transfert entrée-sortie du système.*

Preuve : Sous l'hypothèse $\sigma_\infty(h) = \lambda$, alors $\sigma_\infty(h \mathbin{\lozenge\!\!\backslash} h) = \lambda$ (cf. th. 2.39). En outre $p = \mathsf{Pr}_+(h \mathbin{\lozenge\!\!\backslash} h)$ est une série réalisable de pente asymptotique λ (cf. proposition 2.45). D'après la

[12] Single-Input Single-Output

[13] Multiple-Inputs Multiple-Outputs

[14] on rappelle que l'on ne considère pas les éventuels états internes ajoutés au système par le précompensateur $\mathcal{P}$.

proposition 4.27, une réalisation de p va donc stabiliser les places internes du GET $\mathcal{H}$ tout en conservant le même transfert entrée-sortie (cf. corollaire 3.3). □

Remarque 4.30 Il faut garder à l'esprit qu'un GET SISO ayant un taux de production infini n'est pas stabilisable sans dégrader le taux de production entrée-sortie. ⋄

Stabilisation par feedback de sortie Un GET SISO structurellement commandable et observable est stabilisable par feedback de sortie. Il suffit pour le stabiliser d'ajouter un arc entre la sortie et l'entrée avec une place contenant au moins un jeton (pour assurer la vivacité du système en boucle fermée).

Par ailleurs, il est clair que le circuit créé par l'ajout d'un arc entre la sortie et l'entrée du graphe ne peut que faire décroître le taux de production du système en boucle fermée par rapport à celui du système en boucle ouverte. Le problème généralement abordé dans la littérature est alors de trouver le nombre minimum de jetons à placer dans le feedback pour conserver le taux de production.

Dans le cas SISO, on obtient les résultats suivants : il existe un nombre minimum de jetons à placer dans le feedback

- pour conserver le transfert entrée-sortie
- pour conserver le taux de production

Proposition 4.31. *Soit un GET SISO instable, noté $\mathcal{H}$, de transfert $h \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ tel que $\sigma_\infty(h) = \lambda$ avec $\lambda \notin \{0, +\infty\}$ et $f = \mathsf{Pr}_+(h \lbackslash h \,\phi\, h)$. Une réalisation notée $\mathcal{F}$ de f, ajoutée en feedback de sortie sur l'entrée, stabilise le GET $\mathcal{H}$ sans dégrader le transfert entrée-sortie du système.*

Preuve : si λ est fini, en accord avec le théorème 2.39, alors $f = \mathsf{Pr}_+(h \lbackslash h \,\phi\, h)$ est non nul et par conséquent stabilise le *GET*. De plus, le corollaire 3.13 nous indique qu'il s'agit du plus grand feedback réalisable conservant le transfert du système. □

Corollaire 4.32. *Le nombre minimum n_h de jetons à placer dans le feedback de sortie pour conserver le transfert d'un GET de transfert $h \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ (sous l'hypothèse que $\sigma_\infty(h)$ est finie et non nulle) est donné par la relation*

$$n_h = val_\gamma(\mathsf{Pr}_+(h \lbackslash h \,\phi\, h)).$$

Preuve : On rappelle que $f = \mathsf{Pr}_+(h \lbackslash h \,\phi\, h)$ est le plus grand feedback réalisable conservant le transfert. Par conséquent, pour tout feedback réalisable de transfert f' tel que $\varepsilon \preceq f' \preceq f$, en raison de l'isotonie de l'application M_h on vérifie $\mathsf{M}_h(\varepsilon) = h \preceq \mathsf{M}_h(f') \preceq \mathsf{M}_h(f) = h$, c.-à-d. tout feedback réalisable de transfert inférieur à f conserve également le transfert du système. Par conséquent, trouver le nombre minimum de jetons à placer dans le feedback de sortie pour conserver le transfert du GET revient à trouver l'expression du plus grand feedback de la forme γ^n, avec $n \in \mathbb{N}$, tel que $\gamma^n \preceq \mathsf{Pr}_+(h \lbackslash h \,\phi\, h)$. Le transfert h est ici supposé de pente asymptotique finie et non nulle, par conséquent, $f = \mathsf{Pr}_+(h \lbackslash h \,\phi\, h)$ est un élément causal et non nul. On peut donc écrire $f = \bigoplus_{i\in I} \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ où $\forall i \in I, (n_i, t_i) \geq (0,0)$. Sous cette forme, la valuation en γ de f est donnée par $val_\gamma(f) = \underset{i\in I}{\mathrm{Min}}\{n_i\}$ (cf. exemple 1.85). Par conséquent, en posant $n_h = val_\gamma(\mathsf{Pr}_+(h \lcirclearrowleft h \rcirclearrowleft h))$, on a d'une part $\gamma^{n_h} \preceq f$ - c.-à-d. le feedback γ^{n_h} conserve le transfert - et, par définition de la valuation en γ, n_h est le plus petit entier vérifiant cette propriété. □

Enfin, dans le cas SISO, on peut obtenir une expression du plus grand feedback réalisable conservant le taux de production initial du système.

Proposition 4.33. *Soit un GET SISO instable, noté $\mathcal{H}$, de transfert $h \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ tel que $\sigma_\infty(h) = \lambda$ avec $\lambda \notin \{0, +\infty\}$. Alors il existe un plus grand feedback de sortie réalisable f_λ tel que $\sigma_\infty(\mathsf{M}_h(f_\lambda)) = \sigma_\infty(h)$. L'expression de ce feedback est*

$$f_\lambda = \mathsf{Pr}_+(h \lcirclearrowleft (hL_{1/\lambda}) \rcirclearrowleft h),$$

avec

$$L_{1/\lambda} = \bigotimes_{n_i/t_i \geq \lambda} (\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* = \left(\bigoplus_{n_i=0}^{N} \gamma^{n_i}\delta^{\lfloor \frac{n_i}{\lambda} \rfloor}\right)^* . \tag{4.19}$$

Ce résultat se montre en deux étapes. Il faut tout d'abord obtenir une propriété des étoiles de séries rationnelles.

Proposition 4.34. *Soit $\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} : \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!] \to \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!], x \mapsto x^*$ l'application étoile de Kleene définie sur l'ensemble des séries rationnelles. Soit la relation d'équivalence $\equiv_\sigma$ définie sur $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]$ de la manière suivante*

$$a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!], \quad a \equiv_\sigma b \iff \sigma_\infty(a) = \sigma_\infty(b).$$

Soit enfin $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}_{/\equiv_\sigma}$ l'ensemble $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$ quotienté par la relation d'équivalence $\equiv_\sigma$.

Chaque classe d'équivalence de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}_{/\equiv_\sigma}$ possède un plus grand élément. La classe de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}_{/\equiv_\sigma}$ dont les éléments ont la pente asymptotique $\lambda \in \mathbb{Q}$, possède l'élément $L_{1/\lambda}$ comme plus grand élément

$$L_{1/\lambda} = \bigotimes_{n_i/t_i \geq \lambda} (\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*.$$

De manière pratique, celà signifie simplement que pour un taux de production rationnel donné λ, il existe une plus grande "étoile" rationnelle (dans $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$) ayant λ comme pente asymptotique.

Preuve : Soit $\lambda = \frac{N}{T}$ où $\frac{N}{T}$ est une fraction irréductible (N et T sont premiers entre eux). On vérifie pour $K \geq 1$, $(\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* = (\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*(\gamma^{Kn_i}\delta^{Kt_i})^*$. Par conséquent, l'élément $L_{1/\lambda}$ peut s'écrire également

$$L_{1/\lambda} = \bigotimes_{n_i/t_i \geq \lambda} (\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^* = \bigotimes_{\substack{(n_i,t_i) \leq (N,T) \\ n_i/t_i \geq \lambda}} (\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*.$$

De plus, pour $t_j \leq t_i$, pour n fixé on a

$$(\gamma^n\delta^{t_i})^*(\gamma^n\delta^{t_j})^* = (\gamma^n\delta^{t_i} \oplus \gamma^n\delta^{t_j})^* = (\gamma^n\delta^{\max(t_i,t_j)})^* = (\gamma^n\delta^{t_i})^*.$$

Donc, pour n fixé

$$\bigotimes_{n/t_i \geq \lambda} (\gamma^n \delta^{t_i})^* = (\gamma^n \delta^{\lfloor \frac{n}{\lambda} \rfloor})^*$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

L'élément $L_{1/\lambda}$ peut donc s'écrire finalement plus simplement de la manière suivante (en accord avec la relation (1.33))

$$L_{1/\lambda} = \bigotimes_{n_i/t_i \geq \lambda} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i})^* = \bigotimes_{n_i=0}^{N} \left(\gamma^{n_i} \delta^{\lfloor \frac{n_i}{\lambda} \rfloor}\right)^* = \left(\bigoplus_{n_i=0}^{N} \gamma^{n_i} \delta^{\lfloor \frac{n_i}{\lambda} \rfloor}\right)^* . \tag{4.20}$$

Très clairement, l'expression (4.20) est rationnelle et appartient également à $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$ (c'est l'étoile d'un polynôme). De plus, d'après le théorème 2.39, l'élément $L_{1/\lambda}$ est de pente asymptotique égale à λ. Donc $L_{1/\lambda}$ est un élément de la classe d'équivalence de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}_{/\equiv_\sigma}$ dont les représentants ont λ comme pente asymptotique. Il reste à montrer qu'il s'agit du plus grand élément de la classe.

Tout élément $s^* \in \mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$ s'écrit $s^* = (p \oplus qr^*)^* = p^* \oplus qp^*q^*r^*$. On a d'après le théorème 2.39, $\sigma_\infty(s^*) = \min(\sigma_\infty(p^*), \sigma_\infty(qp^*q^*r^*))$, ou encore,

$$\sigma_\infty(s^*) = \min(\sigma_\infty(p^*), \sigma_\infty(q^*), \sigma_\infty(r^*)) \;\; (\text{rappel } \sigma_\infty(q) = +\infty).$$

De plus, avec les notations utilisées dans l'annexe B, $p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$, $q = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{N_j} \delta^{T_j}$ et $r = \gamma^\nu \delta^\tau$, on a donc

$$p^* = \bigotimes_{i=0}^{\alpha} (\gamma^{n_i} \delta^{t_i})^* \text{ et } q^* = \bigotimes_{j=0}^{\beta} (\gamma^{N_j} \delta^{T_j})^*.$$

Par conséquent, toujours en accord avec le théorème 2.39, $\sigma_\infty(p^*) = \operatorname{Min}_{0 \leq i \leq \alpha} (n_i/t_i)$ et $\sigma_\infty(q^*) = \operatorname{Min}_{0 \leq j \leq \beta} (N_j/T_j)$. On montre ainsi que $\sigma_\infty(s^*) = \lambda$ seulement si pour tout i et tout j on vérifie $n_i/t_i \geq \lambda$, $N_j/T_j \geq \lambda$ et $\nu/\tau \geq \lambda$.

Sous cette condition et d'après l'expression de $L_{1/\lambda}$ donnée en (4.19), il est clair que $p^* \preceq L_{1/\lambda}$, $q \preceq L_{1/\lambda}$, $q^* \preceq L_{1/\lambda}$ et $r^* \preceq L_{1/\lambda}$, c'est-à-dire (isotonie de $\oplus$ et $\otimes$) $p^* \oplus qp^*q^*r^* \preceq L_{1/\lambda}$ (il faut se rappeler que $L_{1/\lambda}$ est une étoile c.-à-d. $L_{1/\lambda} = L_{1/\lambda} \otimes L_{1/\lambda}$).

Si $\sigma_\infty(s^*) = \lambda$ alors $s^* \preceq L_{1/\lambda}$, autrement dit, tout élément de la classe de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}_{/\equiv_\sigma}$ de pente λ est inférieur à $L_{1/\lambda}$. □

Remarque 4.35 La représentation graphique de l'élément $L_{1/\lambda}$ s'obtient facilement. Dans le plan $\mathbb{Z}^2$, $L_{1/\lambda}$ est simplement l'approximation (par en dessous) de la droite de pente λ (passant par l'origine) par des points du plan $\mathbb{N}^2$. A titre d'exemple, on a dessiné figure 4.14 $L_{3/2} = (e \oplus \gamma\delta)(\gamma^2\delta^3)^*$. Cet élément particulier de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est vu comme jouant le même rôle que les fonctions sinusoïdales dans la théorie linéaire classique dans [Cohen et al., 1989a]. ◇

On peut maintenant prouver le résultat de la proposition 4.33.

Preuve prop. 4.33: Soit h et f des transferts réalisables. D'après le théorème 2.39, $\sigma_\infty(h(fh)^*) = \min(\sigma_\infty(h), \sigma_\infty(fh)^*)$. Donc $\sigma_\infty(h(fh)^*) = \sigma_\infty(h)$ seulement si $\sigma_\infty((fh)^*) \geq \sigma_\infty(h)$. Par ailleurs, puisque $(fh)^* = e \oplus fh \oplus (fh)^2 \ldots$, si $f \neq \varepsilon$ alors $\sigma_\infty((fh)^*) = \min(\sigma_\infty(f), \sigma_\infty(h))) \leq \sigma_\infty(h)$.

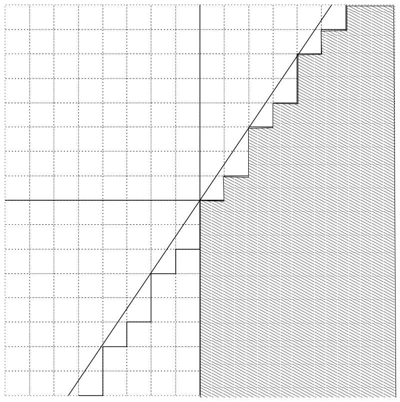


Figure 4.14 : Représentation graphique de $L_{3/2}$

Autrement dit, un GET, rendu fortement connexe par un feedback de sortie, conserve son taux de production uniquement si l'égalité suivante est vérifiée

$$\sigma_\infty((fh)^*) = \sigma_\infty(h) = \lambda.$$

On remarque d'ailleurs qu'il existe au moins $f = \mathsf{Pr}_+(h \backslash h \not/ h)$ vérifiant cette égalité.

Par ailleurs, d'après la proposition 4.34, si $\sigma_\infty((fh)^*) = \lambda$ alors $(fh)^* \preceq L_{1/\lambda}$ puisque $(fh)^*$ et $L_{1/\lambda}$ appartiennent alors à la même classe de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}_{/\equiv_\sigma}$. Par isotonie du produit, pour tout feedback f vérifiant $\sigma_\infty((fh)^*) = \lambda$ on a également

$$h(fh)^* \preceq hL_{1/\lambda}.$$

Pratiquement, l'élément $g = h \otimes L_{1/\lambda}$ majore donc tous les transferts "possibles" du système en boucle fermée ayant λ comme taux de production. Or, puisque $L_{1/\lambda} \in \mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$, $g = h \otimes L_{1/\lambda} \in \mathcal{G}_2$ (cf. proposition 3.10 et proposition 3.15) c'est-à-dire qu'il existe un plus grand f tel que $\mathsf{M}_h(f) \preceq g$.

