

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

2004

Thèse de DOCTORAT

Spécialité : Automatique et Informatique Appliquée

*Présentée et soutenue publiquement par*

**Mehdi LHOMMEAU**

*le 16 décembre 2003*

*à l'ISTIA - Université d'Angers*

**Étude de systèmes à événements discrets  
dans l'algèbre  $(\max, +)$ .**

- 1. Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles.**
- 2. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations.**

Jury

Président	: Jean-Claude Gentina, Professeur	École Centrale de Lille
Rapporteurs	: Guy Cohen, Professeur	École Nationale des Ponts et Chaussées
	Jean-Jacques Loiseau, Directeur de Recherche	CNRS, IRCCyN, Nantes
Examineurs	: Christian Commault, Professeur	Institut National Polytechnique de Grenoble
	Jean-Louis Ferrier, Professeur	Université d'Angers
	Laurent Hardouin, Maître de Conférences	Université d'Angers

**Directeurs de thèse : Jean-Louis Ferrier - Laurent Hardouin**

Laboratoire : LABORATOIRE D'INGÉNIERIE DES SYSTÈMES AUTOMATISÉS. 62, avenue Notre Dame du Lac, F-49000 ANGERS



**ÉTUDE DE SYSTÈMES À ÉVÉNEMENTS DISCRETS DANS  
L'ALGÈBRE  $(\max, +)$ .  
SYNTHÈSE DE CORRECTEURS ROBUSTES DANS UN  
DIOÏDE D'INTERVALLES.  
SYNTHÈSE DE CORRECTEURS EN PRÉSENCE DE  
PERTURBATIONS.**

---

**Mehdi LHOMMEAU**



---

**Université d'Angers**

Mehdi LHOMMEAU

*Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre  $(\max, +)$ . Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations.*

xxii+

## Résumé

Les systèmes dynamiques à événements discrets mettant en jeu des phénomènes de synchronisation peuvent être modélisés par des équations linéaires dans les algèbres de type  $(\max,+)$ . Cette propriété a motivé l'élaboration de ce que l'on appelle communément la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Cette théorie présente de nombreuses analogies avec la théorie conventionnelle des systèmes linéaires continus et permet notamment d'aborder des problèmes de commandes.

La première contribution concerne l'analyse de la robustesse de lois de commandes pour des systèmes  $(\max,+)$ -linéaires. L'objectif est de caractériser l'ensemble des systèmes préservant les performances recherchées lors de la synthèse. Autrement dit, nous cherchons à caractériser les marges de variations ou dérives du système admissibles vis à vis des critères de performances imposés.

Ensuite, le problème de commande robuste est considéré. Cette fois nous supposons connue, sous forme d'intervalles, l'amplitude de variation des paramètres du système à commander et nous cherchons l'ensemble des correcteurs permettant d'atteindre un objectif donné. Au préalable est introduit un dioïde d'intervalles, qui permet de modéliser les systèmes incertains sous forme de matrices d'intervalles incluant l'ensemble des comportements possibles du système. La synthèse de contrôleurs présentée dans le cas déterministe s'étend alors naturellement au contexte incertain.

La dernière partie de ce mémoire traite du problème de commande en présence de perturbations. En se conformant à la littérature sur les systèmes continus conventionnels, nous montrons que ce problème présente de fortes analogies avec le problème classique du rejet de perturbations. Il est notamment montré qu'il est possible de synthétiser des contrôleurs optimaux préservant l'état du système dans le noyau de la matrice de sortie.

**Mots-clés :** graphes d'événements temporisés, dioïdes, robustesse, commande en présence de perturbations, algèbre  $(\max,+)$ , analyse par intervalles

## Abstract

Discrete event dynamic systems involving synchronization phenomena can be modelled by linear equations in some dioids. This property justified the development of what one commonly calls linear system theory in dioids. This theory presents many analogies with the classical linear system theory and allows to tackle control problems.

The first contribution concerns the robustness analysis of control laws for  $(\max,+)$ -linear systems. The objective is to characterize the set of systems preserving the desired performances at the time of the synthesis. In other words, we try to characterize the acceptable variation margins or drifts for the system with respect to the imposed performances criteria.

Then, the robust control problem is addressed. This time we suppose known, in the form of intervals, the amplitude of parameter variations of the system to be control and we seek the controller set allowing to achieve a given objective. As a preliminary a dioid of intervals is introduced, it makes possible to model the uncertain systems in the form of interval matrices including the set of all possible system behaviors. The controller synthesis presented in the deterministic case spreads then naturally to the uncertain context.

The last part of this report, deals with the problem of control in the presence of disturbances. Following the literature on classical continuous systems, we show that this problem presents strong analogies with the classical problem of disturbance decoupling. In particular it is shown that it is possible to synthesize optimal controllers preserving the system state trajectories in the kernel of the output matrix.

**Keywords:** discrete event systems, dioid, robustness, control in presence of disturbances, interval analysis



# Remerciements

---

Au moment où s'achève l'écriture de ce manuscrit, j'aurais passé presque quatre années au Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés. Je remercie en premier lieu son directeur le Professeur **J.-L. Ferrier** de m'y avoir accueilli. Je tiens également à lui exprimer ma profonde gratitude pour ses conseils et son aide qui ont permis d'effectuer cette thèse dans les meilleures conditions possible.

J'exprime toute ma reconnaissance à **G. Cohen**, Professeur à l'École Nationale des Ponts et Chaussées, et **J.-J. Loiseau**, Directeur de recherche CNRS à l'IRCCyN, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de rapporter ce travail. Je leur suis également très reconnaissant pour les nombreuses remarques et suggestions qu'ils ont apportées.

Je voudrais également remercier **C. Commault**, Professeur à l'Institut National Polytechnique de Grenoble, et **J.-C. Gentina**, Professeur à l'École Centrale de Lille, de l'intérêt qu'ils ont porté à ces travaux en acceptant de participer au jury.

Je ne remercierai jamais assez **L. Hardouin** qui m'a initié à la recherche et a dirigé cette thèse. Sans ses conseils, sa disponibilité et ses nombreuses suggestions, ce travail n'aurait jamais abouti. Je voudrais qu'il trouve ici l'expression de ma reconnaissance la plus sincère.

Mes remerciements s'adressent également à tous les membres du laboratoire, qui durant toutes ces années mon permis de travailler dans un contexte agréable. Merci à tous mes collègues doctorants.

J'adresse mes remerciements à ma mère ainsi qu'à toute ma famille et amis qui, de près comme de loin m'ont aidé et encouragé au moment opportun.

Enfin et surtout, mille fois merci à Caroline.



*A ma mère,  
A la mémoire de ma grand-mère qui n'a pas vu l'aboutissement de ce travail*



# Sommaire

---

Notations .....	xi
Introduction .....	xiii
1 Outils algébriques .....	1
2 Comportement linéaire des GET dans les dioïdes .....	37
3 Commande et analyse de la robustesse de systèmes $(\max, +)$ -linéaires .....	65
4 Synthèse de contrôleurs robustes pour les GET .....	81
5 Commande de systèmes $(\max, +)$ -linéaires en présence de perturbations .....	103
Table des matières .....	135
A MinMaxGD : librairie de Calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .....	141
Bibliographie .....	151



# Notations

---

$\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  : dioïde  $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ , appelé aussi algèbre  $(\max, +)$ .

$\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  : dioïde  $(\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \min, +)$ , appelé aussi algèbre  $(\min, +)$ .

$\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$  : dioïde des séries formelles en  $\gamma$  à exposants dans  $\mathbb{Z}$  et à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ .

$\overline{\mathbb{Z}}_{\min}[[\delta]]$  : dioïde des séries formelles en  $\delta$  à exposants dans  $\mathbb{Z}$  et à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ .

$\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  : dioïde des séries formelles en  $\gamma$  et  $\delta$  à exposants dans  $\mathbb{Z}$  et à coefficients booléens.

$\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  : quotient du dioïde  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  par la relation d'équivalence :

$$\forall A, B \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]] \quad , \quad A \equiv B \iff \gamma^* (\delta^{-1})^* A = \gamma^* (\delta^{-1})^* B$$

$\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$  : dioïde des élément causaux de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

$\text{Im}\Pi$  : image de l'application  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $\text{Im}\Pi = \{\Pi(s) \mid s \in \mathcal{S}\}$ .

$\Pi|_A$  : restriction de l'application  $\Pi$  au domaine  $A$ .

$B|_A\Pi$  : restriction de l'application  $\Pi$  au codomaine  $B$  (avec  $\text{Im}\Pi \subset B$ ).

$B|_A\Pi|_A$  : restriction de l'application  $\Pi$  au domaine  $A$  et au codomaine  $B$  (avec  $\Pi(A) \subset B$ ).

$\Pi^\sharp$  : application résiduée de l'application  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $\Pi^\sharp(t) = \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq t\}$ .

$L_a$  : produit à gauche par  $a$ ,  $L_a(x) = a \otimes x$ .

$R_a$  : produit à droite par  $a$ ,  $R_a(x) = x \otimes a$ .

$\mathcal{K}$  : application étoile de Kleene définie sur un dioïde complet,  $\Pi(s) = s^* = \bigoplus_{i \geq 0} s^i$ .

$\mathcal{P}$  : application "plus" dérivée de l'étoile de Kleene,  $\mathcal{P}(s) = s^+ = s \otimes s^* = \bigoplus_{i \geq 1} s^i$ .

$a \backslash b$  : notation utilisée pour représenter  $L_a^\sharp(b)$ .

$b / a$  : notation utilisée pour représenter  $R_a^\sharp(b)$ .

$I_U$  : injection canonique d'un sous-ensemble  $U$  de  $\mathcal{S}$ ,  $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$

$\text{Pr}_U$  : application résiduée de l'injection canonique,  $\text{Pr}_U : \mathcal{S} \rightarrow U$ .

$C(\mathcal{D})$  : dioïde de couples, issu d'un produit direct de dioïdes.

$C_0(\mathcal{D})$  : sous-dioïde de  $C(\mathcal{D})$  constitué des couples ordonnés de  $C(\mathcal{D})$ .

$I(\mathcal{D})$  : dioïde d'intervalles.

$\mathcal{S}(\mathcal{D})$  : ensemble des idéaux principaux d'un dioïde  $\mathcal{D}$ .

$\mathcal{I}(A, \mathcal{K})$  : ensemble des idéaux principaux  $A$ -invariants inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ .

$\mathcal{V}^*$  : plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ .

$\hat{\mathcal{V}}$  : plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ .

$\tilde{\mathcal{V}}$  : plus grand idéal principal  $(A \oplus BFC)$ -invariant inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ .



# Introduction

---

La théorie des *systèmes dynamiques à événements discrets*<sup>1</sup> s'intéresse à l'analyse et à la conduite de systèmes qui sont souvent de conception humaine. On peut par exemple citer les systèmes de production (ateliers flexibles, lignes d'assemblage) [Cohen et al., 1983, Cohen et al., 1985], les réseaux de communication (réseaux informatiques) [Le Boudec and Thiran, 2001] et les systèmes de transport (routier, ferroviaire ou aérien) [Lotito et al., 2001, Houssin, 2003].

De façon informelle, les systèmes à événements discrets peuvent être définis comme des systèmes dans lesquels les variables d'état changent sous l'occurrence d'événements. Ils ne peuvent généralement pas être décrits, à l'instar des systèmes continus classiques, par des équations différentielles en raison de la nature des phénomènes qui entrent en jeu, notamment des phénomènes de synchronisation ou d'exclusion mutuelle. Ces systèmes sont alors souvent représentés par des modèles états-transitions. Les plus connus sont les automates d'états finis qui servent pour représenter les systèmes déterministes les plus simples, les chaînes de Markov pour leur analogues stochastiques et les réseaux de Petri pour des systèmes plus complexes qui comportent à la fois des phénomènes de synchronisation, de concurrence et de parallélisme.

Le travail présenté dans ce mémoire porte sur l'approche communément appelée *théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Cette théorie, qui a vu le jour au début des années 80, concerne essentiellement les systèmes dynamiques à événements discrets qui mettent en jeu des phénomènes de synchronisation. Plus précisément, il a été mis en évidence que cette classe de systèmes admet une représentation linéaire à condition qu'elle soit décrite dans une structure algébrique particulière appelée *dioïde*. Depuis l'introduction de cette théorie, de gros efforts ont été entrepris afin de transposer, ou d'adapter, les concepts et résultats de la théorie conventionnelle des systèmes linéaires dans cette structure. Sans être exhaustif, il est possible de lister certains des résultats existants :

- Les problèmes de représentation (réponse impulsionnelle, description dans l'espace d'état) ont été abordés. On trouve également, l'approche matrice (ou fonction) de transfert, introduite par l'intermédiaire de transformées comparables à la transformée en  $z$  de la théorie des systèmes en temps discret [Cohen et al., 1984].
- Des méthodes d'analyse spectrale ont également été développées. Ces méthodes d'analyse fournissent des éléments d'évaluation de performance du système à événements discrets modélisé.
- Les concepts de stabilité interne, de contrôlabilité structurelle, ainsi que d'observabilité structurelle, ont été définis [Cohen et al., 1983, Cohen et al., 1991].
- Une véritable approche géométrique pour ces systèmes à également été introduite [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997]. On connaît l'efficacité de ces méthodes en théorie des systèmes linéaires classiques.
- Certains problèmes de commande ont pu être résolus pour ces systèmes. On peut mentionner la commande en juste-à-temps [Cohen et al., 1989]. Plus récemment, la commande avec modèle

---

<sup>1</sup>On pourra également utiliser le terme *systèmes à événements discrets*, en gardant à l'esprit qu'il s'agit d'un système dynamique.

de référence [Cottenceau et al., 2001],[Lüders and Santos-Mendes, 2002],[Maia et al., 2003] et la commande adaptative [Menguy et al., 2000] ont également été étudiées.

Le travail présenté dans ce mémoire se situe dans la continuité de ces travaux. Plusieurs problèmes de commande sont abordés. Tout d'abord, il s'agit d'étudier la robustesse d'un système pour lequel une loi de commande optimale en boucle ouverte ou en boucle fermée a été synthétisée. Plus précisément, cela va consister à caractériser l'ensemble des valeurs que peut prendre le système sans pour autant remettre en cause le caractère optimal de la loi commande. Nous abordons également le problème de synthèse de correcteurs pour des systèmes incertains, c'est-à-dire des systèmes dont les paramètres ne sont pas connus avec exactitude. Enfin, on s'intéresse à la traduction dans les dioïdes d'un problème très classique de la théorie des systèmes, le problème du contrôle en présence de perturbations.

Ce mémoire est structuré en cinq chapitres comme suit :

- Dans le premier chapitre nous présentons les outils algébriques nécessaires à la représentation et à la commande des graphes d'événements temporisés. Nous donnons tout d'abord des résultats généraux sur les structures ordonnées et treillis. Nous mentionnons également le concept d'idéal et de filtre dans un ensemble ordonné. Ces résultats jouent un rôle clé dans le chapitre cinq sur la commande en présence de perturbations. Une part importante de ce premier chapitre est ensuite consacrée à la théorie de la résiduation. En particulier il est mis en évidence que certaines applications non résiduables peuvent bénéficier de restrictions résiduables. Nous donnons également quelques éléments sur les correspondances de Galois ; celles-ci permettent de revisiter certains résultats de la théorie de la résiduation. La dernière partie de ce chapitre est entièrement dédiée à la présentation des dioïdes et de leurs liens avec les structures ordonnées présentées dans la première partie.
- Le second chapitre présente la modélisation des graphes d'événements temporisés sur différents dioïdes rencontrés dans la littérature. Nous insistons particulièrement sur la présentation du dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , qui sera le dioïde considéré pour toutes les illustrations présentées dans ce mémoire. L'avantage de cette structure concerne le transfert entrée-sortie d'un GET qui se présente alors sous forme d'une matrice rationnelle. Dès lors, l'étude des GET est liée à l'algèbre des séries rationnelles de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . Ce chapitre doit être considéré comme une synthèse bibliographique.
- Dans le troisième chapitre, nous étudions la synthèse et la robustesse de lois de commande en boucle ouverte et en boucle fermée pour les systèmes  $(\max, +)$ -linéaires. Nous désirons en particulier déterminer des marges de variations "admissibles" pour le système commandé. Nous entendons par marges admissibles, les régions dans lesquelles le système peut varier sans remettre en cause l'optimalité de la commande. Pour la boucle ouverte, l'étude de la robustesse repose sur un résultat démontré à l'aide des correspondances de Galois, nous caractérisons alors le plus grand système admettant la même commande optimale que le système nominal. Pour la boucle fermée, l'étude de la robustesse, quant à elle, découle d'un résultat sur la résiduation de fermetures.
- Dans le quatrième chapitre, nous examinons le problème de synthèse de contrôleurs robustes vis-à-vis des incertitudes paramétriques du système. Dans un premier temps, nous introduisons un dioïde d'intervalles, ce dioïde permettra par la suite de modéliser le comportement d'un système  $(\max, +)$ -linéaire qualifié d'incertain. Dans le cas de GET, ces incertitudes se traduisent par le fait que le nombre de jetons ou la durée des temporisations ne sont pas connus avec précision, on connaît seulement leurs amplitudes maximales de variation, par conséquent nous supposons qu'ils appartiennent à des intervalles. Ensuite, nous montrons en particulier que l'application produit définie sur le dioïde d'intervalles est résiduable. C'est en partie sur ce résultat que repose la

synthèse de contrôleurs robustes. Enfin, nous utilisons ces résultats dans un exemple où l'objectif est de caractériser l'ensemble des correcteurs stabilisant un graphe d'événements temporisé.

- Dans le cinquième chapitre, nous nous intéressons au problème de commande de systèmes  $(\max, +)$ -linéaires en présence de perturbations. Dans le cas de GET, ces perturbations ont pour effet de retarder le franchissement des transitions internes et par conséquent de ralentir le fonctionnement global du système. Notre objectif est de prendre en compte ces informations dans l'élaboration de la commande. Pour cela, nous introduisons tout d'abord la notion d'idéaux principaux invariants. Ensuite, nous montrons que pour certains idéaux principaux invariants il existe une commande en boucle fermée permettant de conserver l'état du système à l'intérieur de ceux-ci. Ces propriétés, nous permettent alors de donner l'expression de plusieurs correcteurs de type retour d'état et de type retour de sortie. Ce chapitre se termine par une illustration représentant un atelier de production dans lequel l'objectif est de synthétiser un correcteur permettant de diminuer les stocks internes du système dans le cas où une perturbation survient.
- Une annexe présente les scripts Scilab qui ont permis de calculer les exemples proposés tout au long du mémoire. Il s'agit de scripts utilisant la boîte à outils Lminmaxgd développée en C++ au laboratoire. Une partie des travaux de thèse a été consacrée au développement de cette boîte à outils.



# CHAPITRE 1

---

## Outils algébriques

### 1.1 Introduction

Ce chapitre présente les outils algébriques utilisés dans le cadre de ce mémoire. Sans être exhaustifs, nous proposons une présentation suffisamment détaillée permettant au lecteur non initié d'appréhender efficacement la suite de ce rapport. Les ouvrages ayant servi à sa rédaction sont [Birkhoff, 1940], [Dubreil and Dubreil-Jacotin, 1964], [Blyth and Janowitz, 1972], [Cuningham-Green, 1979], [Baccelli et al., 1992], [Gaubert, 1992]. Ce chapitre est construit de la façon suivante.

Dans les sections 1.2, 1.3 et 1.4 sont présentés un ensemble de définitions, de notations et de résultats relatifs aux structures ordonnées et aux treillis. Nous rappelons notamment des résultats généraux sur les idéaux et les filtres d'une structure ordonnée ainsi que sur les applications isotones et les morphismes de treillis [Dubreil and Dubreil-Jacotin, 1964],[Birkhoff, 1940].

Après avoir présenté les treillis, nous détaillons dans la section 1.5 la théorie de la résiduation. Cette théorie concerne des applications croissantes définies sur des ensembles ordonnés et permet sous des hypothèses de continuité de caractériser la plus grande solution de l'inéquation  $\Pi(x) \preceq b$  ou la plus petite solution de l'inéquation  $\Pi(x) \succeq b$  [Blyth and Janowitz, 1972].

Tout d'abord nous rappelons les principales propriétés des applications résiduables. Nous présentons ensuite les restrictions d'application, ce qui nous permet d'aborder l'étude d'applications "partiellement résiduables", c'est-à-dire pour lesquelles une plus grande solution existe si le domaine ou le codomaine sont restreints à un sous-ensemble. En particulier, il apparaît dans la partie 1.6 que la restriction d'une fermeture à son image est une application résiduable [Blyth and Janowitz, 1972, Cottenceau, 1999].

La théorie des correspondances de Galois permet de revisiter certains résultats de la théorie de la résiduation, lorsque les applications étudiées sont décroissantes. Après avoir rappelé la définition et les propriétés des correspondances de Galois, nous montrons dans la partie 1.8.1 que la notion de correspondance de Galois et la notion d'application résiduable coïncident, à un renversement d'ordre près [Blyth and Janowitz, 1972, Akian et al., 2002].

Le paragraphe suivant est consacré à l'étude des dioïdes. Le but de cette partie est de faire le lien entre ces structures algébriques et les résultats sur les ensembles ordonnés. Nous rappelons notamment qu'un dioïde est doté d'une structure de treillis et que la théorie de la résiduation s'applique naturellement [Cohen et al., 1989, Baccelli et al., 1992, Cohen, 1998a].

Depuis quelques années l'équipe (max, +) de l'INRIA a développé une approche géométrique comparable à l'approche développée dans [Wonham, 1985, Basile and Marro, 1992]. L'approche géométrique est notamment connue en théorie des systèmes pour apporter un regard différent sur certains problèmes de commande. Les paragraphes 1.12 et 1.13 énoncent certains des résultats obtenus [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997, Cohen et al., 1998b].

## 1.2 Structures ordonnées et treillis

Cette section présente les points clés de la théorie des treillis. Les treillis sont des concepts mathématiques que l'on peut manipuler en tant qu'ensembles ordonnés ou en tant que structures algébriques. Les treillis ont été amplement étudiés dans la littérature, nous renvoyons le lecteur à [Birkhoff, 1940] et [Dubreil-Jacotin et al., 1953] pour cette partie. Des rappels sur la théorie des treillis sont également donnés dans [Baccelli et al., 1992] et [Blyth and Janowitz, 1972].

### 1.2.1 Structures ordonnées

**Définition 1.1 (Ensemble ordonné).** Un *ensemble ordonné* est un ensemble  $\mathcal{S}$  muni d'une relation d'ordre, c'est-à-dire une relation binaire qui est réflexive, antisymétrique et transitive. Cette relation sera notée  $\preceq$  et un ensemble ordonné sera noté  $(\mathcal{S}, \preceq)$ .

Un ensemble est dit *totalelement ordonné* si deux éléments quelconques  $s$  et  $s'$  sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a  $s \preceq s'$  ou  $s' \preceq s$ .

La notation  $s \prec s'$  signifie  $s \preceq s'$  et  $s \neq s'$ .

**Remarque 1.2.** En présence d'ambiguïtés sur l'ensemble considéré, nous désignerons par la notation  $\preceq_{\mathcal{S}}$  l'ordre d'un ensemble  $\mathcal{S}$ .

Tout sous-ensemble  $U$  d'un ensemble ordonné  $(\mathcal{S}, \preceq)$  peut également être ordonné par la restriction de l'ordre de  $\mathcal{S}$  aux éléments de  $U$ , notée  $\preceq_U$ . Cet ordre restreint est simplement défini par

$$u, u' \in U \subset \mathcal{S}, \quad u \preceq u' \iff u \preceq_U u'.$$

**Remarque 1.3.** Si  $(\mathcal{S}, \preceq)$  est partiellement ordonné, un sous-ensemble  $U \subset \mathcal{S}$ , ordonné par la restriction de  $\preceq$  à  $U$ , peut être tel que tous les éléments de  $U$  soient incomparables deux à deux. L'ensemble  $(U, \preceq)$  est alors dit *totalelement non ordonné*.

Un ensemble ordonné fini  $(\mathcal{S}, \preceq)$  peut être représenté par un graphe appelé *diagramme de Hasse*. Chaque élément de  $\mathcal{S}$  est représenté par un sommet ( $\bullet$ ). Un arc reliant deux sommets du diagramme signifie que les éléments représentés par ces sommets sont comparables. Par convention, l'ordre est croissant dans le sens du bas vers le haut du diagramme.

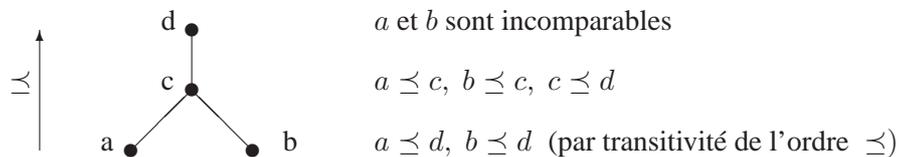


Figure 1.1 – Diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné  $(\{a, b, c, d\}, \preceq)$

Pour la figure 1.1, l'ensemble  $\mathcal{S} = \{a, b, c, d\}$  est partiellement ordonné pour l'ordre  $\preceq$  décrit par le diagramme. Le sous-ensemble  $U = \{a, b\} \subset \mathcal{S}$  est un ensemble ordonné par la restriction de  $\preceq$  à  $U$ . Néanmoins, dans ce cas précis,  $(U, \preceq)$  est totalelement non ordonné (remarque 1.3).

**Remarque 1.4.** Un ensemble totalement ordonné est également appelé une chaîne en référence à son diagramme de Hasse qui en est une.

**Exemple 1.5 (Ensembles ordonnés).**

- $(\mathbb{R}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Z}, \leq)$ ,  $(\mathbb{N}, \leq)$ ,  $(\mathbb{Q}, \leq)$  où  $\leq$  est l'ordre naturel, sont totalement ordonnés.
- Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble. L'ensemble des parties de  $\mathcal{S}$ , noté  $\mathcal{P}(\mathcal{S})$ , est un ensemble ordonné par l'inclusion. Cet ensemble ordonné est noté  $(\mathcal{P}(\mathcal{S}), \subset)$ . Il s'agit d'un ordre partiel. Par exemple, deux sous-ensembles disjoints de  $\mathcal{S}$  ne sont pas comparables suivant l'ordre  $\subset$ .
- Soit  $(\mathcal{S}, \preceq)$  un ensemble ordonné. L'ensemble des vecteurs  $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$  de  $\mathcal{S}^{2 \times 1}$  est ordonné par l'ordre

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff (\alpha \preceq a \text{ et } \beta \preceq b).$$

Même si  $\preceq$  est total sur  $\mathcal{S}$ , l'ordre qu'il induit sur  $\mathcal{S}^{2 \times 1}$  n'est que partiel.

**Remarque 1.6.** On dira que deux ensembles ordonnés sont isomorphes si leurs diagrammes de Hasse ont la même forme.

**Définition 1.7 (Majorant, minorant).** Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble muni d'une relation d'ordre  $\preceq$  et  $U$  un sous-ensemble de  $\mathcal{S}$ .

On appelle *minorant* de  $U$  tout élément  $s$  de  $\mathcal{S}$  tel que  $\forall u \in U, s \preceq u$ .

On appelle *majorant* de  $U$  tout élément  $s'$  de  $\mathcal{S}$  tel que  $\forall u \in U, u \preceq s'$ .

**Définition 1.8 (Bornes d'un ensemble).** Un sous-ensemble  $U \subset \mathcal{S}$  est dit *borné* s'il admet un majorant et un minorant. Lorsque l'ensemble des majorants de  $U$  a un plus petit élément, ce plus petit élément est appelé *borne supérieure* de  $U$ . On le note  $\sup(U)$  ou  $\bigvee U$ . De même lorsque l'ensemble des minorants de  $U$  a un plus grand élément, on l'appelle *borne inférieure* de  $U$  (notée  $\inf(U)$  ou  $\bigwedge U$ ).

**Exemple 1.9.** Soit l'ensemble  $\mathcal{S} = \{a, c, d, e, f, g, h, j\}$  partiellement ordonné pour l'ordre  $\preceq$  décrit par le diagramme de la figure 1.2. Soit le sous-ensemble  $U = \{a, d, h, j\}$ . L'ensemble des majorants  $s' = \{f, j\}$  et l'ensemble des minorants  $s = \{c, d, g\}$  de  $U$  sont hachurés. Remarquons que  $\sup(U) = j$  et  $\inf(U) = d$ . Notons qu'un minorant (resp. majorant) de  $U$  n'appartient pas forcément à  $U$ .

**Remarque 1.10 (Éléments particuliers dans un ensemble ordonné).** Dans un ensemble ordonné  $\mathcal{S}$ , on appelle *plus petit élément*, un élément  $\varepsilon_{\mathcal{S}}$  tel que l'on ait  $\varepsilon_{\mathcal{S}} \preceq s$  pour tout  $s \in \mathcal{S}$ . Notons qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement unique, car s'il y en avait deux,  $\varepsilon_{\mathcal{S}}$  et  $\varepsilon'_{\mathcal{S}}$ , on aurait  $\varepsilon_{\mathcal{S}} \preceq \varepsilon'_{\mathcal{S}}$  et  $\varepsilon'_{\mathcal{S}} \preceq \varepsilon_{\mathcal{S}}$ , donc  $\varepsilon_{\mathcal{S}} = \varepsilon'_{\mathcal{S}}$ .

De même, on appelle *plus grand élément*, un élément  $\top_{\mathcal{S}}$  tel que l'on ait  $s \preceq \top_{\mathcal{S}}$  pour tout  $s \in \mathcal{S}$ . Notons également qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement unique.

## 1.2.2 Demi-treillis et treillis

**Définition 1.11 (Demi-treillis).** Un *sup-demi-treillis* est un ensemble  $\mathcal{S}$  ordonné, dans lequel tout couple d'éléments  $(s, s')$  admet une *borne supérieure* (plus petit majorant) notée  $\sup(s, s')$  ou  $s \vee s'$ . De même, un *inf-demi-treillis* est un ensemble  $\mathcal{S}$  ordonné, dans lequel tout couple d'éléments  $(s, s')$  admet une *borne inférieure* notée  $\inf(s, s')$  ou  $s \wedge s'$ .

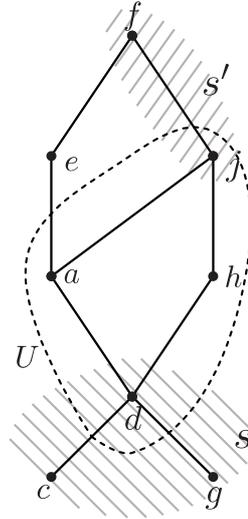


Figure 1.2 – Représentation de l'ensemble des majorants (resp. minorants) du sous-ensemble  $U \subset \mathcal{S}$

**Remarque 1.12 (Principe de dualité).** Notons  $\preceq_{\text{op}}$  l'inverse de la relation d'ordre  $\preceq$ . Si  $(\mathcal{S}, \preceq)$  est un sup-demi-treillis, alors  $(\mathcal{S}, \preceq_{\text{op}})$  est un inf-demi-treillis, et vice versa. Par conséquent, une relation impliquant  $\preceq$ ,  $\vee$  et  $\wedge$  reste vraie en remplaçant  $\preceq$  par  $\preceq_{\text{op}}$  et en permutant  $\vee$  et  $\wedge$ . Il s'agit du principe de dualité.

**Définition 1.13 (Treillis).** Un treillis est un ensemble ordonné  $(\mathcal{S}, \preceq)$  qui est à la fois un sup-demi-treillis et un inf-demi-treillis ; autrement dit, un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant.

**Exemple 1.14.**

- $(\mathbb{N}^*, \preceq_{\text{div}})$ , où l'ordre sur  $\mathbb{N}^*$  est défini par

$$a \preceq_{\text{div}} b \iff a \text{ divise } b, \quad (1.1)$$

est un treillis. Les lois de treillis de  $(\mathbb{N}^*, \preceq_{\text{div}})$  sont  $a \vee b = \text{ppcm}(a, b)$  et  $a \wedge b = \text{pgcd}(a, b)$ .

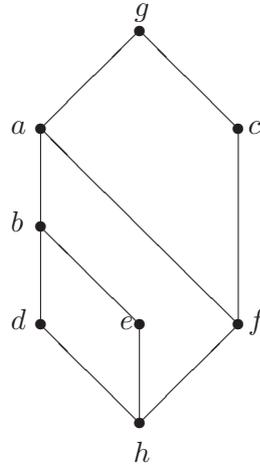
**Définition 1.15 (Sous-treillis).** On appelle sous-treillis d'un treillis  $\mathcal{S}$ , un sous-ensemble  $U$  de  $\mathcal{S}$  qui, avec chaque couple  $\{u, u'\}$  de  $U$  contient aussi  $u \vee u'$  et  $u \wedge u'$  dans  $U$ . On dit aussi que ce sous-ensemble est fermé pour les lois  $\vee$  et  $\wedge$ .

**Remarque 1.16.** Il faut noter qu'un sous-ensemble  $U$  peut être un treillis sans être un sous-treillis de  $\mathcal{S}$ .

**Exemple 1.17.** Considérons le diagramme de Hasse d'un treillis fini  $\mathcal{S}$  contenant 8 éléments (figure 1.3). On remarque que les ensembles  $\{h, d, e, b\}$ ,  $\{h, d, f, a\}$  sont des sous-treillis, il en est de même pour l'ensemble  $\{h, f, c, g\}$  qui en outre est une chaîne.

Par contre, l'ensemble  $\{h, d, e, a\}$  n'est pas un sous-treillis, car  $d \vee e$  (c.-à-d.  $b$ ) ne fait pas partie de l'ensemble.

Néanmoins on voit que  $\{h, d, e, a\}$  est un treillis (pour la relation d'ordre existant entre  $a, d, e$  et  $h$  dans  $\mathcal{S}$ ) mais pas un sous-treillis de  $\mathcal{S}$  puisque dans  $\{a, d, e, h\}$ ,  $d \vee e = a$  alors que, dans  $\mathcal{S}$ ,  $d \vee e = b$ .

Figure 1.3 – Diagramme de Hasse du Treillis  $(\mathcal{S}, \preceq)$ 

**Définition 1.18 (Demi-treillis complet et treillis complet).** Un sup-demi-treillis (resp. inf-demi-treillis)  $\mathcal{S}$  est dit sup-complet (resp. inf-complet) si tout sous-ensemble (fini ou infini) de  $\mathcal{S}$  admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant) dans  $\mathcal{S}$ . Un treillis est dit complet s'il est à la fois inf-complet et sup-complet.

**Remarque 1.19.** Pour un sup-demi-treillis complet noté  $(\mathcal{S}, \vee)$ , la borne sup de tout sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  est définie, y compris pour  $\mathcal{S}$ . Un sup-demi-treillis complet  $\mathcal{S}$  a donc nécessairement un plus grand élément noté  $\top_{\mathcal{S}} = \bigvee_{s \in \mathcal{S}} s$ . Pour la même raison, un inf-demi-treillis complet  $(\mathcal{S}, \wedge)$  a toujours un plus petit élément noté  $\varepsilon_{\mathcal{S}} = \bigwedge_{s \in \mathcal{S}} s$ . En outre, un demi-treillis fini est complet (sup-complet ou inf-complet) et un treillis fini est complet.

**Exemple 1.20.**

- En ajoutant l'élément  $+\infty$  à  $\mathbb{Z}$ , l'ensemble  $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \leq)$  est totalement ordonné sup-complet.
- En revanche,  $(\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}, \leq)$  est un ensemble totalement ordonné qui n'est ni sup-complet ni inf-complet. Par exemple, le sous-ensemble  $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\}$  de  $\mathbb{Q}$  n'a pas de plus petit majorant dans  $\mathbb{Q}$ .

**Théorème 1.21.** Un sup-demi treillis complet  $\mathcal{S}$  est un treillis complet si, et seulement si, il a un plus petit élément  $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ .

*Démonstration.*

( $\Rightarrow$ ) si  $\mathcal{S}$  est un treillis complet alors il admet un plus petit élément  $\varepsilon_{\mathcal{S}}$  (cf. définition 1.18 et remarque 1.19).

( $\Leftarrow$ ) supposons que  $\mathcal{S}$  est un sup-demi-treillis complet et possède un plus petit élément  $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ . Soit  $U = \{u_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$  un sous-ensemble non vide de  $\mathcal{S}$ , et  $M = \{m_{\beta}\}_{\beta \in B}$  l'ensemble des minorants de  $U$ . L'ensemble  $M$  est non vide puisque  $\varepsilon_{\mathcal{S}} \in M$ . Posons  $m = \bigvee_{\beta \in B} m_{\beta}$ ; l'élément  $m$  est défini dans  $\mathcal{S}$  puisque  $\mathcal{S}$  est complet.

Par définition de l'ensemble  $M$ ,

$$\forall u_{\alpha} \in U, \forall m_{\beta} \in M, \quad m_{\beta} \preceq u_{\alpha},$$

ou encore,

$$\forall u_\alpha \in U, \quad m = \bigvee_{\beta \in B} m_\beta \preceq u_\alpha.$$

Donc  $m$  est minorant de  $U$ , et par conséquent, le plus grand des minorants de  $U$ . Tout sous-ensemble non vide de  $\mathcal{S}$  admettant un plus grand minorant,  $\mathcal{S}$  est un inf-demi-treillis complet et donc également un treillis complet.  $\square$

**Remarque 1.22.** *En raison du principe de dualité énoncé dans la remarque 1.12, on peut énoncer le dual du théorème précédent : un inf-demi-treillis complet est un treillis complet si, et seulement si, il a un plus grand élément  $\top_{\mathcal{S}}$ .*

**Remarque 1.23.** *Les définitions précédentes de demi-treillis et treillis ont été introduites de façon ensembliste, elles font uniquement intervenir les propriétés de la relation d'ordre  $\preceq$  définie sur l'ensemble. Il est intéressant de faire le lien entre ce point de vue ensembliste et le point de vue algébrique.*

*En algèbre, un treillis est parfois défini comme un ensemble muni de deux opérations binaires  $\vee$  et  $\wedge$  jouissant des propriétés classiques d'associativité, de commutativité et d'idempotence, et de la propriété dite d'absorption :  $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$ . Dans ce cas, la notion d'ordre peut être dérivée ;  $x \preceq y$  est par définition  $x = x \wedge y$  (ou  $x \vee y = y$ ).*

*C'est là une des principales raisons de l'importance de la notion de treillis : elle permet de remplacer la relation  $x \preceq y$  par des équations  $x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$ , et par conséquent de traiter les questions relatives à l'ordre par des moyens algébriques : des opérations, des équations. De plus, il est désormais possible de remplacer l'expression "soit  $\mathcal{S}$  un treillis" par  $(\mathcal{S}, \preceq)$  ou par  $(\mathcal{S}, \vee, \wedge)$ .*

## 1.3 Idéaux et filtres

### 1.3.1 Idéaux

**Définition 1.24 (Idéaux dans un ensemble ordonné).** Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble ordonné. On appelle *idéal* ("lower set" en anglais) de  $\mathcal{S}$  toute partie non vide  $I$  de  $\mathcal{S}$  satisfaisant

$$(x \in I \text{ et } y \preceq x) \Rightarrow y \in I.$$

De même un idéal principal ("closed lower set" en anglais) (généralisé par  $x$ ) de  $\mathcal{S}$  est un idéal de la forme :

$$[\leftarrow, x] = \{y \in \mathcal{S} \mid y \preceq x\}.$$

### 1.3.2 Filtres

**Définition 1.25 (Filtres dans un ensemble ordonné).** Soit  $\mathcal{S}$  un ensemble ordonné. On appelle *filtre* ("upper set" en anglais) de  $\mathcal{S}$  toute partie non vide  $F$  de  $\mathcal{S}$  satisfaisant

$$(x \in F \text{ et } y \succeq x) \Rightarrow y \in F.$$

De même un filtre principal ("closed upper set" en anglais) (généralisé par  $x$ ) de  $\mathcal{S}$  est un idéal de la forme :

$$[x, \rightarrow] = \{y \in \mathcal{S} \mid y \succeq x\}.$$

**Exemple 1.26.** On considère l'ensemble ordonné de la figure 1.4. Les ensembles  $\{c\}$  et  $\{a, b, c, d, e\}$  sont des idéaux. D'autre part,  $\{a, b, d, f\}$  et  $\{a, b, c, e\}$  sont des idéaux principaux, l'un généré par  $f$  et l'autre par  $e$ . Par contre, l'ensemble  $\{b, d, e\}$  n'est pas un idéal. D'autre part,  $\{d, f, g\}$  est un filtre principal généré par  $d$ . Par contre  $\{a, b, d, f\}$  est un simple filtre.

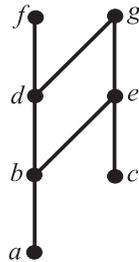


Figure 1.4 – Idéaux et Filtres dans un ensemble ordonné.

### 1.3.3 Cas d'un treillis

Dans un treillis, on considère à la fois la notion d'idéal et de filtre. Dans un treillis, tout idéal principal (resp. tout filtre principal) est un sous-treillis.

**Exemple 1.27.** On considère le sous-ensemble fini de  $(\mathbb{N}^*, \preceq_{div})$ , défini par  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ . Cet ensemble correspond à l'ensemble des diviseurs de 60. On considère alors le treillis suivant :

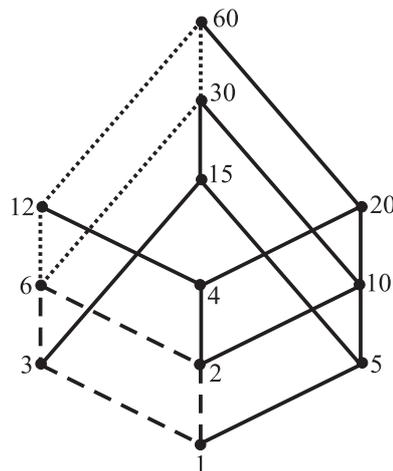


Figure 1.5 – Treillis des diviseurs de 60.