D'après la proposition 3.15, $f_\lambda = \mathsf{Pr}_+(h \backslash (hL_{1/\lambda}) \not/ h)$ est donc le plus grand feedback réalisable tel que $\sigma_\infty(M_h(f)) = \lambda$. □

Corollaire 4.36. *Soit un GET de transfert $h \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ de taux de production fini et non nul $\sigma_\infty(h)$. Le nombre minimum n_λ de jetons à placer dans le feedback de sortie pour conserver le taux de production du système en boucle ouverte est donné par la relation*

$$n_\lambda = val_\gamma \left(\mathsf{Pr}_+(h \backslash (hL_{1/\lambda}) \not/ h)\right).$$

Preuve : preuve analogue à celle du corollaire 4.32. □

Exemple 4.37 (Stabilisation par feedback de sortie) Nous ne traitons pas d'exemple pour la stabilisation par précompensateur. Nous comparons simplement, sur un exemple, le plus grand feedback conservant le transfert et le plus grand feedback conservant seulement le taux de production. Considérons le GET de la figure 4.15 dessiné en trait foncé. La place située

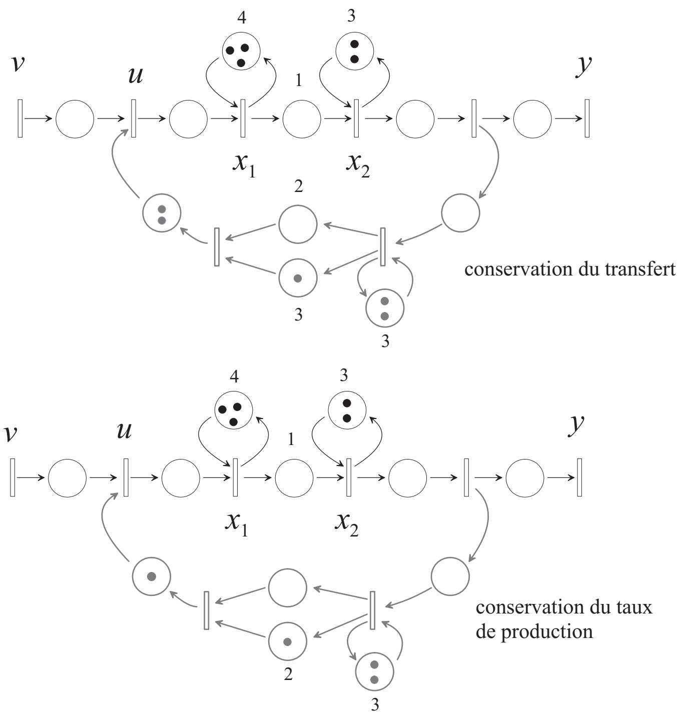


Figure 4.15 : Stabilisation d'un GET SISO

entre les transitions x_1 et x_2 n'est pas bornée pour une entrée impulsionnelle. Le GET sans feedback n'est donc pas stable.

Le transfert du GET en boucle ouverte est $h = \delta \oplus (\gamma^2\delta^4 \oplus \gamma^3\delta^5)(\gamma^2\delta^3)^*$. Par conséquent, le plus grand feedback réalisable conservant le transfert est ici $f = \mathsf{Pr}_+(h \mathring{\backslash} h \mathring{/} h)$. On laisse au lecteur le soin de vérifier que $h \mathring{\backslash} h \mathring{/} h = \delta^{-1} \oplus (\gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3)(\gamma^2\delta^3)^*$, soit $f = (\gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3)(\gamma^2\delta^3)^*$. Par conséquent, le nombre minimum de jetons à placer dans le feedback pour conserver le transfert du système en boucle ouverte est ici $n_h = val_\gamma(\mathsf{Pr}_+(h \mathring{\backslash} h \mathring{/} h)) = 2$.

Par ailleurs, le plus grand feedback conservant le taux de production du système en boucle ouverte est donné par $f_\lambda = \mathsf{Pr}_+(h \mathring{\backslash} (hL_{1/\lambda}) \mathring{/} h) = \mathsf{Pr}_+(h \mathring{\backslash} (hL_{3/2}) \mathring{/} h)$. On laisse au lecteur vérifier que $h \mathring{\backslash} (hL_{3/2}) \mathring{/} h = (\delta^{-1} \oplus \gamma)(\gamma^2\delta^3)^*$ soit $f_\lambda = (\gamma \oplus \gamma^2\delta^2)(\gamma^2\delta^3)^*$. Le nombre minimum de jetons à placer dans le feedback pour conserver le taux de production du système en boucle ouverte est donc ici $n_\lambda = 1$. ◇

Remarque 4.38 On remarquera qu'il faut, fort logiquement, placer plus de jetons dans le feedback pour conserver le transfert qu'il n'en faut pour conserver seulement le taux de production. ◇

Stabilisation de GET MIMO

De manière générale, il faut avoir à l'esprit que l'on ne peut pas toujours stabiliser un GET MIMO tout en conservant son transfert. Notamment, si l'on se réfère à l'exemple d'atelier d'assemblage présenté en introduction du chapitre 3, il doit être clair qu'on ne peut pas stabiliser le GET de la figure 3.2 sans dégrader au moins le transfert de la branche la plus rapide du graphe (cf. remarque 3.16). Les résultats présentés dans le cas SISO ne se généralisent donc pas au cas MIMO.

En revanche, le calcul d'un précompensateur ou d'un feedback stabilisant peut résulter du choix de modèles de référence particuliers. Le lecteur pourra en effet remarquer que le précompensateur donné figure 3.4 ainsi que le feedback de sortie donné figure 3.8 stabilisent tous deux le même GET. Ces deux correcteurs ont été synthétisés à partir du même modèle de référence qui vérifie les conditions de la proposition suivante.

Proposition 4.39. *Soit* $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times m}$ *le transfert d'un GET instable noté* $\mathcal{H}$*. On note* $\sigma(H) = \underset{i,j}{Min}(\sigma_\infty(H_{ij}))$*. Alors, en choisissant* $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{p\times m}$ *une matrice telle que* $\forall i = 1,\dots,p, j = 1,\dots,m, \sigma_\infty((G_{ref})_{ij}) = \sigma(H)$ *on a nécessairement les propriétés suivantes*

- *une réalisation, notée* $\mathcal{P}$*, de* $P = \mathsf{Pr}_+(H \circ\!\!\!\!\backslash G_{ref})$*, placée en précompensation de* $\mathcal{H}$*, stabilise le GET* $\mathcal{H}$
- *une réalisation, notée* $\mathcal{F}$*, de* $F = \mathsf{Pr}_+(H \circ\!\!\!\!\backslash G_{ref} \circ\!\!\!/ H)$*, placée en feedback de sortie sur* $\mathcal{H}$*, stabilise le GET* $\mathcal{H}$

Preuve : Sous l'hypothèse que le GET $\mathcal{H}$ est structurellement commandable et observable, chaque entrée u_i est reliée au moins à une sortie y_j. Toute ligne et toute colonne de H contient alors au moins un élément rationnel non nul de pente asymptotique supérieure ou égale à $\sigma(H)$. On vérifie alors, selon l'expression de la résiduée du produit matriciel donnée par le théorème 1.103, que $H \circ\!\!\!\!\backslash G_{ref}$ est une matrice pleine dont tous les éléments sont des éléments périodiques (non nécessairement causaux) de pente asymptotique identique égale à $\sigma(H)$. De même $H \circ\!\!\!\!\backslash G_{ref} \circ\!\!\!/ H$ est une matrice pleine dont les éléments sont périodiques de pente asymptotique $\sigma(H)$.

Par conséquent, d'après la proposition 2.45, $P = \mathsf{Pr}_+(H \circ\!\!\!\!\backslash G_{ref})$ et $F = \mathsf{Pr}_+(H \circ\!\!\!\!\backslash G_{ref} \circ\!\!\!/ H)$ sont deux matrices rationnelles pleines dont les éléments ont tous la même pente asymptotique égale à $\sigma(H)$.

Grâce au précompensateur $\mathcal{P}$, toutes les entrées de commande u_i dépendent de toutes les entrées v_i avec le même taux de production. A fortiori, puisque $\mathcal{H}$ est structurellement commandable, tous ses états internes x_l dépendent également de toutes les entrées v_i avec le même taux de production. D'après la proposition 4.26, le GET est donc stabilisé.

De même, si F est une matrice pleine, cela signifie simplement qu'aucun arc nul n'existe entre toute sortie et toute entrée. Le GET bouclé par F est donc rendu fortement connexe et donc stable. (cf. CS1 de la proposition 4.26). □

La proposition 4.39 peut être vue comme une condition suffisante sur le choix d'un modèle de référence pour que le correcteur optimal, calculé pour ce modèle de référence, stabilise le GET nominal.

Stabilisation et minimisation de ressources Même s'il n'est pas toujours possible de stabiliser un GET en préservant son transfert d'origine, il est naturel néanmoins de se demander s'il existe un feedback optimal permettant à la fois de stabiliser et de préserver le taux de production du système original.

La proposition 4.39 nous indique qu'il existe toujours un feedback stabilisant et conservant le taux de production du système en boucle ouverte. Par exemple, pour un système structurellement commandable et observable de transfert H tel que $\sigma(H) = \lambda$, en prenant comme modèle de référence le transfert suivant

$$G_{ref} = H \otimes \begin{pmatrix} L_{1/\lambda} & \cdots & L_{1/\lambda} \\ \vdots & & \vdots \\ L_{1/\lambda} & \cdots & L_{1/\lambda} \end{pmatrix}$$

on vérifie facilement que G_{ref} est une matrice pleine vérifiant la proposition 4.39 et appartenant à l'ensemble $\mathcal{G}_2$ décrit par la proposition 3.10. Cela signifie qu'il existe donc un plus grand feedback F tel que $\mathsf{M}_H(F) \preceq G_{ref}$, et en outre ce feedback stabilise et conserve le taux de production de H. En raisonnant directement sur le graphe, il est également clair que si l'on place suffisamment de jetons dans les arcs du feedback, le temps de cycle du système bouclé devient nécessairement le temps de cycle du circuit critique du système en boucle ouverte.

Si l'existence d'un feedback stabilisant et conservant le taux de production du système nominal est garantie, en revanche, l'optimalité du feedback (considéré comme élément d'un dioïde matriciel) ne l'est pas. En effet, le résultat de la proposition 4.33 repose sur une particularité des éléments de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$: pour un taux de production donné λ, il existe une plus grande "étoile" rationnelle de taux λ.

Cette propriété n'est plus vraie dans le cas matriciel. Soit $\mathcal{K}^{\mathsf{rat}} : \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma, \delta]\!]^{2\times 2} \to \mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma, \delta]\!]^{2\times 2}$ et la relation d'équivalence sur $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$

$$A^* \equiv_\sigma B^* \iff \sigma(A^*) = \sigma(B^*).$$

Considérons les matrices A^* et B^* suivantes

$$A^* = \begin{pmatrix} (\gamma\delta)^* & \delta(\gamma\delta)^* \\ \gamma(\gamma\delta)^* & (\gamma\delta)^* \end{pmatrix} \text{ et } B^* = (A^*)^t.$$

On vérifie que ce sont des éléments de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$ en remarquant qu'elles sont invariantes par l'application $\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$. On a clairement ici $\sigma(A^*) = \sigma(B^*) = 1$.

On sait d'après la proposition 1.68, que l'ensemble $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$ a une structure de treillis. La matrice $A^* \overset{\mathcal{K}}{\tilde{\oplus}} B^* = (A^* \oplus B^*)^*$ est la plus petite matrice de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$ plus grande que A^* et B^*. On obtient ici

$$A^* \overset{\mathcal{K}}{\tilde{\oplus}} B^* = \begin{pmatrix} \delta^* & \delta^* \\ \delta^* & \delta^* \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire, la plus petite étoile plus grande que A^* et B^* n'a plus alors la même pente, ce qui signifie qu'elle n'appartient pas à la même classe d'équivalence de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}_{/\equiv_\sigma}$.

Autrement dit, si l'on quotiente l'ensemble des matrices de taille 2×2 de $\mathsf{Im}\mathcal{K}^{\mathsf{rat}}$ par la relation d'équivalence $\equiv_\sigma$, une classe n'admet pas nécessairement de plus grand élément. On ne peut par conséquent pas espérer majorer l'ensemble $\{\mathsf{M}_H(F) | \sigma(\mathsf{M}_H(F)) = \sigma(H)\}$ comme nous l'avons fait dans la preuve de la proposition 4.33.

Ceci revient à dire qu'il peut exister plusieurs feedbacks F non comparables (au sens du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax\,\mathsf{rat}}[\![\gamma,\delta]\!]^{m\times p}$) tels que $\sigma(\mathsf{M}_H(F)) = \sigma(H)$. Le problème de minimisation du nombre de jetons à placer dans le feedback, de manière à préserver le taux de production du système nominal, ne peut donc pas être une minimisation "composante par composante".

Solution alternative Rappelons néanmoins que d'autres techniques ont été étudiées dans la littérature. On peut, par exemple, décrire le feedback de sortie d'un système MIMO de taille $m \times p$ comme une matrice $F \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]^{m\times p}$ telle que $F_{ij} = \gamma^{q_{ij}}$, où q_{ij} représente le nombre de jetons de la place située entre la sortie j et l'entrée i. Gaubert montre dans [Gaubert, 1995b] que le problème d'optimisation des ressources q_{ij} peut se poser comme un problème de programmation linéaire en nombres entiers où le critère à optimiser peut être un critère linéaire de la forme

$$J(q) = \sum_{i=0,j=0}^{i=m,j=p} \alpha_{ij} q_{ij}$$

où α_{ij} est une pondération associée au nombre q_{ij} de ressources allouées à l'arc reliant la sortie j à l'entrée i.

On peut de cette manière calculer, pour un GET MIMO de taille $m \times p$, le feedback

$$F_{\min(J(q))} = \begin{pmatrix} \gamma^{q_{00}} & \dots & \gamma^{q_{0p}} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma^{q_{m0}} & \dots & \gamma^{q_{mp}} \end{pmatrix}$$

minimisant, par exemple, $J(q) = \sum\limits_{i=0,j=0}^{i=m,j=p} q_{ij}$ (la somme des jetons du feedback) et tel que $\sigma(\mathsf{M}_H(F_{\min(J(q))})) = \sigma(H)$.

Cette approche offre un feedback que l'on peut qualifier de statique, c'est-à-dire donnant uniquement le marquage initial des arcs du feedback . Par conséquent, on peut donner un raffinement de ce feedback $F_{\min(J(q))}$ en notant qu'il existe d'après la proposition 3.12, un plus grand feedback noté $\hat{F}_{\min(J(q))}$, tel que $\mathsf{M}_H(\hat{F}_{\min(J(q))}) = \mathsf{M}_H(F_{\min(J(q))})$. Le feedback $\hat{F}_{\min(J(q))}$ minimise de la même manière le critère $J(q)$, garantit le même taux de production au système bouclé que le feedback $F_{\min(J(q))}$ tout en déclenchant plus tardivement les tirs des transitions d'entrée.

Exemple 4.40 Pour illustrer ce dernier point, nous prenons un exemple de GET MIMO 2 entrées 2 sorties décrit figure 4.16 en trait plein. Le problème de minimisation du nombre de jetons à placer dans le feedback de manière à conserver le taux de production du système se ramène à une énumération des taux de production des circuits du GET après bouclage par le feedback[15]. Soit le feedback

$$F_q = \begin{pmatrix} \gamma^{q_{11}} & \gamma^{q_{12}} \\ \gamma^{q_{21}} & \gamma^{q_{22}} \end{pmatrix}.$$

Pour cet exemple simple, après énumération des circuits, on obtient le taux de production du GET par l'expression suivante

$$\lambda = \min(1, \frac{q_{11}}{2}, \frac{q_{21}}{3}, \frac{q_{12}}{3}, \frac{q_{22}}{2}, \frac{q_{11}+q_{22}}{6}, \frac{q_{12}+q_{21}}{4}).$$

[15]dans [Gaubert, 1995b] il est proposé un raffinement évitant cette énumération exhaustive.