Dans ce treillis, nous avons représenté :

- L'idéal principal généré par l'élément 6, c'est-à-dire  $[\leftarrow, 6] = \{1, 2, 3, 6\}$  (en tirets). On remarque que  $[\leftarrow, 6]$  est fermé pour  $\wedge$  et  $\vee$ .

- Le filtre principal généré par l'élément 6, c'est-à-dire  $[6, \rightarrow] = \{6, 12, 30, 60\}$  (en pointillés). De même que pour l'idéal, le filtre  $[6, \rightarrow]$  est fermé pour  $\wedge$  et  $\vee$ .

## 1.4 Isotonie, morphismes et continuité

### 1.4.1 Isotonie

**Définition 1.28 (Isotone, antitone, monotone).** Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  une application définie sur des ensembles ordonnés. On dira :

$$\begin{aligned} \Pi \text{ isotone} &\equiv \forall s, s' \in \mathcal{S} \ s \preceq s' \Rightarrow \Pi(s) \preceq \Pi(s'), \\ \Pi \text{ antitone} &\equiv \forall s, s' \in \mathcal{S} \ s \preceq s' \Rightarrow \Pi(s) \succeq \Pi(s'), \\ \Pi \text{ monotone} &\equiv \Pi \text{ isotone ou } \Pi \text{ antitone.} \end{aligned}$$

### 1.4.2 Morphismes

**Définition 1.29 (Morphismes).** Soient  $(\mathcal{S}, \preceq)$  et  $(\mathcal{T}, \preceq)$  deux treillis et  $\Pi$  une application de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{T}$ . Alors  $\Pi$  est un  $\vee$ -morphisme si

$$\Pi(s \vee s') = \Pi(s) \vee \Pi(s')$$

pour tout  $s, s' \in \mathcal{S}$ .

De façon analogue,  $\Pi$  est un  $\wedge$ -morphisme si

$$\Pi(s \wedge s') = \Pi(s) \wedge \Pi(s')$$

pour tout  $s, s' \in \mathcal{S}$ .

Si  $\Pi$  est à la fois un  $\vee$ -morphisme et un  $\wedge$ -morphisme, alors  $\Pi$  est un morphisme de treillis.

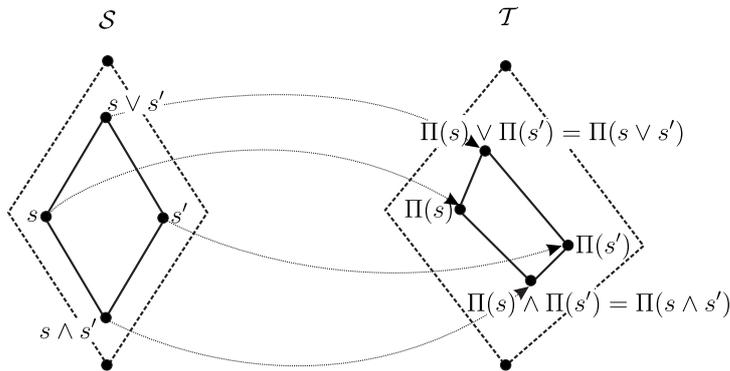


Figure 1.6 – Morphisme entre les treillis  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ .

**Remarque 1.30.** Un  $\vee$ -morphisme (resp. un  $\wedge$ -morphisme) est une application isotone. En effet, pour un  $\vee$ -morphisme par exemple : si  $s \preceq s'$ , alors  $s \vee s' = s'$ , donc  $\Pi(s \vee s') = \Pi(s) \vee \Pi(s') = \Pi(s')$ , d'où

$\Pi(s) \preceq \Pi(s')$ . Par contre la réciproque est fautive, une application isotone n'est pas nécessairement un  $\vee$  ou  $\wedge$ -morphisme. Cependant, si  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  est isotone, on aura toujours

$$\Pi(s \vee s') \succeq \Pi(s) \vee \Pi(s') \quad \forall s, s' \in \mathcal{S},$$

puisque

$$\left. \begin{array}{l} s \vee s' \succeq s \Rightarrow \Pi(s \vee s') \succeq \Pi(s) \\ s \vee s' \succeq s' \Rightarrow \Pi(s \vee s') \succeq \Pi(s') \end{array} \right\} \Rightarrow \Pi(s \vee s') \succeq \Pi(s) \vee \Pi(s').$$

De même, pour un  $\wedge$ -morphisme

$$\Pi(s \wedge s') \preceq \Pi(s) \wedge \Pi(s') \quad , \quad \forall s, s' \in \mathcal{S}.$$

**Exemple 1.31.** Considérons l'application isotone  $\Pi : (\mathbb{N}^*, \preceq_{div}) \rightarrow (\mathbb{N}^*, \preceq)$ ,  $x \mapsto x$ . Alors, soient les éléments 4 et 6 dans  $(\mathbb{N}^*, \preceq_{div})$ , le  $\vee$  vaut  $4 \vee 6 = 12$ , alors que le  $\vee$  des éléments 4 et 6 dans  $(\mathbb{N}^*, \preceq)$  vaut 6. Par conséquent on a,  $\Pi(4 \vee 6) = 12 \neq \Pi(4) \vee \Pi(6) = 6$ . Cependant, on remarque que l'on a bien  $\Pi(4 \vee 6) \succeq \Pi(4) \vee \Pi(6)$ .

**Définition 1.32 (Image d'une application).** L'image de  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  est le sous-ensemble de  $\mathcal{T}$  constitué par les éléments de  $\mathcal{T}$  de la forme  $\Pi(s)$  où  $s \in \mathcal{S}$ ; l'image de  $\Pi$  se note  $\Pi(\mathcal{S})$  ou  $\text{Im}\Pi$ .

### 1.4.3 Continuité

**Définition 1.33 (Continuité).** Soit  $\Pi$  une application d'un treillis complet  $\mathcal{S}$  dans un treillis complet  $\mathcal{T}$ , l'application  $\Pi$  est *semi-continue inférieurement* (s.c.i. en abrégé), respectivement *semi-continue supérieurement* (s.c.s.) si, pour toute partie  $U \subset \mathcal{S}$ , on a

$$\Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) = \bigvee_{u \in U} \Pi(u), \quad (1.2)$$

respectivement,

$$\Pi \left( \bigwedge_{u \in U} u \right) = \bigwedge_{u \in U} \Pi(u). \quad (1.3)$$

**Remarque 1.34.** Toute fonction semi-continue inférieurement (respectivement semi-continue supérieurement) est un  $\vee$ -morphisme (respectivement un  $\wedge$ -morphisme). Alors d'après la remarque 1.30, toute fonction semi-continue inférieurement (respectivement semi-continue supérieurement) est isotone.

**Remarque 1.35.** Si  $\Pi$  est une fonction isotone mais non semi-continue inférieurement, on ne peut plus écrire  $\Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) = \bigvee_{u \in U} \Pi(u)$ , mais on a toujours  $\Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) \succeq \bigvee_{u \in U} \Pi(u)$ . En effet,  $\Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right)$  est un majorant de l'ensemble  $\Pi(U)$ , en raison de l'isotonie de  $\Pi$ , tandis que, par définition,  $\bigvee \Pi(U)$  est le plus petit majorant de ce même ensemble.

## 1.5 Théorie de la résiduation

Dans cette partie nous allons introduire la théorie de la résiduation, dont une référence essentielle est [Blyth and Janowitz, 1972]. La référence [Cohen, 1998a] en propose également une synthèse. Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  une application définie sur des ensembles ordonnés. On s'intéresse à la résolution d'équations du type

$$\Pi(s) = t, \quad t \in \mathcal{T}. \quad (1.4)$$

Cette application  $\Pi$  peut être non surjective (problème de l'existence) et/ou non injective (problème de l'unicité). La théorie de la résiduabilité permet de donner une réponse à ce problème de résolution d'équation, en déterminant la plus grande sous-solution de l'équation (1.4) (c'est-à-dire la plus grande solution de  $\Pi(s) \preceq t$ ).

Le lecteur trouvera également dans [Cuninghame-Green, 1979, §10], [Baccelli et al., 1992, §4.4.2], [Gaubert, 1992] et [Cottenceau, 1999, §1.2] des rappels détaillés sur cette théorie.

### 1.5.1 Applications résiduables

**Définition 1.36 (Applications résiduables).** Une application isotone  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  définie sur des ensembles ordonnés est dite résiduable, si l'équation  $\Pi(s) \preceq t$  admet une plus grande solution dans  $\mathcal{S}$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$ . On notera  $\Pi^\sharp$  l'application résiduée, avec  $\Pi^\sharp(t) = \bigvee \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq t\}$ .

**Remarque 1.37.** La théorie de la résiduabilité permet aussi de considérer des équations du type  $\Pi(s) \succeq t$ . Dans ce cas, on dit que l'application  $\Pi$  est dualement résiduable si elle admet une plus petite solution dans  $\mathcal{S}$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$ , l'application résiduée est alors notée  $\Pi^\flat$ . Nous n'aborderons pas l'étude de ces applications dans la suite du manuscrit, le lecteur intéressé pourra consulter [Blyth and Janowitz, 1972] et [Cohen, 1998a].

Le théorème suivant fournit une caractérisation de ces applications.

**Théorème 1.38.** Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  une application isotone définie sur des ensembles ordonnés. Sont équivalents

1. l'application  $\Pi$  est résiduable ;
2. il existe une application  $\Pi^\sharp : (\mathcal{T}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$  isotone telle que

$$\Pi \circ \Pi^\sharp \preceq \text{Id}_{\mathcal{T}} \quad (\text{identité de } \mathcal{T}) \quad (1.5)$$

$$\Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}} \quad (\text{identité de } \mathcal{S}). \quad (1.6)$$

*Démonstration.*

**1  $\Rightarrow$  2** L'application  $\Pi$  résiduable implique que  $\Pi^\sharp(t) = \bigvee \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq t\}$  existe pour tout  $t \in \mathcal{T}$ . Par hypothèse,  $\Pi$  est isotone ; on alors  $\Pi(\Pi^\sharp(t)) \preceq t$ , c.-à-d. ,  $\Pi \circ \Pi^\sharp \preceq \text{Id}_{\mathcal{T}}$ .

D'autre part, par la définition 1.36, on a  $\Pi^\sharp(\Pi(s')) = \bigvee \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq \Pi(s')\}$  et comme  $s' \in \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq \Pi(s')\}$ , on a  $\bigvee \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq \Pi(s')\} \succeq s'$ , c'est-à-dire  $\Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ .

Il reste à montrer que  $\Pi^\sharp$  est isotone ; soit  $t' \preceq t$ , alors

$$\Pi \circ \Pi^\sharp(t') \preceq t' \preceq t \Rightarrow \Pi^\sharp(t') \in \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq t\}.$$

En d'autres termes,  $\Pi^\sharp(t')$  est solution de  $\Pi(s) \preceq t$ , ce qui implique  $\Pi^\sharp(t') \preceq \bigvee \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq t\} = \Pi^\sharp(t)$ . Donc pour résumer,  $t' \preceq t \Rightarrow \Pi^\sharp(t') \preceq \Pi^\sharp(t)$ , c'est-à-dire que l'application  $\Pi^\sharp$  est isotone.

**2  $\Rightarrow$  1** Soit  $\Pi^\sharp$  telle que  $\Pi \circ \Pi^\sharp(t) \preceq t$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$ , alors  $s = \Pi^\sharp(t)$  est toujours solution de  $\Pi(s) \preceq t$ . De plus, pour toute solution  $s' \in \mathcal{S}$  vérifiant  $\Pi(s') \preceq t$ , on a  $\Pi^\sharp(\Pi(s')) \preceq \Pi^\sharp(t)$  puisque  $\Pi^\sharp$  est isotone, c'est-à-dire d'après (1.6),  $s' \preceq \Pi^\sharp \circ \Pi(s') \preceq \Pi^\sharp(t)$ . Toute solution  $s'$  de  $\Pi(s) \preceq t$ , et ce pour tout  $t \in \mathcal{T}$ , est plus petite que  $\Pi^\sharp(t)$ . Donc l'élément  $\Pi^\sharp(t)$  est la plus grande solution de l'équation  $\Pi(s) \preceq t$  pour  $t \in \mathcal{T}$ , ou encore  $\Pi$  est résiduable.

□

**Propriétés 1.39 (Unicité de  $\Pi^\sharp$ ).** Lorsque  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  est résiduable, l'application  $\Pi^\sharp$  est unique. En effet supposons qu'il existe une autre application  $\Phi$  vérifiant le point 2 du théorème 1.38. On remarque que

$$\begin{aligned}\Pi^\sharp &= \text{Id}_{\mathcal{S}} \circ \Pi^\sharp \preceq (\Phi \circ \Pi) \circ \Pi^\sharp = \Phi \circ (\Pi \circ \Pi^\sharp) \preceq \Phi \circ \text{Id}_{\mathcal{T}} = \Phi, \\ \Phi &= \text{Id}_{\mathcal{S}} \circ \Phi \preceq (\Pi^\sharp \circ \Pi) \circ \Phi = \Pi^\sharp \circ (\Pi \circ \Phi) \preceq \Pi^\sharp \circ \text{Id}_{\mathcal{T}} = \Pi^\sharp.\end{aligned}$$

Par conséquent on a  $\Pi^\sharp = \Phi$ .

Le théorème suivant fournit des résultats de la théorie de la résiduabilité auxquels il sera fréquemment fait référence par la suite.

**Théorème 1.40.** Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  et  $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{W}$  deux applications résiduables.

$$\Pi = \Pi \circ \Pi^\sharp \circ \Pi \text{ et } \Pi^\sharp = \Pi^\sharp \circ \Pi \circ \Pi^\sharp \quad (1.7)$$

$$(\Phi \circ \Pi)^\sharp = \Pi^\sharp \circ \Phi^\sharp \quad (1.8)$$

$$\Pi \text{ est injective} \iff \Pi^\sharp \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{S}} \iff \Pi^\sharp \text{ est surjective} \quad (1.9)$$

$$\Pi \text{ est surjective} \iff \Pi \circ \Pi^\sharp = \text{Id}_{\mathcal{T}} \iff \Pi^\sharp \text{ est injective} \quad (1.10)$$

*Démonstration.*

(1.7) L'application  $\Pi$  étant résiduable, la relation (1.6) permet d'écrire

$$\Pi \circ \Pi^\sharp \circ \Pi = \Pi \circ (\Pi^\sharp \circ \Pi) \succeq \Pi.$$

Inversement, la relation (1.5) donne

$$\Pi \circ \Pi^\sharp \circ \Pi = (\Pi \circ \Pi^\sharp) \circ \Pi \preceq \Pi.$$

Ceci conduit au résultat  $\Pi = \Pi \circ \Pi^\sharp \circ \Pi$ . La démonstration de  $\Pi^\sharp = \Pi^\sharp \circ \Pi \circ \Pi^\sharp$  est similaire en se rappelant que  $\Pi^\sharp$  est isotone.

(1.8) Soient  $\Pi$  et  $\Phi$  deux applications résiduables, alors d'après (1.6) et (1.5), d'une part

$$\Phi \circ \Pi \circ \Pi^\sharp \circ \Phi^\sharp = \Phi \circ (\Pi \circ \Pi^\sharp) \circ \Phi^\sharp \preceq \Phi \circ \text{Id}_{\mathcal{T}} \circ \Phi^\sharp = \Phi \circ \Phi^\sharp \preceq \text{Id}_{\mathcal{W}},$$

et d'autre part,

$$\Pi^\sharp \circ \Phi^\sharp \circ \Phi \circ \Pi = \Pi^\sharp \circ (\Phi^\sharp \circ \Phi) \circ \Pi \succeq \Pi^\sharp \circ \text{Id}_{\mathcal{T}} \circ \Pi = \Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}.$$

En outre, d'après la propriété 1.39, si l'application  $(\Phi \circ \Pi)^\sharp$  existe, elle est unique ; par conséquent,  $(\Phi \circ \Pi)^\sharp = \Pi^\sharp \circ \Phi^\sharp$ .

(1.9) ( $\Pi^\sharp \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \Pi^\sharp$  est surjective)  $\forall s \in \mathcal{S}, \Pi^\sharp \circ \Pi(s) = s$  implique  $\mathcal{S} = \text{Im} \Pi^\sharp$ , c.-à-d.  $\Pi^\sharp$  est surjective.

( $\Pi^\sharp \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{S}} \Leftarrow \Pi^\sharp$  est surjective) Inversement, si  $\Pi^\sharp$  est surjective, pour tout  $s \in \mathcal{S}$ , il existe  $t \in \mathcal{T}$  tel que  $\Pi^\sharp(t) = s$ , donc  $\Pi^\sharp \circ \Pi(s) = \Pi^\sharp \circ \Pi \circ \Pi^\sharp(t) = \Pi^\sharp(t) = s$  (application de (1.7)).

( $\Pi^\sharp \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \Pi$  est injective)  $\Pi(s) = \Pi(s') \Rightarrow s = \Pi^\sharp \circ \Pi(s) = \Pi^\sharp \circ \Pi(s') = s'$ , donc  $\Pi$  est injective.

( $\Pi^\sharp \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{S}} \Leftarrow \Pi$  est injective) Si  $\Pi$  est injective, pour tout  $s \in \mathcal{S}$  l'égalité suivante  $\Pi \circ (\Pi^\sharp \circ \Pi(s)) = \Pi(s)$  implique  $\Pi^\sharp \circ \Pi(s) = s$ .

(1.10) Preuve semblable à (1.9). □

**Remarque 1.41.** *Il faut noter que si l'application  $\Pi$  est résiduable, et si  $\Pi(s) = t$  admet une solution, alors  $\Pi(s) = t$  admet  $\Pi^\sharp(t)$  comme plus grande solution.*

Le théorème qui suit donne une condition nécessaire et suffisante d'existence de l'application  $\Pi^\sharp$  lorsque l'application  $\Pi$  est définie sur des treillis complets.

**Théorème 1.42.** *Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  une application isotone définie sur des treillis complets  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  de plus petits éléments respectifs  $\varepsilon_{\mathcal{S}}$  et  $\varepsilon_{\mathcal{T}}$ . L'application isotone  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  est résiduable si et seulement si  $\Pi$  est semi-continue inférieurement (s.c.i) et  $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{S}}) = \varepsilon_{\mathcal{T}}$ .*

*Démonstration.* Si  $\Pi$  est résiduable, l'ensemble  $\{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq \varepsilon_{\mathcal{T}}\}$  admet un plus grand élément  $s'$  et par isotonie de  $\Pi$ ,  $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{S}}) \preceq \Pi(s') \preceq \varepsilon_{\mathcal{T}}$ . Comme, d'autre part,  $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{S}}) \succeq \varepsilon_{\mathcal{T}}$ , on a  $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{S}}) = \varepsilon_{\mathcal{T}}$ .

Montrons ensuite que  $\Pi$  est semi-continue inférieurement. L'application  $\Pi$  étant isotone, il apparaît que pour tout  $U \subset \mathcal{S}$  :

$$\Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) \succeq \bigvee_{u \in U} \Pi(u). \quad (1.11)$$

Soit  $\Pi^\sharp$  l'application résiduée de  $\Pi$ . La relation (1.6) donne  $u \preceq \Pi^\sharp \circ \Pi(u)$ , alors

$$\Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) \preceq \Pi \left( \bigvee_{u \in U} \Pi^\sharp \circ \Pi(u) \right).$$

De même l'isotonie de  $\Pi^\sharp$  entraîne

$$\Pi \left( \bigvee_{u \in U} \Pi^\sharp \circ \Pi(u) \right) \preceq \Pi \circ \Pi^\sharp \left( \bigvee_{u \in U} \Pi(u) \right).$$

Par ailleurs, la relation (1.5) donne

$$\Pi \circ \Pi^\sharp \left( \bigvee_{u \in U} \Pi(u) \right) \preceq \bigvee_{u \in U} \Pi(u).$$

Finalement, pour résumer, on obtient

$$\Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) \preceq \Pi \left( \bigvee_{u \in U} \Pi^\sharp \circ \Pi(u) \right) \preceq \Pi \circ \Pi^\sharp \left( \bigvee_{u \in U} \Pi(u) \right) \preceq \bigvee_{u \in U} \Pi(u),$$

soit l'inverse de la relation (1.11), ce qui prouve que  $\Pi$  est semi-continue inférieurement.

Réciproquement, si  $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{S}}) = \varepsilon_{\mathcal{T}}$ , pour tout  $t \in \mathcal{T}$ , l'ensemble  $U = \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \preceq t\}$  est non vide. De plus,  $\Pi$  étant semi-continue inférieurement,  $\Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) = \bigvee_{u \in U} \Pi(u)$ , donc  $U \subset \mathcal{S}$  admet un plus grand élément. □

## 1.6 Restrictions d'applications

Nous rappelons dans cette partie des résultats énoncés dans [Blyth and Janowitz, 1972] et certains dans [Cohen, 1998a] et [Cottenceau, 1999, §1.2.2]. Par *restriction d'une application* on entend la restriction de son domaine et/ou de son codomaine de définition. Les restrictions d'applications vont permettre d'étudier des cas où la propriété de résiduabilité est conservée après restriction, ou à l'inverse, des cas où la restriction d'une application non résiduable devient résiduable.

**Définition 1.43 (Injection canonique d'un sous-ensemble).** Soit  $U$  un sous-ensemble de l'ensemble  $\mathcal{S}$ . L'injection canonique de  $U$  dans  $\mathcal{S}$  est l'application  $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$ , définie par  $I_U(u) = u$  pour tout  $u \in U$ .

**Définition 1.44 (Application image).** L'application image de  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  est l'injection canonique de  $\Pi(\mathcal{S})$  dans  $\mathcal{T}$  ; cette application sera notée  $I_{\text{Im}\Pi}$ .

**Définition 1.45 (Restriction d'une application à un domaine).** Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  et  $U$  un sous-ensemble de  $\mathcal{S}$ . Nous noterons  $\Pi|_U : U \rightarrow \mathcal{T}$  l'application vérifiant

$$\Pi|_U = \Pi \circ I_U$$

où  $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$  représente l'injection canonique de  $U$  dans  $\mathcal{S}$ . L'application  $\Pi|_U$  sera appelée restriction de  $\Pi$  au domaine  $U$ .

**Définition 1.46 (Restriction d'une application à un codomaine).** Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  et  $\text{Im}\Pi \subset V \subset \mathcal{T}$ . Nous noterons  ${}_{V|}\Pi : \mathcal{S} \rightarrow V$  l'application définie par l'égalité

$$\Pi = (I_V) \circ ({}_{V|}\Pi)$$

où  $I_V : V \rightarrow \mathcal{T}$  représente l'injection canonique de  $V$  dans  $\mathcal{T}$ . L'application  ${}_{V|}\Pi$  sera dite restriction de  $\Pi$  au codomaine  $V$ .

**Définition 1.47 (Restriction double).** Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ ,  $U \subset \mathcal{S}$  et  $\Pi(U) \subset V \subset \mathcal{T}$ . Nous noterons  ${}_{V|}\Pi|_U : U \rightarrow V$  l'application définie par l'égalité

$$\Pi|_U = \Pi \circ I_U = (I_V) \circ ({}_{V|}\Pi|_U).$$

La proposition suivante concerne la résiduabilité de l'injection canonique.

**Proposition 1.48 (Lemme de projection [Blyth and Janowitz, 1972, Gaubert, 1992]).** Soient  $\mathcal{S}$  un treillis complet (cf. définition 1.18) et  $U$  un sous-treillis complet de  $\mathcal{S}$  contenant le plus petit élément  $\varepsilon_{\mathcal{S}}$  de  $\mathcal{S}$ . L'injection canonique  $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$  est résiduable. L'application résiduée  $\text{Pr}_U = I_U^\sharp$  vérifie :

- (i)  $\text{Pr}_U \circ \text{Pr}_U = \text{Pr}_U$
- (ii)  $\text{Pr}_U \preceq \text{Id}_{\mathcal{S}}$
- (iii)  $u \in U \iff \text{Pr}_U(u) = u$ .

*Démonstration.* Vérifions d'abord que  $I_U$  est une application résiduable. D'une part, comme  $\varepsilon_{\mathcal{S}} \in U$ , on a  $I_U(\varepsilon_{\mathcal{S}}) = \varepsilon_{\mathcal{S}}$ . D'autre part,  $U$  étant un sous-treillis complet, on a  $I_U\left(\bigvee_{x \in X} x\right) = \bigvee_{x \in X} I_U(x)$ , pour tout  $X \subset U$ . Par conséquent l'injection canonique  $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$  est résiduable (cf. théorème 1.42).

- (i)  $I_U^\# \circ I_U^\# = (I_U \circ I_U)^\# = I_U^\#$  (par (1.8))  
(ii)  $\text{Pr}_U = I_U \circ \text{Pr}_U = I_U \circ I_U^\# \preceq \text{Id}_S$   
(iii) si  $u \in U$ , alors  $u = I_U(u)$ , donc  $\text{Pr}_U(u) = \text{Pr}_U \circ I_U(u) = I_U^\# \circ I_U(u) \succeq u$ . En outre d'après (ii),  $\text{Pr}_U(u) = I_U \circ \text{Pr}_U(u) = I_U \circ I_U^\#(u) \preceq u$ , d'où  $u \in U \Rightarrow \text{Pr}_U(u) = u$ . La réciproque est immédiate.

□

### 1.6.1 Résiduation contrainte

Comme nous l'avons vu (§1.5) la théorie de la résiduation permet de caractériser si une application  $\Pi$  définie sur des ensembles ordonnés admet une unique application jouant le rôle d'application inverse. Si l'application est définie sur des treillis complets, il a été montré que l'existence était assurée pour peu que l'application soit semi-continue inférieure.

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la résiduation contrainte introduite par [Cohen, 1998a, §1.3]. Le problème de résiduation contrainte consiste à rechercher une solution à  $\Pi(s) \preceq b$ ,  $b \in \mathcal{T}$ , non pas dans  $\mathcal{S}$  tout entier, mais dans un sous treillis complet  $\mathcal{S}_{sub}$  de  $\mathcal{S}$  contenant le plus petit élément  $\varepsilon_{\mathcal{S}}$  de  $\mathcal{S}$ .

**Remarque 1.49.** Soit  $I_{\mathcal{S}_{sub}}$  l'injection canonique de  $\mathcal{S}_{sub}$  dans  $\mathcal{S}$ . Résoudre  $\Pi(s) \preceq t$  avec  $s \in \mathcal{S}_{sub}$  revient à considérer une équation du type

$$\Pi|_{\mathcal{S}_{sub}}(t) = \Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}}(s) \preceq t, \quad (1.12)$$

et à rechercher la plus grande solution dans  $\mathcal{S}_{sub}$ . Le diagramme suivant commute<sup>1</sup> :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{T} \\ I_{\mathcal{S}_{sub}} \uparrow & & \nearrow \Pi|_{\mathcal{S}_{sub}} \\ \mathcal{S}_{sub} & & \end{array}$$

D'après la proposition 1.48, on sait que l'injection canonique d'un sous-treillis dans un treillis est résiduable, la proposition suivante donne un élément de réponse au problème de résiduation contrainte.

**Proposition 1.50.** Soient  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  une application résiduable définie sur des treillis complets et  $I_{\mathcal{S}_{sub}}$  l'injection canonique du sous-treillis complet  $\mathcal{S}_{sub}$  (contenant le plus petit élément  $\varepsilon_{\mathcal{S}}$  de  $\mathcal{S}$ ) dans  $\mathcal{S}$ . L'équation  $\Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}}(s) \preceq t$  est résiduable et sa résiduée est donnée par

$$(\Pi|_{\mathcal{S}_{sub}})^\#(t) = (\Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}})^\#(t) = \text{Pr}_{\mathcal{S}_{sub}} \circ \Pi^\#(t). \quad (1.13)$$

*Démonstration.* D'après (1.8), on a  $(\Pi|_{\mathcal{S}_{sub}})^\# = (\Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}})^\# = I_{\mathcal{S}_{sub}}^\# \circ \Pi^\#$ . De plus par application du lemme de projection (cf. proposition 1.48),  $I_{\mathcal{S}_{sub}}^\#$  existe et est notée  $\text{Pr}_{\mathcal{S}_{sub}}$ , d'où le résultat (1.13). □

**Proposition 1.51.** Soient  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  une application résiduable définie sur des treillis complets et  $I_{\mathcal{T}_{sub}}$  l'injection canonique du sous-treillis complet  $\mathcal{T}_{sub}$  (avec  $\text{Im}\Pi \subset \mathcal{T}_{sub} \subset \mathcal{T}$ ) dans  $\mathcal{T}$ . L'application  $\mathcal{T}_{sub}| \Pi$  est résiduable et

$$(\mathcal{T}_{sub}| \Pi)^\# = \Pi^\# \circ I_{\mathcal{T}_{sub}} = (\Pi^\#)|_{\mathcal{T}_{sub}}.$$

<sup>1</sup>un tel diagramme est dit commutatif lorsque les différentes applications permettant d'aller d'un point à un autre sont égales.

*Démonstration.* Si  $\Pi$  est résiduable, alors pour tout  $t \in \mathcal{T}$ ,  $\Pi^\sharp(t)$  est la plus grande solution de  $\Pi(s) \preceq t$ . En particulier, pour tout  $t \in \mathcal{T}_{sub} \subset \mathcal{T}$ , il existe une plus grande solution à  $\Pi(s) \preceq t$ . L'application  $\mathcal{T}_{sub}|\Pi$  est donc, par définition, résiduable. Sa résiduée  $(\mathcal{T}_{sub}|\Pi)^\sharp$  est simplement la restriction de  $\Pi^\sharp$  au domaine  $\mathcal{T}_{sub}$ , notée  $(\Pi^\sharp)_{\mathcal{T}_{sub}}$ .  $\square$

## 1.7 Fermetures

Nous étudions ici une classe particulière d'applications isotones : les fermetures.

**Définition 1.52 (Fermeture).** On appelle fermeture une application  $\Pi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$ , qui a les propriétés suivantes :

- elle est extensive :  $\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$
- elle est idempotente :  $\Pi \circ \Pi = \Pi$
- elle est isotone :  $\forall s, s' \in \mathcal{S}, s \preceq s' \Rightarrow \Pi(s) \preceq \Pi(s')$

Dans ces conditions, l'image  $\Pi(s)$  d'un élément  $s \in \mathcal{S}$  s'appelle  $\Pi$ -fermeture de  $s$ , et si l'élément  $s$  est égal à sa  $\Pi$ -fermeture, on dit que  $s$  est  $\Pi$ -fermé.

Notons que si l'ensemble  $\mathcal{S}$  possède un élément maximum  $\top$ , celui-ci est  $\Pi$ -fermé ; en effet, il résulte du fait que l'application  $\Pi$  est extensive que  $\top \preceq \Pi(\top) \preceq \top$ .

**Exemple 1.53.** L'application  $\Pi_a : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, x \mapsto a \vee x$  est une fermeture ; en effet on a

$$\Pi_a \circ \Pi_a(x) = a \vee (a \vee x) = a \vee x = \Pi_a(x) \succeq x,$$

c'est-à-dire  $\Pi_a \circ \Pi_a = \Pi_a \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ .

**Lemme 1.54.** Si  $\Pi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$  et  $\Phi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$  sont des fermetures et des  $\wedge$ -morphismes, alors  $\Pi \wedge \Phi$  est aussi une fermeture.

*Démonstration.* Comme  $\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$  et  $\Phi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ , on a  $\Pi \wedge \Phi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ . De plus,  $\Pi$  et  $\Phi$  étant des  $\wedge$ -morphismes, on a

$$\begin{aligned} (\Pi \wedge \Phi) \circ (\Pi \wedge \Phi) &= (\Pi \wedge \Phi) \circ \Pi \wedge (\Pi \wedge \Phi) \circ \Phi \\ &= \Pi \circ \Pi \wedge \Phi \circ \Pi \wedge \Pi \circ \Phi \wedge \Phi \circ \Phi. \end{aligned}$$

D'autre part, comme  $\Pi$  et  $\Phi$  sont idempotentes, on a

$$\Pi \circ \Pi \wedge \Phi \circ \Pi \wedge \Pi \circ \Phi \wedge \Phi \circ \Phi = \Pi \wedge \Phi \circ \Pi \wedge \Pi \circ \Phi \wedge \Phi.$$

Mais comme,  $\Phi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \Phi \circ \Pi \succeq \Pi$  et  $\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \Pi \circ \Phi \succeq \Phi$ , on peut donc écrire

$$\Pi \wedge \Phi \circ \Pi \wedge \Pi \circ \Phi \wedge \Phi = \Pi \wedge \Phi,$$

ce qui prouve que  $\Pi \wedge \Phi$  est une fermeture.  $\square$

**Notation 1.55.** Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  une fermeture définie sur un treillis  $\mathcal{S}$ . On notera  $\text{Im}\Pi$  l'image de  $\Pi$ , c'est-à-dire

$$\text{Im}\Pi = \{\Pi(s) \mid s \in \mathcal{S}\}.$$

**Proposition 1.56.** *L'image de  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ , soit  $\text{Im}\Pi$ , correspond à l'ensemble des  $\Pi$ -fermés de  $\mathcal{S}$ .*

*Démonstration.* Par définition  $\Pi(s)$  est un fermé et d'autre part tout élément  $s$  fermé est l'image par  $\Pi$  d'au moins  $s$  lui-même, puisque  $\Pi(s) = s$ .  $\square$

**Proposition 1.57.** *Soient  $\Pi$  une fermeture d'un treillis complet  $\mathcal{S}$  et  $R$  une partie de  $\text{Im}\Pi$ . Si la partie  $R$  a une borne inférieure, celle-ci appartient encore à  $\text{Im}\Pi$ .*

*Démonstration.* Soit  $R$  une partie de  $\mathcal{S}$  constituée d'éléments de  $\text{Im}\Pi$  pour laquelle  $u = \bigwedge_{r \in R} r$  existe. Par définition de la borne inférieure, pour tout élément  $r$  de  $R$ ,  $r \succeq u$ , et, puisque  $\Pi$  est isotone,  $\Pi(r) \succeq \Pi(u)$ . De plus, comme tout élément de  $\text{Im}\Pi$  est  $\Pi$ -fermé, on a  $r = \Pi(r)$ . Il s'ensuit que  $\Pi(r) = r \succeq \Pi(u)$ , c'est-à-dire que  $\Pi(u)$  est un minorant de  $R$  et donc que  $\Pi(u) \preceq \bigwedge_{r \in R} r = u$ . Toutefois,  $\Pi$  étant extensive,  $\Pi(u) \succeq u$ . Finalement, on a  $\Pi(u) = u$ , donc la borne inférieure de  $R$  appartient bien à l'image de  $\Pi$ .  $\square$

**Proposition 1.58.** *Soit  $\Pi$  une fermeture d'un treillis complet  $\mathcal{S}$ . L'image de  $\Pi$  est, elle aussi, un treillis complet (noté  $(\text{Im}\Pi, \bigvee^{\text{Im}\Pi}, \bigwedge^{\text{Im}\Pi})$ ) pour l'ordre de  $\mathcal{S}$ ; de plus, pour toute partie  $R$  de  $\text{Im}\Pi$ ,*

$$\bigwedge_{r \in R}^{\text{Im}\Pi} r = \bigwedge_{r \in R} r \quad , \quad \bigvee_{r \in R}^{\text{Im}\Pi} r = \Pi \left( \bigvee_{r \in R} r \right). \quad (1.14)$$

*Démonstration.* Soit  $R$  une partie de  $\text{Im}\Pi$ . D'après la proposition 1.57,  $\bigwedge_{r \in R} r \in \text{Im}\Pi$ , par conséquent

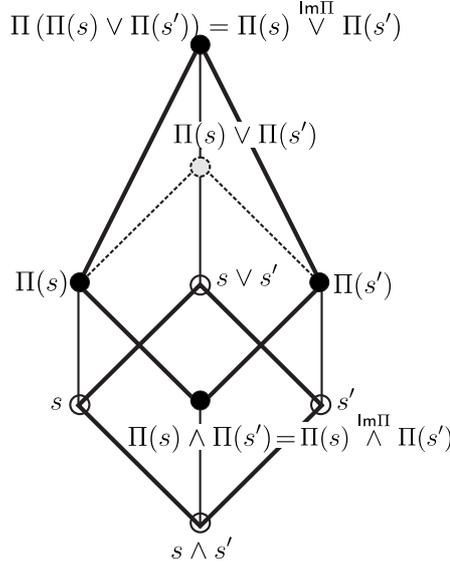
$\bigwedge_{r \in R} r = \bigwedge_{r \in R}^{\text{Im}\Pi} r$ , c'est-à-dire que  $\text{Im}\Pi$  est un inf-demi-treillis complet. En outre, on sait que le plus grand élément de  $\mathcal{S}$  est fermé. Ainsi, d'après le théorème 1.21 et la remarque 1.22,  $\text{Im}\Pi$  est un treillis complet.

Il reste à prouver la formule relative aux bornes supérieures. On pose  $u = \Pi \left( \bigvee_{r \in R} r \right)$ . L'application  $\Pi$  étant extensive, on a  $u = \Pi \left( \bigvee_{r \in R} r \right) \succeq \bigvee_{r \in R} r$ ; autrement dit,  $u$  est un majorant de  $R$  dans  $\mathcal{S}$ . En outre,  $u \in \text{Im}\Pi$ ; par conséquent  $u$  est un majorant de  $R$  dans  $\text{Im}\Pi$ . Alors, soit  $y \succeq \bigvee_{r \in R} r$ , et, puisque  $\Pi$  est croissante,  $\Pi(y) \succeq \Pi \left( \bigvee_{r \in R} r \right) = u$ . Si, en particulier,  $y \in \text{Im}\Pi$ , on voit que  $\Pi(y) = y \succeq u$ . On prouve ainsi que  $u$  est effectivement le plus petit majorant de  $R$  dans  $\text{Im}\Pi$ .  $\square$

**Remarque 1.59.** *La proposition précédente montre que l'image d'une fermeture  $\Pi$ , soit  $\text{Im}\Pi$ , dans un treillis complet  $\mathcal{S}$  est stable pour l'opération  $\wedge$ , c'est-à-dire  $\Pi(s) \wedge \Pi(s') \in \text{Im}\Pi$ , et que l'opération  $\vee$  n'est d'ordinaire pas fermée, c'est-à-dire que  $\Pi(s) \vee \Pi(s')$  n'appartient pas à  $\text{Im}\Pi$ . Par conséquent  $\text{Im}\Pi$  n'est donc pas un sous-treillis de  $\mathcal{S}$ . Néanmoins, on peut munir  $\text{Im}\Pi$  d'une structure de treillis, ce treillis  $(\text{Im}\Pi, \bigvee^{\text{Im}\Pi}, \bigwedge^{\text{Im}\Pi})$  est défini par*

$$\forall s_1, \forall s_2 \in \text{Im}\Pi \quad \begin{cases} s_1 \bigvee^{\text{Im}\Pi} s_2 = \Pi(s_1 \vee s_2) \\ s_1 \bigwedge^{\text{Im}\Pi} s_2 = s_1 \wedge s_2 \end{cases} .$$

*Ce treillis  $(\text{Im}\Pi, \bigvee^{\text{Im}\Pi}, \bigwedge^{\text{Im}\Pi})$  admet  $\top$ , le plus grand élément de  $\mathcal{S}$ , pour majorant universel, et  $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{S}}) = \varepsilon_{\text{Im}\Pi}$ , élément minimum de  $\text{Im}\Pi$  dans  $\mathcal{S}$ , pour minorant universel. Schématiquement, les éléments de  $\mathcal{S}$  et  $\text{Im}\Pi$  peuvent être représentés par la figure 1.7.*


 Figure 1.7 –  $\circ$  éléments du treillis  $\mathcal{S}$  et  $\bullet$  éléments de  $\text{Im}\Pi$ .

**Proposition 1.60.** Soit  ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi$  l'application définie du treillis  $(\mathcal{S}, \vee, \wedge)$  dans le treillis  $(\text{Im}\Pi, \overset{\text{Im}\Pi}{\vee}, \overset{\text{Im}\Pi}{\wedge})$ , alors  ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi$  est un  $\vee$ -morphisme, c'est-à-dire

$${}_{\text{Im}\Pi}\Pi(s \vee s') = {}_{\text{Im}\Pi}\Pi(s) \vee_{\text{Im}\Pi} {}_{\text{Im}\Pi}\Pi(s') \quad , \quad \forall s, s' \in \mathcal{S}.$$

*Démonstration.* Pour tout couple  $s, s' \in \mathcal{S}$ , l'application  $\Pi$  étant extensive, on a  $\Pi(s) \succeq s$  et  $\Pi(s') \succeq s'$ , d'où

$$\Pi(s) \vee \Pi(s') \succeq s \vee s'.$$

D'autre part, par définition de  $\overset{\text{Im}\Pi}{\vee}$  et par isotonie de  $\Pi$  on a

$$\Pi(s) \overset{\text{Im}\Pi}{\vee} \Pi(s') = \Pi(\Pi(s) \vee \Pi(s')) \succeq \Pi(s \vee s') \succeq \Pi(s) \vee \Pi(s') \quad (\text{cf. remarque 1.30}).$$

Par ailleurs, l'application  $\Pi$  étant idempotente, on a  $\Pi^2 = \Pi$ ; on obtient alors

$$\Pi(s \vee s') = \Pi^2(s \vee s') = \Pi(\Pi(s \vee s')) \succeq \Pi(\Pi(s) \vee \Pi(s')) = \Pi(s) \overset{\text{Im}\Pi}{\vee} \Pi(s').$$

Donc,  $\Pi(s \vee s') = \Pi(s) \overset{\text{Im}\Pi}{\vee} \Pi(s')$ , par conséquent  ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi$  est un  $\vee$ -morphisme.  $\square$

### 1.7.1 Fermeture et résiduation

**Proposition 1.61.** Soit  $\Pi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$  une fermeture définie sur un treillis complet  $\mathcal{S}$ . La restriction  ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi$  est résiduable et sa résiduée

$$({}_{\text{Im}\Pi}\Pi)^\sharp = I_{\text{Im}\Pi}$$

est l'injection canonique  $I_{\text{Im}\Pi}$  de  $\text{Im}\Pi$  dans  $\mathcal{S}$ .

*Démonstration.* D'après le théorème 1.38  ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi$  est résiduable si et seulement si il existe une application  $\Pi^\sharp$  telle que  ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi \circ \Pi^\sharp \preceq \text{Id}_{\text{Im}\Pi}$  et  $\Pi^\sharp \circ {}_{\text{Im}\Pi}\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ . En posant  $\Pi^\sharp = I_{\text{Im}\Pi}$ , où  $I_{\text{Im}\Pi}$  est l'injection canonique de  $\text{Im}\Pi$  dans  $\mathcal{S}$ , on vérifie que  ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi \circ I_{\text{Im}\Pi} = {}_{\text{Im}\Pi}\Pi|_{\text{Im}\Pi} = \text{Id}_{\text{Im}\Pi}$  (identité de  $\text{Im}\Pi$ ) puisque  $\Pi \circ \Pi = \Pi$  (définition 1.52); de même, d'après la définition 1.46, on a  $I_{\text{Im}\Pi} \circ {}_{\text{Im}\Pi}\Pi = \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ .  $\square$

**Proposition 1.62.** *Une fermeture résiduable  $\Pi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$  vérifie :*

- (i)  $\Pi = \Pi^\sharp \circ \Pi$
- (ii)  $\Pi = \Pi \circ \Pi^\sharp$ .

*Démonstration.*

- (i) L'application  $\Pi$  étant résiduable, le point (ii) du théorème 1.38 donne  $\Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ , ce qui implique  $\Pi^\sharp \circ \Pi \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}} \circ \Pi = \Pi$ ;  $\Pi$  étant une fermeture, on a  $\Pi^\sharp \circ \Pi \circ \Pi = \Pi^\sharp \circ \Pi$ , soit  $\Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \Pi$ . D'autre part,  $\Pi$  étant résiduable, on a (d'après (1.7))  $\Pi = \Pi \circ \Pi^\sharp \circ \Pi$ ; de plus, d'après la définition d'une fermeture  $\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ , nous avons donc  $\Pi = \Pi \circ \Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}} \circ \Pi^\sharp \circ \Pi = \Pi^\sharp \circ \Pi$ , soit  $\Pi \succeq \Pi^\sharp \circ \Pi$ . Finalement, on a  $\Pi = \Pi^\sharp \circ \Pi$ .
- (ii) Preuve duale de (i).

$\square$

## 1.8 Correspondances de Galois

Les applications résiduables sont parfois appelées correspondances de Galois. Dans la suite, nous allons considérer les correspondances de Galois au sens de [Ore, 1944] (voir définition 1.63). Nous verrons que les applications résiduables/résiduées et les correspondances de Galois sont équivalentes selon une dualité d'ordre. Nous expliquerons cette dualité à la fin du paragraphe.

**Définition 1.63 (Correspondance de Galois).** Soient  $(\mathcal{S}, \preceq)$  et  $(\mathcal{T}, \preceq)$  deux treillis complets et deux applications  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  et  $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$ . On dit que le couple  $(\Pi, \Phi)$  d'applications établit une correspondance de Galois entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

- (i)  $\forall s, s' \in \mathcal{S}, s \preceq s' \Rightarrow \Pi(s) \succeq \Pi(s')$  ( $\Pi$  est antitone)
- (ii)  $\forall t, t' \in \mathcal{T}, t \preceq t' \Rightarrow \Phi(t) \succeq \Phi(t')$  ( $\Phi$  est antitone)
- (iii) pour tout élément  $s$  de  $\mathcal{S}$ ,  $s \preceq \Phi \circ \Pi(s)$
- (iv) pour tout élément  $t$  de  $\mathcal{T}$ ,  $t \preceq \Pi \circ \Phi(t)$

**Remarque 1.64.** *Il est important de noter que le résultat de la composition d'applications antitones est isotone; en effet, d'après la définition d'une application antitone, on a  $s \preceq s' \Rightarrow \Pi(s) \succeq \Pi(s') \Rightarrow \Phi(\Pi(s)) \preceq \Phi(\Pi(s'))$ .*

**Proposition 1.65.** *Soient  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  et  $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$  deux applications définies sur des treillis complets. Établir que le couple  $(\Pi, \Phi)$  est une correspondance de Galois (définition 1.63) entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  est équivalent à avoir la condition suivante*

$$\forall s \in \mathcal{S}, \forall t \in \mathcal{T} \quad s \preceq \Phi(t) \iff t \preceq \Pi(s), \quad (1.15)$$

ou plus explicitement,

$$\Phi(t) = \bigvee \{s \in \mathcal{S} \mid \Pi(s) \succeq t\}$$

et

$$\Pi(s) = \bigvee \{t \in \mathcal{T} \mid \Phi(t) \succeq s\}.$$

*Démonstration.* On suppose que le couple  $(\Pi, \Phi)$  forme une correspondance de Galois, et soit  $t \preceq \Pi(s)$ . Alors en appliquant successivement les points (ii) et (iii) de la définition 1.63, nous obtenons

$$t \preceq \Pi(s) \implies \Phi(t) \succeq \Phi(\Pi(s)) = \Phi \circ \Pi(s) \succeq s,$$

d'où le résultat  $t \preceq \Pi(s) \implies \Phi(t) \succeq s$ .

Maintenant, si  $s \preceq \Phi(t)$ , d'après (i) et (iv) de la définition 1.63, on a

$$s \preceq \Phi(t) \implies \Pi(s) \succeq \Pi(\Phi(t)) = \Pi \circ \Phi(t) \succeq t.$$

Par conséquent, si  $(\Pi, \Phi)$  est une correspondance de Galois, on a bien le résultat  $\forall s \in \mathcal{S}, \forall t \in \mathcal{T}, s \preceq \Phi(t) \iff t \preceq \Pi(s)$ .

Réciproquement, on suppose que l'on a  $s \preceq \Phi(t) \iff t \preceq \Pi(s)$ . Pour tout  $s \in \mathcal{S}$  nous pouvons écrire  $\Pi(s) \preceq \Pi(s)$ ; alors, par hypothèse :

$$\Pi(s) \preceq \Pi(s) \iff s \preceq \Phi(\Pi(s)) = \Phi \circ \Pi(s),$$

on vérifie donc bien le point (iii) de la définition 1.63. Soit  $s, s' \in \mathcal{S}$  avec  $s \preceq s'$ , d'après (iii) on a  $s' \preceq \Phi \circ \Pi(s')$ , c'est-à-dire

$$s \preceq s' \preceq \Phi \circ \Pi(s') = \Phi(\Pi(s')).$$

Alors d'après notre hypothèse en prenant  $t = \Pi(s')$ , on a

$$s \preceq s' \preceq \Phi(\Pi(s')) \iff \Pi(s') \preceq \Pi(s),$$

ce qui implique  $s \preceq s' \implies \Pi(s') \preceq \Pi(s)$ . On obtient ainsi le point (i) de la définition. Pour les points (ii) et (iv) la preuve est similaire.  $\square$

**Proposition 1.66.** *Soit  $(\Pi, \Phi)$  un couple d'applications établissant une correspondance de Galois entre deux treillis complets  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ , alors pour tout  $U \subset \mathcal{S}$*

$$\Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) = \bigwedge_{u \in U} \Pi(u) \quad \text{et} \quad \Phi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) = \bigwedge_{u \in U} \Phi(u).$$

*Démonstration.* On a,

$$t \preceq \Pi \left( \bigvee_{u \in U} u \right) \iff \Phi(t) \succeq \bigvee_{u \in U} u \iff (\forall u \in U, \Phi(t) \succeq u) \iff (\forall u \in U, t \preceq \Pi(u)) \iff t \preceq \bigwedge_{u \in U} \Pi(u),$$

pour tout  $U \subset \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}$ . La preuve est similaire pour l'autre égalité.  $\square$

**Théorème 1.67 ([Ore, 1944]).** *Soit  $(\Pi, \Phi)$  un couple d'applications établissant une correspondance de Galois entre des ensembles ordonnés  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ . Alors  $\Phi \circ \Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  et  $\Pi \circ \Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$  sont des fermetures.*

*Démonstration.* Il résulte de la définition d'une correspondance de Galois que  $\Phi \circ \Pi$  est extensive (c.-à-d.  $\Phi \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ ) et isotone ( $\Phi \circ \Pi$  étant la composition de deux applications antitones). Il reste à montrer qu'elle est idempotente. Or d'après la définition 1.63, pour tout élément  $s$  de  $\mathcal{S}$ ,

$$\Phi \circ \Pi \circ \Phi \circ \Pi(s) = (\Phi \circ \Pi) \circ \Phi \circ \Pi(s) \succeq \Phi \circ \Pi(s). \quad (1.16)$$

Mais  $\Pi(s) \in \mathcal{T}$ , et ainsi, d'après la définition 1.63,  $\Pi(s) \preceq \Pi \circ \Phi(\Pi(s)) = \Pi \circ \Phi \circ \Pi(s)$ . Il résulte de l'antitonicité de  $\Phi$  que

$$\Phi \circ \Pi(s) \succeq \Phi \circ \Pi \circ \Phi \circ \Pi(s). \quad (1.17)$$

(1.16) et (1.17) conduisent à  $\Phi \circ \Pi \circ \Phi \circ \Pi = (\Phi \circ \Pi) \circ (\Phi \circ \Pi) = \Phi \circ \Pi$ . En échangeant les rôles de  $\Pi$  et  $\Phi$ , on voit que  $\Pi \circ \Phi$  est aussi une fermeture.  $\square$

**Proposition 1.68.** Soient  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  et  $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{S}$  deux applications définies sur des treillis complets. Si le couple  $(\Pi, \Phi)$  établit une correspondance de Galois, alors on a

$$\Pi \circ \Phi \circ \Pi = \Pi \quad (1.18)$$

$$\Phi \circ \Pi \circ \Phi = \Phi \quad (1.19)$$

*Démonstration.* Si  $(\Pi, \Phi)$  établit une correspondance de Galois, alors le point (iv) de la définition 1.63 donne  $t \preceq \Pi \circ \Phi(t)$  pour tout  $t \in \mathcal{T}$ . On pose  $t = \Pi(s)$ , on obtient alors  $\Pi(s) \preceq \Pi \circ \Phi \circ \Pi(s)$ . D'autre part, d'après le point (iii) de la définition d'une correspondance de Galois, on a  $s \preceq \Phi \circ \Pi(s)$  et comme  $\Pi$  est une application antitone (point (i) de 1.63), on a  $\Pi(s) \succeq \Pi \circ \Phi \circ \Pi(s)$ , d'où l'égalité  $\Pi \circ \Phi \circ \Pi = \Pi$ . Pour (1.19), la preuve est duale de (1.18).  $\square$

### 1.8.1 Lien entre correspondance de Galois et résiduation

Comme de nombreux auteurs [Blyth and Janowitz, 1972, Picado, , Gaubert, 1992] le mentionnent, les applications résiduées et les correspondances de Galois sont équivalentes selon une dualité d'ordre.

**Définition 1.69.** Si  $(\mathcal{S}, \preceq_{\mathcal{S}})$  est un ensemble ordonné, on note par  $(\mathcal{S}^{\text{op}}, \preceq_{\mathcal{S}^{\text{op}}})$  l'ensemble ordonné opposé, pour lequel  $s \preceq_{\mathcal{S}^{\text{op}}} s' \Leftrightarrow s \succeq_{\mathcal{S}} s'$ .

**Proposition 1.70.** Soit  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}^{\text{op}}$  une application résiduable définie sur des treillis complets. Alors le couple  $(\Pi, \Pi^{\sharp})$  établit une correspondance de Galois entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$ .

*Démonstration.* Si  $\Pi$  est une application résiduable alors d'après le théorème 1.38, les applications  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}^{\text{op}}$  et  $\Pi^{\sharp} : \mathcal{T}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{S}$  sont isotones, c'est-à-dire antitones sur  $\mathcal{S}, \mathcal{T}$ . Par ailleurs, la relation (1.6) du théorème 1.38 donne

$$\Pi(s) \preceq_{\mathcal{T}^{\text{op}}} \Pi(s) \Leftrightarrow \Pi^{\sharp} \circ \Pi(s) \preceq_{\mathcal{S}} \Pi^{\sharp} \circ \Pi(s) \Leftrightarrow s \preceq_{\mathcal{S}} \Pi^{\sharp} \circ \Pi(s).$$

De même, d'après (1.5), on a

$$\Pi^{\sharp}(t) \preceq_{\mathcal{S}} \Pi^{\sharp}(t) \Leftrightarrow \Pi \circ \Pi^{\sharp}(t) \preceq_{\mathcal{T}^{\text{op}}} \Pi \circ \Pi^{\sharp}(t) \Leftrightarrow \Pi \circ \Pi^{\sharp}(t) \preceq_{\mathcal{T}^{\text{op}}} t \Leftrightarrow \Pi \circ \Pi^{\sharp}(t) \succeq_{\mathcal{T}} t$$

pour tout  $s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}$ . Alors le couple d'applications  $(\Pi, \Pi^{\sharp})$  établit une correspondance de Galois entre  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{T}$  puisque  $\Pi^{\sharp} \circ \Pi(s) \succeq_{\mathcal{S}} s$  et  $\Pi \circ \Pi^{\sharp}(t) \succeq_{\mathcal{T}} t$ .  $\square$

**Remarque 1.71.** La proposition précédente précise le lien entre les applications résiduables/résiduées et les correspondances de Galois. En effet, à un couple  $(\Pi, \Phi)$  de correspondances de Galois entre  $(\mathcal{S}, \preceq)$  et  $(\mathcal{T}, \preceq)$  correspond un couple d'applications telles que  $\Pi$  est une application résiduable de  $\mathcal{S}$  dans  $\mathcal{T}^{\text{op}}$ , et  $\Phi$  une application résiduée de  $\mathcal{T}^{\text{op}}$  dans  $\mathcal{S}$ .

**Remarque 1.72.** Comme il est souligné dans [Blyth and Janowitz, 1972] il est souvent préférable d'utiliser la théorie de la résiduation plutôt que les correspondances de Galois. La raison principale vient du fait que la composition d'applications résiduables donne une nouvelle application résiduable, ce qui n'est pas le cas pour des applications antitones. En effet, si  $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$  et  $\Phi : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{W}$  sont des applications résiduables, alors  $\Phi \circ \Pi$  est clairement résiduable, puisque  $(\Phi \circ \Pi)^{\sharp} = \Pi^{\sharp} \circ \Phi^{\sharp}$  (1.8).

## 1.9 Monoïdes et dioïdes : approche combinatoire

Cette section est un rappel sur les structures algébriques considérées. Le but de ce paragraphe est d'introduire les concepts et notations qui seront utiles pour l'étude de la commande de graphes d'événements temporisés. Les ouvrages de référence qui ont inspiré cette synthèse sont [Cuninghame-Green, 1979], [Baccelli et al., 1992] et [Gunawardena, 1998] ainsi que les thèses [Moller, 1988],[Gaubert, 1992] et [Cottenceau, 1999].

**Définition 1.73 (Monoïde).** Un *monoïde* est un ensemble  $\mathcal{C}$  muni d'une loi de composition interne associative, et d'un élément neutre pour cette loi. Nous noterons la loi additivement

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (a, b) &\mapsto a \oplus b\end{aligned}$$

et l'élément neutre sera noté  $\varepsilon$ . Le monoïde est dit *commutatif* si l'on a

$$a \oplus b = b \oplus a$$

pour tous les éléments  $a, b \in \mathcal{C}$ .

**Remarque 1.74.** Un élément  $a \in \mathcal{C}$  est *idempotent* si  $a \oplus a = a$ . Si tous les éléments de  $\mathcal{C}$  sont idempotents, le monoïde  $(\mathcal{C}, \oplus)$  est dit *idempotent*.

**Exemple 1.75.** L'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  muni de l'addition est un monoïde. Il s'agit d'un monoïde commutatif :  $\forall a, b \in \mathbb{N}, a + b = b + a$ . L'élément neutre de  $\mathbb{N}$  est 0.

**Définition 1.76 (Demi-anneau, dioïde).** On appelle *demi-anneau* un ensemble  $\mathcal{D}$  muni de deux lois internes  $\oplus$  et  $\otimes$  tel que :

- $(\mathcal{D}, \oplus)$  est un monoïde commutatif dont l'élément neutre  $\varepsilon$  est appelé élément nul.
- $(\mathcal{D}, \otimes)$  est un monoïde. Son élément neutre est appelé unité et est noté  $e$ .
- La loi multiplicative  $\otimes$  est distributive à droite et à gauche par rapport à la loi additive  $\oplus$ .
- L'élément neutre  $\varepsilon$  est absorbant pour la loi  $\otimes$  ( $\forall a \in \mathcal{D}, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ ).

Si en outre la loi  $\oplus$  est idempotente (cf. remarque 1.74), alors  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  est qualifié de *demi-anneau idempotent* ou *dioïde*.

**Exemple 1.77 (Algèbres  $(\max, +)$  et  $(\min, +)$ ).** On peut vérifier aisément que :

- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  est un dioïde commutatif pour lequel  $\varepsilon = -\infty$  et  $e = 0$ . Ce dioïde est noté  $\mathbb{R}_{\max}$  et est traditionnellement appelé "algèbre  $(\max, +)$ ".
- $\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  est un dioïde commutatif, appelé "algèbre  $(\min, +)$ ", pour lequel  $\varepsilon = +\infty$  et  $e = 0$ .

### 1.9.1 Sous-dioïde

**Définition 1.78 (Sous-dioïde).** Soit  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  un dioïde. Un sous-ensemble  $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$  est un sous-dioïde de  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  si et seulement si :

- $\varepsilon \in \mathcal{C}$  et  $e \in \mathcal{C}$  ;
- $\mathcal{C}$  est fermé pour les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ .

Le second point signifie que  $\forall a, b \in \mathcal{C}, a \oplus b \in \mathcal{C}$  et  $a \otimes b \in \mathcal{C}$ .

**Exemple 1.79.**  $\mathbb{Z}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$  et  $\mathbb{Z}_{\min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$  sont respectivement des sous-dioïdes de  $\mathbb{R}_{\max}$  et  $\mathbb{R}_{\min}$ .

### 1.9.2 Calcul matriciel dans les dioïdes

**Exemple 1.80 (Dioïde matriciel).** Soit  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  un dioïde, on note  $\mathcal{D}^{n \times n}$  l'ensemble des matrices carrées à  $n$  lignes et  $n$  colonnes à coefficients dans  $\mathcal{D}$ . La somme et le produit de matrices sont définis de façon classique par :

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \quad \text{et} \quad (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj} \quad \forall i, j = 1 \dots, n, \forall A, B \in \mathcal{D}^{n \times n}.$$

L'ensemble  $\mathcal{D}^{n \times n}$  muni de ces deux opérations est un dioïde. L'élément neutre pour la loi  $\oplus$  est la matrice dont tous les coefficients valent  $\varepsilon$ , laquelle sera aussi notée  $\varepsilon$ . L'élément neutre pour la loi  $\otimes$  est la matrice dont tous les coefficients valent  $\varepsilon$ , sauf ceux de la diagonale qui valent  $e$ . Cette matrice sera notée  $e$ , ou  $E$  lorsqu'il est utile de la distinguer du scalaire  $e$ .

### 1.9.3 Séries formelles dans les dioïdes

**Exemple 1.81.** Soit  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  un dioïde et  $f$  une application de  $\mathbb{Z}$  dans  $\mathcal{D}$ . On définit la série formelle  $F(z)$  en l'indéterminée  $z$  à coefficients dans  $\mathcal{D}$  par :

$$F(z) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} f(t) z^t.$$

Nous désignerons par  $\langle F(z), z^t \rangle$  le coefficient  $f(t)$  de  $F(z)$  pour  $z^t$ . L'ensemble des séries formelles en l'indéterminée  $z$  et à coefficients dans  $\mathcal{D}$  muni des opérations

$$\begin{aligned} F(z) \oplus G(z) &: \langle F(z) \oplus G(z), z^t \rangle = \langle F(z), z^t \rangle \oplus \langle G(z), z^t \rangle \\ F(z) \otimes G(z) &: \langle F(z) \otimes G(z), z^t \rangle = \bigoplus_{i+j=t} \langle F(z), z^i \rangle \otimes \langle G(z), z^j \rangle \end{aligned}$$

est un dioïde noté  $\mathcal{D}[[z]]$ .

**Exemple 1.82 (Dioïde de polynômes).** On appelle support d'une série formelle  $F(z)$  l'ensemble

$$\text{Supp}(F(z)) = \{t \in \mathbb{Z} \mid f(t) \neq \varepsilon\}.$$

Lorsque le support est fini on parle de polynôme. Le sous-ensemble des polynômes muni des mêmes lois que  $\mathcal{D}[[z]]$  est un sous-dioïde de  $\mathcal{D}[[z]]$  noté  $\mathcal{D}[z]$ .

## 1.10 Dioïdes et structures ordonnées

L'objet de ce paragraphe est d'établir un lien entre les dioïdes présentés précédemment de façon purement combinatoire et la théorie des treillis. Ce lien entre dioïdes et treillis va permettre d'énoncer des résultats obtenus en appliquant certains résultats de la partie consacrée aux treillis. Les ouvrages de référence pour cette partie sont [Cuninghame-Green, 1979] et [Baccelli et al., 1992]

### 1.10.1 Dioïdes canoniquement ordonnés

L'idempotence de la loi additive  $\oplus$  permet de définir naturellement une relation d'ordre dans un dioïde. Le théorème suivant affirme de plus que cette relation d'ordre est compatible avec les lois du dioïde.

**Théorème 1.83.** *Dans un dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ , la relation  $\preceq$  définie par*

$$a \preceq b \iff a \oplus b = b \tag{1.20}$$

*est une relation d'ordre. De plus cette relation d'ordre est compatible avec les lois de structure de  $\mathcal{D}$ , c'est-à-dire,*

$$\begin{aligned} a \preceq b &\Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c && \forall c \in \mathcal{D}, \\ a \preceq b &\Rightarrow a \otimes c \preceq b \otimes c \text{ et } c \otimes a \preceq c \otimes b && \forall c \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

*Démonstration.* Comme l'addition est idempotente, on a  $a = a \oplus a \succeq a$ , ce qui montre la réflexivité. L'addition étant commutative, si  $a \preceq b$  et  $b \preceq a$  alors  $b = a \oplus b = b \oplus a = a$ , d'où  $a = b$ , ce qui prouve l'antisymétrie. Il reste à montrer la transitivité :  $a \preceq b$  et  $b \preceq c$  alors  $c = b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c$ . On en déduit que  $\preceq$  est une relation d'ordre.

Montrons que la relation d'ordre est compatible avec les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ . Soit  $a, b \in \mathcal{D}$  avec  $a \preceq b$  et soit  $c \in \mathcal{D}$ , on a  $b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus b \oplus c = a \oplus c \oplus b \oplus c = (a \oplus c) \oplus (b \oplus c)$ , d'où  $a \oplus c \preceq b \oplus c$ . De même,  $b \otimes c = (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ , d'où  $a \otimes c \preceq b \otimes c$  (*idem* pour la multiplication à gauche).  $\square$

La relation d'ordre est dite *totale* si

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \preceq b \text{ ou } b \preceq a.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre d'un dioïde soit total, s'écrit de façon évidente

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \oplus b = b \text{ ou } a.$$

C'est-à-dire que l'opération  $\oplus$  vérifie la propriété dite de sélectivité ; dans ce cas le monoïde  $(\mathcal{D}, \oplus)$  et le dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  sont dits sélectifs ([Gondran and Minoux, 2001, § 6.4]).

**Remarque 1.84.** *L'ordre  $\preceq$  défini dans  $\mathbb{R}_{\max}$  est total et coïncide avec l'ordre usuel  $\leq$ . En revanche, l'ordre total  $\preceq$  défini dans  $\mathbb{R}_{\min}$  est l'inverse de l'ordre usuel  $\leq$  (par exemple  $2 \preceq 1$ ).*

### 1.10.2 Dioïdes et treillis

Dans cette partie nous présentons les relations entre dioïdes, sup-demi-treillis et treillis. Le théorème 1.83 de la partie précédente permet d'établir que l'idempotence de la somme dans un dioïde induit une structure de *sup-demi-treillis* (définition 1.11), pour lequel la borne supérieure, notée  $\vee$ , correspond à la loi additive  $\oplus$  ( $a \oplus b$  est le plus petit majorant de  $a$  et  $b$ ) du dioïde. De même en considérant la remarque 1.23 sur la définition algébrique d'un *sup-demi-treillis*, on peut noter que la loi  $\vee$  d'un *sup-demi-treillis* est associative, commutative et idempotente, c'est-à-dire que  $\vee$  possède les mêmes axiomes que la loi additive  $\oplus$  d'un dioïde. De plus, on sait, d'après la définition 1.76, qu'un dioïde possède un élément minimum  $\varepsilon$  (plus petit que tous les autres éléments du dioïde), ce qui confère au dioïde une structure de treillis (voir théorème 1.21).

### 1.10.3 Dioïde complet

**Définition 1.85 (Dioïde complet).** Un dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi  $\otimes$  distribue (à gauche et à droite) sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout  $b \in \mathcal{D}$  et tout sous-ensemble  $A \subset \mathcal{D}$ ,

$$b \otimes \left( \bigoplus_{a \in A} a \right) = \bigoplus_{a \in A} (b \otimes a) \quad \text{et} \quad \left( \bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes b = \bigoplus_{a \in A} (a \otimes b).$$

Il résulte de cette définition que, pour tout  $A \subset \mathcal{D}$  et  $B \subset \mathcal{D}$  :

$$\left( \bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes \left( \bigoplus_{b \in B} b \right) = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} (a \otimes b).$$

**Exemple 1.86.** Le dioïde  $\mathbb{Z}_{\max}$  complété par l'élément  $+\infty$  est un dioïde complet noté

$\overline{\mathbb{Z}}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ . De même on note  $\overline{\mathbb{R}}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$  le dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$  complété par l'élément  $+\infty$ .

Puisque un dioïde  $\mathcal{D}$  a une structure de treillis  $(\mathcal{D}, \preceq)$ , s'il est complet, il admet un plus grand élément. On notera  $\top$  ce plus grand élément. L'élément  $\top$  correspond à la somme de tous les éléments de  $\mathcal{D}$

$$\top = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x.$$

Cet élément est absorbant pour la loi additive  $\forall a, \top \oplus a = \top$ , et vérifie  $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \top = \varepsilon$ .

**Définition 1.87 (Borne inf).** Si  $\mathcal{D}$  est un dioïde complet, alors  $\wedge$  est la loi associative commutative et idempotente vérifiant

$$a \wedge b = \bigoplus \{x \mid x \preceq a \text{ et } x \preceq b\},$$

et faisant de  $(\mathcal{D}, \oplus, \wedge)$  un treillis complet. Cette loi  $\wedge$  vérifie en conséquence

$$a = a \oplus b \iff a \succeq b \iff b = a \wedge b. \quad (1.21)$$

**Remarque 1.88.** La relation (1.21) peut faire penser que les opérateurs  $\oplus$  et  $\wedge$  jouent un rôle symétrique dans un dioïde. En considérant uniquement la structure de treillis d'un dioïde cette assertion est vraie (en considérant le principe de dualité). Mais, elle devient fausse si l'on considère la seconde opération d'un dioïde  $\otimes$ . Cependant, le produit à droite (il en est de même pour le produit à gauche) étant une opération isotone, on vérifie la relation de sous-distributivité suivante :

$$c \otimes (a \wedge b) \preceq (c \otimes a) \wedge (c \otimes b) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}.$$

L'exemple qui suit (emprunté à [Cohen, 2001, §2.3.1.3]) illustre cette propriété.

**Exemple 1.89.** On considère le dioïde  $(2^{\mathbb{R}^2}, \cup, +)$ . Soient

$$a = \{(1, 0)\}, \quad b = \{(0, 1)\} \quad \text{et} \quad c = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

on a

$$\begin{aligned} c(a \wedge b) &= c + (a \cap b) = c + \emptyset = \emptyset, \\ (ca) \wedge (cb) &= (c + a) \cap (c + b) \\ &= ([0, 2] \times [-1, 1]) \cap ([-1, 1] \times [0, 2]) \\ &= [0, 1] \times [0, 1], \end{aligned}$$

donc  $(ca) \wedge (cb) \succeq c(a \wedge b)$ .

### 1.10.4 Dioïde distributif

**Définition 1.90 (Dioïde distributif).** Un dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  est distributif s'il est complet et si  $\forall a \in \mathcal{D}$  et pour tout sous-ensemble  $C$  de  $\mathcal{D}$ , on a :

$$\left( \bigwedge_{c \in C} c \right) \oplus a = \bigwedge_{c \in C} (c \oplus a)$$

et

$$\left( \bigoplus_{c \in C} c \right) \wedge a = \bigoplus_{c \in C} (c \wedge a).$$

**Remarque 1.91.** Les lois  $\oplus$  et  $\wedge$  sont des lois de treillis, elles sont donc isotones pour l'ordre  $\preceq$ . Si le dioïde n'est pas distributif, on vérifie néanmoins toujours les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} a \oplus (b \wedge c) &\preceq (a \oplus b) \wedge (a \oplus c) \\ a \wedge (b \oplus c) &\succeq (a \wedge b) \oplus (a \wedge c). \end{aligned}$$

### 1.10.5 Morphismes de dioïdes

**Définition 1.92 (Homomorphisme, isomorphisme).** Une application  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  définie sur des dioïdes est un homomorphisme si

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad \Pi(a \oplus b) = \Pi(a) \oplus \Pi(b) \text{ et } \Pi(\varepsilon) = \varepsilon \quad (1.22)$$

$$\Pi(a \otimes b) = \Pi(a) \otimes \Pi(b) \text{ et } \Pi(e) = e \quad (1.23)$$

Une application vérifiant seulement (1.22) est dite  $\oplus$ -morphisme, c'est-à-dire que l'image d'une somme d'éléments de  $\mathcal{D}$  est la somme, dans  $\mathcal{C}$ , de leurs images. Une application vérifiant seulement (1.23) est dite  $\otimes$ -morphisme, c'est-à-dire que l'image d'un produit d'éléments de  $\mathcal{D}$  est le produit, dans  $\mathcal{C}$ , de leurs images.

**Définition 1.93 (Isomorphisme).** Une application  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  définie sur des dioïdes est un isomorphisme, si  $\Pi^\sharp$  est définie sur  $\mathcal{C}$  et si  $\Pi$  et  $\Pi^\sharp$  sont des homomorphismes.

### 1.10.6 Congruence et dioïde quotient

**Définition 1.94 (Congruence).** Une congruence sur un dioïde  $\mathcal{D}$  est une relation d'équivalence (notée  $\mathcal{R}$ ) compatible avec les lois du dioïde, c'est-à-dire

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow (a \oplus c) \mathcal{R} (b \oplus c), \quad (a \otimes c) \mathcal{R} (b \otimes c), \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}.$$

**Théorème 1.95 (Dioïde Quotient).** Soit un dioïde  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{R}$  une congruence sur  $\mathcal{D}$ . En notant  $[a] = \{x \in \mathcal{D} \mid x \mathcal{R} a\}$  la classe d'équivalence de  $a \in \mathcal{D}$ , le dioïde quotient de  $\mathcal{D}$  par cette congruence est un dioïde noté  $\mathcal{D}/\mathcal{R}$  pour lequel la somme et le produit sont définis par

$$\begin{aligned} [a] \oplus [b] &\stackrel{\text{déf}}{=} [a \oplus b] \\ [a] \otimes [b] &\stackrel{\text{déf}}{=} [a \otimes b] \end{aligned} \quad (1.24)$$

*Démonstration.* Il convient de souligner qu'en raison de la compatibilité de  $\mathcal{R}$  avec les lois du dioïde  $\mathcal{D}$ , en prenant  $a, a'$  et  $b, b'$  tels que  $[a] = [a']$  et  $[b] = [b']$  on obtient

$$[a \oplus b] = [a' \oplus b'] \text{ et } [a \otimes b] = [a' \otimes b'],$$

c'est-à-dire que les classes  $[a \oplus b]$  et  $[a \otimes b]$  dépendent seulement des classes  $[a]$  et  $[b]$  et non des représentants de ces classes. Les opérations sur le quotient données par (1.24) sont par conséquent parfaitement définies et confèrent au quotient  $\mathcal{D}/\mathcal{R}$  une structure de dioïde.  $\square$

**Théorème 1.96.** *Soit  $\Pi$  un homomorphisme de  $\mathcal{D}$  dans  $\mathcal{C}$ . La relation  $\mathcal{R}_\Pi$  définie par*

$$a \mathcal{R}_\Pi b \iff \Pi(a) = \Pi(b), \quad \forall a, b \in \mathcal{D},$$

*est une congruence.*

*Démonstration.* Le fait que  $\mathcal{R}_\Pi$  est une relation d'équivalence est immédiat. D'autre part, puisque  $\Pi$  est un homomorphisme, l'ensemble  $\Pi(\mathcal{D})$  est fermé pour les lois  $\oplus$  et  $\otimes$  de  $\mathcal{C}$ . De plus, les éléments neutres pour l'addition et le produit de  $\mathcal{C}$  appartiennent également à  $\Pi(\mathcal{D})$  ( $\Pi$  est un homomorphisme donc  $\Pi(\varepsilon) = \varepsilon$  et  $\Pi(e) = e$ ). Donc,  $\Pi(\mathcal{D})$  bénéficie d'une structure de dioïde. L'application  $\mathcal{D}/\mathcal{R}_\Pi \rightarrow \Pi(\mathcal{D}), [a]_\Pi \mapsto \Pi(a)$  définit alors un isomorphisme de dioïdes.  $\square$

## 1.11 Théorie de la résiduation appliquée aux dioïdes

Les principaux résultats présentés ici sont issus de [Baccelli et al., 1992] et [Gaubert, 1992]. Le lecteur retrouvera également la plupart des ces résultats dans [Cohen, 1998a].

### 1.11.1 Applications résiduables sur les dioïdes complets

On se propose ici d'étudier le caractère résiduable de certaines applications de référence définies sur des dioïdes complets.

**Théorème 1.97.** *Soient  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  et  $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$  deux dioïdes complets de plus petits éléments respectifs  $\varepsilon_{\mathcal{D}}$  et  $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ . Une application isotone  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  est résiduable si et seulement si, pour tout ensemble  $X$  de  $\mathcal{D}$*

$$\Pi \left( \bigoplus_{x \in X} x \right) = \bigoplus_{x \in X} \Pi(x) \tag{1.25}$$

$$\Pi(\varepsilon_{\mathcal{D}}) = \varepsilon_{\mathcal{C}}. \tag{1.26}$$

*Démonstration.* La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 1.42 puisqu'il a été montré précédemment (voir §1.10) qu'un dioïde complet pouvait être assimilé à un treillis complet.  $\square$

Soient  $L_a$  et  $R_a$  les applications suivantes définies sur un dioïde complet  $\mathcal{D}$

$$L_a : x \mapsto a \otimes x \tag{1.27}$$

$$R_a : x \mapsto x \otimes a \tag{1.28}$$

En référence à la définition 1.85, sur un dioïde complet, la multiplication distribue sur les sommes infinies, à gauche ou à droite. De plus,  $L_a(\varepsilon) = \varepsilon$  et  $R_a(\varepsilon) = \varepsilon$ . En appliquant le théorème 1.97,  $L_a$  et  $R_a$  sont donc résiduables sur un dioïde complet.

Lorsque  $\mathcal{D}$  est commutatif,  $L_a = R_a$  implique donc également  $L_a^\sharp = R_a^\sharp$ .

Nous utiliserons les notations suivantes introduites notamment dans [Baccelli et al., 1992].

**Notation 1.98 (Applications Résiduées de  $L_a, R_a$ ).** *Nous noterons*

$$L_a^\sharp(x) = a \backslash x = \frac{x}{a}$$

$$R_a^\sharp(x) = x \phi a = \frac{x}{a}$$

les applications résiduées respectives de  $L_a$  et  $R_a$ .

Le tableau qui suit présente un ensemble de propriétés de ces applications dont le lecteur pourra trouver les preuves dans [Baccelli et al., 1992, p. 182-185], [Gaubert, 1992, §5.3], [Cottenceau, 1999, §1.3.3].

$a(a \backslash x) \preceq x$	$(x \phi a)a \preceq x$	(f.1)
$a \backslash (ax) \succeq x$	$(xa) \phi a \succeq x$	(f.2)
$a(a \backslash (ax)) = ax$	$((xa) \phi a)a = xa$	(f.3)
$a \backslash (x \wedge y) = a \backslash x \wedge a \backslash y$	$(x \wedge y) \phi a = x \phi a \wedge y \phi a$	(f.4)
$(a \oplus b) \backslash x = a \backslash x \wedge b \backslash x$	$x \phi (a \oplus b) = x \phi a \wedge x \phi b$	(f.5)
$(ab) \backslash x = b \backslash (a \backslash x)$	$x \phi (ba) = (x \phi a) \phi b$	(f.6)
$b(a \backslash x) \preceq (a \phi b) \backslash x$	$(x \phi a)b \preceq x \phi (b \backslash a)$	(f.7)
$(a \backslash x)b \preceq a \backslash (xb)$	$b(x \phi a) \preceq (bx) \phi a$	(f.8)

### 1.11.2 Fermetures résiduables sur les dioïdes complets

**Notation 1.99 (Étoile de Kleene).** *Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet. L'application étoile de Kleene, définie sur  $\mathcal{D}$ , sera notée  $\mathcal{K}$  par la suite,*

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ x &\mapsto x^* = \bigoplus_{k \geq 0} x^k. \end{aligned}$$

On utilisera également une notation particulière pour l'application "plus" dérivée de l'étoile

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ x &\mapsto x^+ = \bigoplus_{k \geq 1} x^k. \end{aligned}$$

Les applications  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{P}$  sont isotones (par composition d'applications isotones) et  $a^* = e \oplus a^+$  ou  $a^+ = a \otimes a^*$ . De plus les applications  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{P}$  sont des fermetures ; en effet,  $a^* \succeq a$  et  $(a^*)^* = a^*$  ; de même  $a^+ \succeq a$  et  $(a^+)^+ = a^+$ .

**Remarque 1.100.** En accord avec les résultats sur les fermetures définies sur des treillis (§1.7), il est possible de munir  $\text{Im}\mathcal{K}$  et  $\text{Im}\mathcal{P}$  d'une structure de treillis. Nous noterons ces treillis  $(\text{Im}\mathcal{K}, \overset{\text{Im}\mathcal{K}}{\vee}, \overset{\text{Im}\mathcal{K}}{\wedge})$  et  $(\text{Im}\mathcal{P}, \overset{\text{Im}\mathcal{P}}{\vee}, \overset{\text{Im}\mathcal{P}}{\wedge})$  en posant

$$\forall k, \forall k' \in \text{Im}\mathcal{K} \begin{cases} k \overset{\text{Im}\mathcal{K}}{\vee} k' = \mathcal{K}(k \vee k') = (k \vee k)^* \\ k \overset{\text{Im}\mathcal{K}}{\wedge} k' = k \wedge k' \end{cases}$$

et

$$\forall p, \forall p' \in \text{Im}\mathcal{P} \begin{cases} p \overset{\text{Im}\mathcal{P}}{\vee} p' = \mathcal{P}(p \vee p') = (p \vee p')^+ \\ p \overset{\text{Im}\mathcal{P}}{\wedge} p' = p \wedge p' \end{cases}.$$

**Remarque 1.101.** L'application  $\mathcal{K} : x \mapsto x^*$  de  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  n'est pas résiduable ; en effet, elle ne vérifie pas la condition de semi-continuité inférieure du théorème 1.97. Pour illustrer cette remarque, considérons les matrices suivantes

$$a = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

alors

$$(a \oplus b)^* = \begin{pmatrix} \top & \top \\ \top & \top \end{pmatrix} \neq a^* \oplus b^* = \begin{pmatrix} e & 1 \\ -1 & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & -1 \\ 1 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & e \end{pmatrix}$$

on remarque que pour ces deux valeurs la condition de semi-continuité inférieure n'est pas vérifiée. Cela signifie que l'équation  $\mathcal{K}(x) = b$  n'a pas de solution  $\forall b \in \mathcal{D}$ . Malgré tout, il existe une restriction résiduable de l'application  $\mathcal{K}$ , la proposition suivante précise cette notion.

**Proposition 1.102.** Soit l'application  $\mathcal{K} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto x^*$  définie sur un dioïde complet. L'application  $\text{Im}\mathcal{K}|\mathcal{K}$  est résiduable et sa résiduée est

$$(\text{Im}\mathcal{K}|\mathcal{K})^\# = I_{\text{Im}\mathcal{K}},$$

où  $I_{\text{Im}\mathcal{K}}$  est l'injection canonique de  $\text{Im}\mathcal{K}$  dans  $\mathcal{D}$ .

*Démonstration.* Il s'agit d'une application directe de la proposition 1.61. □

**Remarque 1.103.** On peut déduire de la proposition précédente 1.102, que  $x = a^*$  est la plus grande solution de l'inéquation  $x^* \preceq a^*$ . En fait cette plus grande solution satisfait l'égalité  $x^* = a^*$ .