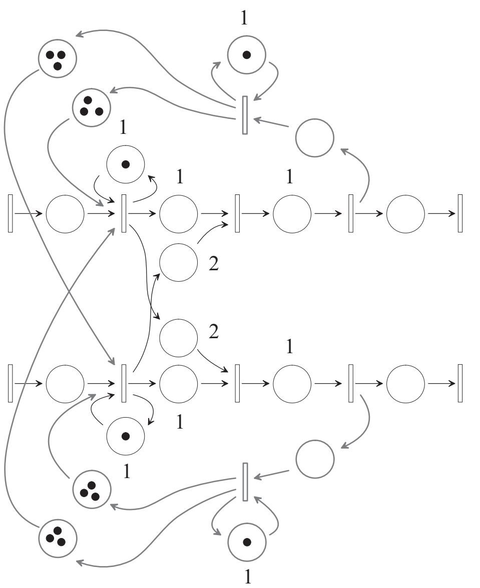


Figure 4.16 : Stabilisation d'un GET MIMO

Si l'on cherche à minimiser le critère

$$J(q) = q_{11} + q_{12} + q_{21} + q_{22} \quad \text{(somme des jetons du feedback)}$$

pour la contrainte $\lambda \geq 1$, les trois solutions $q_a = (2,3,3,4)$, $q_b = (3,3,3,3)$ et $q_c = (4,3,3,2)$ minimisent ce critère[16]. En prenant,

$$F_{q_b} = \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix},$$

on sait d'après la proposition 3.12 qu'il existe un plus grand feedback $\hat{F}_{q_b}$ tel que $\mathsf{M}_H(F_{q_b}) = \mathsf{M}_H(\hat{F}_{q_b})$. Le feedback $\hat{F}_{q_b}$ s'obtient simplement par l'expression

$$\hat{F}_{q_b} = \mathsf{Pr}_+(H \backslash\!\!\!\circ\, \mathsf{M}_H(F_{q_b}) \,/\!\!\!\circ\, H) = \mathsf{Pr}_+(H \backslash\!\!\!\circ\, (HF_{q_b})^* H \,/\!\!\!\circ\, H).$$

Pour cet exemple, le raffinement du feedback F_{q_b} est

$$\hat{F}_{q_b} = \begin{pmatrix} \gamma^3(\gamma\delta)^* & \gamma^3(\gamma\delta)^* \\ \gamma^3(\gamma\delta)^* & \gamma^3(\gamma\delta)^* \end{pmatrix}.$$

Nous avons décrit une réalisation de ce feedback en grisé sur la figure 4.16.

$\diamond$

4.2.4 Conclusion

Nous avons abordé dans cette dernière partie, l'application de structures de commandes étudiées dans le chapitre 3 au problème de stabilisation des GET. De manière générale, il apparaît

[16] Comme nous l'avons précisé auparavant, on remarque que les feedbacks F_{q_a}, F_{q_b} et F_{q_c}, minimisant le critère $J(q)$, ne sont pas comparables au sens de l'ordre du dioïde.

que l'accumulation de jetons dans un GET peut être évitée par l'ajout de correcteurs de type précompensateur ou feedback de sortie.

En particulier, nous avons montré que le problème de stabilisation d'un GET SISO par feedback, sous la contrainte de conserver son taux de production initial, se déduit du choix d'un modèle de référence particulier. On montre ainsi qu'en utilisant la résiduée du produit de séries périodiques, on peut obtenir le nombre minimum de jetons à placer dans le feedback de sortie d'un GET SISO pour conserver son transfert. Ce problème de minimisation de ressources est habituellement résolu par énumération de circuits.

En revanche, le cas MIMO ne peut pas être résolu par une méthode analogue. En effet, il n'existe pas nécessairement un feedback optimal (au sens du dioïde matriciel) conservant le taux de production du système en boucle ouverte. Une alternative consiste alors

- soit à choisir un modèle de référence conduisant nécessairement à un feedback stabilisant : nous donnons une condition suffisante sur G_{ref} pour que le correcteur calculé pour la spécification G_{ref} permette de stabiliser le système nominal.
- soit à résoudre le problème de minimisation de ressources lié au calcul du nombre de jetons à placer dans le feedback, ce qui donne un feedback qualifié de statique, puis à raffiner cette solution en y apportant une dynamique.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Contributions Nous avons abordé dans ce mémoire un problème de commande de GET généralement appelé "poursuite de modèle". Le problème consiste, à partir d'un GET (nominal) et d'une spécification entrée-sortie donnée (modèle de référence), à calculer un correcteur (un GET) tel que le système nominal muni du correcteur ait un comportement entrée-sortie aussi proche que possible de celui du modèle de référence. Plusieurs structures de correction sont proposées : précompensation, feedback de sortie, feedback de l'état sur l'entrée et feedback de la sortie sur l'état. De telles structures de commande présentent un intérêt notamment dans le domaine de la gestion de production où le rôle des correcteurs synthétisés consiste à améliorer la gestion des flux d'entrée d'un système de production, dans l'objectif par exemple de diminuer les en-cours du système.

L'originalité de cette étude porte essentiellement sur le problème de synthèse de feedbacks qui n'a, à notre connaissance, pas été traité sous cette forme auparavant. Les résultats reposent sur le fait que, bien que l'application étoile de Kleene, notée $\mathcal{K}$, ne soit pas résiduable, en revanche sa restriction à l'image, notée ${}_{\mathsf{Im}\mathcal{K}|}\mathcal{K}$, l'est. L'application $\mathcal{K}$ peut donc être qualifiée d'application "partiellement" résiduable. De la même manière, l'application $\mathsf{M}_H : X \mapsto H(XH)^*$ qui détermine le transfert du système nominal H muni d'un feedback X, peut être vue comme une application partiellement résiduable. Cela revient simplement à dire que l'inéquation $\mathsf{M}_H(X) \preceq G_{ref}$ admet une solution optimale en X uniquement pour certains seconds membres G_{ref}.

Deux types d'applications du problème de synthèse de correcteurs ont ensuite été donnés.

Dans un premier temps, l'objectif a été d'apporter des modifications à certains systèmes de gestion à flux tirés dont on connaît un modèle de type GET. La modification porte en fait essentiellement sur la gestion des ordres de production qui, pour certains systèmes comme le Kanban ou le Kanban Généralisé, se caractérise par un ou plusieurs feedbacks dans le système. On montre notamment que la politique de gestion d'un système Kanban mono-produit peut être modifiée de manière à diminuer les en-cours du système tout en conservant la même qualité de service. La modification ainsi calculée correspond à l'ajout d'une dynamique (max,+) sur le recyclage des Kanbans. En outre, cette politique de gestion, que l'on a appelé Kanban Dynamique, a été évaluée par simulation dans un environnement stochastique (annexe C). Au vu des résultats de simulation, il semble que le Kanban Dynamique conserve un intérêt y compris lorsque le système piloté possède des temporisations aléatoires.

Dans un second temps, la synthèse de correcteur a été effectuée dans l'objectif de stabiliser un GET. Nous avons traité indépendamment le cas SISO et le cas MIMO. Nous avons montré qu'il est toujours possible de stabiliser un GET par l'ajout d'un précompensateur ou d'un feedback de sortie. Le problème de stabilisation peut en fait se ramener au choix de modèles de référence particuliers. Par ailleurs, le problème de stabilisation est aussi fréquemment relié au problème de minimisation de ressources (jetons) à placer dans un feedback de sortie pour conserver le taux de production d'un système. Pour ce problème, on a montré que pour les GET SISO il est possible de calculer un feedback réalisable optimal conservant le taux de production du système nominal. Mais le cas MIMO n'offre pas de résultat analogue; le problème de minimisation de ressources doit alors être traité par des techniques différentes (programmation linéaire, énumération des circuits d'un graphe).

Perspectives Les différentes structures de correction proposées dans le chapitre 3 n'ont pas fait l'objet de comparaisons qualitatives. On peut notamment se demander si les correcteurs proposés "réagissent" de la même manière en cas de dérive des paramètres du système commandé. Intuitivement, on remarquera par exemple qu'en cas de défaillance d'un système, ce qui peut être vu comme un changement brutal de modèle, la correction par feedback maintient la stabilité du système, ce qui ne sera pas nécessairement le cas avec un précompensateur. Des travaux supplémentaires doivent donc être menés pour aborder ces problèmes de robustesse.

De même, l'intérêt des modifications de systèmes à flux tirés proposées dans le chapitre 4 n'est assuré que pour des systèmes déterministes. Or, les systèmes de production ne peuvent que très rarement être fidèlement représentés par des modèles déterministes. Nous avons par conséquent proposé dans l'annexe C un premier pas vers l'évaluation du Kanban Dynamique (calculé au chapitre 4) dans un environnement stochastique. Des résultats théoriques supplémentaires seraient nécessaires à la validation de ce système de gestion dans un environnement stochastique.

Enfin, un travail intéressant consisterait à faire le lien de nos travaux sur la synthèse de correcteurs avec les travaux du laboratoire sur l'identification donnés dans [Gallot et al., 1997] et [Menguy, 1997] dans l'objectif de pouvoir faire une synthèse de correcteur en ligne. Cette commande adaptative indirecte aurait pour objectif d'allouer dynamiquement les ressources des feedbacks afin de préserver les performances voulues malgré les variations des paramètres du système. De même, un lien avec les travaux sur les GET non stationnaires [Lahaye et al., 1999a], [Lahaye et al., 1999b] est envisageable, et notamment une étude sur la synthèse de feedbacks non stationnaires est à envisager.

Annexes

Annexe A

Notions sur la théorie des graphes

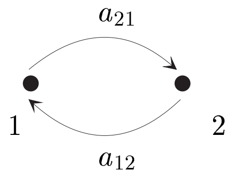
Nous rappelons ici quelques définitions issues de la théorie des graphes. Nous donnons également l'interprétation, en termes de chemins d'un graphe, des puissances de matrices carrées calculées dans les algèbres (max,+) et (min,+). Un livre de référence pour les rappels effectués ici est [Gondran and Minoux, 1985].

A.1 Définitions générales

Graphe orienté Un *graphe orienté* est un couple $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$ où $\mathcal{V}$ est un ensemble de sommets et $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ est un ensemble d'arcs orientés.

Graphe valué Un graphe orienté pour lequel tout arc $(j, i) \in \mathcal{E}$ est muni d'un poids noté a_{ij} est appelé *graphe valué*.

Représentation graphique On représente généralement les sommets par des points et les arcs orientés par des flèches. Le poids des arcs figure sur chaque arc.



Prédecesseur, Successeur Un noeud i est dit *prédécesseur* d'un noeud j s'il existe un arc $(i, j) \in \mathcal{E}$. De même, un noeud k est dit *successeur* d'un noeud j s'il existe un arc $(j, k) \in \mathcal{E}$. $\pi(j)$ dénote l'ensemble des prédécesseurs du noeud j et $\sigma(j)$ l'ensemble de ses succeseurs.

Un noeud j tel que $\pi(j) = \emptyset$ est dit *source*, et un noeud i tel que $\sigma(i) = \emptyset$ est dit *puits*.

Chemins, circuits Un *chemin*, noté ρ, est une séquence de noeuds $\rho = (i_1, i_2, \ldots, i_p)$ d'un graphe valué telle que $i_j \in \pi(i_{j+1})$, $j = 1, \ldots, p-1$. Le sommet i_1 est dit noeud initial et le sommet i_p noeud final. On notera les chemins d'un graphe de la façon suivante,

$$i, j \in \mathcal{V}, \;\; i \rightsquigarrow j \iff \text{il existe un chemin allant de } i \text{ à } j$$

Un chemin est dit *élémentaire* si aucun des noeuds du chemin n'apparaît plus d'une fois dans ce chemin. Un chemin tel que le noeud initial est égal au noeud final est appelé circuit. La longueur d'un chemin ρ, notée $|\rho|_l$, est égale au nombre d'arcs qui composent ce chemin.

Graphe connexe Un graphe orienté est dit *connexe* si pour deux noeuds i et j quelconques du graphe, il existe une séquence $(i_1, i_2, \ldots, i_p)$ (qui n'est pas un chemin) telle que pour tout $j = 1, \ldots, p-1$ soit $(i_j, i_{j+1}) \in \mathcal{E}$ soit $(i_{j+1}, i_j) \in \mathcal{E}$.

Graphe fortement connexe Un graphe est dit *fortement connexe* si pour deux noeuds i et j quelconques $i \rightsquigarrow j$.

Composantes fortement connexes Soit un graphe $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$. On définit la relation d'équivalence sur $\mathcal{V}$,

$$i, j \in \mathcal{V}, \quad i \sim j \iff i \rightsquigarrow j \text{ et } j \rightsquigarrow i$$

Une classe de l'ensemble quotient $\mathcal{V}_{/\sim}$ est appelée *composante fortement connexe* du graphe et est notée C_i.

Une relation d'ordre partielle sur cet ensemble quotient peut être introduite de la façon suivante

$$C_x \lesssim C_y \iff \exists i \in C_x \text{ et } j \in C_y, i \rightsquigarrow j$$

On peut construire un graphe orienté à partir du quotient $\mathcal{V}_{/\sim}$ de la manière suivante : un noeud représente une composante fortement connexe C_i et un arc orienté relie C_i à C_j si $C_i \lesssim C_j$. Un tel graphe est appelé *graphe réduit*.

A.2 Graphes et matrices (max,+)

Une des premières applications du calcul matriciel dans les algèbres (max,+) et (min,+) se trouve dans [Gondran and Minoux, 1985]. Leurs travaux ont mis en évidence le fait suivant : la recherche de chemins de poids minimaux ou maximaux dans un graphe valué s'exprime simplement comme un produit matriciel dans les dioïdes $\mathbb{Z}_{\min}$ ou $\mathbb{Z}_{\max}$.

Nous rappelons ici quelques aspects du lien entre cheminements dans un graphe et calcul matriciel dans (max,+) ou (min,+).

On rappelle que le dioïde $\mathbb{Z}_{\max}$ correpond à l'ensemble $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ muni de l'opérateur max pour la loi additive $\oplus$ et l'addition classique $+$ pour la loi multiplicative.

Graphe de précédence d'une matrice (max,+) Soit $A \in \mathbb{Z}_{\max}^{n \times n}$. Le graphe orienté valué, composé de n sommets et tel qu'il existe un arc (i, j) de poids A_{ji} si $A_{ji} \neq \varepsilon$, est noté $\mathcal{G}(A)$ et appelé *graphe de précédence* associé à la matrice A.

Matrice irréductible Une matrice $A \in \mathbb{Z}_{\max}^{n \times n}$ est dite *irréductible* si $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe, sinon, A est dite *réductible*.

Interprétation de A^k en termes de chemins de $\mathcal{G}(A)$ On notera $|\rho|_w$ le poids d'un chemin $\rho = (i_1, \ldots, i_p)$ de $\mathcal{G}(A)$, c'est-à-dire la somme usuelle des poids des arcs de ce chemin :

$$|\rho|_w = A_{i_2 i_1} + \ldots + A_{i_p i_{p-1}}.$$

L'élément A_{ij} doit être interprété sur $\mathcal{G}(A)$ comme le poids d'un chemin de longueur 1 allant du noeud j au noeud i.

Ecrivons $(A^2)_{ij}$ dans le dioïde $\mathbb{Z}_{\max}$:

$$(A^2)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes A_{kj}.$$

L'interprétation dans l'algèbre usuelle de cette même expression est

$$(A^2)_{ij} = \operatorname*{Max}_{k=1}^{n}(A_{ik} + A_{kj}).$$

L'élément (i,j) de la matrice A^2 (calculée dans $\mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$) correspond donc au poids maximal des chemins de longueur 2 allant du noeud j au noeud i.