## 1.12 Noyaux, images

La plupart des résultats ainsi que les notations énoncées dans cette partie sont issus des références [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997, Cohen, 1998a].

Nous rappelons tout d'abord que l'image d'une application  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ , est définie par

$$\text{Im}B = \{B(u) \mid u \in \mathcal{U}\}.$$

**Définition 1.104 (Noyau).** Le noyau de l'application linéaire  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , noté  $\ker C$ , est défini par la relation d'équivalence

$$x \overset{\ker C}{\equiv} x' \iff C(x) = C(x'). \quad (1.29)$$

Cette relation définit une congruence (voir théorème 1.96). L'ensemble quotient  $\mathcal{X}/_{\ker C}$  est donc l'ensemble des classes d'équivalence modulo  $\ker C$ .

**Remarque 1.105.** *Le lemme 1.96 montre que la relation d'équivalence (1.29) est une congruence.*

**Notation 1.106.** *Une classe d'équivalence de  $\mathcal{X}/_{\ker C}$  sera notée  $[x]_C$ .*

**Proposition 1.107.** *Si  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une application résiduable alors chaque classe d'équivalence  $[x]_C$  contient un et un seul élément de  $\text{Im}C^\sharp$  qui, de plus, est le plus grand élément dans cette classe.*

*Démonstration.* Si  $C$  est résiduable, d'après (1.7),  $C = C \circ C^\sharp \circ C$ , alors  $\forall x \in \mathcal{X}, C(x) = C((C^\sharp \circ C)(x))$ . Autrement dit,

$$x \stackrel{\ker C}{\equiv} C^\sharp \circ C(x).$$

Considérons maintenant un élément  $x' \in [x]_C$ , alors  $C(x') = C(x) = C \circ C^\sharp \circ C(x)$ ; de plus le théorème 1.38 donne  $C^\sharp \circ C \succeq \text{Id}_{\mathcal{X}}$ ; par conséquent

$$\begin{aligned} x' \preceq C^\sharp \circ C(x') &= (C^\sharp \circ (C \circ C^\sharp \circ C))(x) \\ &= (C^\sharp \circ C)(x) \quad (\text{par (1.7)}). \end{aligned}$$

Donc,  $C^\sharp \circ C(x)$  est plus grand élément de  $[x]_C$ . Il reste à montrer l'unicité de cet élément. Si  $C^\sharp(y) \stackrel{\ker C}{\equiv} C^\sharp(y')$ , alors  $C(C^\sharp(y)) = C(C^\sharp(y'))$  et  $C^\sharp \circ C \circ C^\sharp(y) = C^\sharp \circ C \circ C^\sharp(y')$ , soit  $C^\sharp(y) = C^\sharp(y')$  d'après (1.7).  $\square$

**Proposition 1.108.** *Si  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une application résiduable alors la relation d'équivalence  $\stackrel{\ker C}{\equiv}$  vérifie*

$$\left. \begin{array}{l} x \preceq y \preceq z \\ x \stackrel{\ker C}{\equiv} z \end{array} \right\} \Rightarrow x \stackrel{\ker C}{\equiv} y \stackrel{\ker C}{\equiv} z.$$

*Démonstration.* D'une part, comme  $C$  est résiduable, elle est isotone; par conséquent, si  $x \preceq y \preceq z$  alors  $C(x) \preceq C(y) \preceq C(z)$ . D'autre part,  $x \stackrel{\ker C}{\equiv} z$  entraîne  $C(x) = C(z)$ ; donc  $C(x) = C(y) = C(z)$ , d'où  $x \stackrel{\ker C}{\equiv} y \stackrel{\ker C}{\equiv} z$ .  $\square$

**Remarque 1.109.** *Dans [Blyth and Janowitz, 1972], les auteurs qualifient de convexes les classes d'équivalence vérifiant la proposition précédente.*

Les deux propositions qui suivent sont énoncées sans preuve, le lecteur intéressé pourra se reporter à [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997].

**Proposition 1.110.** *Soient les applications  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  et  $S : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{X}$ , où  $S$  est une application résiduable, alors sont équivalents :*

- (i)  $\text{Im}B \subset \text{Im}S$  ;
- (ii)  $B = S \circ S^\sharp \circ B$  ;
- (iii) il existe une application  $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Q}$  telle que  $B = S \circ L$ .

**Proposition 1.111.** *Soient les applications  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  et  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ , alors sont équivalents :*

- (i)  $\ker C \subset \ker F$  ;
- (ii)  $F = F \circ C^\sharp \circ C$
- (iii) il existe une application  $H : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$  telle que  $F = H \circ C$ .

## 1.13 Projecteurs

Dans [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997], les auteurs définissent la notion de projection. Trois types de projections sont introduites, les projections parallèlement au noyau d'une application, les projections dans l'image d'une application et les projections dans l'image d'une application parallèlement au noyau d'une autre application.

### 1.13.1 Projection parallèlement au noyau d'une application

Soit l'application  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , d'après la proposition 1.107 nous savons que pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , il existe un unique élément dans  $[x]_C \cap \text{Im}C^\sharp$ . Cet élément est donné par  $C^\sharp \circ C$ . Le lemme qui suit précise les propriétés de cet élément.

**Lemme 1.112 ([Cohen et al., 1996]).** *Soit  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  une application résiduable. Alors  $\Pi^C = C^\sharp \circ C$  vérifie les propriétés suivantes*

- (i)  $\Pi^C$  est un projecteur, c'est-à-dire  $\Pi^C \circ \Pi^C = \Pi^C$  ;
- (ii)  $C \circ \Pi^C = C$ .
- (iii)  $\Pi^C \succeq \text{Id}$  ;
- (iv)  $\Pi^C(x)$  est le seul élément équivalent à  $x$  modulo  $\ker C$  appartenant à  $\text{Im}C^\sharp$  ;
- (v)  $\Pi^C(x)$  est le plus grand élément dans la classe d'équivalence  $[x]_C$  ;

*Démonstration.* les propriétés (i), (ii) et (iii) découlent directement de (1.7) et (1.6). Les propriétés (iv) et (v) sont données par la proposition 1.107.  $\square$

**Remarque 1.113.** *D'après les propriétés de  $\Pi^C$  énoncées dans le lemme précédent (points (i) et (ii)), il faut noter que le projecteur  $\Pi^C$  est une fermeture (voir définition 1.52).*

**Propriétés 1.114.** *Si  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  est une application résiduable, alors*

$$\text{Im}\Pi^C = \text{Im}C^\sharp.$$

*Démonstration.* D'après (1.7),  $C^\sharp = (C^\sharp \circ C) \circ C^\sharp$ , alors  $\text{Im}C^\sharp \subset \text{Im}C^\sharp \circ C$ . Mais,  $\text{Im}C^\sharp \circ C \subset \text{Im}C^\sharp$ , par conséquent  $\text{Im}C^\sharp \circ C = \text{Im}C^\sharp$ .  $\square$

### 1.13.2 Projection dans l'image d'une application

**Proposition 1.115 (Projection dans l'image d'une application).** *Soient  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  une application résiduable et un élément  $x \in \mathcal{X}$ . Le plus grand élément  $x' \in \text{Im}B$  plus petit que  $x$  est donné par  $B \circ B^\sharp(x)$ . En d'autres termes,  $\Pi_B = B \circ B^\sharp$  est un projecteur dans l'image de  $B$ .*

*Démonstration.* Le lecteur trouvera une démonstration de ce résultat dans [Cohen et al., 1996].  $\square$

**Propriétés 1.116.** *Si  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  est une application résiduable, alors*

$$\text{Im}\Pi_B = \text{Im}B.$$

*Démonstration.* D'après (1.7),  $B = (B \circ B^\sharp) \circ B$ , alors  $\text{Im}B \subset \text{Im}(B \circ B^\sharp)$ . Mais,  $\text{Im}(B \circ B^\sharp) \subset \text{Im}B$ , par conséquent  $\text{Im}(B \circ B^\sharp) = \text{Im}B$ .  $\square$

### 1.13.3 Projecteurs dans l'image d'une application parallèlement au noyau d'une autre application

Soient  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  et  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  deux applications. Dans [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997], les auteurs s'intéressent au problème suivant : pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , existe-t-il un  $y \in \text{Im}B \cap [x]_C$ , autrement dit, cela revient à chercher un  $y \in \mathcal{X}$ , tel que

$$\begin{aligned} \exists u \in \mathcal{U} \quad : \quad & C(y) = C(x), \\ & B(u) = y. \end{aligned}$$

Si l'élément  $y$  satisfaisant ces conditions existe, et si de plus il est unique, alors  $y$  correspond à la projection de  $x$  dans l'image de  $B$  parallèlement au noyau de  $C$ , et le projecteur correspondant est alors donné par

$$\Pi_B^C = B \circ (C \circ B)^\# \circ C. \quad (1.30)$$

Toujours dans [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997], les auteurs s'intéressent au problème de l'existence d'une telle projection, c'est-à-dire est-ce que  $\Pi_B^C \circ \Pi_B^C = \Pi_B^C$  ce qui revient à dire que  $\text{Im}B \cap [x]_C$  est non vide. De même, dans le cas où cette projection existe, les auteurs s'intéressent au problème de l'unicité, en d'autres termes, ils cherchent à savoir si  $\text{Im}B \cap [x]_C$  est un singleton. Nous rappelons ci-dessous, ces conditions d'existence et d'unicité.

- *L'existence du projecteur* pour tout  $x$  est équivalente à la condition  $C = C \circ \Pi_B^C$  (c'est-à-dire que  $\xi = \Pi_B^C(x)$  est dans la même classe d'équivalence que  $x \pmod{\ker C}$ ), ou encore à la condition  $\text{Im}B = \text{Im}(C \circ B)$ .
- *L'unicité du projecteur* est équivalente à la condition  $B = \Pi_B^C \circ B$  (c'est-à-dire que pour tout  $x \in \text{Im}B$ , celui-ci reste invariant par  $\Pi_B^C$ ), ou encore que  $\ker B = \ker(C \circ B)$ .

Dans le cas où les applications linéaires  $B$  et  $C$  du projecteur 1.30 sont représentées par leur matrice, il est également montré que si l'existence et l'unicité de la projection sont garanties, alors l'expression (1.30) du projecteur devient :

$$\Pi_B^C = (B \phi(CB)) C = B((CB) \backslash C).$$

Notons que dans le cas d'applications résiduables, même si l'existence et l'unicité ne sont pas vérifiées, il est possible de donner une interprétation au projecteur (1.30). En effet, ce projecteur se décompose en deux applications. Tout d'abord, l'élément  $z = C^\# \circ C(x)$  est le plus grand élément dans  $[x]_C$ . Ce qui entraîne que  $\xi = B \circ B^\#(z)$  est le plus grand élément dans  $\text{Im}B$  qui soit plus petit que  $z$ . Par conséquent, nous avons  $C(\xi) \preceq C(x)$ ; dans [Cohen et al., 1998b] le terme sous-équivalent est employé pour qualifier cet élément  $\xi$ .

### 1.13.4 Équations implicites linéaires dans les diïdes

Dans cette partie on s'intéresse à la résolution d'inéquations implicites de la forme :

$$x \succeq \Pi(x) \oplus b \quad (1.31)$$

$$x \preceq \Pi(x) \wedge b. \quad (1.32)$$

**Théorème 1.117.** Soient  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  et  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  une application semi-continue inférieurement (cf. définition 1.33). La plus petite solution de l'équation (1.31) est  $x = \Pi^*(b)$ , où

$$\Pi^0 = \text{Id}_{\mathcal{D}}, \quad \Pi^n = \underbrace{\Pi \circ \Pi \circ \dots \circ \Pi}_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad \Pi^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi^n = \text{Id}_{\mathcal{D}} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi^{n+1}.$$

De plus,  $x = \Pi^*(b)$  réalise l'égalité dans  $x \succeq \Pi(x) \oplus b$ .

*Démonstration.* On montre d'abord que  $\Pi^*(b)$  est un minorant des solutions de (1.31). Par induction on a

$$x \succeq \Pi(x) \oplus b \succeq \Pi(\Pi(x) \oplus b) \oplus b \succeq \dots \succeq \Pi^k(x) \oplus \bigoplus_{t=0}^{k-1} \Pi^t(b) \succeq \Pi^*(b) \quad \forall k \geq 0.$$

D'autre part, puisque  $\Pi$  est semi-continue inférieurement et d'après la propriété de distributivité infinie (cf. Définition 1.85),

$$\Pi(\Pi^*(b)) \oplus b = b \oplus \Pi\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi^n(b)\right) = b \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi^{n+1}(b) = \Pi^*(b)$$

donc  $\Pi^*(b)$  est bien solution de l'équation implicite  $x = \Pi(x) \oplus b$ .  $\square$

**Corollaire 1.118.** Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet ; si  $\Pi = L_a, \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , alors l'équation implicite

$$x = a \otimes x \oplus b \tag{1.33}$$

admet  $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$  comme plus petite solution.

**Théorème 1.119.** Soient  $\mathcal{D}$  un dioïde complet et  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  une application semi-continue supérieurement. La plus grande solution de (1.32) est  $x = \Pi_*(b)$  avec

$$\Pi_* = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Pi^n.$$

*Démonstration.* Comme  $\Pi$  est s.c.s., on a :

$$\Pi(\Pi_*(b)) \wedge b = \Pi\left(\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Pi^n(b)\right) \wedge b = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Pi(\Pi^n(b)) \wedge b = \bigwedge_{n \geq 1} \Pi^n(b) \wedge \text{Id}(b) = \Pi_*(b),$$

ce qui montre que  $\Pi_*(b)$  est solution de (1.32). De plus quelle que soit  $x$  solution de  $x = \Pi(x) \wedge b$ , on a

$$x = \Pi(x) \wedge b = \Pi(\Pi(x) \wedge b) \wedge b = \dots = \Pi^n(x) \wedge \Pi^{n-1}(b) \wedge \dots \wedge \Pi(b) \wedge b \preceq \Pi^{n-1}(b) \wedge \dots \wedge \Pi(b) \wedge b.$$

On en déduit que toute solution de (1.32) est inférieure ou égale à  $\Pi_*(b)$ .  $\square$

**Corollaire 1.120.** Soit l'application  $\Pi = L_a^\# : x \mapsto a \backslash x, \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  définie sur un dioïde complet. Alors, l'équation

$$x = a \backslash x \wedge b$$

admet  $x = \Pi_*(b) = a^* \backslash b = \left[ \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n \right] \backslash b$  comme plus grande solution.

Les applications  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{P}$  (cf. notation 1.99) vérifient les relations suivantes (voir [Gaubert, 1992] et [Cottenceau, 1999]).

**Théorème 1.121.** Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet.  $\forall a, b \in \mathcal{D}$

$$a^+ \preceq a^* \quad (1.34)$$

$$(a^*)^* = a^* \quad (1.35)$$

$$(a^+)^* = a^* \quad (1.36)$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \quad (1.37)$$

$$(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = b^*(ab^*)^* = (a \oplus b)^*a^* = b^*(a \oplus b)^* \quad (1.38)$$

$$a^*a^* = a^* \quad (1.39)$$

$$(a^*)^+ = a^* \quad (1.40)$$

$$(a^+)^+ = a^+ \quad (1.41)$$

$$(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^* \quad (1.42)$$

$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \quad (1.43)$$

En outre, lorsque  $\mathcal{D}$  est commutatif

$$(a \oplus b)^* = a^*b^*. \quad (1.44)$$

*Démonstration.*

(1.34) par définition  $a^* = e \oplus a^+ \Rightarrow a^* \succeq e$  et  $a^* \succeq a^+$ .

(1.35) par définition de l'étoile de Kleene,  $(a^*)^* = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{l \geq 0} (a^k)^l = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{l \geq 0} a^{k+l} = \bigoplus_{j=k+l \geq 0} a^j = a^*$ .

(1.36) par définition de  $\mathcal{P}$ ,  $a \preceq a^+ \Rightarrow a^* \preceq (a^+)^*$ , (isotonie de  $\mathcal{K}$ ). D'après (1.34),  $a^+ \preceq a^* \Rightarrow (a^+)^* \preceq (a^*)^* = a^*$  (par (1.35)). On en déduit que  $a^* \preceq (a^+)^* \preceq (a^*)^* = a^*$  d'où l'égalité.

(1.37)  $(ab)^*a = (e \oplus ab \oplus abab \oplus \dots)a = (a \oplus aba \oplus ababa \oplus \dots) = a(e \oplus ba \oplus baba \oplus \dots) = a(ba)^*$ .

(1.38) d'après le corollaire 1.118, sont équivalents :

$$\begin{aligned} x &= (a \oplus b)^* \\ x &= (a \oplus b)x \oplus e = ax \oplus bx \oplus e \\ x &= a^*bx \oplus a^* \\ x &= (a^*b)^*a^* = (a^*b)^*a^*a^* = (a \oplus b)^*a^*. \end{aligned}$$

De même pour l'autre égalité,  $x = (a \oplus b)^* = ax \oplus bx \oplus e = b^*ax \oplus b^* = b^*(ab^*)^* = b^*b^*(ab^*)^* = b^*(a \oplus b)^*$ .

(1.39) d'après (1.38) et en raison de l'idempotence de  $\oplus$ ,  $a^* = (a \oplus a)^* = (a^*a)^*a^* = (a^+)^*a^* = a^*a^*$  (par (1.36)).

(1.40) par définition de  $\mathcal{P}$ ,  $a^+ = aa^*$ , donc  $(a^*)^+ = a^*(a^*)^* = a^*a^* = a^*$  (par (1.35) et (1.39)).

(1.41) par définition,  $a^+ = aa^*$ , alors  $(a^+)^+ = a^+(a^+)^* = a^+a^* = aa^*a^* = aa^* = a^+$  (par (1.39)).

(1.42)  $(ab^*)^+ = ab^*(ab^*)^* = a(b^*(ab^*)^*) = a(a \oplus b)^*$  (par (1.38)).

(1.43)  $(ab^*)^* = e \oplus (ab^*)^+ = e \oplus a(a \oplus b)^*$  (par 1.42).

(1.44) Si  $\mathcal{D}$  est commutatif on a pour  $k \geq 1$ ,  $(a^*b)^k = (a^*)^k b^k = a^*b^k$  (par (1.40)). D'où  $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = (e \oplus \bigoplus_{k \geq 1} a^*b^k)a^* = a^* \oplus \bigoplus_{k \geq 1} a^*b^k = a^*(e \oplus \bigoplus_{k \geq 1} b^k) = a^*b^*$ .

□

Les résultats énoncés par le théorème 1.121 sont vérifiés pour tout dioïde complet, y compris matriciel. Dans le cas matriciel, on a en particulier le résultat suivant permettant de calculer l'étoile d'une matrice décomposée en 4 blocs.

**Théorème 1.122.** *Soit  $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$  partitionnée en quatre blocs*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

*La matrice  $A^*$  s'écrit alors*

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* \oplus a_{11}^* a_{12} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & a_{11}^* a_{12} (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \\ (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* a_{21} a_{11}^* & (a_{21} a_{11}^* a_{12} \oplus a_{22})^* \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* on renvoie le lecteur à [Cohen et al., 1989] ou [Baccelli et al., 1992] pour ce résultat.  $\square$

### 1.13.5 Résiduation matricielle

**Lemme 1.123 ([Baccelli et al., 1992]).** *Si  $A = (A_{ij}) \in \mathcal{D}^{m \times n}$  où  $\mathcal{D}$  est un dioïde dans lequel  $\wedge$  existe, et  $y \in \mathcal{D}^m$ , alors*

$$(A \setminus y)_i = \bigwedge_{j=1}^m (A_{ji} \setminus y_j).$$

Quand  $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ , alors on obtient

$$(A \setminus y)_i = \bigwedge_{j=1}^m (A_{ji} \setminus y_j) = \min_{j=1, \dots, m} (-A_{ji} + y_j).$$

**Théorème 1.124.** *Soient  $A, D \in \mathcal{D}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathcal{D}^{m \times p}$  et  $C \in \mathcal{D}^{n \times p}$ , alors d'après le lemme précédent on obtient pour  $C = A \setminus B$  et  $D = B \not\setminus C$  :*

$$C_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m (A_{ki} \setminus B_{kj}) \quad , \quad D_{ij} = \bigwedge_{k=1}^p (B_{ik} \not\setminus C_{jk}). \quad (1.45)$$

La remarque suivante est due à [Cohen, 1998a].

**Remarque 1.125.** *Il est important de noter que certaines expressions impliquant la résiduation peuvent être ambiguës. Considérons  $A \in \mathcal{D}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathcal{D}^{m \times p}$  et  $x \in \mathcal{D}^p$ , il faut être prudent quand on utilise des expressions comme  $A \setminus Bx$ . En effet, d'un côté, remarquons que  $A \setminus (Bx)$  peut être interprétée comme  $L_A^\sharp \circ L_B(x)$ . Cette application  $L_A^\sharp \circ L_B$  n'est en général pas un  $\oplus$ -morphisme de  $\mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^n$ , mais par isotonie elle vérifie*

$$L_A^\sharp \circ L_B(x \oplus y) \succeq L_A^\sharp \circ L_B(x) \oplus L_A^\sharp \circ L_B(y).$$

*Mais, d'un autre côté,  $x \mapsto (A \setminus B)x$  peut être interprétée comme un opérateur linéaire de  $\mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^n$ , car en fait cet opérateur correspond à la multiplication à gauche par  $C = A \setminus B$  (voir (1.45)).*

*Par contre, d'après (f.8), on a toujours  $L_A^\sharp \circ L_B \succeq A \setminus B$  car  $A \setminus (Bx) \succeq (A \setminus B)x$ .*

**Théorème 1.126 ([Cohen et al., 1991]).** *Soient  $\mathcal{D}$  un dioïde complet et  $A \in \mathcal{D}^{p \times n}$  une matrice. Alors  $A \setminus A$  est une matrice dans  $\mathcal{D}^{n \times n}$  vérifiant*

$$A \setminus A = (A \setminus A)^*. \quad (1.46)$$

*Démonstration.* D'après (f.2),  $A \backslash A \succeq E$ , où  $E$  est la matrice identité de  $\mathcal{D}^{n \times n}$ . D'autre part, d'après (f.3),  $A = A(A \backslash A)$  donc  $A \backslash A = A \backslash (A(A \backslash A))$ . Or d'après (f.8),  $A \backslash (A(A \backslash A)) \succeq A \backslash A \otimes A \backslash A$ . On peut donc établir l'encadrement suivant

$$E \preceq (A \backslash A)^2 \preceq A \backslash A,$$

de même pour tout  $n \geq 1$ ,  $E \preceq (A \backslash A)^n \preceq A \backslash A$ . Par sommation on obtient donc  $(A \backslash A)^* = A \backslash A$ . En posant  $A \backslash A = B$  avec  $B \in \mathcal{D}^{n \times n}$  une matrice, une autre façon d'interpréter ce résultat est de dire que l'application  $x \mapsto Bx$  est une fermeture.  $\square$

## 1.14 Conclusion

Ce chapitre introductif a permis de dresser la liste des outils mathématiques qui seront utilisés par la suite. Il s'agit d'un préalable à la commande des GET présentée dans les chapitres suivants. Nous avons notamment tracé un panorama général sur la résiduation et ses applications aux dioïdes. Nous avons également pu constater que certaines applications non résiduables *a priori*, pouvaient l'être malgré tout, en considérant des restrictions sur leur domaine de définition. Une classe importante d'applications non résiduables est également étudiée : les fermetures. Sur les fermetures, le principal résultat est qu'il est possible de munir leur image d'une structure de treillis et qu'il est alors possible de considérer des restrictions résiduables pour certaines fermetures.

Le chapitre suivant est tout d'abord consacré à la modélisation de systèmes à événements discrets par des réseaux de Petri et plus particulièrement par une sous-classe des réseaux de Petri : les graphes d'événements temporisés. Ensuite, différentes représentations pour les graphes d'événements temporisés rencontrées dans la littérature (représentation aux dateurs, aux compteurs, par des séries formelles) sont étudiées.



## Comportement linéaire des GET dans les dioïdes

### 2.1 Introduction

L'étude des systèmes à événements discrets (SED) constitue, depuis bientôt 30 ans, un domaine de recherche très actif (de par son intérêt théorique et économique) ayant donné lieu à de nombreuses publications. De cette littérature se dégagent de multiples classes de systèmes mettant en jeu des phénomènes de natures différentes : parallélisme, saturation, synchronisation, exclusion mutuelle, choix, séquençement . . . , et autant de modèles mathématiques.

Dans ce mémoire nous considérons les systèmes qui admettent un modèle linéaire dans les structures algébriques introduites dans le chapitre précédent. Il s'agit des systèmes mettant en jeu des phénomènes de synchronisation et de retard que l'on retrouve abondamment dans les systèmes de transport (synchronisation de bus [Houssin, 2003]), les systèmes informatiques [Le Boudec and Thiran, 2001] et les systèmes de production et plus particulièrement d'assemblage [Cohen et al., 1983, Cohen et al., 1985].

La modélisation de ces systèmes dans l'algèbre des dioïdes et l'élaboration d'une théorie des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires analogue à la théorie des systèmes conventionnels a été l'oeuvre de l'équipe  $(\max, +)$  de l'INRIA au cours des années 80.

L'objectif de ce chapitre est de proposer un survol de cette théorie et notamment de rappeler la modélisation des graphes d'événements temporisés dans les dioïdes de séries formelles. Ce chapitre est composé comme suit.

Tout d'abord la modélisation de systèmes à événements discrets par Réseaux de Petri (RdP) [David and Alla, 1989, Murata, 1989] est présentée. Ce survol est l'occasion de rappeler la définition d'une sous-classe des RdP, les Graphes d'Événements Temporisés (GET).

La suite est dédiée à la modélisation sous forme d'état de GET dans les dioïdes. Les références qui ont servi à sa rédaction sont [Cohen et al., 1989, Baccelli et al., 1992].

Puis la description entrée-sortie des GET est abordée, il est notamment rappelé que la trajectoire de sortie d'un système  $(\max, +)$ -linéaire est le résultat de la sup-convolution de la réponse impulsionnelle du système et la trajectoire d'entrée.

Ce chapitre se termine par l'introduction de transformées en  $\gamma$  et  $\delta$  qui jouent un rôle analogue à la transformée en  $z$  des signaux discrets dans l'algèbre conventionnelle. La transformée de la réponse impulsionnelle d'un système linéaire conduit à établir sa matrice de transfert dans un dioïde de séries formelles noté  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . Les ouvrages de référence pour cette partie sont [Cohen et al., 1989, Cohen, 1998b].

## 2.2 Modélisation de systèmes à événements discrets par réseaux de Petri

### 2.2.1 Les réseaux de Petri

Les réseaux de Petri (RdP) ont été introduits par C.A. Petri en 1962 [Petri, 1962]. Ils constituent des modèles, à la fois graphiques et mathématiques, dédiés à la représentation du comportement des systèmes dynamiques à événements discrets. En raison de leur puissance de modélisation, ces modèles ont fait l'objet de très nombreux travaux de recherche ces 40 dernières années. Citons en particulier les références bibliographiques qui ont servi à la rédaction de cette partie : [David and Alla, 1989, Brams, 1983, Chretienne, 1983, Murata, 1989, Reutenauer, 1989].

### 2.2.2 Définitions et notations

**Définition 2.1 (Réseaux de Petri).** Un réseau de Petri est un quadruplet  $\mathcal{R} = (\mathcal{P}, \mathcal{T}, \text{Pré}, \text{Post})$ , où

- $\mathcal{P}$  est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont appelés places ;
- $\mathcal{T}$  est un ensemble non vide et fini dont les éléments sont appelés transitions ;
- $\text{Pré} : \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$  une application d'incidence avant :  $\text{Pré}(p_i, t)$  contient la valeur entière  $n$  associée à l'arc allant de  $p_i$  à  $t$  ;
- $\text{Post} : \mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$  une application d'incidence arrière :  $\text{Post}(p_i, t)$  contient la valeur entière  $w$  associée à l'arc allant de  $t$  à  $p_i$ .

Le marquage  $\mathcal{M}$  d'un Réseau de Petri est une application  $\mathcal{M} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ . La quantité  $\mathcal{M}(p)$  détermine le marquage de la place  $p$ . Un réseau marqué est déterminé par le couple  $\mathcal{N} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$  formé d'un réseau de Petri  $\mathcal{R}$  et d'un marquage initial  $\mathcal{M}_0$ .

Une transition sans place amont est dite *transition source* et une transition sans place aval est dite *transition puits*.

L'un des intérêts des réseaux de Petri est qu'il est extrêmement aisé de les visualiser. En effet on peut représenter un réseau de Petri comme un graphe orienté *biparti*<sup>1</sup>, dont les sommets sont les places et les transitions du réseau. Un arc relie une place  $p$  à une transition  $t$  si et seulement si  $\text{Pré}(p, t) \neq 0$ . Un arc relie une transition  $t$  à une place  $p$  si et seulement si  $\text{Post}(p, t) \neq 0$ . Les valeurs non nulles des applications  $\text{Pré}$  et  $\text{Post}$  sont associées aux arcs comme valuations (par défaut on prend la valeur 1). On représente une place par un cercle et une transition par un rectangle. Un marquage  $\mathcal{M}$  est représenté sur le graphe par  $\mathcal{M}(p)$  points ou jetons en chaque place  $p$ . Un exemple de graphe associé à un réseau de Petri est donné par la figure 2.1.

**Exemple 2.2.** *Le RdP de la figure 2.1 représente un système, par exemple informatique, où 2 tâches requièrent une même ressource renouvelable.*

<sup>1</sup>Le graphe étant *biparti* il n'y a pas d'arc joignant une place à une place, ni d'arc joignant une transition à une autre transition.

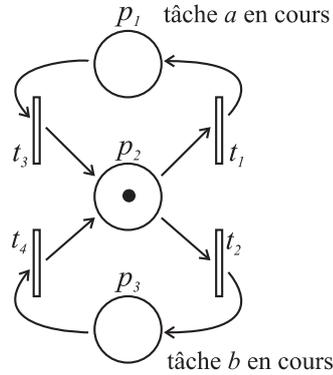


Figure 2.1 – RdP modélisant le comportement d'un système à ressource partagée.

Les places sont ici  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$  et les transitions  $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$ . On a

$$\begin{aligned} \text{Pré}(p_1, t_3) &= 1 & \text{Post}(p_1, t_1) &= 1 \\ \text{Pré}(p_2, t_1) &= 1 & \text{Post}(p_3, t_2) &= 1 \\ \text{Pré}(p_2, t_2) &= 1 & \text{Post}(p_2, t_3) &= 1 \\ \text{Pré}(p_3, t_4) &= 1 & \text{Post}(p_2, t_4) &= 1 \end{aligned}$$

Le marquage  $\mathcal{M}$  représenté ici est  $\mathcal{M}(p_2) = 1, \mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p_3) = 0$ .

Un jeton dans la place  $p_2$  signifie que la ressource est disponible. Un jeton dans la place  $p_1$  (resp.  $p_3$ ) signifie que la tâche  $a$  (resp.  $b$ ) dispose de la ressource commune. Les événements associés aux transitions  $t_1$  et  $t_2$  signifient respectivement "réservation de la ressource par la tâche  $a$ " ou "réservation de la ressource par la tâche  $b$ ", et ceux associés à  $t_3$  et  $t_4$  concernent la restitution de la ressource.

### 2.2.3 Tir des transitions

L'évolution au cours du temps des marques des places dans un réseau de Petri se fait selon le processus d'activation (ou de tirage) des transitions décrit ci-après. Étant donné un réseau  $\mathcal{R}$  et un marquage  $\mathcal{M}$ , on dit que la transition  $t \in \mathcal{T}$  est franchissable pour  $\mathcal{M}$  si l'on a

$$\forall p \in \mathcal{P}, \mathcal{M}(p) \geq \text{Pré}(p, t).$$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'activation (le tirage) de la transition  $t \in \mathcal{T}$  conduit à un nouveau marquage  $\mathcal{M}'$  défini par :

$$\mathcal{M}'(p) = \mathcal{M}(p) - \text{Pré}(p, t) + \text{Post}(p, t). \quad (2.1)$$

Ainsi, par exemple, dans le cas du réseau de Petri de la figure 2.1, en partant du marquage  $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$  (où  $\mathcal{M}(p_1) = 0, \mathcal{M}(p_2) = 1, \mathcal{M}(p_3) = 0$ ), on atteint par tirage de la transition  $t_1$  le marquage  $\mathcal{M}_1 = (1, 0, 0)$  ; puis à partir de  $\mathcal{M}_1$ , par tirage de la transition  $t_3$  on obtient le marquage  $\mathcal{M}_2 = (0, 1, 0)$  et ainsi de suite ; sur la figure 2.2, on peut voir l'évolution du marquage du réseau de Petri.

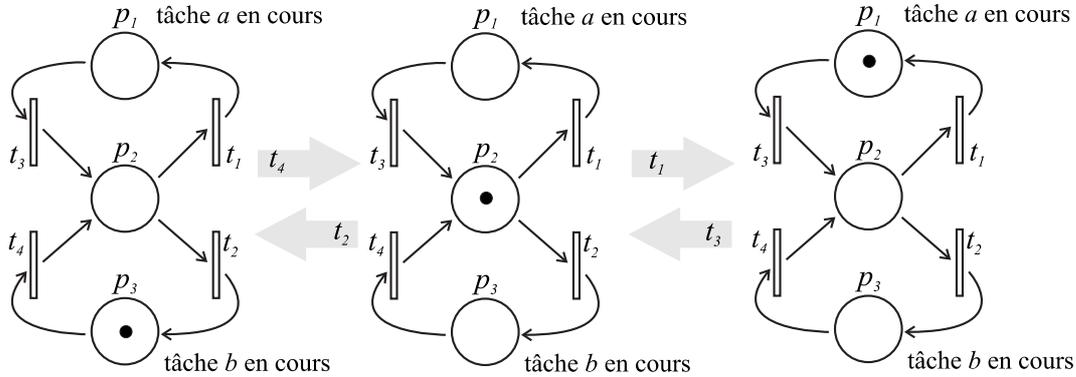


Figure 2.2 – Évolution du marquage d'un réseau de Petri.

Plus généralement, pour un Rdp, en posant,  $W^- = [\text{Pré}(p_i, t_j)]$  (la matrice d'incidence avant),  $W^+ = [\text{Post}(p_i, t_j)]$  (la matrice d'incidence arrière),  $W = W^+ - W^-$  (la matrice d'incidence) et en considérant  $S$  une séquence de franchissements réalisable à partir d'un marquage  $\mathcal{M}_i$ , il est alors possible de donner l'équation fondamentale suivante :

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_i + W \cdot \underline{S},$$

où  $\underline{S}$  est le vecteur caractéristique de la séquence de franchissement  $S$ , c'est-à-dire un vecteur dont la dimension est égale au nombre des transitions du réseau de Petri et dont la composante numéro  $j$  correspond au nombre de franchissements de la transition  $t_j$  de la séquence  $S$ . Dans l'exemple précédent où la séquence des deux premiers tirs était " $S = t1, t3$ ", le vecteur caractéristique est égal à  $\underline{S} = (1, 0, 1, 0)$ .

**Remarque 2.3.** L'équation fondamentale traduit la dynamique de fonctionnement du réseau de Petri.

### 2.2.4 Ensemble des marquages accessibles

Soit  $\mathcal{N} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$  un réseau de Petri. L'ensemble des marquages accessibles  $A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$  d'un réseau de Petri marqué est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial  $\mathcal{M}_0$  par une séquence de franchissement, c.-à-d.

$$A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0) = \{\mathcal{M}_i, \exists t \mathcal{M}_0 \xrightarrow{t} \mathcal{M}_i\}$$

On peut, lorsque cet ensemble est fini, le représenter sous la forme d'un graphe. Les sommets de ce graphe correspondent aux marquages accessibles de  $A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$ . Un arc orienté relie deux sommets  $\mathcal{M}_i$  et  $\mathcal{M}_j$  s'il existe une transition  $t$  franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre :  $\mathcal{M}_i \xrightarrow{t} \mathcal{M}_j$ . La figure 2.3 représente le graphe des marquages accessibles pour le réseau de Petri de la figure 2.1 avec un marquage initial  $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$ .

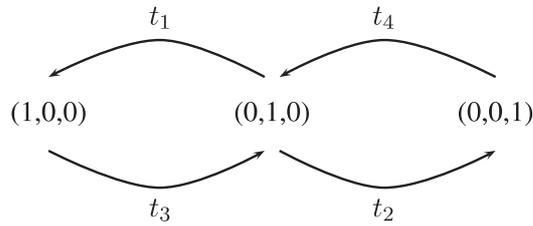


Figure 2.3 – Graphe des marquages atteignables du réseau de Petri de la figure 2.1.

### 2.2.5 Modélisation des systèmes à événements discrets

Le formalisme des réseaux de Petri est très puissant, il permet de représenter une grande variété de comportement des systèmes réels mettant en jeu des phénomènes de concurrence et de synchronisation. Sur la figure 2.4, nous avons représenté quatre structures de réseaux de Petri permettant de décrire ces phénomènes.

- la figure 2.4.(a) représente une structure de *choix*. La place  $p_1$  a deux transitions en aval, notées  $t_1$  et  $t_2$ . Le tir de  $t_1$  ou de  $t_2$  consommera le jeton de la place  $p_1$  et exclura donc le tir de l'autre. Une telle configuration permet de modéliser un phénomène de *concurrence à la consommation* comme par exemple le partage d'un processeur entre tâches concurrentes dans un système informatique ;
- la configuration de la figure 2.4.(b) permet de représenter une concurrence à l'apport de jetons dans une place, ici  $p_1$  ;
- la configuration de la figure 2.4.(c) permet de modéliser un phénomène de *synchronisation*. La transition  $t_1$  n'est franchissable que lorsque les places  $p_1$  et  $p_2$  contiennent toutes les deux au moins un jeton ;
- dans la structure de la figure 2.4.(d), l'apport de jetons dans les places  $p_1$  et  $p_2$  est synchronisé par le tir de la transition  $t_1$  et permet, par exemple, de modéliser l'initiation simultanée de différentes tâches dans un système à événements discrets.

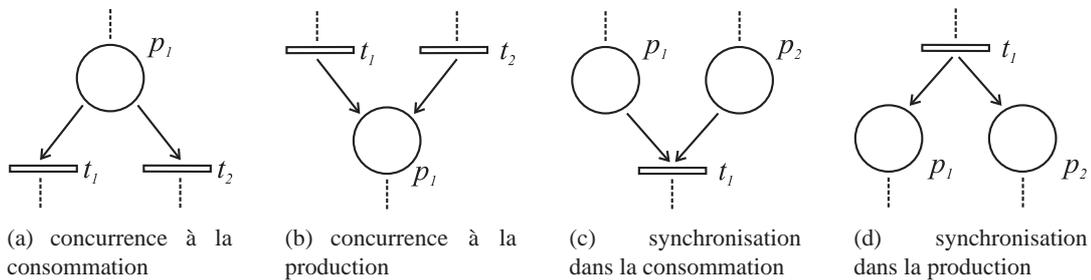


Figure 2.4 – Concurrence et synchronisation dans les RdP.

### 2.2.6 Quelques propriétés des RdP

Le graphe des marquages associé à un RdP fournit des indications essentielles sur le fonctionnement du système qu'il représente. Suivant que le graphe des marquages est fini ou infini, qu'il présente ou non

des circuits, il reflète certaines des propriétés caractéristiques du système modélisé.

**Définition 2.4 (Bornitude).** Une place  $p \in \mathcal{P}$  d'un réseau de Petri marqué  $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$  est  $k$ -bornée ( $k \in \mathbb{N}$ ) si pour tout marquage accessible  $\mathcal{M} \in A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$ , le marquage de cette place vérifie  $\mathcal{M}(p) \leq k$ . Dans le cas contraire, nous dirons que  $p$  est non-bornée. Enfin si  $p$  est 1-bornée, on dit que  $p$  est binaire (safe). Si on considère le Réseau de Petri de la figure 2.1 on voit que pour le marquage initial  $\mathcal{M}_0$  les places  $p_1, p_2$  et  $p_3$  sont binaires (1-bornées) et le réseau est dit sauf.

Lorsqu'un RdP modélise un système manufacturier, certaines places représentent des convoyeurs ou bien des zones de stockages intermédiaires. La bornitude du marquage du modèle est alors synonyme de limitation de la taille des stocks internes du système. La bornitude du RdP reflète alors en quelque sorte une propriété de "stabilité" du système de production modélisé.

**Définition 2.5 (Vivacité).** Étant donné un réseau de Petri  $\mathcal{R}$  et un marquage initial  $\mathcal{M}_0$ , une transition  $t$  est *vivante* pour le réseau marqué  $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$  si pour tout marquage  $\mathcal{M}$  accessible depuis  $\mathcal{M}_0$ , il existe une suite de transitions  $s$ , comportant au moins une fois la transition  $t$ , et telle que  $s$  soit franchissable pour  $\mathcal{M}$ .

Un réseau de Petri marqué  $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$  est dit *vivant* si toutes ses transitions sont vivantes.

La non-vivacité révèle souvent un problème de conception du système modélisé ; elle montre qu'une partie du système n'est, à partir d'un état donné, plus sensible aux événements externes.

## 2.3 Les graphes d'événements temporisés

Suite à cette présentation succincte des réseaux de Petri, notre intérêt va maintenant se porter sur une sous-classe des réseaux de Petri : les graphes d'événements. On peut définir formellement les graphes d'événements à partir des réseaux de Petri.

**Définition 2.6 (Graphe d'événements).** Un graphe d'événements est un réseau de Petri tel que toute place  $p \in \mathcal{P}$  a exactement une transition amont et une transition aval (nous nous restreignons au cas où tous les arcs ont une valuation de 1).

Notons que les graphes d'événements ne permettent pas de modéliser les situations de concurrence telles que celles illustrées par les figures 2.4.(a) et 2.4.(b). Néanmoins, cette sous-classe de réseaux de Petri est intéressante pour de nombreuses applications où l'on doit essentiellement modéliser des contraintes de *synchronisation* (voir figure 2.4.(c) et figure 2.4.(d)) entre plusieurs processus.

**Remarque 2.7.** *Plusieurs études ont mis en évidence que des classes de réseaux de Petri plus générales que celles des graphes d'événements temporisés peuvent être munies d'un modèle algébrique. Citons les travaux de [Baccelli et al., 1995, Baccelli et al., 1996] sur les réseaux de Petri à choix libre<sup>2</sup>.*

*De même, dans [Cohen et al., 1998a], il est montré que les réseaux de Petri continus<sup>3</sup> peuvent sous certaines hypothèses être représentés par des récurrences polynomiales dans le demi-anneau  $(\min, +)$ .*

<sup>2</sup>Cette classe de réseaux est très importante, car elle recouvre de nombreux cas réels. Il s'agit en fait de tous les cas où le marquage d'une place autorise le franchissement de toutes ses transitions de sortie, et seule une intervention extérieure du contexte permet de choisir l'action qui sera exécutée. Du point de vue du réseau, le choix reste libre.

<sup>3</sup>Version "continue" des réseaux de Petri pour lesquels les nombres des jetons sont des nombres réels au lieu de nombres entiers.

Pour les graphes d'événements pondérés plusieurs approches ont été envisagées. Les travaux de Munier [Munier, 1993], consistent à modifier la structure du graphe d'événements pondéré afin de supprimer les pondérations des arcs pour, à la fin, aboutir à un simple graphe d'événements. Plus récemment, [Trouillet et al., 2001] propose une alternative aux travaux de Munier ; l'idée est alors de mettre en équation le comportement d'un graphe d'événements pondéré par l'intermédiaire d'une structure "algébrique"  $(\min, \text{div})$  pour ensuite aboutir à une représentation linéaire au sens du dioïde  $(\min, +)$ . L'avantage de ces travaux réside dans la fait que le graphe d'événements obtenu ne dépend pas du marquage initial du graphe d'événements pondéré, contrairement à [Munier, 1993].

### 2.3.1 Propriétés des graphes d'événements

Nous rappelons brièvement quelques caractéristiques des graphes d'événements au travers des propositions suivantes.

**Proposition 2.8.** *Dans un graphe d'événements, le nombre de jetons d'un circuit élémentaire est constant.*

*Démonstration.* Rappelons qu'un circuit élémentaire est un chemin qui commence et se termine au même sommet. Alors, si une transition franchissable appartenant à un circuit élémentaire est franchie, son franchissement prend un jeton dans une des places amont du circuit pour le remettre immédiatement dans une autre place aval du circuit. L'opération de franchissement d'une transition d'un circuit laisse donc invariant le nombre de jetons du circuit.  $\square$

**Proposition 2.9.** *Soit  $\mathcal{R}$  un graphe d'événements et  $\mathcal{M}_0$  son marquage initial, alors  $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$  est vivant si et seulement si tout circuit élémentaire contient une place initialement marquée.*

*Démonstration.* Supposons qu'un circuit élémentaire d'un graphe d'événements ne soit pas initialement marqué. En référence à la proposition 2.8, ce circuit ne contiendra jamais de jeton et donc toutes ses transitions sont en permanence non franchissables : le graphe d'événements n'est donc pas vivant. Inversement, dans un graphe d'événements non vivant, une transition morte (qui n'est jamais tirée) possède obligatoirement en amont une transition également morte. En remontant ainsi d'une transition morte à une autre située en amont, on aboutit inéluctablement à une transition appartenant à un circuit, circuit qui est donc nécessairement sans jeton.  $\square$

**Remarque 2.10.** *Les graphes d'événements considérés dorénavant seront systématiquement vivants.*

### 2.3.2 Introduction du temps dans les graphes d'événements

Les modèles de systèmes à événements discrets étudiés par la suite sont temporisés. Un graphe d'événements est dit *temporisé* (GET) si à chaque place  $p \in \mathcal{P}$  est associé un temps  $\theta(p)$ , où  $\theta : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$  est l'application qui à toute place  $p \in \mathcal{P}$  associe sa temporisation. Un temps  $\theta(p)$  est interprété comme la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place  $p$  ; par exemple pour le graphe d'événements temporisé de la figure 2.5, le marquage initial de la place située entre les transitions  $x_1$  et  $x_2$  étant nul, si la transition  $x_1$  est franchie à la date  $t_0$ , la transition  $x_2$  n'est pas franchissable avant la date  $t_0 + 3$ . De même, à chaque transition  $t \in \mathcal{T}$  il est possible d'associer un temps  $\theta(t)$  représentant la durée minimale d'activation de la transition  $t$ . Il a été montré qu'il est toujours possible de se ramener au cas où seules les places sont temporisées (cf. [Murata, 1989]).

**Exemple 2.11.** Le graphe d'événements temporisé de la figure 2.5 peut représenter une cellule de production fonctionnant comme suit : deux machines sont disponibles (les 2 jetons dans la place  $P_2$  signifient que les 2 machines sont libres) pour usiner des pièces. Les pièces sont amenées à l'une ou l'autre des deux machines travaillant en parallèle (place  $P_3$ ), le traitement d'une pièce prend au moins 3 unités de temps. A l'issue du traitement, la pièce finie est déposée dans un stock  $P_4$  (supposé de capacité infinie) et la machine ayant traité la pièce redevient disponible (1 jeton revient dans  $P_2$ ), en attendant une nouvelle pièce.

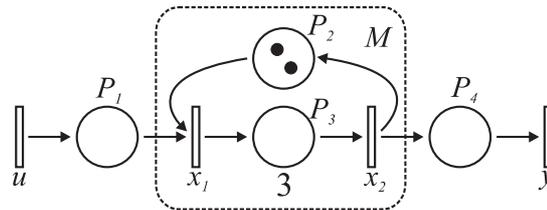


Figure 2.5 – Modèle GET d'une machine.

**Remarque 2.12.** Notons qu'au plus deux pièces peuvent être simultanément traitées, puisque d'après la proposition 2.8, le nombre de jetons dans un circuit est constant. Sur cet exemple, le régime permanent est périodique : deux pièces sont traitées toutes les 3 unités de temps, ce qui conduit à un taux de production de  $\frac{2}{3}$ .

## 2.4 Représentation d'état des graphes d'événements temporisés

Le comportement dynamique d'un système tel que celui de la figure 2.5 peut se représenter algébriquement de différentes façons. Classiquement, on considère la variation du marquage d'un réseau de Petri, notée  $\Delta\mathcal{M}$ , définie comme l'expression du produit d'une matrice  $W$ , appelée matrice d'incidence, par un vecteur de tirs de transitions, noté  $\underline{S}$ . L'évolution du marquage est représentée par une équation de la forme  $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_0 + \Delta\mathcal{M}$  (cf. §2.2.4). Il s'agit du modèle mathématique le plus couramment associé aux réseaux de Petri (le lecteur intéressé par ce modèle mathématique pourra se reporter à [Murata, 1989]).

Si l'on se réfère à la figure 2.5, la seule caractéristique que traduit une telle représentation concerne l'état de la machine  $M$  (au sens logique) : machine libre ou occupée.

Pour pouvoir discuter des performances du système temporisé, c'est-à-dire déterminer son régime transitoire et/ou son régime permanent, l'équipe (max, +) de l'INRIA a proposé dans [Cohen et al., 1985] une modélisation considérant non pas l'état du marquage mais les dates de franchissements des transitions.

### 2.4.1 Dateurs, forme implicite

Une façon naturelle de procéder consiste à associer à chaque transition  $i$ , un dateur  $x_i$ , qui est une application croissante  $x_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\max}$  où, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_i(k) \in \mathbb{Z}_{\max}$  désigne la date à laquelle se produit la  $k^{\text{ième}}$  activation de la transition  $i$ . Par convention, les événements (les tirs des transitions) seront numérotés à partir de 0 ; le tir n°0 est le premier tir d'une transition. De plus,  $x_i(k) = +\infty$

signifie, par convention, que l'événement numéroté  $k$ , ainsi que les événements suivants n'ont jamais eu lieu. D'autre part, les jetons présents dans le graphe d'événements temporisé seront supposés disponibles depuis "l'origine des temps" c'est-à-dire depuis la date  $-\infty$ .

Pour introduire la mise en équation d'un graphe d'événements temporisé, on considère les exemples élémentaires de la figure 2.6, constitués de trois transitions  $t_1, t_2$  et  $t_3$  et de deux places  $p_1$  et  $p_2$  temporisées avec  $\theta(p_1) = 1$  et  $\theta(p_2) = 3$ .

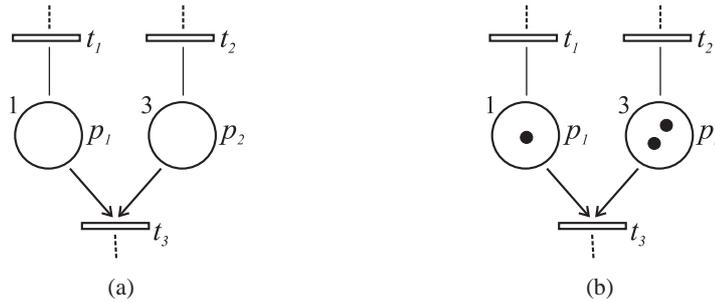


Figure 2.6 – Principe de la mise en équation du fonctionnement d'un graphe d'événements temporisé

Sur la figure 2.6.(a), aucun jeton n'est présent initialement dans les places. La date au plus tôt de la  $k^{\text{ième}}$  activation de la transition  $t_3$  est donc conditionnée par la date de la  $k^{\text{ième}}$  activation de  $t_1$  et de la date de la  $k^{\text{ième}}$  activation de  $t_2$ . De plus il faut tenir compte du temps de séjour minimal d'un jeton dans  $p_1$  et dans  $p_2$ . Nous devons donc avoir

$$x_3(k) \geq 1 + x_1(k) \quad \text{et} \quad x_3(k) \geq 3 + x_2(k).$$

Finalement, on obtient donc pour  $x_3(k)$  l'inéquation

$$x_3(k) \geq \max(1 + x_1(k), 3 + x_2(k)).$$

La figure 2.6.(b) représente une situation plus générale, des jetons sont présents dans certaines places à l'instant initial. Dans cette situation, la date au plus tôt de la  $k^{\text{ième}}$  activation de  $t_3$  est conditionnée par la date au plus tôt de la  $(k - 1)^{\text{ième}}$  activation de  $t_1$  (car un jeton est présent initialement dans  $p_1$ ) et par la date au plus tôt de la  $(k - 2)^{\text{ième}}$  activation de  $t_2$  (car deux jetons sont présents initialement dans  $p_2$ ). L'inéquation pour  $x_3(k)$  peut alors s'écrire

$$x_3(k) \geq \max(1 + x_1(k - 1), 3 + x_2(k - 2)).$$

En appliquant ce principe au graphe de la figure 2.5, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1(k) & \geq \max(x_2(k - 2), u(k)) \\ x_2(k) & \geq 3 + x_1(k) \\ y(k) & \geq x_2(k) \end{cases}$$

Dans le dioïde  $\bar{\mathbb{Z}}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}, \max, +)$  où  $a \oplus b = \max(a, b)$  et  $a \otimes b = a + b$ ,  $\varepsilon = -\infty$ ,  $e = 0$ , le système précédent se met sous la forme

$$\begin{cases} x_1(k) \succeq x_2(k-2) \oplus u(k) \\ x_2(k) \succeq 3 \otimes x_1(k) \\ y(k) \succeq x_2(k) \end{cases}$$

ou encore, matriciellement, cela s'écrit

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-2) \\ x_2(k-2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) \succeq (\varepsilon \ e) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Soit un système d'inégalités de la forme

$$x(k) \succeq A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_2 \otimes x(k-2) \oplus B \otimes u(k) \quad (2.2a)$$

$$y(k) \succeq C_0 x(k) \quad (2.2b)$$

Alors, en notant  $\mathcal{M}_0(p_i)$  le marquage initial pour toute place  $p_i \in \mathcal{P}$  et en posant  $M = \max_{p_i \in \mathcal{P}}(\mathcal{M}_0(p_i))$ , on obtient d'une manière générale un système de la forme :

$$x(k) \succeq \bigoplus_{i=0}^M A_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M B_j u(k-j), \quad (2.3a)$$

$$y(k) \succeq \bigoplus_{l=0}^M C_l x(k-l). \quad (2.3b)$$

## 2.4.2 Forme explicite "ARMA", forme d'état

Dans le système d'inéquations (2.3) apparaît une inégalité sur l'état  $x(k)$  et sur la sortie  $y(k)$ . Cette représentation n'est pas pleinement satisfaisante ; cependant un cas "limite" de fonctionnement appelé fonctionnement au plus tôt peut être considéré. L'étude du fonctionnement "au plus tôt"<sup>4</sup> des graphes d'événements temporisés est équivalent à l'étude des solutions minimales du système d'inéquations aux dateurs (2.3).

Pour résoudre le système d'inéquations aux dateurs (2.3), on utilise les résultats du corollaire 1.117 sur la résolution de systèmes du type  $x = ax \oplus b$ , la plus petite solution de (2.3a) étant donnée par

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^M \bar{A}_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M \bar{B}_j u(k-j), \quad (2.4)$$

où  $\bar{A}_1 = A_0^* A_1, \bar{A}_2 = A_0^* A_2, \dots, \bar{B}_0 = A_0^* B_0, \dots$ . D'après le corollaire 1.117, la plus petite solution de (2.3a) satisfait l'égalité, c'est-à-dire que l'équation (2.4) définit l'ensemble des dates au plus tôt pour le fonctionnement du système. Ainsi, à partir de la donnée de la suite des vecteurs de commande  $u(1), u(2), \dots$  et de l'état initial  $x(0)$ , (2.4) permet de déterminer successivement toutes les valeurs  $x(1), x(2), \dots$  du vecteur d'état. L'équation (2.4) est l'analogue d'un modèle ARMA<sup>5</sup>.

<sup>4</sup>i.e. les transitions sont franchies dès qu'elles sont franchissables.

<sup>5</sup>Auto-Régressif à Moyenne Ajustée (Auto Regressive-Moving Average en anglais).

A partir de la forme ARMA (2.4), il est toujours possible de passer à la forme suivant dite d'état :

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \quad (2.5a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2.5b)$$

Pour cela, il faut exprimer un graphe d'événements temporisé dont le comportement est équivalent à celui représenté par (2.4) et tel que les matrices  $A_i$  soient nulles pour  $i \neq 1$  et tel que les matrices  $B_j, C_l$  soient nulles pour  $i, j > 0$ . Pour le graphe d'événements temporisé cela signifie :

- toute place située entre deux transitions internes doit contenir exactement un jeton ;
- toutes les places situées entre une transition source et une transition interne doivent être sans jeton ;
- toutes les places situées entre une transition interne et une transition puits doivent être sans jeton.

Ce qui revient à augmenter le vecteur d'état du système.

Par analogie avec la théorie des systèmes dynamiques linéaires, l'équation (2.5a) est l'équation d'état, l'équation (2.5b) est l'équation d'observation (ou de sortie),  $x(\cdot) \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^n$  est le vecteur d'état,  $u(\cdot) \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^p$  est le vecteur d'entrée ou de commande et  $y(\cdot) \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^q$  est le vecteur de sortie ou d'observation. De même on appelle  $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{n \times n}$  la matrice d'état ou matrice dynamique,  $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{n \times p}$  la matrice d'entrée ou de commande,  $C \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{q \times n}$  la matrice de sortie ou d'observation.

**Remarque 2.13.** *En théorie des systèmes dynamiques linéaires, les équations d'état sont considérées dans le domaine temporel (i.e. les systèmes sont décrits par des fonctions du temps  $t$ ). L'analogie consiste ici à associer à une transition  $x \in \mathcal{T}$ , la fonction  $t \mapsto x(t)$  qui indique le nombre de tirs de la transition  $x$  ayant eu lieu jusqu'à la date  $t$ . Cette variable est appelée un "compteur" associé à la transition  $x$ . Ainsi, pour l'exemple de la figure 2.5, en associant à chaque transition  $x$  (resp. :  $u, y$ ) une variable  $x(t)$  (resp. :  $u(t), y(t)$ ) représentant le nombre de tirs de la transition  $x$  (resp. :  $u, y$ ) jusqu'à l'instant  $t$ , on obtient le système d'inéquations suivant en terme de compteurs :*

$$\begin{cases} x_1(t) \leq \min(2 + x_2(t), u(t)) \\ x_2(t) \leq x_1(t-3) \\ y(t) \leq x_2(t) \end{cases}$$

Avec les notations du dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}, \min, +)$  (où  $a \oplus b = \min(a, b)$  et  $a \otimes b = a + b$ ) et avec  $a \succeq b \Leftrightarrow a \oplus b = a \Leftrightarrow a \leq b$ , on peut écrire

$$\begin{cases} x_1(t) \succeq 2 \otimes x_2(t) \oplus u(t) \\ x_2(t) \succeq x_1(t-3) \\ y(t) \succeq x_2(t) \end{cases}$$

En suivant la même démarche que pour les dateurs, on obtient un système pouvant s'écrire comme (2.5), mais cette fois dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  et relativement aux fonctions compteurs. Les dioïdes  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  et  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  fournissent donc deux systèmes d'inégalités qui permettent de manière équivalente d'étudier la dynamique du système modélisé.

### 2.4.3 Quelques éléments de théorie spectrale des matrices $(\max, +)$

Dans cette partie, on rappelle certaines propriétés des matrices carrées à coefficients dans un dioïde. Un des résultats essentiels est, pour une matrice  $A$  irréductible, l'existence d'une propriété de *cyclicité*

de la forme  $A^{n+c} = \lambda^c \otimes A^n$ , pour  $n$  assez grand, et où  $\lambda$  est l'unique valeur propre de la matrice  $A$ . Nous verrons que pour un GET en régime autonome, la cyclicité de la matrice  $A$  permet d'établir que celui-ci atteint un régime périodique après un régime transitoire.

L'analyse spectrale de la matrice  $A$  vise donc à fournir un critère de performance sur le système modélisé. Les résultats de la théorie spectrale des matrices ( $\max, +$ ) permettent donc d'aborder l'évaluation de performance des GET d'un point de vue algébrique. Le lecteur trouvera une démonstration de ces résultats dans [Gondran and Minoux, 2001, §6], [Baccelli et al., 1992, §3.2.4], [Gaubert, 1992, Gaubert, 1995] et [Terrason et al., 1998].

Considérons le système autonome suivant :

$$x(k) = Ax(k-1) = A^k x(0), \quad (2.6)$$

Le problème de recherche de valeurs propres et de vecteurs propres de la matrice carrée  $A$  s'exprime comme la recherche de couples  $(\lambda, \nu)$  où  $\nu$  (avec  $\nu \neq \varepsilon$ ) est appelé *vecteur propre* de  $A$  pour la *valeur propre*  $\lambda$ , tels que

$$A \otimes \nu = \lambda \otimes \nu.$$

Pour l'évolution de l'état du système autonome, si  $\lambda$  est valeur propre de  $A$  et si  $x(0)$  le vecteur d'état initial est vecteur propre de  $A$  alors

$$x(k) = \lambda x(k-1) = \lambda^k x(0)$$

soit dans l'algèbre usuelle, pour chacune des transition  $i$  du GET

$$x_i(k) = \lambda + x_i(k-1) \quad (2.7)$$

autrement dit, toutes les variables d'état sont incrémentées de  $\lambda$  lorsque  $k$  est incrémenté de 1, l'interprétation physique de (2.7) pour un GET représentant un système de production (cf. figure 2.5) serait de dire qu'une pièce est produite toutes les  $\lambda$  unités de temps ;  $\lambda$  est donc l'inverse du taux de production, c'est-à-dire le temps de cycle du GET. Pour ce cas particulier où  $x(0)$  est un vecteur propre de  $A$ , le régime permanent est atteint, sans passer par une phase de régime transitoire.

**Théorème 2.14.** *Une matrice  $A \in (\mathbb{Z}_{\max})^{n \times n}$  irréductible<sup>6</sup> admet une unique valeur propre  $\lambda$  égale au rayon spectral*

$$\lambda = \rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n \text{tr}(A^k)^{1/k} \quad (2.8)$$

où  $\text{tr}(A^k)$  désigne la trace de la matrice  $A^k$ , c'est-à-dire la somme (au sens de  $\oplus$ ) de ses éléments diagonaux.

**Remarque 2.15 (Cas réductible).** *Le cas plus général où  $A$  est réductible a été également traité dans [Gaubert, 1992]. Les résultats énoncés dans le cas réductible s'appuient sur une décomposition du graphe de précedence de  $A$  en composantes fortement connexes, et une étude séparée de chacune des composantes. Ce qui se dégage de cette étude est qu'il n'y a plus nécessairement unicité de la valeur propre lorsque  $A$  est réductible.*

<sup>6</sup> $\mathcal{G}(A)$ , le graphe de précedence associé à  $A$ , est fortement connexe.

**Remarque 2.16.** *Pour le calcul effectif du rayon spectral de la matrice  $A \in (\mathbb{Z}_{\max})^{n \times n}$  plusieurs méthodes sont envisageables. Une méthode simple consiste à évaluer la formule (2.8). Une autre méthode permettant de calculer la valeur propre d'une matrice consiste à appliquer un résultat dû à R.M Karp (voir [Baccelli et al., 1992, §2.2.3],[Gondran and Minoux, 1979]). En outre, une autre classe de méthodes, dites d'itérations sur les politiques, sont plus rapides que l'algorithme de Karp ; le lecteur intéressé pourra se reporter à [Terrason et al., 1998].*

Le théorème qui suit montre qu'il est également possible de caractériser le taux de production directement à partir du graphe d'événements temporisé.

**Théorème 2.17.** *Le taux de production  $\lambda$  d'un graphe d'événements temporisé est caractérisé par*

$$\lambda = \min_{\text{circuits élémentaires}} \frac{N(c_i)}{T(c_i)}, \quad (2.9)$$

où  $N(c_i)$  dénote le nombre total de jetons du circuit  $i$  et  $T(c_i)$  la somme des temporisations des places du circuit  $i$ .

**Exemple 2.18.** *Pour le GET de la figure 2.5, on a*

$$\lambda = \frac{2}{3}.$$

**Remarque 2.19.** *Cette méthode de calcul consistant à énumérer les circuits du graphe et à calculer leur poids moyen n'est praticable que pour des petits graphes.*

**Théorème 2.20** ([Cohen et al., 1983],[Chretienne, 1983]). *Pour une matrice irréductible  $A \in (\mathbb{Z}_{\max})^{n \times n}$  de valeur propre  $\lambda$ , il existe deux entiers  $K$  et  $c$  tels que*

$$\forall k \geq K, \quad A^{k+c} = \lambda^c \otimes A^k,$$

*l'entier  $c$  est appelé cyclicité de  $A$ .*

Dans l'arithmétique traditionnelle, le théorème précédent signifie que, après un régime transitoire de longueur  $K$ , le régime devient périodique, c'est-à-dire que

$$\forall i, \quad x_i(k+c) = x_i(k) + c\lambda.$$

## 2.5 Relation entrée-sortie d'un GET

Les différentes méthodes de commande que nous développerons dans les chapitres suivants s'appuient essentiellement sur une représentation entrée-sortie des systèmes. Ce chapitre est donc consacré à l'étude des différentes représentations les plus communément rencontrées dans la littérature.

### 2.5.1 Réponse impulsionnelle

Partant de la forme d'état (2.5), le développement de la récurrence  $\forall p \in \mathbb{N}$  donne

$$\begin{aligned}
 y(k) &= Cx(k) \\
 &= CAx(k-1) \oplus CBu(k) \\
 &= CA^2x(k-2) \oplus CABu(k-1) \oplus CBu(k) \\
 &= \dots \\
 &= CA^p x(k-p) \oplus \bigoplus_{i=0}^{p-1} CA^i Bu(k-i).
 \end{aligned}$$

En adoptant la convention  $x(k) = \varepsilon$  et  $u(k) = \varepsilon$  pour  $k < 0$ , c'est-à-dire des conditions initiales nulles, on peut réécrire le comportement entrée-sortie du GET

$$y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} h(i) \otimes u(k-i) \quad (2.10)$$

avec

$$h(i) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i < 0 \\ CA^i B & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Il est possible de donner une interprétation des termes de la matrice  $h \in (\mathbb{Z}_{\max})^{q \times p}$ , où  $q$  représente le nombre de sorties et  $p$  le nombre d'entrées. L'élément  $h_{ij}(k)$  est simplement la date du  $k^{\text{i-ème}}$  tir de la sortie  $y_i(\cdot)$  dépendant de l'entrée  $u_j(\cdot)$  du type

$$u_j(k) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k < 0 \\ e & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.12)$$

toutes les autres entrées étant  $u_l(k) = \varepsilon, \forall l \neq j \in \mathbb{Z}$ .

Une telle entrée  $u_j(\cdot)$  qui correspond au tir d'une infinité de jetons à la date 0, peut être interprétée comme l'équivalent d'une *impulsion* appliquée à l'entrée  $u_j$  du GET et l'élément  $h_{ij}(k)$  est alors la réponse impulsionnelle correspondante.

En considérant un GET mono-entrée mono-sortie, on peut remarquer que la sortie (2.10) correspond alors à une convolution, plus exactement une sup-convolution (dans l'algèbre traditionnelle) de la réponse impulsionnelle par l'entrée

$$y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} h(i) \otimes u(k-i) = \max_{i=0, \dots, k} (h(i) + u(k-i)) \stackrel{\text{def}}{=} (h * u)(k). \quad (2.13)$$

On remarque la forte analogie avec la relation entrée-sortie d'un système linéaire continu.

## 2.6 La transformée en $\gamma$

Les techniques de transformation jouent un rôle primordial dans l'étude des systèmes linéaires invariants. C'est le cas des transformées de Fourier ou Laplace pour les systèmes en temps continu. La transformée en  $z$  est une particularisation pour les systèmes en temps discret. Elle est aux systèmes en temps discret ce que la transformée de Laplace est aux systèmes en temps continu. La propriété la plus remarquable est la mise en concordance de la convolution avec un produit dans le domaine transformé.

La transformée en  $\gamma$  rappelée ici joue un rôle analogue à la transformée en  $z$ . En effet, elle va permettre de transformer les sup-convolutions (présentées précédemment) en des produits de séries formelles. La structure algébrique qu'il convient d'utiliser pour une telle représentation est en conséquence celle d'un dioïde de séries formelles (cf. exemple 1.81).

### 2.6.1 Définition

Pour un dateur  $\{d(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , la transformée en  $\gamma$ , notée  $D(\gamma)$  est définie comme la série formelle

$$D(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \gamma^k.$$

Supposons deux dateurs reliés par l'égalité  $x_1(k) = x_2(k - n_0)$ , ce qui correspond à deux transitions séparées par une place contenant  $n_0$  jetons. La transformée en  $\gamma$  de chacun des dateurs est

$$\begin{aligned} X_1(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k) \gamma^k \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k - n_0) \gamma^k \\ &= \gamma^{n_0} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k - n_0) \gamma^{(k - n_0)} \\ &= \gamma^{n_0} X_2(\gamma). \end{aligned}$$

Il apparaît que multiplier une série en  $\gamma$  par  $\gamma^{n_0}$  revient à décaler la séquence de  $n_0$  unités. Il est donc possible d'interpréter l'opérateur  $\gamma$  comme opérateur de décalage "événementiel", ce que l'on écrit parfois  $\gamma x(k) = x(k - 1)$ . Ceci est illustré par la figure 2.7.

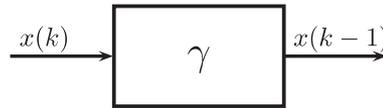


Figure 2.7 – Opérateur de décalage "événementiel"

**Remarque 2.21 (Dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ ).** Comme il a été rappelé dans l'exemple 1.81, un ensemble de séries formelles à coefficients sur un dioïde complet peut également être muni d'une structure de dioïde complet dont la loi  $\oplus$  est la somme de séries formelles et la loi  $\otimes$  le produit de séries formelles. La transformée en  $\gamma$  des dateurs peut donc être considérée comme appartenant à un dioïde de séries formelles en  $\gamma$ .

Nous noterons  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  le dioïde complet des séries formelles en  $\gamma$  à coefficients dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  et exposants dans  $\mathbb{Z}$ . L'élément neutre de l'addition de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  est la série  $\varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$  (où  $\varepsilon = -\infty$  est l'élément neutre de l'addition dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ) et l'élément neutre de la multiplication est la série  $e(\gamma) = e \gamma^0$  (où  $e = 0$  est l'élément neutre de la multiplication de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ ).

### 2.6.2 Propriétés de la transformée en $\gamma$

**Linéarité :** La linéarité de la transformation signifie que la transformée d'une séquence obtenue par combinaison linéaire d'autres séquences n'est rien d'autre que la combinaison linéaire (au sens du dioïde)

des transformées correspondantes. Si

$$x(k) = ax_1(k) \oplus bx_2(k)$$

alors

$$\begin{aligned} X(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x(k) \gamma^k \\ &= a \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k) \gamma^k \right) \oplus b \left( \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k) \gamma^k \right) \\ &= aX_1(\gamma) \oplus bX_2(\gamma). \end{aligned}$$

**Convolution :** Cette propriété est une des plus importantes et justifie à elle seule l'usage qui est fait de la transformée en  $\gamma$  pour étudier les systèmes  $(\max, +)$ -linéaires. Si  $y(k)$  est obtenu par convolution de  $x(k)$  et  $g(k)$ , on a

$$y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} x(i) \otimes g(k - i).$$

La transformée en  $\gamma$  de  $y(k)$ , soit  $Y(\gamma)$ , est obtenue par

$$\begin{aligned} Y(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} y(k) \gamma^k \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} x(i) \otimes g(k - i) \gamma^k \\ &= \left[ \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} x(i) \gamma^i \right] \otimes \left[ \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} g(k - i) \gamma^{(k-i)} \right] \\ &= X(\gamma) \otimes G(\gamma). \end{aligned}$$

### 2.6.3 Matrice de transfert

Nous avons vu au paragraphe 2.4 que, pour un GET, il était toujours possible d'obtenir une représentation d'état canonique (2.5). Considérons la transformée en  $\gamma$  des dateurs  $u(\cdot)$ ,  $x(\cdot)$  et  $y(\cdot)$  de l'équation (2.5a) ; on a

$$X(\gamma) = \gamma AX(\gamma) \oplus BU(\gamma).$$

Il s'agit d'une équation implicite. Le résultat du corollaire 1.117 donne la plus petite solution

$$X(\gamma) = (\gamma A)^* BU(\gamma).$$

En reportant cette solution dans l'équation (2.5b), on obtient

$$Y(\gamma) = C(\gamma A)^* BU(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma) \quad \text{avec} \quad H(\gamma) = C(\gamma A)^* B.$$

Cette equation exprime le comportement entrée-sortie du système. La série formelle

$$H(\gamma) = C(\gamma A)^* B \in (\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]])^{q \times p}, \quad (2.14)$$

est appelée *série (ou matrice) de transfert* du système. On peut noter que  $H(\gamma)$  correspond bien à la transformée en  $\gamma$  de la réponse impulsionnelle (2.11). On observe aussi que la sup-convolution (2.13) de la réponse impulsionnelle  $h(\cdot)$  par le signal d'entrée  $u(\cdot)$  a été transformée en un produit des séries formelles  $C(\gamma A)^* B$  et  $U(\gamma)$ .

**Exemple 2.22.** Pour l'exemple de la figure 2.5, on obtient la représentation par des séries formelles en  $\gamma$  suivante

$$\begin{cases} X(\gamma) = & \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^2 \\ 3 & \varepsilon \end{pmatrix} X(\gamma) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(\gamma) \\ Y(\gamma) = & (\varepsilon \ e) X(\gamma) \end{cases}$$

Le calcul de la matrice de transfert  $H(\gamma) = C(\gamma A)^* B$  donne  $H(\gamma) = (3\gamma^2)^* 3$ .

Pour le système décrit dans l'exemple précédent, nous considérons le signal d'entrée  $U(\gamma) = e = e\gamma^0$ , la sortie résultante vaut  $Y(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma) = (3\gamma^2)^* 3 \otimes e = (3\gamma^2)^* 3 = H(\gamma)$ . Autrement dit, pour  $U(\gamma) = e$  (entrée impulsionnelle), la sortie  $Y(\gamma)$  coïncide avec la réponse impulsionnelle du système. On peut alors penser que  $U(\gamma) = e$  correspond à la transformée en  $\gamma$  du signal  $u(k)$  décrit dans la partie précédente (eq. 2.12, §2.5.1).

Mais, la transformée en  $\gamma$  de ce signal correspondrait à la série formelle suivante  $U(\gamma) = e \oplus \gamma \oplus \gamma^2 \oplus \dots = \gamma^*$  (i.e. une infinité de jetons à la date 0). Il apparaît immédiatement que  $e\gamma^0 \neq \gamma^*$ , cependant il est possible de justifier le fait que  $e \sim \gamma^*$  dans le contexte des GET, mais il faut pour cela introduire un nouveau dioïde  $\mathcal{D}[\gamma]$ .

## 2.6.4 Filtrage des trajectoires monotones

Le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  permet de coder tous types de trajectoire. Or, par définition, l'évolution des dateurs  $x_i(k)$  associés aux transitions des GET sont monotones : le  $k^{\text{i-ème}}$  tir d'une transition est toujours postérieur au  $(k-1)^{\text{i-ème}}$ . Par conséquent, le modèle mathématique utilisé pour représenter le comportement d'un GET doit tenir compte de ce caractère monotone.

La propriété de monotonie d'une trajectoire de dateur  $d(k)$  se traduit par

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \{d(k) \succeq d(k-1)\} \iff \{d(k) = d(k) \oplus d(k-1)\}.$$

En passant à la transformée en  $\gamma$  et en accord avec le corollaire 1.117, on obtient donc, comme caractérisation de cette propriété,

$$\{D(\gamma) = D(\gamma) \oplus \gamma D(\gamma)\} \iff \{D(\gamma) = \gamma^* D(\gamma)\}.$$

Autrement dit, pour pouvoir prendre en compte les qualités de monotonie des séries formelles associées aux transitions d'un GET, il nous faut considérer, parmi les séries de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ , celles qui restent invariantes lorsqu'on les multiplie par la série  $\gamma^*$ . Cette propriété laisse entrevoir un début d'explication au fait que pour un GET, on a  $e \sim \gamma^*$ . Le théorème suivant précise cette notion et montre que cet ensemble de "séries croissantes" a également une structure de dioïde qui est en outre isomorphe à un dioïde quotient.

### Théorème 2.23.

1. Le sous-ensemble  $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  des éléments de la forme  $\gamma^* D(\gamma)$  est un dioïde d'élément neutre  $\varepsilon(\gamma)$  pour l'addition et  $\gamma^*$  pour la multiplication. Ce dioïde sera noté  $\mathcal{D}[\gamma]$ .
2. Soit la congruence  $\mathcal{R}_{\gamma^*}$  suivante définie sur  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  par

$$\{D_1(\gamma) \mathcal{R}_{\gamma^*} D_2(\gamma)\} \iff \{\gamma^* D_1(\gamma) = \gamma^* D_2(\gamma)\}.$$

Chaque classe du dioïde quotient  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma] / \mathcal{R}_{\gamma^*}$  contient un plus grand élément qui appartient à  $\mathcal{D}[\gamma]$ .

3. Les dioïdes  $\mathcal{D}[\gamma]$  et  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$  sont isomorphes.

*Démonstration.*

1. il faut remarquer que l'ensemble  $\mathcal{D}[\gamma]$  est stable pour la somme et le produit de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  et admet  $\varepsilon(\gamma)$  comme élément neutre pour l'addition et  $\gamma^*$  comme élément neutre pour la multiplication ( $\gamma^*\gamma^* = \gamma^*$ ). Cet ensemble a donc une structure de dioïde complet. En revanche, on peut remarquer que l'élément neutre pour la multiplication dans  $\mathcal{D}[\gamma]$  (égal à  $\gamma^*$ ) est différent de celui de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  (égal à  $e$ ), donc  $\mathcal{D}[\gamma]$  n'est pas un sous-dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  ;
2. Soit  $D_1$  un élément de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ , alors l'élément  $\gamma^*D_1$  est dans la même classe d'équivalence que  $D_1$  et il est aussi plus grand que  $D_1$  puisque  $\gamma^* \succeq e$ . De plus, si on suppose qu'il existe un autre élément  $D_2 \in \mathcal{D}[\gamma]$  dans la même classe d'équivalence que  $D_1$ , alors on peut écrire  $D_2 = \gamma^*D_3$  et  $\gamma^*D_2 = \gamma^*D_1$ . Comme  $\gamma^*\gamma^* = \gamma^*$ ,  $\gamma^*D_2 = \gamma^*D_3 = D_2$  d'où  $D_2 = \gamma^*D_1$ , ceci prouve l'unicité de l'élément  $\gamma^*D_1 \in \mathcal{D}[\gamma]$  appartenant à la même classe d'équivalence que  $D_1$ . Finalement, supposons qu'il existe  $D_4$ , un autre élément de  $\mathcal{D}[\gamma]$ , qui soit plus grand que  $D_1 \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  ; alors  $D_4 = \gamma^*D_5 \succeq D_1$  et  $\gamma^*D_4 = \gamma^*D_5 = D_4 \succeq \gamma^*D_1$ , ce qui montre que  $\gamma^*D_1 \in \mathcal{D}[\gamma]$  est le plus grand élément de la classe d'équivalence de  $D \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ .
3. Soit l'homomorphisme  $\Pi : x \mapsto \gamma^*x$ . D'après le théorème 1.96, l'application  $[x]_{\Pi} \mapsto \Pi(x)$  définit un isomorphisme du dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$  dans  $\mathcal{D}[\gamma]$ . □

Ce théorème permet de conclure que le (véritable) dioïde des "transformées en  $\gamma$  des applications dateurs" est donc le dioïde  $\mathcal{D}[\gamma]$  et non  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ . Ce théorème permet aussi de justifier le fait que  $e$  est équivalent à  $\gamma^*$ , c'est-à-dire que l'arrivée d'une infinité de jetons à la date 0 peut-être codée  $e$  alors que, normalement cette situation devrait être codée  $\gamma^*$ .

## 2.6.5 Simplifications

Puisque les trajectoires de tir des GET sont codées par des séries de  $\mathcal{D}[\gamma]$  et que ce dioïde est isomorphe à  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$ , on manipulera indifféremment des séries de  $\mathcal{D}[\gamma]$  ou des classes de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$ .

D'après le théorème 1.95, les opérations d'addition et de multiplication sur les classes de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$  ne dépendent pas des séries de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  choisies pour représenter ces classes. On peut donc ramener les opérations sur  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$  à des opérations sur  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  pour des représentants quelconques.

Par la suite, on adoptera la simplification d'écriture consistant à omettre les crochets  $[\cdot]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$  pour désigner un élément de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$ . Les éléments manipulés seront donc tacitement des classes, bien que les écritures employées ne fassent figurer que des représentants particuliers de ces classes.

En remarquant que sur  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$ , on a

$$\gamma^*(\gamma^n \oplus \gamma^{n'}) = \gamma^*\gamma^{\min(n,n')},$$

en appliquant l'allégement d'écriture proposé précédemment, on peut écrire la règle de simplification suivante sur  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$  :

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n,n')}. \quad (2.15)$$

**Remarque 2.24.** La manipulation des représentants de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]/\mathcal{R}_{\gamma^*}$  peut donc être assimilée à la manipulation des éléments de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\gamma]$  à laquelle on ajoute la règle de simplification (2.15). De même cette règle admet une interprétation simple en terme graphique. Par exemple, les graphes d'événements

temporisés de la figure 2.8.(a) sont équivalents du point de vue de la relation entrée-sortie, c'est-à-dire qu'ils réalisent la même application au plus tôt  $u \mapsto y$ .

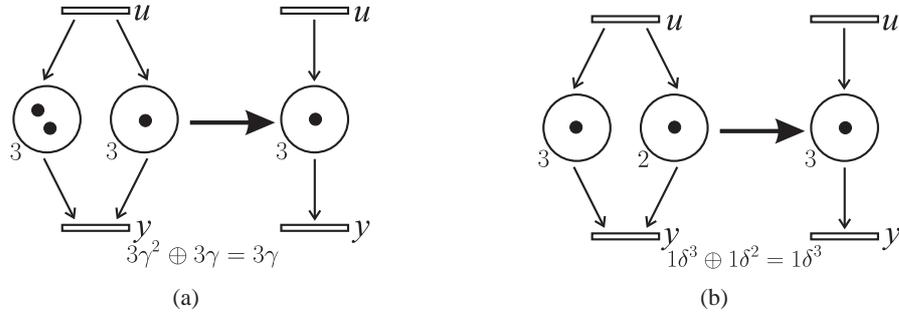


Figure 2.8 – Interprétation graphique des règles de simplification

### 2.6.6 Transformée en $\delta$

Dans le domaine temporel (voir remarque 2.13), la situation est complètement duale, puisque une variable compteur  $\{c(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$  est une application croissante :  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\min}$ . Si on note  $\delta$  l'opérateur de décalage, on a

$$C(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} c(t) \delta^t.$$

De même que précédemment, la propriété de monotonie (on se souviendra que l'ordre dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$  est l'inverse de l'ordre naturel, i.e.,  $a \succeq b \Leftrightarrow a \oplus b = a \Leftrightarrow a \leq b$ ) d'une trajectoire de compteur  $c(t)$  se traduit par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \{c(t+1) \preceq c(t)\} \iff \{c(t) = c(t) \oplus c(t+1)\}.$$

En passant à la transformée en  $\delta$ , on obtient donc

$$\{C(\delta) = C(\delta) \oplus \delta^{-1}C(\delta)\} \iff \{C(\delta) = (\delta^{-1})^*C(\delta)\}.$$

**Exemple 2.25.** Pour l'exemple de la figure 2.5, on obtient la représentation par des séries formelles en  $\delta$  suivante

$$\begin{cases} X(\delta) = & \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ \delta^3 & \varepsilon \end{pmatrix} X(\delta) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(\delta) \\ Y(\delta) = & \begin{pmatrix} \varepsilon & e \end{pmatrix} X(\delta) \end{cases}$$

Le calcul de la matrice de transfert  $H(\delta) = C(\delta A)^* B$  donne  $H(\delta) = (2\delta^3)^* \delta^3$ .