De façon générale, soit $A \in \mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$

$$(A^k)_{ij} = \text{poids maximum de tous les chemins de longueur } k \text{ allant de } j \text{ à } i \text{ dans } \mathcal{G}(A).$$

Naturellement, l'expression des exposants A^k d'une matrice carrée de $\mathbb{Z}_{\min}^{n\times n}$ devient :

$$(A^k)_{ij} = \text{ poids minimum des chemins de longueur } k \text{ allant de } j \text{ à } i \text{ dans } \mathcal{G}(A)$$

Poids moyen maximal des circuits de longueur k et lien avec le rayon spectral Partant de l'interprétation précédente, pour une matrice $A \in \mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$,

$$(A^k)_{ii} = \text{poids maximum de tous les circuits de longueur } k \text{ passant par le noeud } i.$$

En conséquence,

$$\bigoplus_{i=1}^{n}(A^k)_{ii} = \text{ poids maximum de tous les circuits de longueur } k \text{ du graphe } \mathcal{G}(A).$$

Cette expression est simplement la trace de la matrice A^k et est notée $\mathsf{tr}(A^k)$.

En définissant le poids moyen d'un circuit, noté $|\rho|_m$ comme le poids d'un cicuit divisé par sa longueur, $|\rho|_m = |\rho|_w/|\rho|_l$, le poids moyen maximal des circuits de longueur k s'obtient en divisant, dans l'algèbre usuelle, $\mathsf{tr}(A^k)$ par la longueur de ces circuits, c'est-à-dire k. Ceci se réécrit dans le dioïde $\mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$

$$\mathsf{tr}(A^k)^{\frac{1}{k}} = \text{ poids moyen maximal de tous les circuits de } \mathcal{G}(A) \text{ de longueur } k.$$

Lorsque A est irréductible, on peut donc faire une interprétation du rayon spectral $\rho(A)$ défini par

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \mathsf{tr}(A^k)^{\frac{1}{k}}.$$

Si $A \in \mathbb{Z}_{\max}^{n\times n}$ est irréductible, le graphe de précédence de A est fortement connexe et ne peut donc pas avoir de circuit élémentaire de longueur plus grande que n. Le rayon spectral de A fournit alors le poids moyen maximum de tous les circuits du graphe $\mathcal{G}(A)$.

Remarque A.1 Dans le cadre de la modélisation des GET sur le dioïde $\mathbb{Z}_{\max}$, on a en régime autonome $X(k) = AX(k-1)$. La valeur de $\mathtt{tr}(A^k)^{\frac{1}{k}}$ correspond alors pratiquement au temps de cycle maximum de tous les circuits de longueur k du GET. Aussi, lorsque le GET est fortement connexe, c'est le circuit le plus lent qui impose (en raison de la synchronisation avec tous les autres circuits) son temps de cycle. Dans ce cas, le rayon spectral de A fournit le maximum des temps de cycle de l'ensemble des circuits du GET, et donc également le temps de cycle général du graphe. $\diamond$

Annexe B

Algèbre des séries périodiques : algorithmes

Le théorème 2.37 montre que la manipulation des séries rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ joue un rôle central dans l'étude des GET, plus spécialement pour le calcul de leur relation de transfert entrée-sortie. Mais la manipulation des éléments rationnels n'est pas aisée. En particulier, il est assez difficile de comparer des éléments rationnels ou d'établir leur égalité; à titre d'exemple, sur le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ on a l'égalité suivante $e \oplus \gamma^2\delta^2(\gamma\delta)^* = (\gamma^2\delta^2)^*(\gamma^3\delta^3)^*$ *a priori* peu évidente.

On préfèrera donc le plus souvent présenter les éléments rationnels, en accord avec le théorème 2.37, sous la forme de séries périodiques (et causales) qui ont l'avantage de bénéficier d'un représentant canonique.

Cette annexe rappelle les algorithmes permettant de calculer, pour s et s' deux séries périodiques données sous forme canonique, la somme $s \oplus s'$, le produit $s \otimes s'$, la borne inf $s \wedge s'$ et la résiduée $s \backslash\!\!\!\!\!\circ\, s'$. Les principaux travaux dans ce domaine sont dûs à Stéphane Gaubert [Gaubert and Klimann, 1991],[Gaubert, 1992]. Nous reprenons ici certains de ses algorithmes que nous complétons en fournissant les algorithmes permettant de calculer la borne inf et la résiduée du produit de séries périodiques.

Ces algorithmes ont été implémentés sous forme de script MATLAB.

B.1 Rappels

Une série de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ est dite périodique si elle peut s'écrire sous la forme $s = p \oplus qr^*$ avec p et q deux polynômes et r un monôme causal.

Nous utiliserons dans cette annexe les notations suivantes

$$p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i}\delta^{t_i} \tag{B.1}$$

$$q = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{N_j}\delta^{T_j} \tag{B.2}$$

$$r = \gamma^{\nu}\delta^{\tau} \quad (\nu \geq 0 \text{ et } \tau \geq 0) \tag{B.3}$$

Une série est dite *dégénérée* lorsque ν ou τ est nul.

- si $\tau = 0$ alors $r^* = (\gamma^\nu)^* = e \oplus \gamma^\nu \oplus \ldots = e$. Dans ce cas, on a simplement $s = p \oplus qr^* = p \oplus q$ qui est un polynôme. Les polynômes sont donc des séries périodiques dégénérées.
- si $\nu = 0$ et $\tau \neq 0$ alors $r^* = \delta^*$. On a alors $s = p \oplus qr^* = p \oplus q\delta^* = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i}\delta^{t_i} \oplus \gamma^{N_0}\delta^*$. La série est dite dégénérée de type infini. On se rappellera par ailleurs que les trajectoires de tir d'un GET ne faisant apparaître qu'un nombre fini de tirs sont codées par des éléments de cette forme[1].

Une série périodique est dite *simple*, ou *élément simple*, si p est nul ($p = \varepsilon$) et si q est de type monômial. Un élément simple sera donc noté $s = mr^*$ avec $m = \gamma^n\delta^t$ et $r = \gamma^\nu\delta^\tau$.

Nous rappelons ici la forme canonique d'une série périodique sans fournir l'algorithme permettant d'y parvenir.

Forme canonique des polynômes Un polynôme $p = \bigoplus_{0 \leq i \leq \alpha} \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ est dit sous forme canonique (ou forme minimale) si $n_0 < n_1 < \ldots < n_\alpha$ et $t_0 < \ldots < t_\alpha$.

Nous rappelons que cette forme est obtenue par exemple graphiquement en ne gardant que l'expression des sommets des cônes constituant le représentant graphique de p.

Forme canonique des séries périodiques L'élaboration d'une forme canonique s'effectue en deux temps. Tout d'abord une série périodique $s = p \oplus qr^*$ peut toujours se réécrire sous une forme dite *propre* vérifiant

- p et q sont sous forme canonique
- $(n_\alpha, t_\alpha) < (N_0, T_0)$
- $(N_\beta - N_0, T_\beta - T_0) < (\nu, \tau)$

Lorsque s est sous une forme propre, le poynôme p caractérise le *transitoire* de la série périodique et le polynôme q le *motif du régime périodique*. Ceci est illustré par la figure B.1.

Dans un second temps, parmi les formes propres d'une série périodique, il en est une qui minimise la taille du transitoire et la longueur du motif du périodique.

Ainsi, parmi les formes propres d'une série périodique $s = p \oplus qr^*$, la forme canonique (ou représentation minimale) est celle qui minimise les couples (n_α, t_α) et (ν, τ). La preuve de ce résultat, ainsi que les algorithmes permettant d'aboutir à la représentation minimale, sont donnés dans [Gaubert, 1992].

On illustre ces différentes étapes par l'exemple suivant ce qui donne également (intuitivement) des indications sur les algorithmes permettant d'arriver à la forme canonique dans le cas général.

Exemple B.1 Soit la série périodique

$$s = e \oplus \gamma^2\delta \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^3 \oplus (\gamma^2 \oplus \gamma^3\delta)(\gamma^2\delta^2)^*.$$

[1] par exemple, une trajectoire de tir codée $\gamma^0\delta^1 \oplus \gamma^1\delta^*$ signifie simplement que le tir numéroté 0 (le premier tir) a lieu à la date 1 et qu'aucun autre tir n'a lieu (cf. §2.5.5)

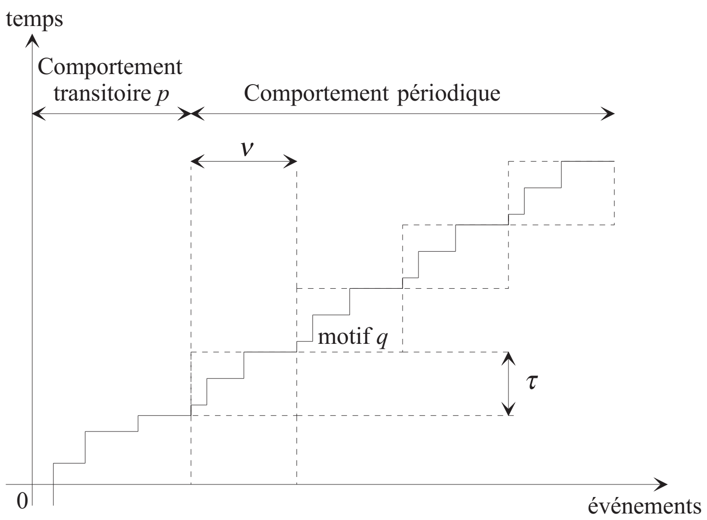


Figure B.1 : Représentation graphique d'une série périodique de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

On remarque tout d'abord qu'il ne s'agit pas d'une forme propre. En remarquant que

$$r^* = (e \oplus r \oplus \ldots \oplus r^k) r^*, \text{(se déduit des relations du th. 1.88)}$$

alors la série s'écrit également

$$s = p \oplus q \oplus qr \oplus \ldots \oplus qr^k r^*.$$

Dans ce cas, en choisissant k assez grand (ici on prend $k = 2$) on peut exprimer s sous forme propre de la manière suivante[2]

$$\begin{aligned} s &= e \oplus \gamma^2\delta \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^3 \oplus (\gamma^2 \oplus \gamma^3\delta)(\gamma^2\delta^2)^* \\ &= e \oplus \gamma^2\delta \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^3 \oplus \underbrace{(\gamma^2 \oplus \gamma^3\delta)}_{q} \oplus \underbrace{(\gamma^2 \oplus \gamma^3\delta)\gamma^2\delta^2}_{qr} \oplus \underbrace{(\gamma^2 \oplus \gamma^3\delta)\gamma^4\delta^4(\gamma^2\delta^2)^*}_{qr^2r^*} \end{aligned}$$

Après simplification du transitoire (forme canonique de p), et réécriture du périodique, on obtient s sous la forme suivante

$$s = e \oplus \gamma^2\delta \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^3 \oplus (\gamma^6\delta^4 \oplus \gamma^7\delta^5)(\gamma^2\delta^2)^*.$$

Il s'agit d'une forme propre de s. Mais cette représentation n'est pas minimale.

On remarque en effet que, de manière générale, pour $k \in \mathbb{N}$, l'égalité suivante est vérifiée

$$(e \oplus \gamma^{\nu'}\delta^{\tau'} \oplus \ldots \oplus \gamma^{(k-1)\nu'}\delta^{(k-1)\tau'})(\gamma^{k\nu'}\delta^{k\tau'})^* = (\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*.$$

Par conséquent, s'il existe un diviseur k commun à ν et τ tel que le polynôme $(e \oplus \gamma^{\nu'}\delta^{\tau'} \oplus \ldots \oplus \gamma^{(k-1)\nu'}\delta^{(k-1)\tau'})$ apparaisse comme facteur de q, alors on peut écrire

$$qr^* = q'(e \oplus \gamma^{\nu'}\delta^{\tau'} \oplus \ldots \oplus \gamma^{(k-1)\nu'}\delta^{(k-1)\tau'})r^* = q'(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*$$

[2] il s'agit ici bien évidemment d'un cas particulier simple, d'autres manipulations seront parfois nécessaires avant d'aboutir à une forme propre de la série

ce qui permet de réduire la taille du motif périodique. En réitérant autant de fois que nécessaire cette simplification on aboutira à une taille minimale pour le motif q.

Dans cet exemple, on peut factoriser q par $(e \oplus \gamma\delta)$. On peut donc écrire s sous la forme

$$\begin{aligned} s &= e \oplus \gamma^2\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^3 \oplus \gamma^6\delta^4(e \oplus \gamma\delta)(\gamma^2\delta^2)^* \\ &= e \oplus \gamma^2\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^3 \oplus \gamma^6\delta^4(\gamma\delta)^*. \end{aligned}$$

A ce stade, le motif q est de taille minimale.

Il convient désormais de chercher une réduction éventuelle du transitoire (p). Dans cet exemple, sans rentrer plus dans les détails, on remarque que les monômes $\gamma^4\delta^2$ et $\gamma^5\delta^3$ appartiennent au régime périodique de la série. C'est-à-dire que la série peut également se mettre sous la forme équivalente

$$s = e \oplus \gamma^2\delta \oplus \gamma^4\delta^2(\gamma\delta)^*.$$

Cette dernière représentation est la forme périodique canonique de la série s. Il n'existe pas d'autre représentation périodique dont la taille du motif (ν, τ) et la taille du transitoire (n_α, t_α) soient plus petites que pour cette représentation. ◇

Les algorithmes donnés par la suite supposeront les séries s et s' initialement sous forme canonique. En revanche, on verra que ces algorithmes ne conduisent pas nécessairement à un résultat sous forme minimale (d'où la nécessité de programmer tout d'abord la minimisation de séries périodiques). De plus, la mise en oeuvre des algorithmes donnés par la suite impose de savoir effectuer au préalable les opérations de somme, produit et inf sur des polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$. Notons que ces opérations sur les polynômes ne posent pas de problèmes algorithmiques majeurs.

B.2 Somme de séries périodiques

Les techniques employées pour exprimer le résultat d'opérations sur les séries périodiques reposent le plus souvent sur une bonne compréhension de la manipulation des éléments simples. Aussi, par la suite, nous rappellerons parfois au préalable comment traiter le cas des séries simples.

Lemme B.2 (Domination [Gaubert, 1992]) *Soit $s = \gamma^n\delta^t(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ et $s' = \gamma^{n'}\delta^{t'}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*$ deux éléments simples de pentes asymptotiques différentes. Si $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau < \sigma_\infty(s') = \nu'/\tau'$ alors il existe un entier $K \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\gamma^{n'}\delta^{t'}\gamma^{K\nu'}\delta^{K\tau'}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^* \preceq \gamma^n\delta^t(\gamma^\nu\delta^\tau)^*. \tag{B.4}$$

Ce lemme est illustré par la figure B.2. Le problème consiste à trouver à partir de quelle valeur K la série s est définitivement "au dessus" de s'. Sur la figure B.2, le plus petit K vérifiant le lemme B.2 est $K = 3$.