Dans le paragraphe §2.6.4, nous avons vu qu'il était possible de "filtrer" les éléments de  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[\![\gamma]\!]$  pour ne garder que ceux qui présentent une propriété de monotonie de leur trajectoire, on est alors arrivé à une structure algébrique  $\mathcal{D}[\![\gamma]\!]$  possédant la règle de simplification (2.15). De la même manière, en considérant une représentation dans le domaine temporel et les transformées en  $\delta$  correspondantes, et en réalisant un filtrage analogue sur les éléments monotones, on aboutit à un dioïde noté  $\mathcal{D}[\![\delta]\!]$ . Il est possible de montrer que toutes les manipulations précédentes en dateurs admettent des versions duales

dans le dioïde  $\mathcal{D}[\delta]$ . De même que pour le dioïde  $\mathcal{D}[\gamma]$  il est possible de munir le dioïde  $\mathcal{D}[\delta]$  de la règle de simplification suivante (duale de  $\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n,n')}$ ) :

$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')}. \quad (2.16)$$

On peut voir sur la figure 2.8.(b), une interprétation graphique de cette règle.

**Remarque 2.26.** *On peut se demander si l'une des deux représentations est plus appropriée pour la description des GET. L'approche dateur présente l'avantage de ne s'intéresser qu'à l'occurrence des tirs.*

*L'approche compteur, quant à elle, dépend d'un pas d'observation temporel. Cette approche semble donc plus naturelle par analogie avec la théorie des systèmes à temps discrets conventionnels. De plus, elle permet une meilleure cohabitation avec les modélisations de RdP à choix libre proposées par [Baccelli et al., 1995, Baccelli et al., 1996].*

*A notre avis seule l'application permet de trancher pour l'une ou l'autre des représentations. Donc, pour un GET, soit on applique les règles de simplification de la transformée en  $\gamma$  (2.15), soit les règles de simplification de la transformée en  $\delta$  (2.16).*

*Une représentation dite bi-dimensionnelle a été introduite dans [Baccelli et al., 1992, Cohen, 1998b]. Dans cette représentation, les opérateurs  $\gamma$  et  $\delta$  sont traités de façon symétrique. Elle permet alors de repousser le choix de la représentation et se révèle être fort élégante. Dans cette représentation, nous manipulerons des séries formelles en deux variables commutatives  $\gamma$  et  $\delta$  à exposants dans  $\mathbb{Z}$  et coefficients dans le dioïde de Boole  $\mathbb{B}$ , cet ensemble de séries formelles est un dioïde appelé  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ .*

## 2.7 Représentation bi-dimensionnelle : dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Nous rappelons ici la démarche qui permet de coder les trajectoires de tir des GET par des séries formelles en deux variables commutatives,  $\gamma$  et  $\delta$ , à exposants dans  $\mathbb{Z}$  et à coefficients booléens. Les aspects événementiel et temporel d'un GET sont alors considérés de manière symétrique.

Nous rappelons tout d'abord formellement comment certaines séries en ces deux variables commutatives permettent la prise en compte de la monotonie des trajectoires de tir.

### 2.7.1 Dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$

**Définition 2.27 (Dioïde  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ ).** On appelle  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$  le dioïde des séries formelles commutatives à coefficients booléens en deux indéterminées  $\gamma$  et  $\delta$  et à exposants dans  $\mathbb{Z}$ . Une série formelle de  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$  s'écrira de manière unique

$$s = \bigoplus_{n,t \in \mathbb{Z}} s(n,t) \gamma^n \delta^t; \quad (2.17)$$

avec  $s(n,t) = e$  ou  $\varepsilon$ ,  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$  est un dioïde complet.

Le support d'une série  $s$  est la partie de  $\mathbb{Z}^2$  suivante

$$\text{Supp}(s) = \{(n,t) \in \mathbb{Z}^2 \mid s(n,t) \neq \varepsilon\}.$$

### 2.7.2 Construction du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Il reste maintenant à traduire les règles de simplification (2.15) - (2.16) dans le dioïde  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ . Tout d'abord, remarquons que si on associe au couple  $(n, t)$  l'information : "l'événement  $n$  a eu lieu *au plus tôt* à l'instant  $t$ ", alors  $(n, t)$  domine toutes les paires d'informations  $(n', t')$  telles que  $n' \geq n$  et  $t' \leq t$ . Par conséquent la série  $s = \gamma^n \delta^t$  devrait être équivalente à la série  $s'$  de support

$$\text{Supp}(s') = \{(n', t') \in \mathbb{Z}^2 \mid n' \geq n, t' \leq t\} = \{(n+x, t-y) \mid (x, y) \in \mathbb{N}^2\}.$$

Cela peut être traduit par

$$s' = \bigoplus_{(x,y) \in \mathbb{N}^2} \gamma^{n+x} \delta^{t-y} = s(\gamma)^* (\delta^{-1})^*.$$

On considère l'application

$$\varphi : \mathbb{B}[\gamma, \delta] \rightarrow \mathbb{B}[\gamma, \delta] \quad , \quad \varphi(s) = s(\gamma)^* (\delta^{-1})^* ,$$

$\varphi$  est une fermeture ( $\varphi \circ \varphi = \varphi$  et  $\varphi \succeq \text{Id}$ ). En considérant l'application  $\varphi$ , on peut donner la relation d'équivalence suivante :

$$\forall s, s' \in \mathbb{B}[\gamma, \delta] \quad , \quad s \equiv s' \iff \varphi(s) = \varphi(s').$$

**Définition 2.28 (Dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ ).** Nous appelons  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  le dioïde quotient  $\mathbb{B}[\gamma, \delta] / \mathcal{R}_\varphi$ . Dans [Baccelli et al., 1992] il est montré que  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est isomorphe à  $\mathcal{D}[\gamma]$  et à  $\mathcal{D}[\delta]$ .

Cela signifie que les classes de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  sont également bien adaptées à la représentation des trajectoires de tir d'un graphe d'événements temporisé.

Avant de présenter  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  comme outil de modélisation, nous rappelons quelques caractéristiques de ce dioïde.

### 2.7.3 Manipulation des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ et règles de simplification

La somme et le produit des classes de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  étant indépendants des représentants de  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$  choisis (th. 1.95), un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  sera désigné par un représentant quelconque dans  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ .

La manipulation des éléments de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  se fait donc avec les règles de somme et de produit du dioïde  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$  auxquelles on ajoute les règles de simplifications issues de (2.15) et (2.16) suivantes

$$\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^t = \gamma^{\min(n, n')} \delta^t \tag{2.18}$$

$$\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t'} = \gamma^n \delta^{\max(t, t')} \tag{2.19}$$

Rappelons les principales caractéristiques de ce dioïde.  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est un dioïde complet distributif d'élément neutre  $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \delta)$  (la série nulle de  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ ) pour la loi  $\oplus$  et d'élément maximum  $\top = (\gamma^{-1})^* \delta^*$ .

**Remarque 2.29.** On utilisera parfois abusivement les notations suivantes pour le plus petit et le plus grand élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  :  $\varepsilon = \gamma^{+\infty} \delta^{-\infty}$  et  $\top = \gamma^{-\infty} \delta^{+\infty}$ .

Du fait de la structure de quotient de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , il est possible de donner plusieurs expressions de l'élément neutre  $e$  pour la multiplication

$$e = \gamma^* (\delta^{-1})^* = \gamma^* = (\delta^{-1})^* = \gamma^0 = \delta^0 = \gamma^0 \delta^0.$$

Ces éléments sont effectivement "équivalents" modulo  $\mathcal{R}_\varphi$  (mais ne sont évidemment pas identiques en tant qu'éléments de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ ). L'ordre naturel  $\preceq$  défini sur  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  à partir de la loi  $\oplus$  permet d'établir l'équivalence suivante

$$\gamma^n \delta^t \preceq \gamma^{n'} \delta^{t'} \iff n \geq n' \text{ et } t \leq t'.$$

Enfin, puisque  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  est complet, tout couple  $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  admet un plus grand minorant noté  $a \wedge b$ . Dans le cas où  $a$  et  $b$  sont des monômes, on obtient la relation

$$\gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} = \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')} \quad (2.20)$$

qui permet d'établir la borne inf de deux monômes de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

#### 2.7.4 Représentation graphique des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Nous nous appuyons sur la représentation des éléments de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  pour définir une représentation graphique des éléments de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

Il paraît naturel de représenter une série de  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  par la collection des points  $(n, t)$  du plan  $\mathbb{Z}^2$  appartenant au support de cette série. Pratiquement, la série  $\gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^2 \delta^3 \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$  sera représentée par les points de coordonnées  $(1, 4)$  et  $(2, 3)$  de  $\mathbb{Z}^2$ .

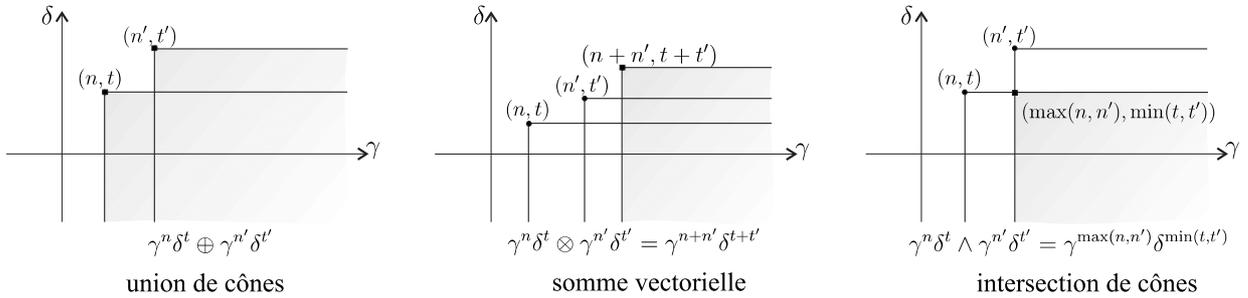
Pour un élément  $s \in \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ , on représente dans le plan  $\mathbb{Z}^2$  l'ensemble  $\text{Supp}(s)$ .

**Représentant maximal** Comme l'application  $\varphi$  est une fermeture, tout élément  $a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  vérifie l'égalité  $a = \varphi(a) = \gamma^*(\delta^{-1})^* a$ . En particulier,  $\gamma^*(\delta^{-1})^* a$  est le plus grand élément de la classe de  $a$  dans  $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ . Graphiquement, le représentant dans  $\mathbb{Z}^2$  de  $\gamma^*(\delta^{-1})^* a$  est en quelque sorte le représentant qui "couvre" la plus grande surface de  $\mathbb{Z}^2$ , c'est-à-dire qui inclut effectivement tous les représentants possibles de cette classe. Ce représentant maximal de la classe de  $a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  étant canonique, il sera choisi pour représenter graphiquement l'élément  $a$ .

Prenons un monôme  $\gamma^n \delta^t$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . Le représentant maximal de ce monôme est l'élément  $\gamma^n \delta^t \gamma^*(\delta^{-1})^*$ . Multiplier  $\gamma^n \delta^t$  par  $\gamma^*(\delta^{-1})^*$  revient simplement à "attacher" au point de coordonnées  $(n, t)$  tous les points contenus dans le cône sud-est de sommet  $(n, t)$  du plan. Pour un élément quelconque  $a = \bigoplus_{(n_i, t_i) \in A} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , le représentant graphique de  $a$  est donc l'union des cônes sud-est de sommet  $(n_i, t_i) \in A$ .

On obtient la correspondance suivante entre les opérations sur les monômes de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  et sur les cônes de  $\mathbb{Z}^2$ :

1. la somme de deux monômes  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$  est représentée graphiquement par l'union des cônes sud-est de sommets respectifs  $(n, t)$  et  $(n', t')$ .
2. le produit de deux monômes  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$  est représenté par le cône de sommet  $(n + n', t + t')$  (ce qui correspond au cône dont le sommet est la somme vectorielle des sommets  $(n, t)$  et  $(n', t')$ ).
3. l'inf de deux monômes  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$  est représentée par l'intersection des cônes sud-est de sommets respectifs  $(n, t)$  et  $(n', t')$ .


 Figure 2.9 – Représentation graphique des opérations sur  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .

**Représentant minimal** Tout élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  admet un représentant maximal dans  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ . En revanche, il est montré, notamment dans [Baccelli et al., 1992], que seuls certains éléments de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  admettent un représentant minimal dans  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ . Graphiquement, on obtient ce représentant minimal en ne codant que les sommets du représentant de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . A titre d'exemple, pour l'élément  $\gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^2 \delta^3$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , l'élément  $\gamma^*(\delta^{-1})^* \gamma^1 \delta^4$  est le représentant maximal (graphiquement, correspond à toute la surface du cône de sommet  $(1, 4)$ ) et  $\gamma^1 \delta^4$  est son représentant minimal (seulement le sommet du cône).

Le représentant minimal est également le représentant obtenu après avoir effectué toutes les simplifications d'écritures résultant des règles (2.15) et (2.16). On présentera par la suite, systématiquement, les résultats sous leur forme minimale, lorsqu'elle existe.

### 2.7.5 Exemples de calculs sur des polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

On notera  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  l'ensemble des polynômes de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , c'est-à-dire l'ensemble des éléments à support fini (cf exemple 1.82). On propose ici quelques calculs sur des polynômes de manière à se familiariser avec cette structure algébrique.

Soit  $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ ,  $a = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^4$  et  $b = \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^5$ . On peut vérifier graphiquement (figure 2.10) que ces éléments sont sous leur forme minimale.

$$a \oplus b = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^5 \delta^5 \quad (\text{on remarque en effet que } \gamma^4 \delta^3 \preceq \gamma^3 \delta^4).$$

$$a \otimes b = (\gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^4) \otimes (\gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^5) = \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^7 \delta^7 \oplus \gamma^8 \delta^9.$$

En remarquant que  $\gamma^5 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 \preceq \gamma^5 \delta^6$ , on obtient le représentant minimal

$$a \otimes b = \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^7 \delta^7 \oplus \gamma^8 \delta^9.$$

Enfin, on obtient la borne inf de ces éléments

$$a \wedge b = \gamma^2 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^4.$$

Nous terminons cette présentation en évoquant le moyen pratique de calculer la résiduée  $a \setminus b$ .

Les monômes  $\gamma^n \delta^t$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  sont inversibles :  $(\gamma^n \delta^t)^{-1} = \gamma^{-n} \delta^{-t}$ . En s'appuyant sur la relation (f.8), la résiduée d'un élément quelconque  $b$  par un monôme  $\gamma^n \delta^t$  est donc obtenue par

$$\gamma^n \delta^t \backslash b = \gamma^{-n} \delta^{-t} \otimes b.$$

D'autre part, puisque un élément  $a$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  s'écrit comme une somme de monômes (finie ou infinie), soit  $a = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ , on peut écrire explicitement d'après (f.5)

$$a \backslash b = \left( \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \right) \backslash b = \bigwedge_{i \in I} \gamma^{-n_i} \delta^{-t_i} b = \gamma^{-n_1} \delta^{-t_1} b \wedge \gamma^{-n_2} \delta^{-t_2} b \wedge \dots$$

Lorsque  $a$  et  $b$  sont des polynômes, le calcul  $a \backslash b$  revient à calculer la borne inf d'un nombre fini de polynômes.

Avec  $a = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^4$  et  $b = \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^4$  on obtient

$$\begin{aligned} a \backslash b &= \gamma^{-1} \delta^{-1} b \wedge \gamma^{-3} \delta^{-4} b \\ &= (\gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3) \wedge (\gamma^{-1} \delta^{-2} \oplus \gamma^1 \delta^{-1} \oplus \gamma^2) \\ &= \gamma^1 \delta^{-1} \oplus \gamma^2. \end{aligned}$$

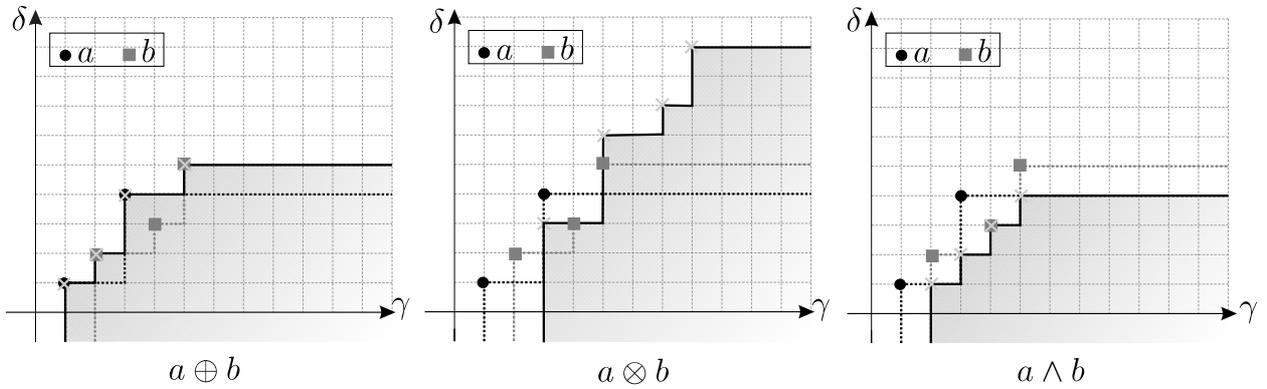


Figure 2.10 – Manipulation de polynômes de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .

### 2.7.6 Modélisation des graphes d'événements temporisés sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

La démarche, similaire à celle adoptée pour le codage dans  $\mathcal{D}[\gamma]$  ou  $\mathcal{D}[\delta]$ , est la suivante :

1. les trajectoires de tir des transitions du GET sont codées par des éléments de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$
2. d'un point de vue dynamique, le GET peut alors être vu comme un système induisant des décalages (événementiels et temporels) sur ces trajectoires, les opérateurs permettant de caractériser ces décalages étant l'opérateur  $\gamma$  dans le domaine événementiel et l'opérateur  $\delta$  dans le domaine temporel.

On rappelle tout d'abord comment coder les trajectoires de tir d'un GET par des éléments de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .

Soit  $x(\gamma, \delta)$  un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  associé à une transition  $x$  d'un GET. Le représentant maximal dans  $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$  de cet élément peut être écrit  $x(\gamma, \delta)\gamma^*(\delta^{-1})^* = \bigoplus_{i \in I} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ . Il faut interpréter chacun des monômes  $\gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  de  $x(\gamma, \delta)\gamma^*(\delta^{-1})^*$  comme une information élémentaire connue sur l'histoire de la transition  $x$ . L'information élémentaire associée au monôme  $\gamma^{n_i} \delta^{t_i}$  est :

*le tir numéro  $n_i$  de la transition  $x$  a lieu au plus tôt à la date  $t_i$*

En résumé, un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  représente une infinité d'informations élémentaires concernant les tirs d'une transition, parmi lesquelles certaines peuvent sembler redondantes. Le représentant minimal d'un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  associé à une transition  $x$  tient lieu d'information "essentielle" concernant la trajectoire de tir de cette transition. Autrement dit, connaissant le représentant minimal d'un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  codant la trajectoire de tir d'une transition, on est capable de déduire à quelles dates ont eu lieu effectivement les tirs, ou symétriquement, pour une date donnée, combien de tirs ont eu lieu à cette date.

**Exemple 2.30.** *Nous formulons ici la représentation d'état du GET de la figure 2.5. On utilise la même notation pour désigner les transitions et les éléments de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  codant leurs tirs. Les trajectoires sont reliées par les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma^2 x_2 \oplus u \\ x_2 &= \delta^3 x_1 \\ y &= x_2 \end{aligned}$$

*ou encore sous forme matricielle*

$$\begin{cases} X &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^2 \\ \delta^3 & \varepsilon \end{pmatrix} X \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U \\ Y &= (\varepsilon \ e) X \end{cases}$$

*Pour le calcul de la matrice de transfert, on peut procéder très simplement ; en effet on peut reporter  $x_1$  dans l'équation  $x_2$ , on obtient alors  $x_2 = \delta^3 (\gamma^2 x_2 \oplus u) = \delta^3 \gamma^2 x_2 \oplus \delta^3 u$  ; en appliquant le corollaire 1.117, on peut résoudre cette équation implicite, on a alors  $x_2 = (\gamma^2 \delta^3)^* \delta^3 u$ . Finalement en reportant  $x_2$  dans l'équation de sortie, on obtient comme matrice de transfert  $H = CA^*B = \delta^3 (\gamma^2 \delta^3)^*$ .*

**Remarque 2.31.** *On souligne ici le lien qui apparaît entre les résultats fournis par la théorie spectrale et l'expression du transfert du GET de la figure 2.5.*

*Puisque les transitions internes  $(x_1, x_2)$  appartiennent à une même composante fortement connexe, il y a un temps de cycle unique pour l'ensemble du graphe de la figure 2.5. Le rayon spectral  $\rho(A)$  fournit alors le temps de cycle de ce circuit critique (c'est ici le seul circuit), soit  $\rho(A) = \frac{2}{3}$ , ce qui correspond à un taux de production de 2 jetons toutes les 3 unités de temps.*

*On peut noter que l'expression du transfert donnée dans l'exemple précédent met également en évidence ce résultat. En effet, la forme du transfert du GET de la fig. 2.5 fait apparaître le caractère ultimement périodique de la réponse impulsionnelle : cette période ultime est décrite par la présence d'une seule étoile de monôme, ici  $(\gamma^2 \delta^3)^*$ .*

## 2.8 Réalisabilité, rationalité et périodicité

L'objet de la dernière partie de ce chapitre est de rappeler que tout transfert de GET peut se représenter par une matrice constituée de séries périodiques de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .

Les définitions sont ici fournies dans le dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , mais s'étendent naturellement aux dioïdes  $\mathcal{D}[\gamma]$  et  $\mathcal{D}[\delta]$ .

**Définition 2.32 (Causalité).** Une série  $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est dite *causale* si  $s = \varepsilon$  (la série est nulle) ou si son représentant minimal est à exposants dans  $\mathbb{N}$ . Une matrice est dite causale si toutes ses composantes sont causales.

**Remarque 2.33.** Ainsi  $\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^{-4}$  est un élément causal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ , son représentant minimal (obtenu après simplification) étant le monôme  $\gamma^2\delta^3$ . De manière générale, un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est causal si les sommets de son représentant graphique appartiennent au cadran Nord-Est du plan  $\mathbb{Z}^2$ .

**Notation 2.34** ( $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$ ). L'ensemble des séries causales de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est stable pour la somme et le produit de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . Cet ensemble forme un sous-dioïde complet de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  noté  $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$  par la suite. Notons que l'élément maximum de  $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$  est  $\delta^*$ .

**Définition 2.35 (Rationalité).** Un élément  $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est dit *rationnel* si l'un de ses représentants au moins peut être obtenu par un nombre fini d'opérations  $\oplus, \otimes$  et  $*$  à partir de l'ensemble  $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$ . On dira qu'une matrice à coefficients dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est rationnelle si tous ses coefficients sont rationnels.

**Remarque 2.36.** Par définition, un élément rationnel est également causal.

**Définition 2.37 (Réalisation).** Un élément  $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est *réalisable* s'il existe un GET mono-entrée/mono-sortie dont cet élément est la fonction de transfert, ou plus précisément, s'il existe trois matrices  $C, A, B$  de tailles respectivement  $q \times n, n \times n$  et  $p \times n$  à coefficients dans l'ensemble  $\{\varepsilon, e\}$  telles que cet élément puisse s'écrire  $CA^*B$ .

**Définition 2.38 (Périodicité).** Un élément  $s$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est *périodique* s'il existe deux polynômes  $p$  et  $q$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

$$p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \text{ et } q = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{N_j} \delta^{T_j}$$

et un monôme causal  $r = \gamma^\nu \delta^\tau$  tels que

$$s = p \oplus qr^*.$$

Une matrice est périodique si tous ses coefficients sont périodiques.

**Remarque 2.39.** Cette notion est illustrée sur la figure 2.11. De plus, notons que cette définition de la périodicité n'impose pas la causalité de la série.

**Théorème 2.40 ([Cohen et al., 1989]).** Soit  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times m}$ . Sont équivalents

- (i)  $H$  est réalisable
- (ii)  $H$  est rationnelle
- (iii)  $H$  est périodique et causale

*Démonstration.* Nous renvoyons le lecteur à [Cohen et al., 1989] pour une preuve exhaustive de ce résultat.  $\square$

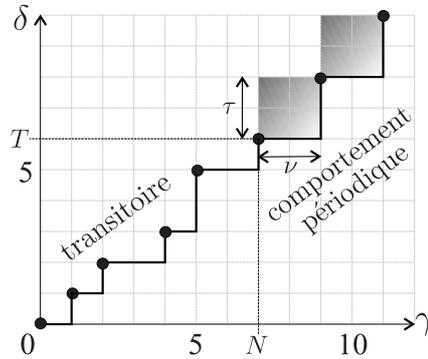


Figure 2.11 – Représentation graphique de la série  $s = e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6(\gamma^2\delta^2)^*$ .

**Définition 2.41 (Pente ultime).** La pente ultime d'une série périodique  $s = p \oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$  est notée  $\sigma_\infty(s)$  et est définie comme le ratio  $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau$ .

**Théorème 2.42.** L'ensemble des séries périodiques de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est stable pour la somme, le produit, l'inf et la résiduation. En outre, pour  $s_1$  et  $s_2$  deux séries périodiques non dégénérées (telles que  $\nu_1, \nu_2 \neq 0$  et  $\tau_1, \tau_2 \neq 0$ ), on obtient les résultats suivants

$$\begin{aligned}\sigma_\infty(s_1 \oplus s_2) &= \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)), \\ \sigma_\infty(s_1 \otimes s_2) &= \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)), \\ \sigma_\infty(s_1 \wedge s_2) &= \max(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)).\end{aligned}$$

Si  $\sigma_\infty(s_1) \leq \sigma_\infty(s_2)$  alors

$$\sigma_\infty(s_2 \backslash s_1) = \sigma_\infty(s_1),$$

sinon,  $s_2 \backslash s_1 = \varepsilon$ .

*Démonstration.* L'étude des séries périodiques est abordée par Gaubert dans [Gaubert, 1992, Chap. 7, Annexe A] et [Gruet, 1995]. Le lecteur y trouvera les preuves des résultats énoncés dans ce théorème.  $\square$

Une partie du problème de synthèse de correcteurs, proposée dans les chapitres suivants de ce mémoire, repose sur le résultat suivant.

**Proposition 2.43.** L'injection canonique  $I_+ : \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta] \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  est résiduable. Sa résiduée sera notée  $\text{Pr}_+$ .

*Démonstration.*  $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$  est un sous-dioïde complet de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ ; par conséquent, il est possible d'appliquer directement la proposition 1.48.  $\square$

Le calcul pratique de  $\text{Pr}_+$  est le suivant. Soit  $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  que l'on écrit

$$s = \bigoplus_{i \in I} s(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i}.$$

$\text{Pr}_+(s)$  s'obtient simplement en "annulant" dans  $s$  les monômes non causaux, c'est-à-dire à exposants strictement négatifs, soit

$$\text{Pr}_+(s) = \text{Pr}_+\left(\bigoplus_{i \in I} s(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i}\right) = \bigoplus_{i \in I} s_+(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i},$$

$$\text{où } s_+(n_i, t_i) = \begin{cases} s(n_i, t_i) & \text{si } (n_i, t_i) \geq (0, 0) \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}.$$

**Exemple 2.44 (Calcul de  $\text{Pr}_+$  sur un élément périodique).**  $\text{Pr}_+(\gamma^{-2}\delta^{-3}(\gamma\delta)^*) = \text{Pr}_+(\gamma^{-2}\delta^{-3} \oplus \gamma^{-1}\delta^{-2} \oplus \delta^{-1} \oplus \gamma \oplus \gamma^2\delta \oplus \dots) = \gamma(\gamma\delta)^*$ . Graphiquement, le représentant de  $\text{Pr}_+(s)$  ne conserve que les sommets du représentant de  $s$  contenus dans le cadran Nord-Est du plan  $\mathbb{Z}^2$  (voir figure 3.1).

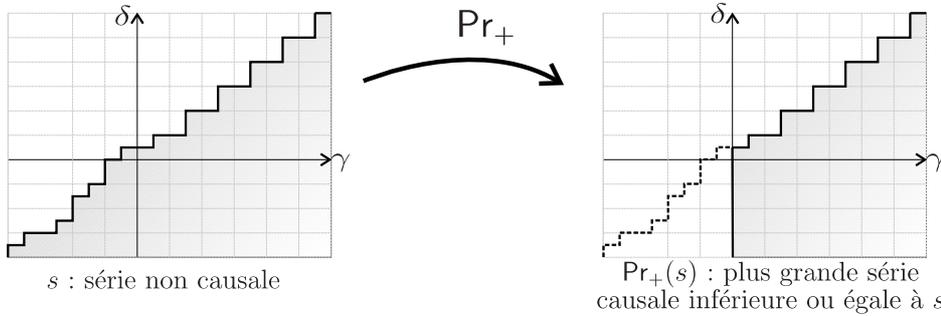


Figure 2.12 – Représentation graphique de l'opération de projection  $\text{Pr}_+$ .

**Remarque 2.45.** Il faut garder à l'esprit que  $\text{Pr}_+$  étant un projecteur (i.e.  $\text{Pr}_+ \circ \text{Pr}_+ = \text{Pr}_+$ ), si une série  $s$  est causale elle est invariante par  $\text{Pr}_+$ , c.-à-d.

$$s \in \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\![\gamma, \delta]\!] \iff s = \text{Pr}_+(s).$$

## 2.9 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté différents dioïdes permettant la représentation du comportement des GET. Une part importante des résultats présentés concerne la représentation d'état de système  $(\max, +)$ -linéaire ainsi que la présentation du dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ .

Nous avons également introduit les caractéristiques périodiques de la réponse impulsionnelle d'un graphe d'événements temporisés. En particulier, le calcul du transfert des GET se ramène à la manipulation de séries rationnelles pour lesquelles il existe des logiciels permettant leur manipulation [SW2001, 2001].

Le prochain chapitre est consacré pour une partie au problème de la synthèse de correcteur pour les GET et pour l'autre partie à l'étude de leur robustesse.

## Commande et analyse de la robustesse de systèmes $(\max, +)$ -linéaires

### 3.1 Introduction

De manière analogue aux systèmes continus, on entend par commande de systèmes à événements discrets le pilotage d'un système par le contrôle de ses entrées afin d'atteindre des performances spécifiées au préalable.

Historiquement, les premiers travaux sur la commande de GET, obtenus par une approche  $(\max, +)$ , apparaissent dans [Cohen et al., 1989]. L'objectif de commande est alors un problème de poursuite d'une trajectoire connue *a priori*. Autrement dit, il s'agit d'établir une trajectoire d'entrée pour le système telle que la réponse en sortie "suive au mieux" une trajectoire de consigne correspondant au comportement désiré en sortie du système. L'approche proposée dans [Cohen et al., 1989] permet d'établir la plus grande commande d'entrée telle que la réponse en sortie soit inférieure ou égale à un signal de consigne noté  $z$ . Elle est donc optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps<sup>1</sup>.

Plus récemment, le problème de poursuite de modèle a été considéré dans différents travaux [Libeaut, 1996, Libeaut and Loiseau, 1996, Cottenceau, 1999, Lüders and Santos-Mendes, 2002, Maia et al., 2003]. L'objectif est la synthèse d'un correcteur modifiant le comportement dynamique du système en vue d'obtenir pour le système corrigé des performances spécifiées sous la forme d'un modèle dit de référence. Le système, et le modèle de référence, sont généralement représentés par leur fonction de transfert. On peut distinguer trois approches.

La première consiste à synthétiser un précompensateur placé en amont du système nominal en vue d'approcher au mieux le modèle de référence [Libeaut, 1996, Libeaut and Loiseau, 1996], [Gruet, 1995]. Le correcteur recherché est le plus grand, ce qui lui confère un caractère optimal vis-à-vis du critère de juste-à-temps.

La deuxième approche consiste en un problème de commande en boucle fermée. Il s'agit cette fois de synthétiser un contrôleur de type retour de sortie ou retour d'état permettant au système en boucle fermée d'atteindre au mieux le modèle de référence [Cottenceau, 1999, Cottenceau et al., 2001,

---

<sup>1</sup>Juste-à-temps est une traduction littérale du terme anglais "Just-in-time". On ne doit pas interpréter ce terme comme "au dernier moment", mais comme la "quantité juste" (égale au besoin) au "temps voulu" (date du besoin). Dans les milieux industriels, on parle de méthode de production en juste-à-temps (ou encore en flux tendus), cela consiste à acheter ou à produire la quantité juste nécessaire (de façon à minimiser les stocks internes) au moment où on en a besoin (satisfaction de la demande client).

Lüders and Santos-Mendes, 2002]. Là encore, les correcteurs recherchés sont les plus grands. Ils sont donc également optimaux par rapport au critère de juste-à-temps.

Enfin, dernièrement, une nouvelle structure de commande généralisant ces approches a été considérée. Cette nouvelle structure améliore les performances des commandes précédentes. Elle est basée sur l'utilisation simultanée d'un précompensateur et d'un retour de sortie [Maia et al., 2003].

Les commandes décrites précédemment sont déterminées à partir d'un modèle du système réel souvent appelé modèle nominal. Ce modèle correspond dans la plupart des cas à une approximation de la réalité. Ses carences peuvent être multiples, citons par exemple les incertitudes sur certains paramètres du modèle, les variations paramétriques du système au cours du temps ou suivant les conditions de fonctionnement. Enfin, des facteurs externes imprévisibles peuvent venir perturber le fonctionnement du système en boucle fermée. Il est donc souvent nécessaire d'étudier la robustesse des lois de commande mises en oeuvre, afin d'évaluer leur sensibilité à ces aléas.

L'objectif de ce chapitre est donc d'étudier la robustesse des lois de commandes décrites précédemment. Dans un premier temps, nous étudions la robustesse de la commande introduite dans [Cohen et al., 1989], c'est-à-dire une commande de type poursuite de trajectoire. Il s'agit de caractériser l'ensemble des systèmes préservant l'objectif de commande, c'est-à-dire l'ensemble des systèmes qui respectent le critère de juste-à-temps. Nous montrons notamment que la commande optimale vis-à-vis du système nominal l'est également pour tous les systèmes de cet ensemble.

Ensuite, nous abordons la robustesse des lois de commande en boucle fermée. Dans cette partie, nous dégagons des marges "admissibles" pour le système en boucle fermée, c'est-à-dire que pour toutes variations du système comprises dans ces marges l'objectif de commande est toujours réalisé. Nous montrons plus particulièrement que le correcteur calculé pour le modèle nominal reste optimal pour tous les systèmes compris dans ces marges.

Ce chapitre rassemble les contributions de [Lhommeau et al., 2001a, Lhommeau et al., 2001b].

## 3.2 Préliminaires algébriques

L'étude de la robustesse de la commande en boucle ouverte requiert l'examen de deux applications,  $\Lambda_a$  et  $\Psi_a$  définies sur des dioïdes complets.

**Notation 3.1.** On notera  $\Lambda_a$  et  $\Psi_a$  les applications définies par

$$\begin{aligned} \Lambda_a &: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C} \\ x &\mapsto x \backslash a, \end{aligned} \quad (3.1)$$

et

$$\begin{aligned} \Psi_a &: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D} \\ x &\mapsto a / x, \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  sont des dioïdes complets.

**Proposition 3.2.** Le couple d'applications antitones  $(\Lambda_a, \Psi_a)$  établit une correspondance de Galois entre les dioïdes  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .

*Démonstration.* Montrons d'abord l'antitonie. Comme  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  sont des dioïdes complets, on a l'équivalence suivante :  $x \succeq y \Leftrightarrow x = x \oplus y \Leftrightarrow y = x \wedge y$ , alors

$$\Lambda_a(x) = \Lambda_a(x \oplus y) \Leftrightarrow x \backslash a = (x \oplus y) \backslash a = x \backslash a \wedge y \backslash a = \Lambda_a(x) \wedge \Lambda_a(y) \quad (\text{d'après (f.5)}),$$

donc  $x \succeq y \Rightarrow \Lambda_a(x) = \Lambda_a(x) \wedge \Lambda_a(y) \iff \Lambda_a(x) \preceq \Lambda_a(y)$ . L'antitonie de  $\Psi_a$  se démontre en suivant la même démarche. Il reste à montrer que  $\Lambda_a \circ \Psi_a \succeq \text{Id}_{\mathcal{C}}$  et que  $\Psi_a \circ \Lambda_a \succeq \text{Id}_{\mathcal{D}}$ . On a

$$\begin{aligned} \Lambda_a \circ \Psi_a(x) &= (a\phi x) \backslash a \succeq x(a \backslash a) \succeq x \iff \Lambda_a \circ \Psi_a \succeq \text{Id}_{\mathcal{C}} \quad (\text{d'après (f.7) et par (f.2) on a } (a \backslash a) \succeq e), \\ \Psi_a \circ \Lambda_a(x) &= a\phi(x \backslash a) \succeq (a\phi a)x \succeq x \iff \Psi_a \circ \Lambda_a \succeq \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad (\text{d'après (f.7) et par (f.2) on a } (a\phi a) \succeq e). \end{aligned}$$

En accord avec la définition 1.63 le couple d'applications  $(\Lambda_a, \Psi_a)$  établit bien une correspondance de Galois entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ .  $\square$

On rappelle que si  $(\mathcal{D}, \preceq)$  est un ensemble ordonné, on note par  $(\mathcal{D}^{\text{op}}, \preceq_{\mathcal{D}^{\text{op}}})$  l'ensemble ordonné opposé, c'est-à-dire l'ensemble pour lequel  $a \preceq_{\mathcal{D}^{\text{op}}} b \iff a \succeq_{\mathcal{D}} b$ .

**Corollaire 3.3.** *Soient les applications  $\Lambda_a : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{op}}$  et  $\Psi_a : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{D}$ , alors  $\Lambda_a$  est une application résiduable et sa résiduée s'exprime par  $\Lambda_a^{\#} = \Psi_a$ . Dualement, soit  $\Lambda_a : \mathcal{D}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $\Psi_a : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}^{\text{op}}$  alors  $\Psi_a$  est résiduable et sa résiduée vaut  $\Psi_a^{\#} = \Lambda_a$ .*

*Démonstration.* Dans la proposition 3.2, nous avons montré que le couple d'applications  $(\Lambda_a, \Psi_a)$  établit une correspondance de Galois entre  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$ . Alors, la proposition 1.70 conduit immédiatement au résultat.  $\square$

**Remarque 3.4.** *Ce résultat montre que la plus grande solution dans  $\mathcal{D}$  de l'inéquation  $x \backslash a \succeq b$  est  $a\phi b$ , de même  $b \backslash a$  est la plus grande solution de l'inéquation  $a\phi x \succeq b$ . On trouve également ce résultat dans [Menguy, 1997, Cohen, 1998a].*

L'analyse de robustesse de la commande en boucle fermée repose pour une grande partie sur les résultats qui suivent.

**Notation 3.5.** *On notera  $Q_a$  l'application définie par*

$$\begin{aligned} Q_a : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ x &\mapsto (xa)^*x, \end{aligned} \tag{3.3}$$

où  $\mathcal{D}$  est un dioïde complet.

**Remarque 3.6.** *L'application  $Q_a$  n'est pas résiduable. En effet,*

$$Q_a(x \oplus y) = ((x \oplus y)a)^*(x \oplus y) = (xa \oplus ya)^*(x \oplus y) \neq (xa)^*x \oplus (ya)^*y = Q_a(x) \oplus Q_a(y),$$

c'est-à-dire que l'application  $Q_a$  n'est pas semi-continue inférieurement. Elle ne satisfait donc pas les conditions du théorème 1.97.

La proposition suivante montre que  $Q_a$  restreinte à son image est résiduable.

**Proposition 3.7.** *Soit  $Q_a : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto (xa)^*x$  une application isotone définie sur des dioïdes complets. L'application  $\text{Im}_{Q_a}|Q_a$  est résiduable et sa résiduée vaut*

$$(\text{Im}_{Q_a}|Q_a)^{\#} = I_{\text{Im}_{Q_a}},$$

où  $I_{\text{Im}_{Q_a}} : \text{Im}_{Q_a} \rightarrow \mathcal{D}$  est l'injection canonique.

*Démonstration.* Notons tout d'abord que l'application  $Q_a$  est une fermeture. En effet, d'après (1.36) et (1.39), on a

$$Q_a \circ Q_a(x) = ((xa)^*xa)^*(xa)^*x = ((xa)^+)^*(xa)^*x = (xa)^*(xa)^*x = (xa)^*x = Q_a(x).$$

De plus  $Q_a \succeq \text{Id}_{\mathcal{D}}$ , puisque  $Q_a(x) = (xa)^*x = x \oplus xax \oplus \dots \succeq x$ . Alors, d'après la définition 1.52 l'application  $Q_a$  est une fermeture et grâce à la proposition 1.61, on sait que  $\text{Im}_{Q_a}|Q_a$  est une application résiduable.  $\square$

### 3.3 Commande en boucle ouverte

#### 3.3.1 Formulation du problème

Ce paragraphe présente la commande en boucle ouverte pour les GET. Un lecteur familier avec ce type de commande pourra aisément s'affranchir de sa lecture.

Précisément, le problème de commande en boucle ouverte résolu est le suivant. On dispose d'un système (un GET avec  $p$  entrées et  $q$  sorties) dont on connaît la matrice de transfert  $H \in \mathcal{D}^{q \times p}$ . On désire, à l'aide des entrées  $u \in \mathcal{D}^p$ , faire en sorte que les sorties du système suivent au mieux des trajectoires déterminées dites de consignes  $z \in \mathcal{D}^q$ . Dans [Cohen et al., 1989], il est montré que ce problème a une solution optimale, c'est-à-dire qu'il existe une plus grande commande d'entrée  $u_{opt} \in \mathcal{D}^p$  telle que la sortie résultant de cette entrée ( $y_{opt} = H u_{opt}$ ) soit inférieure ou égale à la sortie désirée  $z$ . La commande  $u_{opt}$  est alors optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps (la sortie  $y_{opt}$  est en juste-à-temps).

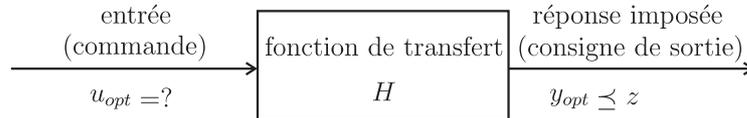


Figure 3.1 – Problématique générale de la commande en boucle ouverte.

Formellement, soit  $L_H : \mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^q, u \mapsto H \otimes u$ , une application définie sur des dioïdes complets. Déterminer la plus grande commande revient à s'intéresser à l'ensemble

$$\{u \in \mathcal{D}^p \mid L_H(u) \preceq z\},$$

et plus précisément à sa borne supérieure (notée  $u_{opt}$ ) qui nous donnera la plus grande commande vérifiant la condition  $L_H(u_{opt}) \preceq z$ . On peut déjà remarquer que cet ensemble n'est pas vide puisque  $u = \varepsilon$  est solution, c.-à-d.  $L_H(\varepsilon) = \varepsilon \preceq z$ .

En fait, le calcul de cette commande est un problème d'inversion d'application définie sur des dioïdes. La théorie de la résiduation (§1.5) permet de résoudre ce problème directement.

**Proposition 3.8.** *La commande optimale  $u_{opt}$  existe et est donnée par :*

$$u_{opt} = \sup \{u \in \mathcal{D}^p \mid L_H(u) \preceq z\} = L_H^\sharp(z) = H \backslash z. \quad (3.4)$$

*Démonstration.* Résulte immédiatement du fait que  $L_H$  est une application résiduable (§1.11).  $\square$

**Remarque 3.9.** *La commande optimale pour un GET correspond à la commande faisant entrer les jetons le plus tardivement possible dans le système.*

#### 3.3.2 Analyse de la robustesse

La synthèse de commande se fait sur la base d'un modèle dont la validité s'avère souvent limitée. Il est donc naturel de se préoccuper de la robustesse de la loi de commande. Ceci revient à établir les variations admissibles du système vis-à-vis du modèle nominal qui ne remettent pas en cause les performances de la loi de commande.

En théorie des systèmes linéaires [Alazard et al., 1999], une commande est dite robuste si elle garantit un certain *niveau de performances*, malgré les variations (ou les incertitudes) du modèle nominal.

Dans notre contexte, le problème peut s'énoncer comme suit. Étant donné un modèle nominal  $H$  et une loi de commande optimale associée  $u_{opt}$  garantissant que  $Hu_{opt} \preceq z$  (la performance désirée), il s'agit de caractériser la borne supérieure (notée  $H_{sup}$ ) de l'ensemble

$$\mathcal{H}_1 = \{X \in \mathcal{D}^{q \times p} \mid Xu_{opt} \preceq z\},$$

où  $H_{sup}$  représente le plus grand système assurant l'objectif de commande : c.-à-d.  $H_{sup}u_{opt} \preceq z$ .

**Proposition 3.10.** *Soit  $u_{opt}$  une commande optimale pour un objectif  $z$  donné. Le plus grand transfert  $H_{sup}$  garantissant  $H_{sup}u_{opt} \preceq z$  existe et est donné par*

$$H_{sup} = \sup \mathcal{H}_1 = R_{u_{opt}}^\#(z) = z \phi u_{opt}.$$

*Démonstration.* Découle directement du fait que  $R_{u_{opt}}$  est une application résiduable (§1.11).  $\square$

**Remarque 3.11.** *Puisque  $Hu_{opt} \preceq z$ , alors  $H \preceq z \phi u_{opt} = H_{sup}$ . Il résulte de la proposition 3.10 que pour tout système  $X \preceq H_{sup}$ , le niveau de performance est garanti, c'est-à-dire que pour tout  $X \preceq H_{sup}$  on a  $Xu_{opt} \preceq z$ .*

**Remarque 3.12.** *De même, puisque  $H \preceq H_{sup}$ , par isotonie on a  $Hu_{opt} \preceq H_{sup}u_{opt} \preceq z$ .*

Nous venons de déterminer le plus grand transfert  $H_{sup}$  préservant le critère de juste-à-temps. La proposition suivante montre que la commande optimale obtenue pour le modèle nominal ( $u_{opt}$ ) est optimale vis-à-vis de  $H_{sup}$ .

**Proposition 3.13.** *Le transfert  $H_{sup}$  admet la même commande optimale que le système  $H$ , c'est-à-dire  $H_{sup} \phi z = H \phi z = u_{opt}$ .*

*Démonstration.* D'après la proposition 3.10, on a  $H_{sup} = z \phi u_{opt}$ . On peut donc écrire  $H_{sup} \phi z$  comme  $H_{sup} \phi z = (z \phi u_{opt}) \phi z$ . D'autre part la proposition 3.8 donne  $u_{opt} = H \phi z$ , on a alors  $H_{sup} \phi z = (z \phi (H \phi z)) \phi z$ . En considérant les applications  $\Lambda_z : x \mapsto x \phi z$  et  $\Psi_z : x \mapsto z \phi x$  (cf. proposition 3.2), l'expression  $(z \phi (H \phi z)) \phi z$  peut s'écrire sous la forme :

$$H_{sup} \phi z = (z \phi (H \phi z)) \phi z = \Lambda_z \circ \Psi_z \circ \Lambda_z(H). \quad (3.5)$$

Il résulte de la proposition 3.2 que le couple  $(\Lambda_z, \Psi_z)$  d'applications établit une correspondance de Galois. Or, d'après le corollaire 3.3,  $\Psi_z = \Lambda_z^\#$ , donc l'égalité (3.5) peut aussi s'écrire  $\Lambda_z \circ \Psi_z \circ \Lambda_z(H) = \Lambda_z \circ \Lambda_z^\# \circ \Lambda_z(H)$ . Les applications résiduables admettent la propriété suivante :  $\Lambda_z \circ \Lambda_z^\# \circ \Lambda_z(H) = \Lambda_z(H)$  (voir (1.7)), ce qui conduit immédiatement au résultat  $H_{sup} \phi z = H \phi z = u_{opt}$ .  $\square$

**Corollaire 3.14.** *La commande  $u_{opt}$  est optimale pour tous les transferts  $H_r$  tels que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ .*

*Démonstration.* Soit  $H_r$  un transfert tel que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ . On rappelle que l'application  $\Lambda_z$  est antitone (c'est-à-dire  $x \preceq y \Rightarrow \Lambda_z(x) \succeq \Lambda_z(y)$ ). Alors la commande optimale donnée par (3.4) conduit à  $u_{opt} = \Lambda_z(H) \succeq \Lambda_z(H_r) \succeq \Lambda_z(H_{sup})$ . De plus, d'après la proposition 3.13,  $\Lambda_z(H_{sup}) = H_{sup} \phi z = H \phi z = \Lambda_z(H)$ , on a donc l'égalité  $u_{opt} = H \phi z = H_r \phi z = H_{sup} \phi z$ .  $\square$

Ce corollaire signifie que pour tous les systèmes  $H_r$  tels que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ , le niveau de performance est garanti ( $H_r u_{opt} \preceq z$ ) et l'optimalité de la commande est préservée, c'est-à-dire que la commande  $u_{opt}$  est également la commande optimale pour le transfert  $H_r$ .

### 3.3.3 Illustration

Considérons le modèle d'un atelier d'assemblage représenté sur la figure 3.2. Cet atelier est constitué de trois machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ . Les pièces sont traitées en parallèle sur  $M_1$  et  $M_2$  puis assemblées par la machine  $M_3$ . Notons que les machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  ont clairement des temps de cycle différents : la première peut traiter une pièce toutes les deux unités de temps tandis que la seconde, quant à elle, peut traiter une pièce toutes les 5 unités de temps. La machine  $M_3$ , chargée de l'assemblage des pièces, peut traiter trois pièces toutes les deux unités de temps.

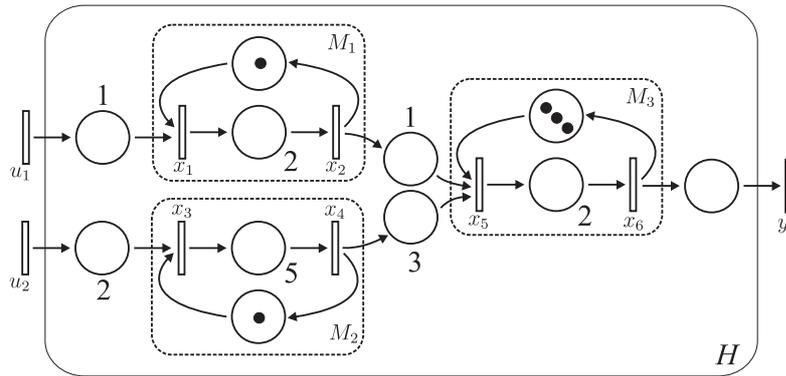


Figure 3.2 – Exemple d'atelier d'assemblage.

En suivant la démarche proposée au paragraphe 2.4, le fonctionnement de ce graphe d'événements temporisé peut être décrit par les équations suivantes dans le dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

$$\begin{aligned} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma^3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \\ C &= (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ e) \end{aligned}$$

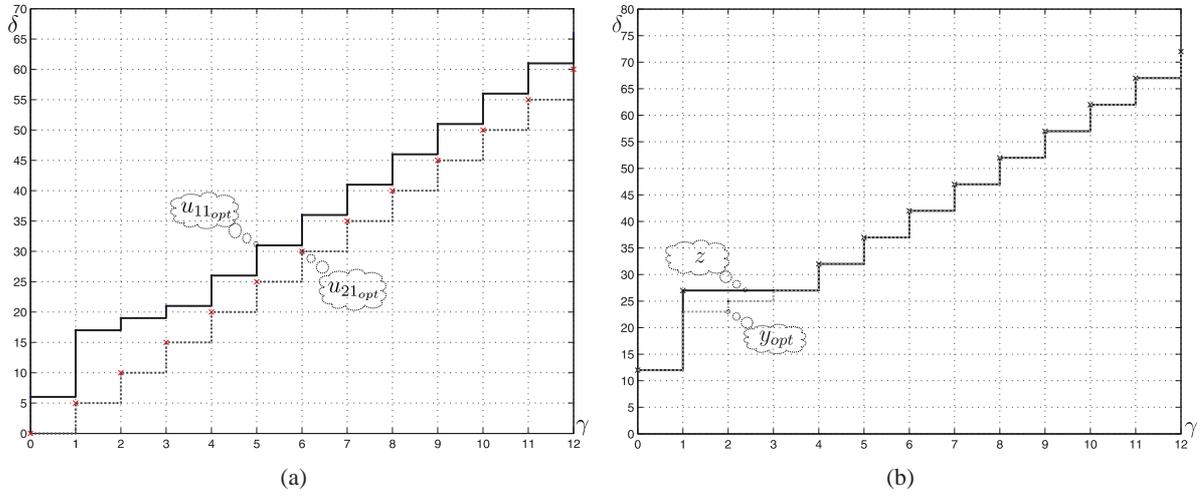
On obtient alors comme expression pour la matrice de transfert (on trouvera en annexe A, le script Scilab permettant de calculer la matrice de transfert à partir de la représentation d'état) :

$$H = CA^*B = (\delta^6(\gamma\delta^2)^* \ \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) . \quad (3.6)$$

La consigne (la demande d'un client) est supposée donnée par

$$z = \delta^{12} \oplus \gamma\delta^{27} \oplus \gamma^4\delta^{32}(\gamma\delta^5)^* \oplus \gamma^{12}\delta^{+\infty}.$$

Par convention, le premier tir étant le tir numéro 0, cette trajectoire doit être interprétée comme suit : on souhaite que la pièce 0 soit disponible au plus tard à l'instant 12, les pièces 1, 2 et 3 au plus tard à


 Figure 3.3 – Représentation graphique de  $u_{opt}$ ,  $z$  et  $y_{opt}$ .

l'instant 27. Puis à partir de la pièce 4 et de l'instant 32 on désire en "moyenne" 1 pièce toutes les 5 unités de temps. Le dernier terme  $\gamma^{12}\delta^{+\infty}$ , signifie que la pièce 11 est la dernière pièce pour cet ordre de production, puisque la date de production de la pièce 12 est  $+\infty$ .

Le calcul de la commande optimale donne :

$$\begin{aligned} u_{opt} &= H \setminus z \\ &= \left( \delta^6 \oplus \gamma \delta^{17} \oplus \gamma^2 \delta^{19} \oplus \gamma^3 \delta^{21} \oplus \gamma^4 \delta^{26} \oplus \gamma^5 \delta^{31} \oplus \gamma^6 \delta^{36} \oplus \gamma^7 \delta^{41} \oplus \gamma^8 \delta^{46} \oplus \gamma^9 \delta^{51} \oplus \gamma^{10} \delta^{56} \oplus \gamma^{11} \delta^{61} \oplus \gamma^{12} \delta^{+\infty} \right) \\ &\quad \left( e \oplus \gamma \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^{10} \oplus \gamma^3 \delta^{15} \oplus \gamma^4 \delta^{20} \oplus \gamma^5 \delta^{25} \oplus \gamma^6 \delta^{30} \oplus \gamma^7 \delta^{35} \oplus \gamma^8 \delta^{40} \oplus \gamma^9 \delta^{45} \oplus \gamma^{10} \delta^{50} \oplus \gamma^{11} \delta^{55} \oplus \gamma^{12} \delta^{+\infty} \right) \end{aligned}$$

Et la sortie correspondante vaut

$$y_{opt} = H u_{opt} = \delta^{12} \oplus \gamma \delta^{23} \oplus \gamma^2 \delta^{25} \oplus \gamma^3 \delta^{27} \oplus \gamma^4 \delta^{32} \oplus \gamma^5 \delta^{37} \oplus \gamma^6 \delta^{42} \oplus \gamma^7 \delta^{47} \oplus \gamma^8 \delta^{52} \oplus \gamma^9 \delta^{57} \oplus \gamma^{10} \delta^{62} \oplus \gamma^{11} \delta^{67} \oplus \gamma^{12} \delta^{+\infty}.$$

On donne sur la figure 3.3.(a) une représentation de la trajectoire  $u_{opt} = (u_{11_{opt}} \ u_{21_{opt}})^T$  (voir proposition 3.8). On peut vérifier (figure 3.3.(b)) que cette commande optimale  $U_{opt}$  respecte bien la spécification, c'est-à-dire que la sortie  $y_{opt} = H \otimes u_{opt}$  est bien inférieure ou égale à la consigne  $z$ .

Nous allons maintenant analyser la robustesse de cette commande optimale. D'après la proposition 3.10, il existe un plus grand transfert  $H_{sup}$  pour lequel la commande  $u_{opt}$  reste optimale. Ce transfert est donné par

$$H_{sup} = (h_{11_{sup}} \ h_{12_{sup}}) = z \setminus u_{opt}$$

avec

$$\begin{aligned} h_{11_{sup}} &= (\delta^6 \oplus \gamma \delta^8 \oplus \gamma^2 \delta^{10} \oplus \gamma^3 \delta^{15} \oplus \gamma^4 \delta^{20} \oplus \gamma^5 \delta^{25} \oplus \gamma^6 \delta^{30} \oplus \gamma^7 \delta^{35} \oplus \gamma^8 \delta^{40} \oplus \gamma^9 \delta^{45} \oplus \gamma^{10} \delta^{50} \oplus \gamma^{11} \delta^{61} \oplus \gamma^{12} \delta^{+\infty}), \\ h_{12_{sup}} &= (\delta^{12} \oplus \gamma \delta^{17} \oplus \gamma^2 \delta^{22} \oplus \gamma^3 \delta^{27} \oplus \gamma^4 \delta^{32} \oplus \gamma^5 \delta^{37} \oplus \gamma^6 \delta^{42} \oplus \gamma^7 \delta^{47} \oplus \gamma^8 \delta^{52} \oplus \gamma^9 \delta^{57} \oplus \gamma^{10} \delta^{62} \oplus \gamma^{11} \delta^{67} \oplus \gamma^{12} \delta^{+\infty}). \end{aligned}$$

Soit  $H_r$ , le transfert réel du système  $H$ . On sait (corollaire 3.14) que, pour  $H_r$  tel que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ , le caractère optimal de la commande est conservé.

On donne sur la figure 3.4 une représentation graphique du transfert nominal  $H$  et du transfert  $H_{sup}$ . Sur cette figure, la zone grisée correspond aux variations admissibles pour le transfert  $H_r$ .

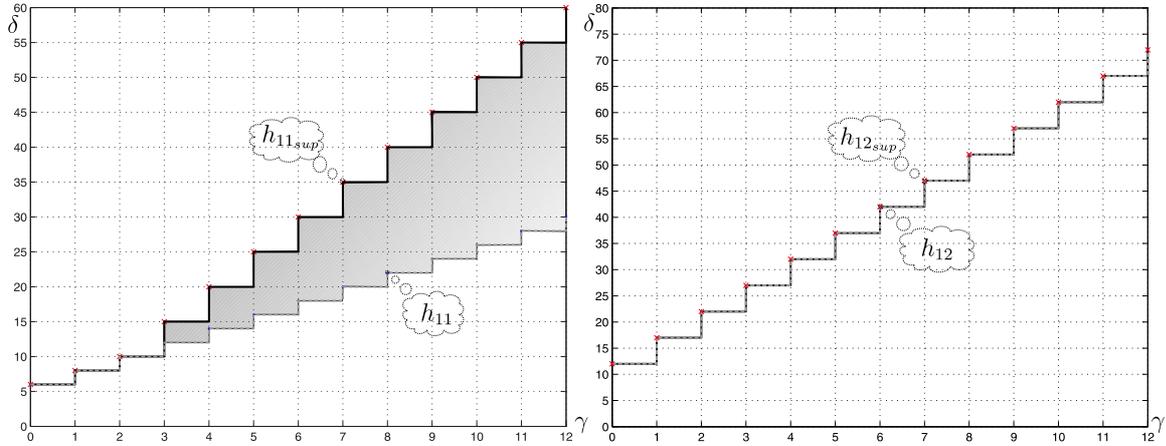


Figure 3.4 – Marge de robustesse, les zones grisées représentent les plages de variation de  $H_r$  dans lesquelles l’optimalité de la commande est toujours vérifiée.

D’un point de vue pratique, toute variation des machines 1 à 3 préservant une réponse impulsionnelle à l’intérieur de cette zone grisée ne modifie en rien l’optimalité de la commande, c’est-à-dire que les encours sont minimisés et la spécification  $y_{opt} = H_r u_{opt} \preceq z$  est toujours vérifiée. Par exemple, supposons que pour une opération de maintenance, le temps de traitement de la machine  $M_1$  passe de 2 à 4 unités de temps à partir de la pièce 4 et à l’instant 13. La fonction de transfert du système réel  $H_r$  devient :

$$H_r = (\delta^6 \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{10} \oplus \gamma^3\delta^{12}(\gamma\delta^4)^* \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*)$$

La figure 3.5 représente les réponses impulsionnelles des transferts  $h_{11sup}$  et  $h_{11}$  ainsi que le transfert réel  $h_{11r}$ . On peut remarquer que  $h_{11} \preceq h_{11r} \preceq h_{11sup}$ , donc la modification de la composante  $h_{11}$  (c.-à-d. entre  $u_1$  et  $y_1$ ) ne remet en cause ni l’optimalité de la commande ni le respect de la spécification. Cela veut dire que la sortie du système  $y_{opt} = H_r u_{opt}$  est inchangée, elle est identique à celle de la figure 3.3.(b). On peut vérifier que la commande  $u_{opt}$  calculée pour le transfert nominal  $H$  est toujours optimale pour le transfert  $H_r$ . On a

$$\begin{aligned} u_{opt} &= H_r \backslash z \\ &= \left( \delta^6 \oplus \gamma\delta^{17} \oplus \gamma^2\delta^{19} \oplus \gamma^3\delta^{21} \oplus \gamma^4\delta^{26} \oplus \gamma^5\delta^{31} \oplus \gamma^6\delta^{36} \oplus \gamma^7\delta^{41} \oplus \gamma^8\delta^{46} \oplus \gamma^9\delta^{51} \oplus \gamma^{10}\delta^{56} \oplus \gamma^{11}\delta^{61} \oplus \gamma^{12}\delta^{+\infty} \right) \\ &= \left( e \oplus \gamma\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^{10} \oplus \gamma^3\delta^{15} \oplus \gamma^4\delta^{20} \oplus \gamma^5\delta^{25} \oplus \gamma^6\delta^{30} \oplus \gamma^7\delta^{35} \oplus \gamma^8\delta^{40} \oplus \gamma^9\delta^{45} \oplus \gamma^{10}\delta^{50} \oplus \gamma^{11}\delta^{55} \oplus \gamma^{12}\delta^{+\infty} \right) \end{aligned}$$

On remarque que les trajectoires de  $u_{opt} = H_r \backslash z$  sont les mêmes que celles décrites sur la figure 3.3.(a). La commande  $u_{opt}$  correspond donc toujours à la plus grande commande garantissant l’objectif  $H_r u_{opt} = y \preceq z$ .

**Remarque 3.15.** En analysant le GET de la figure 3.2, on s’aperçoit que la machine  $M_2$  (qui est la plus lente) est une machine goulot, c’est-à-dire que cette machine impose son taux de production (d’après le théorème 2.17,  $\lambda = \min(1/2, 1/5, 3/2) = 1/5$ ) au reste du système.

Supposons que cet atelier fonctionne en flux tendu, c’est-à-dire que les machines  $M_1$  et  $M_2$  sont approvisionnées en pièces brutes dès qu’elles sont disponibles. Des pièces vont s’accumuler (inutilement) en sortie de  $M_1$ . Ce stock interne non borné peut être considéré comme une instabilité du système.

Dans ce cas précis, cette instabilité provient de la désadaptation des cadences maximales des machines  $M_1$  et  $M_2$ . Cette désadaptation est mise en évidence dans l’expression (3.6) de la matrice de

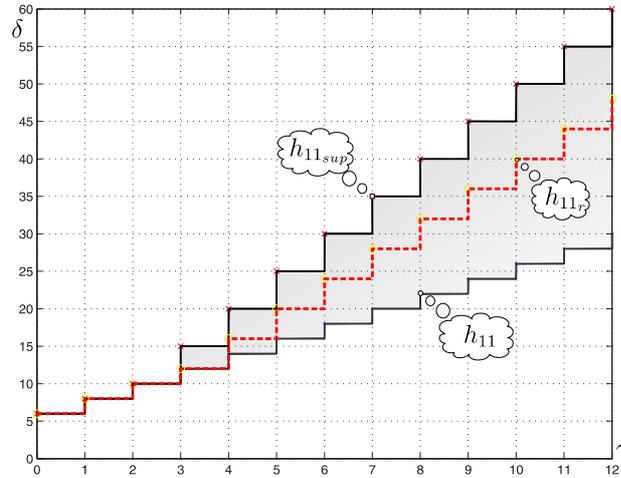


Figure 3.5 – Représentation graphique de  $h_{11, sup}$ ,  $h_{11}$  et du transfert réel  $h_{11,r}$ .

transfert du GET, puisque les deux composantes de  $H$ , données sous forme de séries périodiques, présentent des pentes asymptotiques différentes.

En fait, la marge disponible sur la composante  $h_{11}$  vient de cette désadaptation. En effet, si on regarde la représentation de  $H_{sup}$  (figure 3.4), on voit que  $h_{11, sup}$  a une pente asymptotique différente de celle de  $h_{11}$ . Cela signifie qu'il est possible de ralentir la machine 1 sans changer le comportement entrée/sortie du GET (le taux de production du système étant imposé par  $M_2$  pour laquelle  $h_{12, sup}$  et  $h_{12}$  sont confondues).

La commande optimale prend en compte cette désadaptation (la commande étant aussi optimale pour  $H_{sup}$ ), c'est-à-dire qu'elle fournit les dates de tirs pour  $u_1$  et  $u_2$  les plus tardives permettant de respecter l'objectif ( $y_{opt} = H \otimes u_{opt} \preceq z$ ). Elle évite, par conséquent, une accumulation inutile de jetons en sortie de  $M_1$ , en ralentissant l'alimentation de la machine  $M_1$  en pièces brutes.

### 3.4 Commande en boucle fermée : synthèse d'un retour de sortie

Dans ce paragraphe, nous allons étudier la synthèse de correcteurs linéaires en boucle fermée pour les graphes d'événements temporisés. Notre contribution repose sur l'analyse de la robustesse de ces correcteurs vis-à-vis des variations (du nombre de jetons et/ou des temporisations) de modèle. Dans la première partie de ce paragraphe nous faisons un tour d'horizon des principaux résultats concernant la synthèse de correcteurs linéaires en boucle fermée dans les dioïdes, le lecteur intéressé pourra consulter [Cottenceau, 1999, Cottenceau et al., 1999, Lüders and Santos-Mendes, 2002, Maia et al., 2003] pour une étude plus exhaustive.

Avant d'aller plus loin, il peut sembler nécessaire de justifier l'approche de commande en boucle fermée pour la commande de GET. Précédemment (remarque 3.15), nous avons mis en évidence que pour certains GET, il pouvait exister une désadaptation des taux de production dans les différents circuits de celui-ci. Cette désadaptation peut entraîner une instabilité du GET (une accumulation infinie de jetons).

Le calcul de la commande optimale  $u_{opt}$  pour une consigne donnée  $z$ , montre que cette commande optimale prend en compte cette désadaptation, puisque, d'une part elle fournit la commande la plus tardive possible permettant d'atteindre l'objectif ( $Hu_{opt} \preceq z$ ) et d'autre part, la commande étant la plus

tardive possible, elle permet de diminuer le temps de séjour des jetons dans le GET ou, de manière équivalente, permet une diminution du marquage instantané<sup>2</sup>.

Mais, pour une entrée  $u$  quelconque, cette accumulation de jetons persiste. Un des objectifs de la commande en boucle fermée va être d'uniformiser les vitesses des différents chemins dans le GET, en vue d'atténuer (voire de supprimer) cette instabilité.

Par exemple, pour le transfert de l'exemple précédent (cf. (3.6))

$$H = (\delta^6(\gamma\delta^2)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) ,$$

on imagine facilement que le rôle du correcteur va être de ralentir l'alimentation de la machine  $M_1$ , pour aligner le fonctionnement de la branche  $u_1 \rightarrow y$  (composante  $h_{11}$ ) sur celui de la branche  $u_2 \rightarrow y$  (composante  $h_{12}$ ).

Outre le contrôle de performances entrée-sortie du système, le contrôleur va permettre de diminuer le temps de séjour des jetons dans le GET, comme pour la commande optimale en boucle ouverte.

### 3.4.1 Formulation du problème

Il s'agit ici de modifier la dynamique d'un système  $H \in \mathcal{D}^{q \times p}$  par l'ajout d'un retour de sortie  $F \in \mathcal{D}^{p \times q}$  (situé entre la sortie  $y \in \mathcal{D}^q$  et l'entrée  $u \in \mathcal{D}^p$ ). La dynamique du système en boucle fermée est alors modifiée par la dynamique du retour de sortie.

L'objectif de commande peut se présenter de la manière suivante : considérons un système  $G_{ref} \in \mathcal{D}^{q \times p}$  (appelé modèle de référence), un système  $H \in \mathcal{D}^{q \times p}$  (matrice de transfert du système à commander) et un ensemble de retours de sortie  $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^{p \times q}$ . Il faut alors choisir un élément  $F \in \mathcal{F}$  et l'appliquer à  $H$  de façon à ce que, pour les mêmes entrées, les deux systèmes  $G_{ref}$  et  $H$  muni de son correcteur de type retour de sortie aient les mêmes sorties. En théorie des systèmes linéaires, ce problème de commande est similaire au problème classique de poursuite de modèle (model matching problem [Wang and Desoer, 1972]). La figure 3.6 présente le schéma bloc du système nominal, du système en boucle fermée et du modèle de référence.

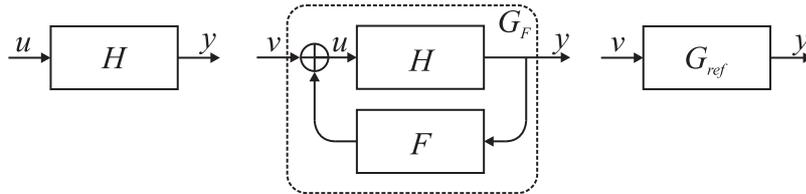


Figure 3.6 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système  $H$  par un correcteur de type retour de sortie  $F$ .

D'après la figure 3.6, le système en boucle fermée vérifie

$$\begin{cases} u = v \ominus Fy \\ y = Hu \end{cases}$$

En accord avec le corollaire 1.118, l'équation entrée-sortie s'écrit

$$y = H(FH)^*v = G_F v. \quad (3.7)$$

<sup>2</sup>Dans un contexte de production, ce marquage instantané correspond aux en-cours de production.

D'un point de vue algébrique, ce problème nécessite l'étude de l'application  $M_a : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto a(xa)^*$  définie sur le dioïde complet  $\mathcal{D}$ .

Par conséquent, l'application  $M_H(F) : \mathcal{D}^{p \times q} \rightarrow \mathcal{D}^{q \times p}, F \mapsto H(FH)^*$  caractérise l'influence d'un retour de sortie  $F$  sur le système en boucle fermée.

Formellement, ce problème de commande en boucle fermée consiste à chercher la borne supérieure de l'ensemble des correcteurs

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{D}^{p \times q} \mid M_H(F) \preceq G_{ref}\}. \quad (3.8)$$

La borne supérieure de cet ensemble  $\mathcal{F}$  correspond au plus grand correcteur  $F$  qui fournit la plus grande trajectoire de commande de type  $u = Fy \oplus v$  telle que le comportement entrée/sortie soit inférieur à un modèle de référence  $G_{ref}$ . Pour un graphe d'événements temporisé, les trajectoires de la commande  $u = Fy \oplus v$  correspondent aux entrées effectives des jetons. En conséquence, obtenir le plus grand retour de sortie  $F$  permet de retarder le plus possible l'entrée des jetons, tout en garantissant qu'ils sortiront du GET avant  $y = G_{ref}v$ .

La recherche de la borne supérieure de  $\mathcal{F}$  repose sur la résiduation de l'application  $M_H$ . En fait cette application n'est pas résiduable, car elle n'est pas semi-continue inférieurement (c.-à-d.  $M_H(x \oplus y) \neq M_H(x) \oplus M_H(y)$ ) et ne satisfait donc pas les conditions du théorème 1.97.

Néanmoins, dans [Cottenceau, 1999, Cottenceau et al., 2001], il est montré qu'il existe des restrictions de l'ensemble d'arrivée de l'application  $M_H$  résiduables, ce qui revient à dire qu'il existe un plus grand compensateur  $F$ , dans l'ensemble des compensateurs  $\mathcal{F}$ , uniquement pour certains modèles de référence  $G_{ref}$ . La proposition suivante montre qu'il existe des restrictions de  $M_H$  résiduables.

**Remarque 3.16.** *En raison de l'égalité (1.37),  $M_H(F)$  s'écrit indifféremment*

$$M_H(F) = H(FH)^* = (HF)^*H.$$

**Proposition 3.17** ([Cottenceau et al., 2001]). *Soit  $M_H : \mathcal{D}^{p \times q} \rightarrow \mathcal{D}^{q \times p}, x \mapsto H(xH)^*$  définie sur des dioïdes complets. Soient les ensembles*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{G \in \mathcal{D}^{q \times p} \mid \exists A \in \mathcal{D}^{q \times q}, G = A^*H\}, \\ \mathcal{G}_2 &= \{G \in \mathcal{D}^{q \times p} \mid \exists B \in \mathcal{D}^{p \times p}, G = HB^*\}. \end{aligned}$$

*Si  $G_{ref} \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ , il existe un plus grand retour de sortie noté  $F_{opt}$  tel que  $M_H(F_{opt}) \preceq G_{ref}$ , donné par :*

$$F_{opt} = \sup \{F \in \mathcal{D}^{p \times q} \mid H(FH)^* \preceq G_{ref}\} = H \backslash G_{ref} \phi H.$$

*Démonstration.* Le lecteur pourra trouver une démonstration de ce résultat dans [Cottenceau et al., 2001].  $\square$

**Corollaire 3.18.** *Si  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$ , alors  $F_{opt} = H \backslash G_{ref} \phi H$  est la plus grande solution de l'équation  $M_H(F_{opt}) = G_{ref}$ .*

*Démonstration.* Observons d'abord que  $\text{Im}M_H \subset (\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2)$  et que  $F_{opt}$  correspond au plus grand retour de sortie  $F$  tel que  $M_H(F) \preceq G_{ref}$ . Puisque  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$ , il est possible de considérer l'application  $M_H$  restreinte à son image :  ${}_{\text{Im}M_H}M_H : \mathcal{D}^{p \times q} \rightarrow M_H(\mathcal{D}^{p \times q}), x \mapsto H(xH)^*$ . Cette application est surjective (c.-à-d.  $\forall y \in \text{Im}M_H, \exists x \in \mathcal{D}^{p \times q}, M_H(x) = y$ , voir (1.10)). Par conséquent, pour tout  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$ , il existe un retour de sortie  $F$  tel que  $M_H(F) = G_{ref}$ .  $\square$

### 3.4.2 Retour de sortie - analyse de la robustesse

Dans ce paragraphe, nous allons analyser la robustesse de la structure de contrôle précédente. C'est-à-dire que nous allons chercher l'ensemble des systèmes qui préservent les performances attendues pour le système nominal.

### 3.4.3 Formulation du problème

Nous supposons disposer d'un système corrigé par un correcteur de type retour de sortie. Nous notons  $F$  ce correcteur synthétisé pour un modèle nominal  $H$ .

De même, on notera  $X$  le transfert réel du système, on cherche alors à préciser l'ensemble défini ci-dessous

$$\mathcal{H}_2 = \{X \in \mathcal{D}^{q \times p} \mid (XF)^*X \preceq (HF)^*H\}. \quad (3.9)$$

C'est-à-dire que nous cherchons à caractériser l'ensemble des systèmes  $X$  qui, corrigés par un retour de sortie  $F$  ont un comportement aussi rapide que le système nominal corrigé. Autrement dit tout système appartenant à cet ensemble  $\mathcal{H}_2$  garantira le respect des performances voulues lors de la synthèse.

Nous cherchons donc la borne supérieure (notée  $H_{sup} \in \mathcal{D}^{q \times p}$ ) de cet ensemble. Cette borne supérieure  $H_{sup}$  correspond au plus grand transfert garantissant l'objectif, c'est-à-dire

$$M_{H_{sup}}(F) \preceq (HF)^*H \preceq G_{ref}.$$

**Proposition 3.19.** *Soient  $H \in \mathcal{D}^{q \times p}$  un transfert nominal et  $F \in \mathcal{D}^{p \times q}$  le correcteur de type retour de sortie tel que  $(HF)^*H \in \mathcal{D}^{q \times p}$ , le transfert en boucle fermée, soit inférieur ou égal à un modèle de référence  $G_{ref} \in \mathcal{D}^{q \times p}$ . Alors,  $H_{sup} = (HF)^*H$  est la borne supérieure de l'ensemble  $\mathcal{H}_2$ , c.-à-d. ,*

$$H_{sup} = (HF)^*H = \sup \{X \in \mathcal{D}^{q \times p} \mid Q_F(X) = (XF)^*X \preceq (HF)^*H\}.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 3.7,  $\text{Im}Q_F|_{Q_F}$  est une application résiduable avec  $I_{\text{Im}Q_F}$  l'injection canonique de  $\text{Im}Q_F$  dans  $\mathcal{D}$ , comme application résiduée. Comme  $(HF)^*H \in \text{Im}Q_F$ , on a directement le résultat  $H_{sup} = (HF)^*H$ .  $\square$

**Propriétés 3.20.** *D'une part, d'après la proposition 3.19, le transfert  $H_{sup} \in \text{Im}Q_F$ . D'autre part,  $Q_F$  étant une fermeture, le transfert  $H_{sup}$  appartient à l'ensemble des fermés de  $Q_F$  (voir §1.7). Par conséquent le transfert  $H_{sup} = (HF)^*H$  conduit à l'égalité,  $Q_F(H_{sup}) = (H_{sup}F)^*H_{sup} = H_{sup} = (HF)^*H$ .*

Après avoir déterminé le plus grand transfert  $H_{sup}$  conservant les performances entrée-sortie du système en boucle fermée, nous donnons un ensemble de transferts satisfaisant ce même objectif.

**Corollaire 3.21.** *Soit le comportement réel du système décrit par le transfert  $H_r$ , alors pour tout  $H_r$  tel que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ , on a*

$$(HF)^*H = (H_rF)^*H_r = (H_{sup}F)^*H_{sup}.$$

*Autrement dit, il est suffisant que le comportement du système  $H_r$  soit dans l'intervalle  $[H, H_{sup}]$ , pour que le comportement entrée-sortie du système en boucle fermée reste inchangé. Il est naturellement nécessaire que  $H_r \preceq H_{sup}$ .*

*Démonstration.* Soit  $H_r$  le transfert tel que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ . Par isotonie du produit et de l'opérateur étoile, on a

$$(HF)^*H \preceq (H_rF)^*H_r \preceq (H_{sup}F)^*H_{sup}.$$

D'autre part, la propriété 3.20 conduit à l'égalité  $(HF)^*H = (H_rF)^*H_r = (H_{sup}F)^*H_{sup}$ .  $\square$

**Proposition 3.22.** *Le contrôleur  $F$  est optimal pour tous les transferts  $H_r$  tels que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ .*

*Démonstration.* Soit  $H_r$  le transfert tel que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ . Par isotonie, on a  $(HF)^*H \preceq (H_rF)^*H_r \preceq (H_{sup}F)^*H_{sup}$ . D'autre part, le corollaire 3.21 donne  $(HF)^*H = (H_rF)^*H_r = (H_{sup}F)^*H_{sup}$ . Par conséquent  $F$  correspond au contrôleur optimal pour tous les transferts  $H_r$  tels que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ .  $\square$

### 3.4.4 Illustration

On peut reprendre ici l'exemple de l'atelier traité précédemment (voir §3.3.3). On rappelle le transfert du système en boucle ouverte (cf. (3.6)) :

$$H = (\delta^6(\gamma\delta^2)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) .$$

D'après la proposition 3.17, en choisissant un modèle de référence  $G_{ref} = A^*H$ , on est assuré de l'existence d'un retour de sortie optimal  $F_{opt}$  tel que

$$M_H(F_{opt}) \preceq G_{ref}.$$

Nous choisissons ici  $G_{ref} = (\gamma\delta^5)^*H$ , soit

$$G_{ref} = (\delta^6(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) .$$

On trouvera dans [Cottenceau, 1999] une discussion sur le choix du modèle de référence. On peut toutefois noter que dans le modèle de référence choisi ici, les vitesses de fonctionnement des branches du GET ( $u_1 \rightarrow y$  et  $u_2 \rightarrow y$ ) ont le même taux de production ; il s'agit donc ici d'homogénéiser les flux des deux éléments de la matrice de transfert nominal  $H$ .

Le correcteur de type retour de sortie optimal tel que  $M_H(F_{opt}) \preceq G_{ref}$  est donné par le calcul de

$$\begin{aligned} F_{opt} &= H \setminus G_{ref} \not\! / H \\ &= \begin{pmatrix} \delta^{-6}(\gamma\delta^5)^* \\ \delta^{-12}(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pour ce retour de sortie on obtient les commandes suivantes ( $u = Fy \oplus v$ ) :

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta^{-6}(\gamma\delta^5)^*y \oplus v_1 \\ u_2 &= \delta^{-12}(\gamma\delta^5)^*y \oplus v_2. \end{aligned}$$

Les formes implicites de ces commandes sont les suivantes :

$$\begin{aligned} u_1 &= \gamma\delta^5u_1 \oplus \delta^{-6}y \oplus v_1 \\ u_2 &= \gamma\delta^5u_2 \oplus \delta^{-12}y \oplus v_2 \end{aligned}$$

ce qui conduit en représentation dateur sur le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  aux récurrences suivantes :

$$\begin{aligned} u_1(k) &= 5u_1(k-1) \oplus -6y(k) \oplus v_1(k) \\ u_2(k) &= 5u_2(k-1) \oplus -12y(k) \oplus v_2(k). \end{aligned}$$

Il est clair que sous cette forme, l'élaboration de la commande  $u(k)$  (par le correcteur  $u = Fy \oplus v$ ) nécessite de connaître le futur de la sortie  $y$ . Cette nécessité de prédire le futur pour pouvoir élaborer la loi de commande est due au fait que le correcteur  $F$  n'est pas causal et est donc non réalisable (voir théorème 2.40).