Preuve : On peut écrire

$$\gamma^n\delta^t(\gamma^\nu\delta^\tau)^* = \bigoplus_{i\geq 0} \gamma^{n+i\nu}\delta^{t+i\tau}$$

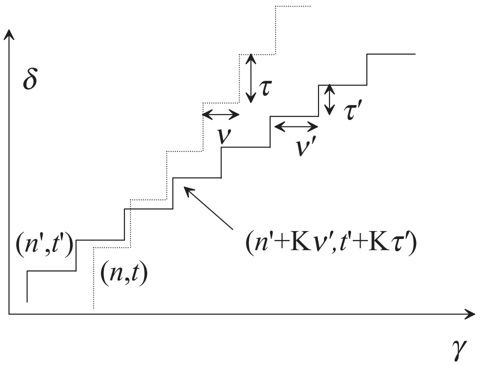


Figure B.2 : Domination ultime de séries simples de pentes différentes

et

$$\gamma^{n'}\delta^{t'}\gamma^{K\nu'}\delta^{K\tau'}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^* = \bigoplus_{j\geq K} \gamma^{n'+j\nu'}\delta^{t'+j\tau'}.$$

Par conséquent, il existe un entier K positif tel que l'inégalité (B.4) est vérifiée si et seulement si

$$x \in \mathbb{N}, \forall x \geq K, \exists y \in \mathbb{N} \text{ tel que } \begin{cases} n' + x\nu' \geq n + y\nu \\ t' + x\tau' \leq t + y\tau \end{cases}$$

ou encore

$$\forall x \geq K, \exists y \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{n' + x\nu' - n}{\nu} \geq y \geq \frac{t' + x\tau' - t}{\tau}. \tag{B.5}$$

Or il existe un entier $y \in \mathbb{Z}$ vérifiant ces inégalités si

$$\left(\frac{n' + x\nu' - n}{\nu}\right) - \left(\frac{t' + x\tau' - t}{\tau}\right) \geq 1$$

ce qui est vérifié pour x assez grand, par exemple pour x vérifiant

$$x \geq \left\lceil \frac{\nu(t'-t) + \tau(n-n') + \nu\tau}{\tau\nu' - \nu\tau'} \right\rceil$$

où $\lceil a \rceil \in \mathbb{Z}$ représente le plus petit entier supérieur à $a \in \mathbb{Q}$. De plus, y doit également être positif ce qui d'après (B.5) est vérifié si

$$n' + x\nu' \geq n,$$

et donc en particulier si

$$x \geq \left\lceil \frac{n-n'}{\nu'} \right\rceil.$$

Enfin, puisque K doit être positif, il suffit de prendre

$$K = \max\left(\left\lceil \frac{\nu(t'-t) + \tau(n-n') + \nu\tau}{\tau\nu' - \nu\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{n-n'}{\nu'} \right\rceil, 0\right) \tag{B.6}$$

pour que la domination exprimée par le lemme B.2 soit vérifiée. □

Remarque B.3 Il faut garder à l'esprit que K donné par l'expression (B.6) n'est pas nécessairement le plus petit entier positif satisfaisant la domination (B.4). ◇

Théorème B.4. *La somme de deux éléments simples s et s' est une série périodique de pente asymptotique*

$$\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')).$$

Preuve : On doit considérer deux cas.

- **si** $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau < \sigma_\infty(s') = \nu'/\tau'$ On peut dans ce cas réécrire la somme d'éléments simples

$$\begin{aligned} s \oplus s' &= \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \\ &= \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \oplus \Big[\gamma^{n'} \delta^{t'} \oplus \gamma^{n'+\nu'} \delta^{t'+\tau'} \oplus \cdots \\ &\quad \cdots \oplus \gamma^{n'+(K-1)\nu'} \delta^{t'+(K-1)\tau'}\Big] \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} \gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \end{aligned}$$

  où K est donné par (B.6). En accord avec le lemme B.2, le dernier terme est dominé par le reste de l'expression, il peut donc être supprimé. La somme d'éléments simples peut s'écrire dans ce cas

$$s \oplus s' = \bigoplus_{j=0}^{K-1} \gamma^{n'+j\nu'} \delta^{t'+j\tau'} \oplus \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* = p'' \oplus q'' r''^*$$

  qui est donc une série périodique de pente $\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s'))$.

- **si** $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau = \sigma_\infty(s') = \nu'/\tau'$ Alors il existe k et k' tels que

$$ppcm(\nu, \nu') = k\nu = k'\nu' = \nu'' \text{ et } ppcm(\tau, \tau') = k\tau = k'\tau' = \tau''.$$

  On peut alors écrire $r^* = \left(e \oplus r \oplus \ldots \oplus r^{k-1}\right)(r^k)^*$ soit

$$\begin{aligned} r^* &= (\gamma^\nu \delta^\tau)^* = \left(e \oplus \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \cdots \oplus \gamma^{(k-1)\nu} \delta^{(k-1)\tau}\right)(\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \\ (r')^* &= (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* = \left(e \oplus \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'} \oplus \cdots \oplus \gamma^{(k'-1)\nu'} \delta^{(k'-1)\tau'}\right)(\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^*. \end{aligned}$$

  La somme de deux éléments simples de même pente asymptotique peut donc s'écrire

$$\begin{aligned} s \oplus s' &= \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \\ &= \Big[\gamma^n \delta^t (e \oplus \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \cdots \oplus \gamma^{(k-1)\nu} \delta^{(k-1)\tau}) \\ &\quad \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} (e \oplus \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'} \oplus \cdots \oplus \gamma^{(k'-1)\nu'} \delta^{(k'-1)\tau'})\Big] (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* = q'' r''^* \end{aligned}$$

  ce qui est également une série périodique de pente $\sigma_\infty(s \oplus s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')) = \frac{\nu}{\tau} = \frac{\nu'}{\tau'}$.

□

Remarque B.5 Les résultats donnés par les preuves précédentes apparaissent évidemment sous forme de séries périodiques, mais il faut remarquer que le résultat n'est pas nécessairement sous forme canonique puisque non nécessairement sous forme propre. Il convient donc ensuite d'appliquer l'algorithme de représentation minimale pour obtenir le résultat sous forme canonique. La même remarque s'applique en général à tous les autres algorithmes. ◇

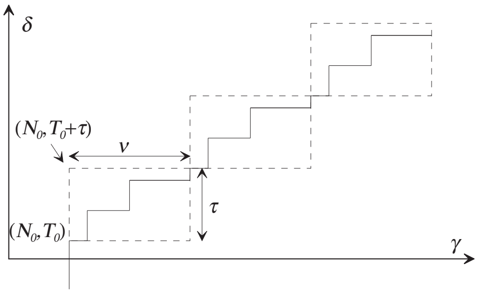


Figure B.3 : Encadrement de qr^* par deux éléments simples : $\gamma^{N_0}\delta^{T_0}(\gamma^\nu\delta^\tau)^* \preceq qr^* \preceq \gamma^{N_0}\delta^{T_0+\tau}(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$

Théorème B.6. *La somme de séries périodiques s et s' est une série périodique de pente*

$$\sigma_\infty(s\oplus s') = \min(\sigma_\infty(s),\sigma_\infty(s')).$$

Preuve :

- **si** $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$ Alors en posant

  $$\nu'' = ppcm(\nu,\nu'),\ \tau'' = ppcm(\tau,\tau'),\ \ k = ppcm(\nu,\nu')/\nu,\ \text{et } k' = ppcm(\nu,\nu')/\nu'$$

  on peut écrire la somme

  $$\begin{aligned} s\oplus s' &= p\oplus qr^*\oplus p'\oplus q'r'^* \\ &= [p\oplus p']\oplus\left[q(e\oplus\ldots\oplus r^{(k-1)})\oplus q'(e\oplus\ldots\oplus r'^{(k'-1)})\right](\gamma^{\nu''}\delta^{\tau''})^* \\ &= p''\oplus q''(r'')^* \end{aligned}$$

  ce qui est une série périodique de pente $\sigma_\infty(s\oplus s') = \min(\sigma_\infty(s),\sigma_\infty(s')) = \frac{\nu''}{\tau''} = \frac{\nu}{\tau} = \frac{\nu'}{\tau'}$.

- **si** $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$ Si s et s' sont sous forme canonique, on peut d'une part minorer qr^* par un élément simple mr^* et majorer $q'r'^*$ par un élément simple $m'r'^*$. On a en effet

  $$qr^* = \left(\bigoplus_{j=0}^{\beta}\gamma^{N_j}\delta^{T_j}\right)(\gamma^\nu\delta^\tau)^* \succeq \gamma^{N_0}\delta^{T_0}(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$$

  mais également

  $$q'r'^* = \left(\bigoplus_{j=0}^{\beta'}\gamma^{N'_j}\delta^{T'_j}\right)(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^* \preceq \gamma^{N'_0}\delta^{T'_0+\tau'}\left(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'}\right)^*$$

  (la figure B.3 donne une interprétation graphique de ces relations).

  Le lemme B.2 montre qu'il existe K tel que

  $$\gamma^{N'_0}\delta^{T'_0+\tau'}\gamma^{K\nu'}\delta^{K\tau'}\left(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'}\right)^* \preceq \gamma^{N_0}\delta^{T_0}(\gamma^\nu\delta^\tau)^*.$$

On a donc par isotonie du produit

$$\gamma^{K\nu'}\delta^{K\tau'}q'(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^* \preceq \gamma^{N_0'}\delta^{T_0'+\tau'}\gamma^{K\nu'}\delta^{K\tau'}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^* \preceq \gamma^{N_0}\delta^{T_0}(\gamma^{\nu}\delta^{\tau})^* \preceq q(\gamma^{\nu}\delta^{\tau})^*.$$

La somme de deux séries périodiques de pentes différentes s'écrit donc

$$\begin{aligned} s \oplus s' &= \left[p \oplus p' \oplus \left[\bigoplus_{i=0}^{K-1} \gamma^{i\nu'}\delta^{i\tau'}\right] q'\right] \oplus qr^* \\ &= p'' \oplus q''r''^* \end{aligned}$$

avec

$$K = \max\left(\left\lceil \frac{\nu(T_0' + \tau' - T_0) + \tau(N_0 - N_0') + \nu\tau}{\tau\nu' - \nu\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{N_0 - N_0'}{\nu'} \right\rceil, 0\right).$$

□

B.3 Inf de séries périodiques

Le calcul de la borne inf de séries périodiques s et s' nécessite également de traiter tout d'abord le cas où s et s' sont des éléments simples. Nous établissons pour cela un résultat préliminaire.

Proposition B.7. *Soit $s = mr^*$ un élément simple et un monôme $\gamma^a\delta^b$. Alors $s \wedge \gamma^a\delta^b$ est un polynôme.*

Preuve : Puisque $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est un dioïde distributif

$$\begin{aligned} s \wedge \gamma^a\delta^b &= \gamma^n\delta^t(\gamma^\nu\delta^\tau)^* \wedge \gamma^a\delta^b \\ &= [\gamma^n\delta^t \wedge \gamma^a\delta^b] \oplus [\gamma^{n+\nu}\delta^{t+\tau} \wedge \gamma^a\delta^b] \oplus \dots \\ &= \bigoplus_{i\geq 0} \gamma^{\max(n+i\nu,a)}\delta^{\min(t+i\tau,b)}. \qquad \text{(en accord avec (2.11))} \end{aligned}$$

Pour $i \in \mathbb{N}$ assez grand, par exemple tel que $t + i\tau \geq b$ et $i \geq 0$ c'est-à-dire si

$$i \geq \max\left(\left\lceil \frac{b-t}{\tau} \right\rceil, 0\right),$$

alors on vérifie facilement

$$\bigoplus_{i\geq\max\left(\left\lceil\frac{b-t}{\tau}\right\rceil,0\right)} \gamma^{\max(n+i\nu,a)}\delta^{\min(t+i\tau,b)} = \bigoplus_{i\geq\max\left(\left\lceil\frac{b-t}{\tau}\right\rceil,0\right)} \gamma^{\max(n+i\nu,a)}\delta^{b} = \gamma^{\max(n-j\nu,a)}\delta^b,$$

avec $j = \max(\lceil\frac{b-t}{\tau}\rceil, 0)$.

Donc

$$s \wedge \gamma^a\delta^b = \gamma^n\delta^t(\gamma^\nu\delta^\tau)^* \wedge \gamma^a\delta^b = \bigoplus_{0\leq i\leq\max(\lceil\frac{b-t}{\tau}\rceil,0)} \gamma^{\max(n+i\nu,a)}\delta^{\min(t+i\tau,b)}$$

ce qui est l'expression d'un polynôme. □

Proposition B.8. *L'inf de deux éléments simples s et s' est une série périodique de pente asymptotique égale à*

$$\sigma_\infty(s \wedge s') = \max(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')).$$

Preuve :

- **si** $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$ Pour K donné par le lemme B.2, on peut écrire

$$\begin{aligned} s \wedge s' &= \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \\ &= \gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \wedge \left[\gamma^{n'} \delta^{t'} \oplus \cdots \oplus \gamma^{(K-1)\nu'} \delta^{(K-1)\tau'} \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} \gamma^{K\nu'} \delta^{K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^*\right] \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est un dioïde distributif

$$\begin{aligned} s \wedge s' &= \left[s \wedge [\bigoplus_{j=0}^{K-1} \gamma^{n'+j\nu'} \delta^{t'+j\tau'}] \right] \oplus \left[s \wedge \gamma^{n'+K\nu'} \delta^{t'+K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \right] \\ &= \left[\bigoplus_{j=0}^{K-1} (\gamma^n \delta^t (\gamma^\nu \delta^\tau)^* \wedge \gamma^{n'+j\nu'} \delta^{t'+j\tau'}) \right] \oplus \left[\gamma^{n'+K\nu'} \delta^{t'+K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \right] \end{aligned}$$

Le premier membre entre crochets est, d'après la proposition B.7, une somme finie de polynômes, c'est-à-dire un polynôme. Le résultat apparaît donc comme une série périodique de pente $\sigma_\infty(s \wedge s') = \max(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s'))$.

Plus explicitement, en s'appuyant sur la proposition B.7 et en posant $I = \max\left(\left\lceil \frac{t'+j\tau'-t}{\tau} \right\rceil, 0\right)$, le calcul de la borne inf d'éléments simples de pentes différentes est donné par

$$s \wedge s' = \left[\bigoplus_{j=0}^{K-1} \bigoplus_{i=0}^{I} \gamma^{\max(n+i\nu, n'+j\nu')} \delta^{\min(t+i\tau, t'+j\tau')} \right] \oplus \left[\gamma^{n'+K\nu'} \delta^{t'+K\tau'} (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* \right].$$

- **si** $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$ Soit $\nu'' = ppcm(\nu, \nu') = k\nu = k'\nu'$ et $\tau'' = ppcm(\tau, \tau') = k\tau = k'\tau'$. On rappelle que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} (\gamma^\nu \delta^\tau)^* &= \left(e \oplus \gamma^\nu \delta^\tau \oplus \ldots \oplus \gamma^{(k-1)\nu} \delta^{(k-1)\tau}\right) (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \\ (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^* &= \left(e \oplus \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'} \oplus \ldots \oplus \gamma^{(k'-1)\nu'} \delta^{(k'-1)\tau'}\right) (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^*. \end{aligned}$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned} s \wedge s' &= (\gamma^n \delta^t \oplus \cdots \oplus \gamma^{n+(k-1)\nu} \delta^{t+(k-1)\tau})(\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \\ &\quad \wedge (\gamma^{n'} \delta^{t'} \oplus \cdots \oplus \gamma^{n'+(k'-1)\nu'} \delta^{t'+(k'-1)\tau'})(\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \\ &= \bigoplus_{0 \le g, 0 \le l}^{g \le k-1, l \le k'-1} \left[\gamma^{n+g\nu} \delta^{t+g\tau} (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \wedge \gamma^{n'+l\nu'} \delta^{t'+l\tau'} (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \right]. \end{aligned} \tag{B.7}$$

Il convient donc d'étudier le terme entre crochets qui s'écrit de manière générale

$$s_b = \gamma^a \delta^c (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \wedge \gamma^b \delta^d (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^*.$$

Sous l'hypothèse $a \geq b$, on peut réécrire s_b sous la forme

$$s_b = \gamma^a \delta^c [(\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^* \wedge \gamma^{(b-a)} \delta^{(d-c)} (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^*]$$

ou encore

$$\begin{aligned} s_b &= \gamma^a \delta^c \left[\bigoplus_{i \geq 0, j \geq 0} \gamma^{\max(i\nu'', (b-a)+j\nu'')} \delta^{\min(i\tau'', (d-c)+j\tau'')} \right] \\ &= \gamma^a \delta^c \left[\bigoplus_{i \geq 0, j \geq 0} \gamma^{i\nu''} \delta^{i\tau''} \gamma^{\max(0, (b-a)+j\nu''-i\nu'')} \delta^{\min(0, (d-c)+j\tau''-i\tau'')} \right]. \end{aligned}$$

En posant $h = j - i$ ceci se réécrit donc

$$s_b = \gamma^a \delta^c \left[\bigoplus_{i \geq 0, h \geq -i} \gamma^{i\nu''} \delta^{i\tau''} \gamma^{\max(0, (b-a)+h\nu'')} \delta^{\min(0, (d-c)+h\tau'')} \right]. \tag{B.8}$$

Notons d'une part que

$$\bigoplus_{h=-i}^{0} \gamma^{\max(0, (b-a)+h\nu'')} \delta^{\min(0, (d-c)+h\tau'')} = \gamma^{\max(0, b-a)} \delta^{\min(0, d-c)} = \gamma^0 \delta^{\min(0, (d-c))}$$

puisque $b - a \leq 0$, et d'autre part, en posant $H = \lceil \frac{c-d}{\tau''} \rceil$, on peut écrire

$$\bigoplus_{h \geq H} \gamma^{\max(0, (b-a)+h\nu'')} \delta^{\min(0, (d-c)+h\tau'')} = \gamma^{\max(0, (b-a)+H\nu'')} \delta^0$$

puisque $(d - c) + H\tau'' \geq 0$.

L'expression (B.8) de s_b peut donc finalement s'écrire comme une somme finie d'éléments simples

$$s_b = \gamma^a \delta^c (\bigoplus_{h=0}^{H} \gamma^{\max(0, (b-a)+h\nu'')} \delta^{\min(0, (d-c)+h\tau'')}) (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^*$$

qui est une série périodique d'après le théorème B.4. Finalement, l'expression (B.7) $s \wedge s'$ apparaît comme une somme finie de séries périodiques qui est une série périodique de pente $\sigma_\infty(s \wedge s') = \max(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s'))$.

En résumé, si s et s' sont des éléments simples de même pente, leur borne inf se calcule par l'expression suivante

$$s \wedge s' = \bigoplus_{l=0}^{k'-1} \bigoplus_{g=0}^{k-1} \bigoplus_{h=0}^{H} \gamma^{\max(a, b+h\nu'')} \delta^{\min(c, d+h\tau'')} (\gamma^{\nu''} \delta^{\tau''})^*$$

avec

$$\begin{aligned} & \nu'' = ppcm(\nu, \nu') \\ & \tau'' = ppcm(\tau, \tau') \\ & k = \nu''/\nu \text{ et } k' = \nu''/\nu' \\ \text{si } (n + g\nu \geq n' + l\nu') \text{ alors} \quad & (a, c) = (n + g\nu, t + g\tau) \text{ et } (b, d) = (n' + g\nu', t' + g\tau') \\ \text{sinon} \quad & (a, c) = (n' + g\nu', t' + g\tau') \text{ et } (b, d) = (n + g\nu, t + g\tau). \end{aligned}$$

□

Proposition B.9. *L'inf de deux séries périodiques s et s' est une série périodique de pente asymptotique*

$$\sigma_\infty(s \wedge s') = \max(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')).$$

Preuve :

$$\begin{aligned} s \wedge s' &= (p \oplus qr^*) \wedge (p' \oplus q'r'^*) \\ &= (p \wedge p') \oplus (p \wedge q'r'^*) \oplus (qr^* \wedge p') \oplus (qr^* \wedge q'r'^*). \end{aligned}$$

On remarque rapidement que les trois premiers termes entre parenthèses sont des polynômes et le dernier peut se réécrire

$$qr^* \wedge q'r'^* = \bigoplus_{i=0}^{\beta} \bigoplus_{i'=0}^{\beta'} (\gamma^{N_i}\delta^{T_i} r^* \wedge \gamma^{N'_{i'}}\delta^{T'_{i'}} r'^*)$$

Ce qui est, d'après la proposition B.8, une somme finie de séries périodiques de pente asymptotique égale au $\max(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s'))$. □

B.4 Produit de séries périodiques

Théorème B.10. *Soit $s = \gamma^n\delta^t(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ et $s = \gamma^{n'}\delta^{t'}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*$ deux éléments simples. Le produit $s \otimes s'$ est une série périodique de pente asymptotique*

$$\sigma_\infty(s \otimes s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s')).$$

Preuve :

- **si** $\sigma_\infty(s) < \sigma_\infty(s')$ alors selon le lemme B.2, il existe K tel que

$$r'^K r'^* \preceq r^*. \tag{B.9}$$

  Soit, par isotonie du produit, $r'^K r'^* r^* \preceq r^* r^* = r^*$. On peut écrire $r^* r'^* = r^*(e \oplus r' \oplus \cdots \oplus r'^{(K-1)} \oplus r'^K r'^*)$ qui, d'après (B.9), se simplifie en

$$r^* r'^* = r^*(e \oplus r' \oplus \cdots \oplus r'^{(K-1)}).$$

  Le produit d'éléments simples de pentes différentes s'exprime simplement

$$\gamma^n\delta^t(\gamma^\nu\delta^\tau)^* \otimes \gamma^{n'}\delta^{t'}(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^* = \gamma^{n+n'}\delta^{t+t'}\left(e \oplus \gamma^{\nu'}\delta^{\tau'} \oplus \cdots \oplus \gamma^{(K-1)\nu'}\delta^{(K-1)\tau'}\right)(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$$

  avec

$$K = \max\left(\left\lceil \frac{\nu\tau}{\tau\nu' - \nu\tau'} \right\rceil, 0\right).$$

- **si** $\sigma_\infty(s) = \sigma_\infty(s')$ Alors, en posant $\nu'' = ppcm(\nu, \nu') = k\nu = k'\nu'$ et $\tau'' = ppcm(\tau, \tau') = k\tau = k'\tau'$, on a

$$\begin{aligned} r^* &= [e \oplus \cdots \oplus r^{(k-1)}](r'')^* \\ r'^* &= [e \oplus \cdots \oplus r'^{(k'-1)}](r'')^* \end{aligned}$$

Le produit d'éléments simples de même pente s'exprime donc

$$\begin{aligned} s \otimes s' &= \gamma^{n+n'}\delta^{t+t'}[e \oplus \cdots \oplus r^{(k-1)}] \otimes [e \oplus \cdots \oplus r'^{(k'-1)}](r'')^* \\ &= q''r''^*. \end{aligned}$$

□

Théorème B.11. *Le produit de séries périodiques est une série périodique de pente asymptotique*

$$\sigma_\infty(s \otimes s') = \min(\sigma_\infty(s), \sigma_\infty(s'))$$

Preuve : Le produit de séries périodiques s'écrit

$$\begin{aligned} s \otimes s' &= [p \oplus qr^*] \otimes [p' \oplus q'r'^*] \\ &= pp' \oplus pq'r'^* \oplus p'qr^* \oplus qq'r^*r'^*. \end{aligned}$$

Le calcul de cette dernière expression se déduit directement du produit d'éléments simples (pour le produit $r^*r'^*$) et de la somme de séries périodiques. □

B.5 Résiduée de séries périodiques

Nous formulons ici l'algorithme permettant de calculer la résiduée $s' \backslash\!\!\circ s$ lorsque s et s' sont des séries périodiques données sous forme canonique.

Avant même d'établir le résultat, on peut rapidement analyser les points clés de ce calcul.

Soit $s = p \oplus qr^*$ et $s' = p' \oplus q'r'^*$ deux séries périodiques. On peut donner explicitement l'expression de la résiduée en s'appuyant pour cela sur les résultats exprimés par le théorème 1.95

$$\begin{aligned} s' \backslash\!\!\circ s &= (p' \oplus q'r'^*) \backslash\!\!\circ (p \oplus qr^*) && \text{(d'après (1.46))} \\ &= p' \backslash\!\!\circ (p \oplus qr^*) \wedge (q'r'^*) \backslash\!\!\circ (p \oplus qr^*) \\ &= (\bigoplus_{0 \le i \le \alpha'} \gamma^{n'_i}\delta^{t'_i}) \backslash\!\!\circ (p \oplus qr^*) \wedge ((\bigoplus_{0 \le j \le \beta'} \gamma^{N'_j}\delta^{T'_j})r'^*) \backslash\!\!\circ (p \oplus qr^*) \\ &= \left[\bigwedge_{0 \le i \le \alpha'} \gamma^{-n'_i}\delta^{-t'_i} s\right] \wedge \left[\bigwedge_{0 \le j \le \beta'} \gamma^{-N'_j}\delta^{-T'_j}(r'^* \backslash\!\!\circ s)\right]. && \text{(B.10)} \end{aligned}$$

Le problème principal réside dans le calcul de $r'^* \backslash\!\!\circ s$ puisque ce terme peut s'écrire également

$$r'^* \backslash\!\!\circ s = \bigwedge_{j \ge 0} r'^{-j} s = \bigwedge_{i \ge 0} \gamma^{-i\nu'}\delta^{-i\tau'} s,$$

ce qui apparaît comme la borne inf d'une infinité de séries périodiques de même pente asymptotique.

Lorsque $\sigma_\infty(s) \leq \sigma_\infty(s')$, on montre que $r'^* \backslash s$ représente la borne inf d'un nombre fini de séries périodiques ce qui est, par conséquent, une série périodique. Une fois résolue cette difficulté, l'expression de $s' \backslash s$ apparaît alors comme la borne inf d'un nombre fini de séries périodiques.

Plusieurs étapes sont nécessaires pour établir ce résultat.

Proposition B.12. *Si* $K \geq \max\left(\left\lceil \frac{t_\alpha - t_0}{\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{N_0 - n_0}{\nu'} \right\rceil\right)$ *alors* $s \wedge r'^{-K} s = s \wedge r'^{-K} qr^*$.

Preuve : Puisque $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ est distributif,

$$s \wedge r'^{-K} s = (p \wedge r'^{-K} p) \oplus (qr^* \wedge r'^{-K} p) \oplus (s \wedge r'^{-K} qr^*).$$

D'une part, si $K \geq \max\left(\left\lceil \frac{t_\alpha - t_0}{\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{n_\alpha - n_0}{\nu'} \right\rceil\right)$ alors

$$\begin{aligned} p \wedge r'^{-K} p &= \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \bigoplus_{j=0}^{\alpha} \gamma^{\max(n_i, n_j - K\nu')} \delta^{\min(t_i, t_j - K\tau')} \\ &= \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \bigoplus_{j=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_j - K\tau'} \\ &= \gamma^{n_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'}. \end{aligned}$$

D'autre part, si $K \geq \max\left(\left\lceil \frac{t_\alpha - t_0}{\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{n_\alpha - n_0}{\nu'} \right\rceil\right)$ alors, puisque $(N_0, T_0) > (n_\alpha, t_\alpha)$

$$\begin{aligned} qr^* \wedge r'^{-K} p &= \bigoplus_{0 \leq h} \bigoplus_{j=0}^{\beta} \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{\max(N_j + h\nu, n_i - K\nu')} \delta^{\min(T_j + h\tau, t_i - K\tau')} \\ &= \bigoplus_{0 \leq h} \bigoplus_{j=0}^{\beta} \bigoplus_{i=0} \alpha \gamma^{N_j + h\nu} \delta^{t_i - K\tau'} \\ &= \gamma^{N_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'}. \end{aligned}$$

Soit, pour $K \geq \max\left(\left\lceil \frac{t_\alpha - t_0}{\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{n_\alpha - n_0}{\nu'} \right\rceil\right)$, puisque $\gamma^{n_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'} \succeq \gamma^{N_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'}$ et $t_0 \geq t_\alpha - K\tau'$ on retrouve

$$\begin{aligned} s \wedge r'^{-K} s &= \gamma^{n_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'} \oplus (s \wedge r'^{-K} qr^*) \\ &= (\gamma^{n_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'} \oplus s) \wedge (\gamma^{n_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'} \oplus r'^{-K} qr^*) \\ &= s \wedge (\gamma^{n_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'} \oplus r'^{-K} qr^*). \end{aligned}$$

De plus, on peut écrire

$$(\gamma^{n_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'} \oplus r'^{-K} qr^*) = \gamma^{n_0} \delta^{t_\alpha - K\tau'} \oplus r'^{-K} q \oplus r'^{-K} r^+$$

avec

$$r'^{-K} q = \gamma^{N_0 - K\nu'} \delta^{T_0 - K\tau'} \oplus \gamma^{N_1 - K\nu'} \delta^{T_1 - K\tau'} \oplus \cdots$$

Or, pour K assez grand on vérifie $N_0 - K\nu' \leq n_0$ et de plus on a $T_0 - K\tau' \geq t_\alpha - K\tau'$ c'est-à-dire

$$\gamma^{n_0}\delta^{t_\alpha - K\tau'} \preceq \gamma^{N_0 - K\nu'}\delta^{T_0 - K\tau'}.$$

En prenant $K \geq \lceil \frac{N_0 - n_0}{\nu'} \rceil$ on vérifie donc

$$(\gamma^{n_0}\delta^{t_\alpha - K\tau'} \oplus {r'}^{-K} q) = {r'}^{-K} q$$

et donc par conséquent

$$(\gamma^{n_0}\delta^{t_\alpha - K\tau'} \oplus {r'}^{-K} qr^*) = {r'}^{-K} qr^*.$$

Finalement, pour

$$K \geq \max\left(\left\lceil \frac{t_\alpha - t_0}{\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{n_\alpha - n_0}{\nu'} \right\rceil, \left\lceil \frac{N_0 - n_0}{\nu'} \right\rceil\right) = \max\left(\left\lceil \frac{t_\alpha - t_0}{\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{N_0 - n_0}{\nu'} \right\rceil\right)$$

on vérifie

$$s \wedge {r'}^{-K} s = s \wedge {r'}^{-K} qr^*$$

□

Proposition B.13. *Si $\nu/\tau \geq \nu'/\tau'$, pour $K \geq ppcm(\nu, \nu')/\nu'$ on vérifie $qr^* \preceq {r'}^{-K} qr^*$.*

Preuve : Si on montre qu'il existe K tel que

$$r^* \preceq {r'}^{-K} r^*, \tag{B.11}$$

par isotonie du produit et pour ce même K l'inégalité $qr^* \preceq {r'}^{-K} qr^*$ sera également vérifiée.

Or l'inégalité (B.11) est vérifiée si il existe K tel que

$$\bigoplus_{i \geq 0} \gamma^{i\nu}\delta^{i\tau} \preceq \bigoplus_{j \geq 0} \gamma^{j\nu - K\nu'}$$

Ceci est équivalent à

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists j \in \mathbb{N} \text{ tel que } \begin{cases} j\nu - K\nu' \leq i\nu \\ j\tau - K\tau' \geq i\tau \end{cases}$$

Ceci peut également se réécrire

$$\forall i \in \mathbb{N}, \exists j \in \mathbb{N} \text{ tel que } (j - i)\nu'\tau \geq K\nu'\tau' \geq (j - i)\nu\tau'$$

Sous l'hypothèse $\nu/\tau \leq \nu'/\tau'$ cette expression est vérifiée pour K assez grand. En particulier, on remarque que $j = i + 1$ vérifie cette inégalité si $K = ppcm(\tau'\nu, \tau'\nu')/(\tau'\nu') = ppcm(\nu, \nu')/\nu'$.

□

Proposition B.14. *Si $\nu/\tau \leq \nu'/\tau'$ alors $\bigwedge_{j \geq 0} {r'}^{-j} s = \bigwedge_{j \geq 0}^{j = K_1 - 1} {r'}^{-j} s \wedge \bigwedge_{j \geq K_1}^{j = K_1 + K_2 - 1} {r'}^{-j} qr^*$ où $K_1 = \max\left(\lceil \frac{t_\alpha - t_0}{\tau'} \rceil, \lceil \frac{N_0 - n_0}{\nu'} \rceil\right)$ et $K_2 = ppcm(\nu, \nu')/\nu'$.*

Preuve : Si $K \geq K_1$ alors d'après la proposition B.12 on a

$$s \wedge {r'}^{-K} s = s \wedge {r'}^{-K} q r^*$$

soit

$$\bigwedge_{j \geq 0} {r'}^{-j} s = \bigwedge_{j \geq 0}^{K_1 - 1} {r'}^{-j} s \wedge \bigwedge_{j \geq K_1} {r'}^{-j} q r^*.$$

De plus, si $K \geq K_2$ alors d'après la proposition B.13

$${r'}^{-K} q r^* \geq q r^*,$$

donc par isotonie du produit on a également pour tout $n \in \mathbb{N}$

$${r'}^{-(K_2 + K_1 + n)} q r^* \succeq {r'}^{-(K_1 + n)} q r^*,$$

ce qui conduit à l'égalité suivante

$$\bigwedge_{j \geq K_1} {r'}^{-j} q r^* = \bigwedge_{j \geq K_1}^{K_2 + K_1 - 1} {r'}^{-j} q r^*.$$

Finalement, sous l'hypothèse $\nu/\tau \leq \nu'/\tau'$ on a donc

$$\bigwedge_{j \geq 0} {r'}^{-j} s = \bigwedge_{j \geq 0}^{j = K_1 - 1} {r'}^{-j} s \wedge \bigwedge_{j \geq K_1}^{j = K_1 + K_2 - 1} {r'}^{-j} q r^*.$$

□

Théorème B.15. *Soit s et s' deux séries périodiques. Si $\sigma_\infty(s) > \sigma_\infty(s')$ alors $s' \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} s = \varepsilon$. Sinon $s' \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} s$ est une série périodique de pente $\sigma_\infty(s' \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} s) = \sigma_\infty(s)$. L'algorithme de calcul de cette série est*

$$s' \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} s = p' \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} s \wedge (q' {r'}^*) \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} s$$

avec

$$p' \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} s = \bigwedge_{j=0}^{\alpha'} \gamma^{-n'_j} \delta^{-t'_j} s \tag{B.12}$$

$$(q' {r'}^*) \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} s = \bigwedge_{i=0}^{\beta'} \left(\gamma^{-N'_i} \delta^{-T'_i} \left(\bigwedge_{j \geq 0}^{j = K_1 - 1} {r'}^{-j} s \wedge \bigwedge_{j \geq K_1}^{j = K_1 + K_2 - 1} {r'}^{-j} q r^* \right) \right) \tag{B.13}$$

avec $K_1 = \max\left(\left\lceil \frac{t_\alpha - t_0}{\tau'} \right\rceil, \left\lceil \frac{N_0 - n_0}{\nu'} \right\rceil \right)$ et $K_2 = ppcm(\nu, \nu')/\nu'$.

Preuve : Les expressions (B.12) et (B.13) sont simplement une réécriture de (B.10) en s'appuyant sur le résultat de la proposition B.14 pour l'expression de ${r'}^* \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} s$ lorsque $\sigma_\infty(s) \leq \sigma_\infty(s')$.

Lorsque $\sigma_\infty(s) > \sigma_\infty(s')$, ε est la seule solution de l'inéquation $s' \otimes x \preceq s$. □

B.6 Etoile d'une série rationnelle

L'étoile de Kleene d'une série périodique se ramène facilement à des produits de séries. En effet, puisque $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ est commutatif et en accord avec des résultats du théorème 1.88 on obtient

$$\begin{aligned} s^* &= (p \oplus qr^*)^* \\ &= p^* \otimes (qr^*)^* \\ &= p^*(e \oplus q(q \oplus r)^*) \end{aligned}$$

En reprenant les notations (B.1) et (B.2),

$$s^* = \bigotimes_{i=0}^{\alpha} (\gamma^{n_i}\delta^{t_i})^*(e \oplus q \left(\bigotimes_{j=0}^{\beta} (\gamma^{N_j}\delta^{T_j})^* \right) (\gamma^{\nu}\delta^{\tau})^*).$$

Si s est rationnelle, donc périodique et causale, alors s^* apparaît comme un nombre fini de produits de séries périodiques et peut donc se calculer à partir des algorithmes précédents.

Remarque B.16 Si s est périodique mais non causale, alors l'étoile de la série n'est pas nécessairement périodique au sens de la définition 2.35. Par exemple, pour $s = \gamma^{-1}\delta^{-1} \oplus \gamma^2\delta^2(\gamma\delta)^*$, on trouve $s^* = (\gamma^{-1}\delta^{-1})^*(\gamma\delta)^*$ qui ne peut se ramener sous la forme d'une série périodique. ◇

B.7 Conclusion

Les calculs sur les séries rationnelles sont fort utiles lors de la synthèse de correcteurs traitée dans le chapitre 3. A notre connaissance, les algorithmes donnés ici sont, à ce jour, les seuls moyens dont on dispose pour la manipulation de séries rationnelles.

Ces algorithmes ne sont néanmoins pas très efficaces. En effet, si la représentation périodique a l'avantage de permettre de décider l'égalité, elle a l'inconvénient de ne pas être très "concise". Notamment, certains GET peuvent générer des phénomènes transitoires de très grande taille; il suffit de mettre la somme $\gamma^2(\gamma\delta^{10})^* \oplus \delta^2(\gamma\delta^9)^*$ sous forme périodique minimale pour s'en convaincre (le transitoire contient 20 monômes).

Il semblerait donc plus judicieux de passer à d'autres formes de représentation des séries rationnelles. Gaubert évoque dans sa thèse [Gaubert, 1992] la possibilité d'une décomposition en éléments simples. Il convient dans ce cas d'accepter le fait qu'une telle représentation peut ne pas être unique.

Annexe C

Simulations du système Kanban dynamique

C.1 Introduction

La première partie du chapitre 4 a été consacrée à une étude déterministe de certains systèmes à flux tirés représentables par des GET stationnaires. On a montré qu'il était possible de modifier, plus exactement d'accroître au sens du dioïde, le feedback de chaque étage de production d'une ligne mono-entrée mono-sortie sans dégrader le transfert entre la consigne de sortie y_c et la sortie y. Cela signifie que pour un système de production dont les temporisations (temps de traitement, délais de transport ...) sont constantes, il est possible de mettre en oeuvre une gestion des ordres de production déclenchant plus tardivement les lancements en production tout en conservant les mêmes performances entrée-sortie. De plus, cette gestion est représentable par un GET, c'est-à-dire qu'elle peut être mise en oeuvre sous forme de récurrences (max,+) linéaire.

Nous proposons dans cette anexe d'analyser les performances de ces systèmes modifiés dans un environnement stochastique. Pour cela, nous rappelons figure C.1 le modèle de type GET d'une cellule de production d'une ligne Kanban Classique ainsi que le modèle de la cellule pour laquelle on applique la gestion calculée par le résultat de la proposition 4.7. Dans un souci de concision, nous appelerons par la suite Kanban Dynamique cette modification de la gestion Kanban.

Pour les systèmes déterministes, l'intérêt du Kanban Dynamique par rapport au Kanban Classique est très clair; l'ajout de la dynamique sur chacun des feedbacks assure un déclenchement plus tardif (ou égal) des lancements en production dans chaque étage pour une sortie équivalente. Le Kanban Dynamique conduit donc à une diminution des en-cours pour des performances entrée-sortie égales à celles du Kanban Classique.

Nous cherchons à évaluer ici l'intérêt du Kanban Dynamique, en le comparant au Kanban Classique, lorsque le système géré n'est pas déterministe, c'est-à-dire lorsque le GET qui le représente n'est pas stationnaire. En effet, on sait que dans un contexte manufacturier, les temps de traitement et les temps de transport n'ont que rarement des valeurs fixes. Nous allons donc chercher à évaluer, par simulation, comment se comporte la gestion Kanban Dynamique sur un GET dont les temporisations suivront des lois statistiques.

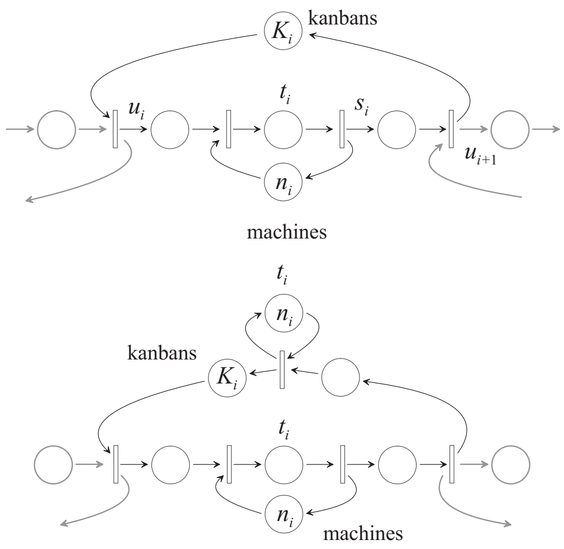


Figure C.1 : Cellule de production gérée en Kanban Classique et avec Kanban Dynamique

Le système étudié par simulation sera une ligne de production mono-produit comportant deux cellules de production SISO en série.

La loi générale prise pour décrire le temps de traitement d'une machine sera de type

$$t_i = t_{i_{\min}} + \Delta t_i \tag{C.1}$$

où

$t_{i_{\min}}$ correspond à un temps technologique minimal incompressible (non nul),

Δt_i sera une variable aléatoire décrivant l'impossibilité statistique que la machine fonctionne à son temps minimal, ceci en raison des pannes éventuelles, des changements d'outils ...

Pour les simulations, le temps $t_{i_{\min}}$ sera une constante et Δt_i sera une variable aléatoire suivant une distribution exponentielle dont la moyenne pourra être modifiée d'une simulation à l'autre.

La synthèse des feedbacks est ici effectuée à partir du modèle du système dans son fonctionnement idéal, c'est-à-dire celui pour lequel les temps de traitement des machines sont $t_{i_{\min}}$. Ce modèle déterministe revient simplement à considérer le système dans son fonctionnement optimal, sachant que les aléas ne peuvent que dégrader les performances du système par rapport à ce fonctionnement optimal. Ce modèle sera d'autant plus éloigné du comportement du système que les variations des temporisations Δt_i seront importantes.

Pour le système Kanban décrit précédemment, la comparaison va donc porter sur les systèmes décrits figure C.2. En effet, en l'absence d'aléas, c'est-à-dire $\Delta t_i = 0$, la cellule de production numéro i possède un transfert égal à $h_i = \delta^{t_{i_{\min}}}(\gamma^{n_i}\delta^{t_{i_{\min}}})^*$ et son feedback est $f_i = \gamma^{K_i}$. La proposition 4.7 indique que, pour ce système, le feedback $\hat{f}_i = \gamma^{K_i}(\gamma^{n_i}\delta^{t_{i_{\min}}})^*$ conserve le transfert entrée-sortie de la ligne dans sa globalité. Nous allons chercher à évaluer par simulation

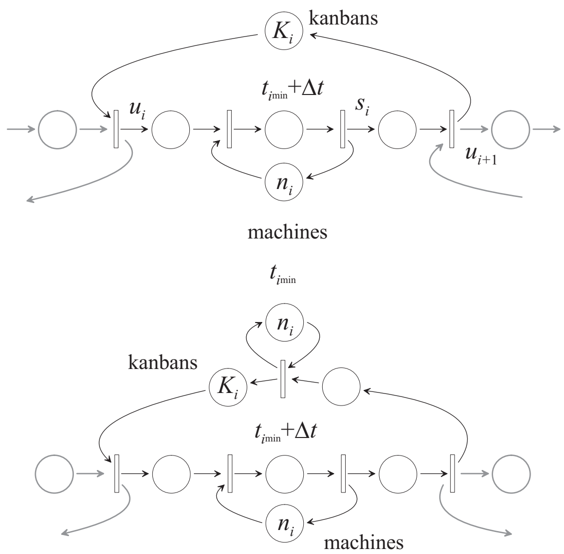


Figure C.2 : Comparaison Kanban Classique avec Kanban Dynamique pour des GET non stationnaires

si cette propriété est conservée lorsque les temporisations sont variables suivant la loi décrite en (C.1).

C.2 Simulations sur une ligne Kanban deux cellules

Pour cette phase de simulations, les systèmes comparés sont décrits figure C.3.

Nous comparons deux systèmes constitués de deux cellules en série, chacune de ces cellules disposant d'une machine de capacité 2 pièces et de temps de traitement minimal égal à 3 u.t. ($t_{1_{\min}} = t_{2_{\min}} = 3$). Les simulations seront réalisées pour Δt_i suivant une loi exponentielle de moyenne α_i. De même, les trajectoires de tir de la consigne y_c seront caractérisées par un temps inter-arrivée suivant une loi exponentielle de moyenne λ.

Les simulations données ici ont été réalisées avec le logiciel MATLAB en programmant les récurrences (max,+) décrites par les dateurs associés aux GET de la figure C.3.

Comparaison du comportement interne des deux systèmes Le première simulation a pour objectif de présenter la différence de comportement interne du Kanban Classique et du Kanban Dynamique en observant le temps de séjour dans les places d'entrée et de sortie de chacune des cellules.

Pour cela, nous considérons des systèmes déterministes pour lesquels les temporisations t_1 et t_2 sont fixes et égales à 3 u.t.. Le taux de production est de 2/3 pièce/u.t. pour les deux systèmes. Nous appliquons une même consigne y_c aux deux systèmes pour laquelle le temps inter-arrivée suit une loi exponentielle de moyenne égale à 1.87 u.t., c'est-à-dire que le taux de la demande correspond à 80% du taux maximal du système.

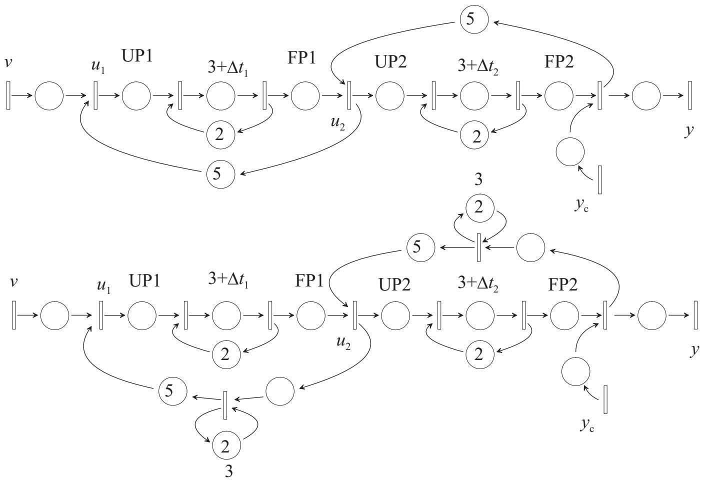


Figure C.3 : Simulation sur des systèmes non déterministes

	UP1	FP1	UP2	FP2
Kan. Class.	1.95	4.37	1.95	4.38
Kan. Dyn.	0	6.33	0	4.38

Table C.1 : Temps de séjour dans les stocks d'entrée et de sortie des cellules 1 et 2

Pour cette consigne, sous l'hypothèse que l'entrée v n'est pas contraignante (c.-à-d. que le stock de matière première est suffisant pour répondre à la demande), le Kanban Classique et le Kanban Dynamique donnent la même sortie y puisqu'il s'agit de systèmes déterministes. En revanche, pour les deux systèmes la sortie y accuse un retard moyen/pièce, par rapport à la consigne y_c, de 0.75 u.t.. La différence entre les deux systèmes concerne évidemment les dates de lancement en production. L'entrée dans la cellule 1 pour le Kanban Dynamique a lieu en moyenne 1.95 u.t. après l'entrée dans la cellule 1 pour le Kanban Classique. On rappelle que l'on peut évidemment comparer les deux systèmes puisqu'il sont soumis exactement à la même consigne.

Le tableau C.1 résume les principaux temps de séjour moyens (en u.t.) des jetons dans les stocks d'entrée et de sortie des cellules de chacun des systèmes.

Il faut souligner, ceci se vérifie également lorsque les temps t_i sont aléatoires, la différence de comportement interne entre les deux lignes de production. La différence réside principalement dans la localisation des jetons dans le GET, c'est-à-dire des pièces dans le système. Le Kanban Dynamique tend à éviter que des pièces n'attendent inutilement dans le stock d'entrée d'une cellule la libération d'une machine. Il n'autorise l'entrée d'une pièce dans le cellule que lorsque la cellule est en mesure de la produire. C'est pourquoi les places UP1 et UP2 sont constamment vides pour le Kanban Dynamique dans le cas déterministe.

Comparaison des deux systèmes pour plusieurs valeurs moyennes de Δt_i et plusieurs taux de demande différents Nous regardons ici dans quelle mesure l'action du Kanban

$\beta\backslash\Delta$	0%	2%	4%	8%	16%	25%	33%	50%
85%	13,7	10,5	8	5,2	2,9	1,9	1,3	0,7
80%	11	8,7	7	4,9	2,9	1,9	1,3	0,7
75%	8,1	6,8	5,8	4,4	2,7	1,8	1,3	0,7
70%	5,9	5,4	4,8	3,6	2,4	1,6	1,1	0,6
65%	4,1	4,1	3,6	2,8	2	1,4	1	0,6

Table C.2 : Pourcentage du temps de séjour gagné par le Kanban Dynamique/Kanban Classique en fonction du niveau de la demande et des variations des temporisations par rapport aux temporisations minimales

Dynamique reste significative par rapport au Kanban Classique lorsque les temps de traitement sont aléatoires. Pour ce faire, nous comparons les deux lignes pour plusieurs valeurs moyennes de Δt_i et plusieurs niveaux de la demande. Pour toutes les simulations effectuées, les sorties des deux systèmes pour une même demande y_c sont identiques. La seule diffférence réside donc dans la date d'entrée dans le système.

Nous rappelons que Δt_i suit une loi de distribution exponentielle de moyenne α_i et le temps inter-arrivée des demandes suit une loi de distribution exponentielle de moyenne λ.

Le tableau C.2 donne la diminution du temps de séjour moyen réalisée par le Kanban Dynamique par rapport au Kanban Classique. La valeur est donnée en pourcentage du temps de séjour moyen du Kanban Classique. Cette diminution du temps de séjour est donnée en fonction de Δ et β (en pourcentage):

- $\Delta = \frac{\alpha_i}{t_{i_{\min}}} \times 100$ donne une information sur la variation des temporisations par rapport à la temporisation minimale. Si $\Delta = 50\%$ cela signifie que les temporisations sont en moyenne égales à $\frac{3}{2} t_{i_{\min}}$.
- $\beta = \frac{\text{taux de la demande}}{\text{taux de production maximum}}$ représente la façon dont le système est sollicité. Si $\beta = 80\%$, le taux de la demande (exponentielle) est égal à 80% du taux de production maximum du système.

Pour le système déterministe ($\Delta = 0\%$) et pour un niveau de demande équivalent à 80% du taux de production maximal du système, le Kanban Dynamique réduit le temps de séjour des pièces de 13,7%. Pour ce même niveau de demande, mais pour des temporisations qui sont en moyenne 4% plus élevées que $t_{i_{\min}}$, la réduction du temps de séjour par rapport au Kanban classique n'est plus que de 8%.

L'analyse de ces résultats est claire. Le système Kanban Dynamique conserve un intérêt par rapport au Kanban Classique dans la mesure où la demande est assez forte par rapport à la capacité maximale du système et où la variation des temps de traitement Δt_i est faible par rapport au temps $t_{i_{\min}}$ utilisé pour le calcul du feedback. Toutefois il faut noter que le Kanban Dynamique ne dégrade jamais les performances du système.

Bibliographie

[Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. (1992). *Synchronisation and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems.* John Wiley and Sons, New York.

[Baccelli et al., 1995] Baccelli, F., Foss, S., and Gaujal, B. (1995). Free-choice petri nets : the algebraic approach. In *34th Conf. on Dec. & Cont.*, New Orleans.

[Baccelli et al., 1996] Baccelli, F., Foss, S., and Gaujal, B. (1996). Free-choice petri nets - An algebraic approach. *IEEE TAC*, 41(12):1751–1778.

[Birkhoff, 1940] Birkhoff, G. (1940). Lattice theory. In *American Mathematical Society Colloquium Publications*, volume XXV, Providence, Rhode Island.

[Blyth and Janowitz, 1972] Blyth, T. and Janowitz, M. (1972). *Residuation Theory.* Pergamon Press, Oxford.

[Boimond and Ferrier, 1996] Boimond, J. and Ferrier, J. (1996). Internal model control and max-algebra : Controller design. *IEEE TAC*, 41(3):457–461.

[Chaouiya and Dallery, 1997] Chaouiya, C. and Dallery, Y. (Juin 1997). Petri nets models of pull control systems for assembly manufacturing systems. In *2nd International Workshop on Manufacturing and Petri Nets*, Toulouse.

[Chrétienne, 1983] Chrétienne, P. (1983). *Les réseaux de Petri temporisés.* Thèse d'état, Université Paris VI.

[Cohen, 1993] Cohen, G. (1993). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. In *Summer School on Discrete Event Systems*, Spa, Belgium.

[Cohen, 1998] Cohen, G. (1998). Residuation and applications. In *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, école de printemps d'informatique théorique*, Noirmoutier.

[Cohen et al., 1983] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J., and Viot, M. (1983). Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France.

[Cohen et al., 1985a] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J., and Viot, M. (1985a). A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC–30:210–220.

[Cohen et al., 1989a] Cohen, G., Gaubert, S., Nikoukhah, R., and Quadrat, J. (1989a). Convex analysis and spectral analysis of timed event graphs. In *28th Conf. Decision and Control*, Tampa, FL.

[Cohen et al., 1993] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1993). From first to second-order theory of linear discrete event systems. In *12th World IFAC Congress*, volume 3, pages 331–334, Sydney, Australia.

[Cohen et al., 1996] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1996). Kernels, images and projections in dioids. In *WODES'96*, Edinburgh.

[Cohen et al., 1998] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1998). Max-plus algebra and system theory : Where we are and where to go now. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes.

[Cohen et al., 1984] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1984). Linear system theory for discrete-event systems. In *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada.

[Cohen et al., 1985b] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1985b). Une théorie linéaire des systèmes à événements discrets. Rapport de recherche 362, INRIA, Le Chesnay, France.

[Cohen et al., 1986] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1986). Dating and counting events in discrete event systems. In *25th IEEE Conf. on Decision and Control*, Athens, Greece.

[Cohen et al., 1989b] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1989b). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1):39–58.

[Commault, 1998] Commault, C. (1998). Feedback stabilization of some event graph models. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 43(10):1419–1423.

[Cottenceau et al., 1997a] Cottenceau, B., Hardouin, L., and Boimond, J. (1997a). Dynamic control of a kanban system in dioid algebra. In *IEEE 5th Mediterranean Control Conf.*, Cyprus.

[Cottenceau et al., 1997b] Cottenceau, B., Hardouin, L., and Boimond, J. (1997b). Synthèse d'un feedback linéaire dans l'algèbre des dioïdes pour la commande d'un système kanban. In *AGI'S 97*, Angers.

[Cottenceau et al., 1999] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J., and Ferrier, J. (1999). Synthesis of greatest linear feedback for timed event graphs in dioid. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 44(6):1258–1262.

[Dallery and Liberopoulos, 1995] Dallery, Y. and Liberopoulos, G. (1995). A new kanban-type pull control mechanism for multi-stage manufacturing systems. In *Europan Control Conference*, Italy.

[De Araujo, 1994] De Araujo, S. (1994). *Sur l'analyse et le dimensionnement de systèmes de production gérés en kanban*. Thèse de doctorat, I.N.P.G. (L.A.G).

[Di Mascolo, 1990] Di Mascolo, M. (1990). *Modélisation et évaluation de performances de systèmes de production gérés en Kanban*. Thèse de doctorat, I.N.P.G. (L.A.G).

[Duri, 1997] Duri, C. (1997). *Etude comparative de gestions à flux tiré*. Thèse de doctorat, I.N.P.G. (L.A.G).

[Gallot et al., 1997] Gallot, F., Boimond, J., and Hardouin, L. (1997). Identification of simple elements in max-algebra : Application to siso discrete event systems modelisation. In *ECC'97*, Bruxelles.

[Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, Paris.

[Gaubert, 1995a] Gaubert, S. (1995a). Performance evaluation of (max,+) automata. *IEEE TAC*, 40(12):2014–2025.

[Gaubert, 1995b] Gaubert, S. (1995b). Resource optimization and (min,+) spectral theory. *IEEE TAC*, 40(11):1931–1934.

[Gaubert, 1998] Gaubert, S. (1998). Two lectures on max-plus algebra. In *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique*, Noirmoutier.

[Gaubert et al., 1998] Gaubert, S., Butkovic, P., and Cuninghame-Green, R. (1998). Minimal (max,+) realization of convex sequences. *SIAM, J. Cont. Optim.*, 36(1):137–147.

[Gaubert and Klimann, 1991] Gaubert, S. and Klimann, C. (1991). Rational computation in dioid algebra and its application to performance evaluation of discrete event systems. In Jacob, G. and Lamnabhi-Lagarrigue, F., editors, *Lecture notes in Control and Inf. Sci.*, number 165. Springer.

[Gaubert and Mairesse, 1997] Gaubert, S. and Mairesse, J. (1997). Task resource systems and (max,+) automata. In Gunawardena, J., editor, *Idempotency*, Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press.

[Gondran and Minoux, 1985] Gondran, M. and Minoux, M. (1985). *Graphes et Algorithmes*. Eyrolles.

[Hardouin et al., 1997] Hardouin, L., Menguy, E., Boimond, J., and Ferrier, J. (1997). S.I.S.O. discrete event systems control in dioid algebra. *JESA*, 31(3):433–452.

[Lahaye et al., 1999a] Lahaye, S., Boimond, J., and Hardouin, L. (1999a). Graphes d'événements temporisés avec ajout/retrait dynamique de jetons : comportement asymptotique, représentation dans l'algèbre (min,+). In *MSR'99*.

[Lahaye et al., 1999b] Lahaye, S., Boimond, J., and Hardouin, L. (1999b). Optimal control of (min,+) linear time-varying systems. In *PNPM'99*, Saragosse.

[Libeaut, 1996] Libeaut, L. (1996). *Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes à événements discrets*. Thèse de doctorat, Ecole centrale de Nantes, Nantes.

[Libeaut and Loiseau, 1996] Libeaut, L. and Loiseau, J. (1996). On the control of timed event graphs. In *International Workshop on Discrete Event Systems, WODES'96*, Edinburgh.

[Max Plus, 1990] Max Plus (1990). Linear systems in (max, +)-algebra. In *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, Honolulu.

[Max Plus, 1991a] Max Plus (1991a). A linear system theory for systems subject to synchronization and saturation constraints. In *Proceedings of the first European Control Conference*, Grenoble.

[Max Plus, 1991b] Max Plus (1991b). Second Order Theory of Min-linear Systems and its Application to Discrete Event Systems. In *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, England.

[Menguy, 1997] Menguy, E. (1997). *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes.* Thèse de doctorat, LISA, Université d'Angers.

[Menguy et al., 1996] Menguy, E., Boimond, J., and Hardouin, L. (1996). Commande des systèmes à événements discrets dans l'algèbre des dioïdes. In *AFCET Systèmes Réactifs*, Brest.

[Murata, 1989] Murata, T. (1989). Petri nets : properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4):541–580.

[Olsder, 1998] Olsder, G. J. (1998). Max algebra approach to discrete event systems. In *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique*, Noirmoutier.

[Ramadge and Wonham, 1989] Ramadge, P. and Wonham, W. (1989). The control of discrete event systems. *IEEE TAC*, 77:81–98.

[Wonham, 1979] Wonham, W. (1979). *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach.* Springer Verlag.

Index

Résumé

Les Graphes d'Evénements Temporisés (GET) forment une sous-classe des Réseaux de Petri (RdP) dont le comportement événementiel/temporel peut être décrit par des équations linéaires notamment dans l'algèbre (max,+). Leur étude relève de ce que l'on appelle communément *la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes* qui présente de grandes analogies de forme avec *la théorie des systèmes linéaires continus.*

Nous abordons dans ce mémoire le problème de synthèse de correcteur, pour les GET, dans un objectif d'atteinte de modèle de référence. Ce problème peut être décrit de la manière suivante: partant d'un GET (système nominal) dont on connaît le comportement entrée-sortie (matrice de transfert), on se fixe un comportement de référence (modèle de référence) que l'on cherche à atteindre d'aussi près que possible grâce à un correcteur linéaire descriptible par un GET. Plusieurs structures de correction sont proposées nécessitant la synthèse de précompensateurs ou de correcteurs feedback.

Ensuite, le problème de calcul de correcteurs (notamment feedback de sortie) trouve des applications en gestion de production dans la recherche d'améliorations de méthodes de gestion à flux tirés existantes (système Kanban et Kanban Généralisé), ainsi que dans la recherche de correcteurs stabilisants, c'est-à-dire limitant la taille des stocks internes d'un système de production.

Mots clés : graphes d'événements temporisés, dioïdes, algèbre (max,+), poursuite de modèle, synthèse de feedbacks, système Kanban.

Abstract

Timed Event Graphs (TEG) form a subclass of Petri nets (PN) whose event/timed behavior can be described by linear equations in particular in (max,+) algebra. Their study concerns what one commonly calls *linear system theory in dioids* which presents great analogies of form with the classical linear system theory.

In this report, we tackle the problem of controller synthesis, for TEG, in an objective of reference model matching. This problem can be described in the following way: taking a TEG (nominal system) of which one knows the input-output behavior (transfer matrix), one tries to match a given reference model as closely as possible, thanks to a linear controller describable by a TEG. Several structures of control are proposed, they require the synthesis of precompensators or feedback controllers.

Then, the problem of controller synthesis (in particular output feedback) find some applications in production control in order to improve some existing pull flow control methods (Kanban and Kanban Generalized method), as in the search of stabilizing controllers, i.e. that limit the size of internal stock of a manufacturing system.

Keywords : timed event graphs, dioids, (max,+) algebra, model matching, feedback synthesis, Kanban system