On doit alors considérer l'opérateur de projection  $\text{Pr}_+ : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta] \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$  (proposition 2.43). En appliquant l'opérateur de projection sur  $F_{opt}$ , on obtient

$$F_{opt+} = \text{Pr}_+(F_{opt}) = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* \\ \gamma^3 \delta^3 (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix},$$

où  $F_{opt+}$  est le plus grand retour de sortie causal (et réalisable). On peut voir une réalisation de ce correcteur sur la figure 3.7

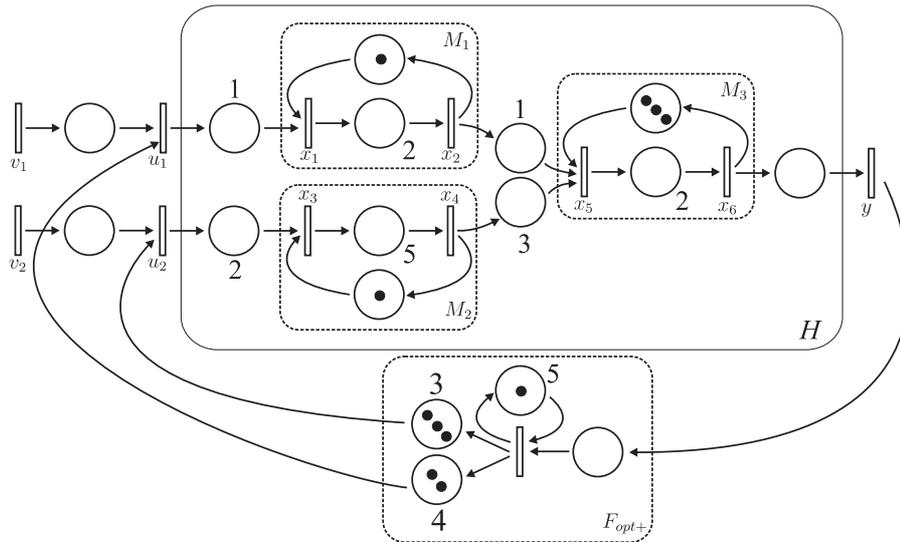


Figure 3.7 – Réalisation du correcteur retour de sortie  $F_{opt+}$ .

Il reste maintenant à analyser la robustesse de ce correcteur, vis-à-vis des variations du système. Il a été montré (proposition 3.19) qu'il existe un plus grand transfert noté  $H_{sup}$  vérifiant la spécification, c'est-à-dire

$$(H_{sup} F_{opt+})^* H_{sup} = (H F_{opt+})^* H \preceq G_{ref}.$$

Toujours d'après la proposition 3.19, le plus grand transfert  $H_{sup}$  est égal à

$$\begin{aligned} H_{sup} &= (H F_{opt+})^* H \\ &= \left( \begin{pmatrix} \delta^6 (\gamma \delta^2)^* & \delta^{12} (\gamma \delta^5)^* \\ \gamma^2 \delta^4 (\gamma \delta^5)^* & \gamma^3 \delta^3 (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} \right)^* \begin{pmatrix} \delta^6 (\gamma \delta^2)^* & \delta^{12} (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta^6 \oplus \gamma \delta^8 \oplus \gamma^2 \delta^{16} (\gamma \delta^5)^* & \delta^{12} (\gamma \delta^5)^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La figure 3.8 représente le modèle de référence  $G_{ref}$ , le plus grand transfert  $H_{sup}$  et le transfert nominal  $H$ . On peut noter que l'on a bien le système en boucle fermée  $H_{sup} = (HF_{opt+})^*H$  qui est toujours inférieur ou égal au modèle de référence  $G_{ref}$ .

Si on suppose maintenant que le transfert réel du système, noté  $H_r$  est soumis à des variations (du nombre de jetons dans les places et/ou des temporisations), alors d'après le corollaire 3.21 la zone grisée sur la figure 3.8 correspond aux variations admissibles pour le transfert  $H_r$ . C'est-à-dire que pour tout comportement réel  $H_r$  tel que  $H \preceq H_r \preceq H_{sup}$ , le comportement entrée-sortie du système reste inchangé. Par exemple pour  $H_r = H_{sup}$ , le transfert entrée-sortie vaut

$$\begin{aligned} (H_{sup}F_{opt+})^*H_{sup} &= \left( (\delta^6 \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{16}(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) F_{opt+} \right)^* (\delta^6 \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{16}(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) \\ &= (\delta^6 \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{16}(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) \end{aligned}$$

Donc, pour  $H_r = H_{sup}$ , on vérifie bien que  $(H_{sup}F_{opt+})^*H_{sup} = H_{sup} \preceq G_{ref}$ , c'est-à-dire que l'objectif de commande est toujours vérifié. De même, on peut vérifier que pour  $H_r = H_{sup}$ , le correcteur  $F_{opt+}$  calculé pour le modèle nominal est toujours optimal ; on a

$$\begin{aligned} F_{opt+} &= \text{Pr}_+(H_{sup} \setminus G_{ref} \setminus H_{sup}) \\ &= \text{Pr}_+ \left( (\delta^6 \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{16}(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) \setminus (\delta^6(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) \setminus (\delta^6 \oplus \gamma\delta^8 \oplus \gamma^2\delta^{16}(\gamma\delta^5)^* \quad \delta^{12}(\gamma\delta^5)^*) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^2\delta^4(\gamma\delta^5)^* \\ \gamma^3\delta^3(\gamma\delta^5)^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Par conséquent, on remarque que le correcteur  $F_{opt+}$  calculé pour  $H_{sup}$  est égal à celui calculé pour le modèle nominal  $H$ .

En résumé,  $H_{sup} = (HF_{opt+})^*H$  est le plus grand transfert (c.-à-d. le système le plus lent) pour lequel l'optimalité du correcteur est toujours vérifiée.

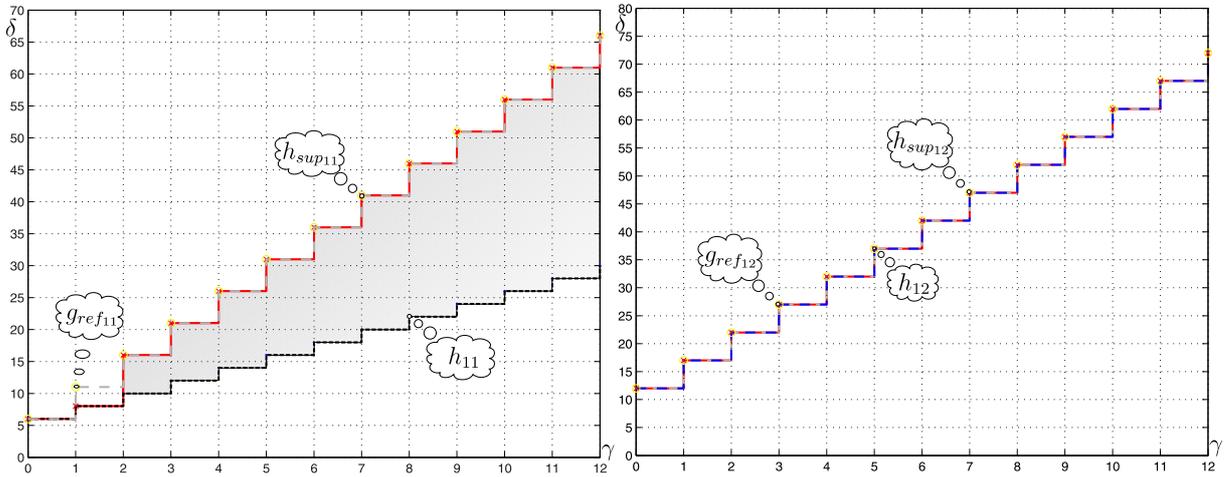


Figure 3.8 – Réponses impulsionnelles de  $G_{ref}$ ,  $H_{sup}$  et  $H$ .

### 3.5 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté des travaux portant sur la commande de graphes d'événements temporisés dans l'algèbre des diodes. Les deux structures considérées sont la commande optimale en

boucle ouverte où l'objectif est de poursuivre une trajectoire, puis la commande en boucle fermée par retour de sortie dans un objectif de poursuite de modèle.

Ce chapitre a proposé l'analyse de la robustesse de ces deux structures. Nous avons caractérisé l'ensemble des systèmes préservant les performances de la commande optimale. Dans le cas de la commande optimale, il a été montré que le système (noté  $H_r$ ) peut évoluer entre deux trajectoires ( $H \preceq H_r \preceq H_{sup} = z\phi u_{opt}$ ), sans remettre en cause l'optimalité de la commande.

Dans le cas de la commande en boucle fermée par retour de sortie, nous avons montré que tout système dont le transfert est compris entre  $H$  et  $(HF)^*H$  préserve l'optimalité du correcteur.

Ces résultats permettent d'établir une garantie *a posteriori* sur les performances de la commande vis-à-vis des variations du système. Cela veut dire que lors de la mise en oeuvre du correcteur on peut établir les marges de variation admissibles de  $H$ .

Dans le prochain chapitre, nous supposerons connues *a priori* les incertitudes du système et chercherons à synthétiser des correcteurs robustes garantissant les performances voulues.

# Synthèse de contrôleurs robustes pour les GET

## 4.1 Introduction

En 1979, R. Moore développe l'analyse par intervalle ([Moore, 1979]). Son but est alors de pouvoir contrôler les erreurs numériques des calculateurs utilisant une représentation à virgule flottante.

Depuis l'analyse par intervalles a connu de nombreux développements, notamment en automatique [Jaulin et al., 2001] où elle trouve de multiples applications. Un des intérêts de cette approche est de pouvoir prendre en compte, par exemple, des incertitudes de mesure dans le cas où les données sont issues de valeurs expérimentales.

On peut aussi considérer dans une certaine mesure que l'analyse par intervalle se présente comme une alternative à l'approche probabiliste pour la représentation des incertitudes sur une variable aléatoire. En effet, dans l'analyse par intervalle, une quantité incertaine est représentée par un ensemble qui la contient et non plus par une loi de probabilité.

Nous commençons ce chapitre par des préliminaires algébriques dans lesquels nous introduisons deux dioïdes, le premier  $C(\mathcal{D})$  est construit à partir d'un produit direct de dioïdes, le second dioïde  $C_0(\mathcal{D})$  est constitué des couples ordonnés de  $C(\mathcal{D})$ . Ensuite, nous présentons un dioïde d'intervalles noté  $I(\mathcal{D})$ . Parmi les résultats énoncés dans cette partie, nous montrons notamment qu'il est possible de construire un isomorphisme entre les dioïdes  $C_0(\mathcal{D})$  et  $I(\mathcal{D})$ . Les résultats établis dans le dioïde  $C_0(\mathcal{D})$  s'étendent alors naturellement au dioïde des intervalles. En particulier, il sera montré que l'application produit définie sur  $C_0(\mathcal{D})$  est résiduable.

La troisième section s'intéresse à la modélisation de graphes d'événements temporisés dans un dioïde d'intervalles. L'objectif est de pouvoir prendre en compte des incertitudes (erreurs de modélisation et/ou variations paramétriques) en les représentant par des intervalles. Autrement dit, le nombre de jetons et les temporisations associées aux places sont supposés évoluer dans un intervalle défini au moment de la modélisation, le système est alors qualifié d'incertain.

La quatrième section présente la synthèse de correcteurs robustes pour des systèmes incertains dont les paramètres appartiennent à des intervalles. Il s'agit de caractériser l'ensemble des contrôleurs vérifiant un objectif de commande spécifié sous la forme d'un intervalle. Autrement dit, supposant donné, sous la forme d'un intervalle, un ensemble de modèles de référence spécifiant des comportements admissibles du système corrigé, et supposant connus les intervalles auxquels appartiennent les paramètres du modèle incertain, nous chercherons l'ensemble des correcteurs permettant d'imposer de manière garantie, au système corrigé, le respect de la spécification.

Enfin, la cinquième partie propose un exemple d'application des résultats de ce chapitre. Dans cette illustration l'objectif est de caractériser l'ensemble des correcteurs stabilisant un graphe d'événements temporisé dans lequel le nombre des jetons et la durée des temporisations sont incertains.

Notre contribution est une extension des résultats de [Cottenceau et al., 2001] sur la synthèse de correcteurs en boucle fermée au cas des systèmes incertains. Cette étude a fait l'objet de deux publications [Lhommeau et al., 2003b, Lhommeau et al., 2003c].

## 4.2 Résultats préliminaires

### 4.2.1 Dioïde $C(\mathcal{D})$

**Définition 4.1 (Dioïde produit).** Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde ; sur l'ensemble produit

$$C(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \times \mathcal{D},$$

considérons les lois de composition données par les formules

$$\begin{aligned} (x', x'') \oplus (y', y'') &= (x' \oplus y', x'' \oplus y''), \\ (x', x'') \otimes (y', y'') &= (x' \otimes y', x'' \otimes y''); \end{aligned} \quad (4.1)$$

l'ensemble  $C(\mathcal{D})$  muni de ces deux lois de composition est un dioïde.

Pour établir l'associativité de la multiplication, considérons trois éléments

$$(x', x''), \quad (y', y''), \quad (z', z'')$$

de  $C(\mathcal{D})$  ; on a par définition

$$(x', x'') \otimes (y', y'') = (x' \otimes y', x'' \otimes y''), \quad (y', y'') \otimes (z', z'') = (y' \otimes z', y'' \otimes z'') \quad (4.2)$$

et par suite

$$\begin{aligned} ((x', x'') \otimes (y', y'')) \otimes (z', z'') &= ((x' \otimes y') \otimes z', (x'' \otimes y'') \otimes z''), \\ (x', x'') \otimes ((y', y'') \otimes (z', z'')) &= (x' \otimes (y' \otimes z'), x'' \otimes (y'' \otimes z'')), \end{aligned} \quad (4.3)$$

de sorte que l'associativité de la multiplication dans  $C(\mathcal{D})$  résulte de l'associativité des lois de composition données sur  $\mathcal{D}$ . De même, pour montrer l'associativité de l'addition, il suffit de remplacer dans (4.2) et (4.3) la multiplication  $\otimes$  par l'addition  $\oplus$ , pour remarquer là encore que l'associativité de l'addition découle de l'associativité des lois de composition sur  $\mathcal{D}$ .

On remarque immédiatement que la commutativité et l'idempotence de l'addition dans  $C(\mathcal{D})$  sont également liées à la commutativité et à l'idempotence des lois de composition sur  $\mathcal{D}$ . Il en est de même pour la distributivité de la multiplication sur l'addition, puisque

$$(x', x'') \otimes ((y', y'') \oplus (z', z'')) = (x' \otimes (y' \oplus z'), x'' \otimes (y'' \oplus z''))$$

et idem pour la multiplication à droite.

Le dioïde  $C(\mathcal{D})$  possède l'élément neutre  $(\varepsilon, \varepsilon)$  (resp.  $(e, e)$ ) pour l'addition (resp. la multiplication), où  $\varepsilon$  (resp.  $e$ ) désigne l'élément neutre pour l'addition (resp. la multiplication) de  $\mathcal{D}$ . On remarque également que  $(\varepsilon, \varepsilon)$  est absorbant pour la multiplication sur  $C(\mathcal{D})$ .

On obtient donc bien un dioïde en munissant l'ensemble produit  $C(\mathcal{D}) = \mathcal{D} \times \mathcal{D}$  des lois de composition définies plus haut (4.1).

Notons également que la loi  $\oplus$  définit une relation d'ordre canonique  $\preceq_{C(\mathcal{D})}$  sur le dioïde  $C(\mathcal{D})$  :

$$(x', x'') \oplus (y', y'') = (y', y'') \iff (x', x'') \preceq_{C(\mathcal{D})} (y', y'') \iff x' \preceq_{\mathcal{D}} y' \text{ et } x'' \preceq_{\mathcal{D}} y''.$$

où  $\preceq_{\mathcal{D}}$  est la relation d'ordre dans  $\mathcal{D}$ .

**Exemple 4.2.** L'ensemble produit  $C(\mathbb{Z}_{\max}) = \mathbb{Z}_{\max} \times \mathbb{Z}_{\max}$  (voir définition 4.1) muni des lois de composition  $\otimes$  et  $\oplus$  définies par

$$(x', x'') \oplus (y', y'') = (x' \oplus y', x'' \oplus y'') = (\max(x', y'), \max(x'', y'')),$$

$$(x', x'') \otimes (y', y'') = (x' \otimes y', x'' \otimes y'') = (x' + y', x'' + y'').$$

est un dioïde. On vérifie que l'élément neutre  $(\varepsilon, \varepsilon) = (-\infty, -\infty)$  de  $\oplus$  est absorbant pour  $\otimes$ . Par ailleurs,  $(e, e) = (0, 0)$ , est l'élément neutre de  $\otimes$ .

#### 4.2.2 Propriétés du dioïde $C(\mathcal{D})$

**Propriétés 4.3.** Si le dioïde  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$  est complet, alors le dioïde  $(C(\mathcal{D}), \oplus, \otimes)$  est complet.

*Démonstration.* Pour tout sous-ensemble  $\{(x'_\alpha, x''_\alpha)_\alpha\}$  de  $C(\mathcal{D})$ , la somme

$$\bigoplus_{\alpha} (x'_\alpha, x''_\alpha) = \left( \bigoplus_{\alpha} x'_\alpha, \bigoplus_{\alpha} x''_\alpha \right)$$

est définie sur  $C(\mathcal{D})$  puisque par hypothèse  $\mathcal{D}$  est un dioïde complet, on a donc  $\bigoplus_{\alpha} x'_\alpha \in \mathcal{D}$  et  $\bigoplus_{\alpha} x''_\alpha \in \mathcal{D}$ , ce qui entraîne  $(\bigoplus_{\alpha} x'_\alpha, \bigoplus_{\alpha} x''_\alpha) \in C(\mathcal{D})$ . Par ailleurs, pour tout  $(b', b'') \in C(\mathcal{D})$ , on a

$$(b', b'') \otimes \left( \bigoplus_{\alpha} (x'_\alpha, x''_\alpha) \right) = \left( \bigoplus_{\alpha} (b' \otimes x'_\alpha), \bigoplus_{\alpha} (b'' \otimes x''_\alpha) \right) = \bigoplus_{\alpha} (b' \otimes x'_\alpha, b'' \otimes x''_\alpha) = \bigoplus_{\alpha} ((b', b'') \otimes (x'_\alpha, x''_\alpha)).$$

De même, on a  $(\bigoplus_{\alpha} (x'_\alpha, x''_\alpha)) \otimes (b', b'') = \bigoplus_{\alpha} (x'_\alpha \otimes b', x''_\alpha \otimes b'') = \bigoplus_{\alpha} ((x'_\alpha, x''_\alpha) \otimes (b', b''))$ , pour tout  $(b', b'') \in C(\mathcal{D})$ .  $\square$

**Propriétés 4.4.** Soit  $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  une application isotone définie sur des dioïdes complets, alors l'application  $\Pi$  s'étend naturellement au dioïde  $C(\mathcal{D})$ , c'est-à-dire que pour  $(x', x'') \in C(\mathcal{D})$  on a  $\Pi : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ ,  $\Pi((x', x'')) = (\Pi(x'), \Pi(x''))$

**Exemple 4.5.** L'application étoile de Kleene (voir notation 1.99) est définie dans  $C(\mathcal{D})$  par  $\mathcal{K}(x', x'') = (\mathcal{K}(x'), \mathcal{K}(x'')) = (x'^*, x''^*)$ . En effet,  $\mathcal{K}((x', x'')) = (e, e) \oplus (x', x'') \oplus (x', x'') \otimes (x', x'') \dots = (e \oplus x' \oplus x'^2 \oplus \dots, e \oplus x'' \oplus x''^2 \oplus \dots) = (\mathcal{K}(x'), \mathcal{K}(x''))$ .

#### 4.2.3 Résiduation dans $C(\mathcal{D})$

Considérons maintenant les applications suivantes définies sur le dioïde  $C(\mathcal{D})$  :

$$\begin{aligned} L_{(a', a'')} &: (x', x'') \mapsto (a', a'') \otimes (x', x'') \\ R_{(a', a'')} &: (x', x'') \mapsto (x', x'') \otimes (a', a'') \end{aligned}$$

**Proposition 4.6.** *Les applications  $L_{(a',a'')}$  et  $R_{(a',a'')}$  définies sur le dioïde complet  $C(\mathcal{D})$  sont résiduables.*

*Démonstration.* Observons d'abord que  $L_{(a',a'')}(\varepsilon, \varepsilon) = (a'\varepsilon, a''\varepsilon) = (\varepsilon, \varepsilon)$ ; de plus, comme le dioïde  $C(\mathcal{D})$  est complet, on a

$$L_{(a',a'')} \left( \bigoplus_{\alpha} (x'_{\alpha}, x''_{\alpha})_{\alpha} \right) = \bigoplus_{\alpha} L_{(a',a'')} ((x'_{\alpha}, x''_{\alpha})_{\alpha}),$$

pour tout  $\{(x'_{\alpha}, x''_{\alpha})_{\alpha}\}$  de  $C(\mathcal{D})$ . Par conséquent, l'application  $L_{(a',a'')}$  est semi-continue inférieurement; elle est donc résiduable (cf. théorème 1.97). On vérifie avec la même démarche que l'application  $R_{(a',a'')}$  est résiduable.  $\square$

**Notation 4.7.** *On notera  $L_{(a',a'')}^{\sharp}(x', x'') = (a', a'') \backslash (x', x'')$  (resp.  $R_{(a',a'')}^{\sharp}(x', x'') = (x', x'') \# (a', a'')$ ) l'application résiduée de  $L_{(a',a'')}$  (resp.  $R_{(a',a'')}$ ).*

**Corollaire 4.8.** *Soit  $L_{(a',a'')} : (x', x'') \mapsto (a', a'') \otimes (x', x'')$  l'application définie sur le dioïde complet  $C(\mathcal{D})$ . L'équation*

$$L_{(a',a'')} (x', x'') = (a', a'') \otimes (x', x'') \preceq_{C(\mathcal{D})} (b', b''), \quad (4.4)$$

*admet  $L_{(a',a'')}^{\sharp}(b', b'') = (a', a'') \backslash (b', b'') = (a' \backslash b', a'' \backslash b'')$  comme plus grande solution.*

*Démonstration.* D'après la proposition 4.6, l'application  $L_{(a',a'')}$  est résiduable, l'équation (4.4) admet donc une plus grande solution. En considérant la relation d'ordre du dioïde  $C(\mathcal{D})$ , résoudre (4.4) revient à chercher la plus grande solution de chacune des inéquations suivantes :

$$a' \otimes x' \preceq_{\mathcal{D}} b' \quad \text{et} \quad a'' \otimes x'' \preceq_{\mathcal{D}} b''.$$

Les applications  $L_{a'}$  et  $L_{a''}$  définies sur  $\mathcal{D}$  étant résiduables (voir §1.11), on a directement :  $x' \preceq a' \backslash b'$  et  $x'' \preceq a'' \backslash b''$ , d'où le résultat  $L_{(a',a'')}^{\sharp}(b', b'') = (a' \backslash b', a'' \backslash b'')$ .  $\square$

#### 4.2.4 Dioïde $C_0(\mathcal{D})$

**Définition 4.9 (Dioïde  $C_0(\mathcal{D})$ ).** Nous noterons par  $C_0(\mathcal{D})$  l'ensemble des couples  $(\tilde{x}', \tilde{x}'')$  tels que  $\tilde{x}' \preceq \tilde{x}''$ . Cet ensemble est naturellement inclus dans  $C(\mathcal{D})$ . En outre, il est fermé pour la somme et le produit de  $C(\mathcal{D})$ . En effet, pour tous couples  $(\tilde{x}', \tilde{x}'')$  et  $(\tilde{y}', \tilde{y}'')$  de  $C_0(\mathcal{D})$  on a

$$(\tilde{x}', \tilde{x}'') \oplus (\tilde{y}', \tilde{y}'') = (\tilde{x}' \oplus \tilde{y}', \tilde{x}'' \oplus \tilde{y}'') \in C(\mathcal{D})$$

de plus par isotonie de  $\oplus$ ,

$$\tilde{x}' \preceq \tilde{x}'' \quad \text{et} \quad \tilde{y}' \preceq \tilde{y}'' \Rightarrow \tilde{x}' \oplus \tilde{y}' \preceq \tilde{x}'' \oplus \tilde{y}''$$

autrement dit  $(\tilde{x}' \oplus \tilde{y}', \tilde{x}'' \oplus \tilde{y}'') \in C_0(\mathcal{D})$ . De même, par isotonie de  $\otimes$ , on a

$$(\tilde{x}', \tilde{x}'') \otimes (\tilde{y}', \tilde{y}'') = (\tilde{x}' \otimes \tilde{y}', \tilde{x}'' \otimes \tilde{y}'') \in C_0(\mathcal{D}).$$

De plus,  $C_0(\mathcal{D})$  contient l'élément neutre de la somme  $(\varepsilon, \varepsilon)$  et du produit  $(e, e)$  de  $C(\mathcal{D})$ . Il s'agit donc d'un sous-dioïde complet de  $C(\mathcal{D})$  (voir définition 1.78). L'élément maximum est donné par  $(\top, \top)$ .

**Proposition 4.10.** *L'injection canonique  $I_{C_0(\mathcal{D})} : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow C(\mathcal{D})$  est résiduable. Sa résiduée sera notée*

$$(I_{C_0(\mathcal{D})})^\sharp : C(\mathcal{D}) \rightarrow C_0(\mathcal{D}) = \text{Pr}_{C_0(\mathcal{D})}.$$

*Démonstration.* Directe, puisque  $C_0(\mathcal{D})$  est un sous-dioïde complet de  $C(\mathcal{D})$ . La proposition 1.50 donne le résultat.  $\square$

**Remarque 4.11.** *Le calcul de cette projection est obtenu de la façon suivante. Soit un couple  $(x', x'') \in C(\mathcal{D})$ , la projection est égale à*

$$\text{Pr}_{C_0(\mathcal{D})}((x', x'')) = (x' \wedge x'', x'') = (\tilde{x}', \tilde{x}'').$$

où  $(x' \wedge x'', x'')$  est le plus grand couple de  $C_0(\mathcal{D})$  tel que  $\tilde{x}' \preceq x'$ ,  $\tilde{x}'' \preceq x''$  et  $\tilde{x}' \preceq \tilde{x}''$ . Par exemple, soit le couple  $(12, 7)$  de  $C(\overline{\mathbb{Z}}_{\max})$ , la projection de ce couple dans  $C_0(\mathcal{D})$  est donnée par  $\text{Pr}_{C_0(\mathcal{D})}((12, 7)) = (12 \wedge 7, 7) = (7, 7)$ . De même, notons que  $\text{Pr}_{C_0(\mathcal{D})}$  étant un projecteur on a

$$(\tilde{x}', \tilde{x}'') \in C_0(\mathcal{D}) \iff (\tilde{x}', \tilde{x}'') = \text{Pr}_{C_0(\mathcal{D})}((\tilde{x}', \tilde{x}'')).$$

**Proposition 4.12.** *L'application  ${}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}|_{C_0(\mathcal{D})} : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow C_0(\mathcal{D})$  est résiduable. Sa résiduée est donnée par*

$$\left({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}|_{C_0(\mathcal{D})}\right)^\sharp = (I_{C_0(\mathcal{D})})^\sharp \circ (L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')})^\sharp \circ I_{C_0(\mathcal{D})}.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 4.6, l'application  $L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}$  définie sur  $C(\mathcal{D})$  est résiduable, de plus d'après la définition 1.45, on a

$$\begin{aligned} \left({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}|_{C_0(\mathcal{D})}\right)^\sharp &= \left({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')} \circ I_{C_0(\mathcal{D})}\right)^\sharp \\ &= (I_{C_0(\mathcal{D})})^\sharp \circ \left({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}|_{C_0(\mathcal{D})}\right)^\sharp && \text{(par (1.8))} \\ &= (I_{C_0(\mathcal{D})})^\sharp \circ (L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')})^\sharp \circ I_{C_0(\mathcal{D})} && \text{(par la proposition 1.51)}. \end{aligned}$$

Alors, en considérant  $(\tilde{b}', \tilde{b}'') \in C_0(\mathcal{D}) \subset C(\mathcal{D})$ , la plus grande solution dans  $C_0(\mathcal{D})$  de  ${}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}((\tilde{x}', \tilde{x}'')) = (\tilde{a}', \tilde{a}'') \otimes (\tilde{x}', \tilde{x}'') \preceq (\tilde{b}', \tilde{b}'')$  est  $L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}^\sharp((\tilde{b}', \tilde{b}'')) = (\tilde{x}', \tilde{x}'') = (\tilde{a}', \tilde{a}'') \bowtie (\tilde{b}', \tilde{b}'') = (\tilde{a}' \bowtie \tilde{b}' \wedge \tilde{a}'' \bowtie \tilde{b}'', \tilde{a}'' \bowtie \tilde{b}'')$ .  $\square$

### 4.3 Dioïde et analyse par intervalles

L'analyse par intervalles dans un demi-anneau idempotent a été proposée initialement par [Litvinov and Sobolevskiï, 2001]. Les auteurs montrent que l'équation  $X = AX \oplus B$ , où  $A, B$  et  $X$  sont des intervalles définis sur un demi-anneau idempotent, admet une solution calculable en un temps polynomial, contrairement à la résolution de cette même équation définie sur des intervalles classiques, reconnue comme un problème  $NP$ -difficile.

Dans cette partie nous présentons la construction d'un dioïde d'intervalles et montrons notamment que la théorie de la résiduation s'applique aux applications définies sur cet ensemble ordonné.

**Définition 4.13 (Intervalle).** Un intervalle fermé dans un dioïde  $\mathcal{D}$ , noté  $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ , est l'ensemble satisfaisant

$$\mathbf{x} = \{x \in \mathcal{D} \mid \underline{x} \preceq x \preceq \bar{x}\}, \quad (4.5)$$

où  $\underline{x}, \bar{x} \in \mathcal{D}$  ( $\underline{x} \preceq \bar{x}$ ) sont appelés, respectivement, la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle  $\mathbf{x}$ .

**Remarque 4.14.** Un intervalle pour lequel  $\underline{x} = \bar{x}$  est appelé un intervalle dégénéré. Les intervalles dégénérés permettent de représenter des éléments sans incertitudes. Dans ce cas on identifie  $\mathbf{x}$  avec ses éléments, c.-à-d.  $\mathbf{x} = x$ .

**Remarque 4.15.** Soient  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$  deux intervalles, on dira que  $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$  si et seulement si  $\underline{y} \preceq \underline{x} \preceq \bar{x} \preceq \bar{y}$ . En particulier,  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$  si et seulement si  $\underline{x} = \underline{y}$  et  $\bar{x} = \bar{y}$ .

**Définition 4.16 (Ensemble des intervalles fermés d'un dioïde).** On notera  $I(\mathcal{D})$  l'ensemble des intervalles fermés du dioïde  $\mathcal{D}$ .

**Proposition 4.17.** Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde. L'ensemble  $I(\mathcal{D})$  des intervalles fermés de  $\mathcal{D}$  muni des opérations  $\overline{\oplus}$  et  $\overline{\otimes}$  définies par

$$\mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}] \quad \text{et} \quad \mathbf{x} \overline{\otimes} \mathbf{y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$$

est un dioïde.

*Démonstration.* Notons tout d'abord que l'ensemble  $I(\mathcal{D})$  est fermé pour l'opération  $\overline{\oplus}$ . En effet comme  $\underline{x} \preceq \bar{x}$  et  $\underline{y} \preceq \bar{y}$ , on a toujours

$$\underline{x} \oplus \underline{y} \preceq \bar{x} \oplus \bar{y}.$$

L'ensemble  $I(\mathcal{D})$  est également fermé pour l'opération  $\overline{\otimes}$  : par isotonie de la multiplication, il suffit de remarquer, toujours pour  $\underline{x} \preceq \bar{x}$  et  $\underline{y} \preceq \bar{y}$ , que

$$\underline{x} \otimes \underline{y} \preceq \bar{x} \otimes \bar{y},$$

ce qui prouve que l'ensemble  $I(\mathcal{D})$  est fermé pour les opérations  $\overline{\oplus}$  et  $\overline{\otimes}$ . De plus, on vérifie aisément que

- $(I(\mathcal{D}), \overline{\oplus})$  est un monoïde commutatif. En effet,  $\overline{\oplus}$  est associative et commutative, puisque  $\mathcal{D}$  est associatif et commutatif.
- $(I(\mathcal{D}), \overline{\oplus})$  admet pour élément neutre  $[\varepsilon, \varepsilon]$ .
- $(I(\mathcal{D}), \overline{\otimes})$  est un monoïde, puisque  $\overline{\otimes}$  est associative.
- $(I(\mathcal{D}), \overline{\otimes})$  admet pour élément neutre  $[e, e]$ .
- La multiplication  $\overline{\otimes}$  est distributive à droite et à gauche sur l'addition  $\overline{\oplus}$ .
- $[\varepsilon, \varepsilon]$  est absorbant pour la multiplication  $\overline{\otimes}$ .

Par conséquent,  $I(\mathcal{D})$  est un dioïde (voir définition 1.76). □

**Remarque 4.18.** L'opération  $\overline{\oplus}$  engendre une relation d'ordre canonique  $\preceq$  dans  $I(\mathcal{D})$  :

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \iff \underline{x} \preceq \underline{y} \quad \text{et} \quad \bar{x} \preceq \bar{y} \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}.$$

**Proposition 4.19 ([Litvinov and Sobolevskii, 2001]).** Pour tout  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$  l'intervalle  $\mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y}$  (respectivement  $\mathbf{x} \overline{\otimes} \mathbf{y}$ ) est le plus petit intervalle de  $I(\mathcal{D})$  contenant l'ensemble  $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$  (respectivement  $\{x \otimes y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$ ).

*Démonstration.* On considère l'intervalle  $z$  de  $I(\mathcal{D})$  tel que  $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset z$ . On a alors  $\underline{x} \oplus \underline{y} \in \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset z$  et  $\bar{x} \oplus \bar{y} \in \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset z$ .

Ainsi,  $z \preceq \underline{x} \oplus \underline{y}$  et  $\bar{x} \oplus \bar{y} \preceq z$ , c'est-à-dire,  $z \preceq \underline{x} \oplus \underline{y} \preceq \bar{x} \oplus \bar{y} \preceq z$ .

Ce qui signifie que l'intervalle  $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}] = \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} \subset z$ .

Autrement dit, l'intervalle  $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$  est contenu dans tout intervalle contenant l'ensemble  $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$ .

Soit  $t \in \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$  et  $x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}$  tels que  $t = x \oplus y$ . D'après la définition d'un intervalle,  $\underline{x} \preceq x \preceq \bar{x}$  et  $\underline{y} \preceq y \preceq \bar{y}$ .

De plus, comme dans un dioïde la loi  $\oplus$  est compatible avec l'ordre, on peut écrire  $\underline{x} \oplus \underline{y} \preceq x \oplus y \preceq \bar{x} \oplus \bar{y}$ .

Ce qui signifie que  $t \in [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$ , c'est-à-dire  $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$ .

On peut donc conclure que  $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$  est le plus petit intervalle contenant l'ensemble  $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$ .

Pour la loi  $\otimes$  la démonstration est analogue. □

**Remarque 4.20.** La proposition précédente est importante puisqu'elle montre que les opérations

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \oplus \mathbf{y} &= \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}, \\ \mathbf{x} \otimes \mathbf{y} &= \{x \otimes y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \end{aligned}$$

peuvent être représentées en utilisant seulement les bornes des intervalles  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . On peut alors donner du sens à une expression comme

$$\forall a \in \mathbf{a}, \forall b \in \mathbf{b}, \forall c \in \mathbf{c} \quad , \quad a \otimes b \oplus c \otimes a$$

puisque l'on sait que le résultat de cette expression appartient à l'intervalle  $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} \oplus \mathbf{c} \otimes \mathbf{a}$ . Autrement dit, l'ensemble  $\{a \otimes b \oplus c \otimes a \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c}\}$  est inclus dans l'intervalle  $[(\underline{a} \otimes \underline{b}) \oplus (\underline{c} \otimes \underline{a}), (\bar{a} \otimes \bar{b}) \oplus (\bar{c} \otimes \bar{a})]$ .

Comme pour le dioïde  $C(\mathcal{D})$ , on peut étendre naturellement les applications isotones au dioïde des intervalles  $I(\mathcal{D})$ . En considérant l'application  $\Pi$  isotone, l'image par  $\Pi$  d'un intervalle  $\mathbf{x}$  est donnée par

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) = \{\Pi(x) \mid x \in \mathbf{x}\}.$$

Comme la fonction  $\Pi$  est isotone, on peut calculer les valeurs de  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x})$  directement à partir des bornes de l'intervalle  $\mathbf{x}$ , c'est-à-dire  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) = [\Pi(\underline{x}), \Pi(\bar{x})]$ , et en particulier  $\mathbf{x}^* = [\underline{x}^*, \bar{x}^*]$ .

**Propriétés 4.21.** Les applications isotones conservent l'inclusion d'intervalles. Par conséquent, soit l'application  $\mathbf{\Pi}$  définie sur  $I(\mathcal{D})$ , on a

$$\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{\Pi}(\mathbf{y}). \quad (4.6)$$

*Démonstration.* Soient  $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$  et  $\mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$  deux intervalles de  $I(\mathcal{D})$ . On suppose que  $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$ , alors on a  $\underline{y} \preceq \underline{x} \preceq \bar{x} \preceq \bar{y}$ . Puisque l'application  $\Pi$  est isotone, on obtient,  $\Pi(\underline{y}) \preceq \Pi(\underline{x}) \preceq \Pi(\bar{x}) \preceq \Pi(\bar{y})$ . On vérifie donc bien que  $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{\Pi}(\mathbf{y})$ . □

**Définition 4.22.** Soient  $\mathcal{D}$  un dioïde complet et  $\{\mathbf{x}_\alpha\}$  un sous-ensemble infini de  $I(\mathcal{D})$ . On définit la somme (infinie) des éléments de ce sous-ensemble par

$$\overline{\bigoplus_{\alpha} \mathbf{x}_\alpha} = \left[ \bigoplus_{\alpha} \underline{x}_\alpha, \bigoplus_{\alpha} \bar{x}_\alpha \right] \quad (4.7)$$

**Proposition 4.23.** *Si  $\mathcal{D}$  est un dioïde complet, alors  $I(\mathcal{D})$  est un dioïde complet en considérant la somme infinie définie par (4.7).*

*Démonstration.* Si  $\mathcal{D}$  est complet, alors l'intervalle  $\overline{\bigoplus_{\alpha} x_{\alpha}}$  défini par (4.7) appartient à  $I(\mathcal{D})$ . Par ailleurs, si  $\mathcal{D}$  est complet, soit  $\mathbf{X} \subset I(\mathcal{D})$  un ensemble vide, alors  $\overline{\bigoplus \mathbf{X}} = [\varepsilon, \varepsilon]$  et  $\mathbf{y} \otimes (\overline{\bigoplus \mathbf{X}}) = (\overline{\bigoplus \mathbf{X}}) \otimes \mathbf{y} = [\varepsilon, \varepsilon]$  pour tout  $\mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$ . Considérons maintenant le sous-ensemble non-vide  $\mathbf{X} = \{x_{\alpha}\}$  de  $I(\mathcal{D})$ , on vérifie aisément la propriété de distributivité infinie :

$$\mathbf{y} \otimes \left( \overline{\bigoplus_{\alpha} x_{\alpha}} \right) = \left[ \bigoplus_{\alpha} (\underline{y} \otimes \underline{x}_{\alpha}), \bigoplus_{\alpha} (\overline{y} \otimes \overline{x}_{\alpha}) \right] = \overline{\bigoplus_{\alpha} (\mathbf{y} \otimes x_{\alpha})}$$

de même pour  $(\overline{\bigoplus_{\alpha} x_{\alpha}}) \otimes \mathbf{y} = \overline{\bigoplus_{\alpha} (x_{\alpha} \otimes \mathbf{y})}$  pour tout  $\mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$ . Ainsi, le dioïde  $I(\mathcal{D})$  est complet si le dioïde  $\mathcal{D}$  est complet.  $\square$

**Proposition 4.24** ([Litvinov and Sobolevskii, 2001]). *L'intervalle  $\overline{\bigoplus_{\alpha} x_{\alpha}}$  contient l'ensemble  $\{\bigoplus_{\alpha} x_{\alpha} \mid x_{\alpha} \in \mathbf{x}_{\alpha} \text{ pour tout } \alpha\}$  et c'est le plus petit intervalle de  $I(\mathcal{D})$  avec cette propriété. En particulier, les bornes de l'intervalle  $\overline{\bigoplus_{\alpha} x_{\alpha}}$  appartiennent à l'ensemble  $\{\bigoplus_{\alpha} x_{\alpha} \mid x_{\alpha} \in \mathbf{x}_{\alpha} \text{ pour tout } \alpha\}$ .*

*Démonstration.* La preuve est similaire à la preuve de la proposition 4.19.  $\square$

### 4.3.1 Résiduation d'inéquations linéaires dans le dioïde $I(\mathcal{D})$

**Proposition 4.25.** *Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet. L'application  $L_{\mathbf{a}} : I(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), x \mapsto \mathbf{a} \otimes x$  est résiduable. L'application résiduée  $L_{\mathbf{a}}^{\sharp}$  est donnée par*

$$L_{\mathbf{a}}^{\sharp}(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \backslash \mathbf{b} = [\underline{a} \backslash \underline{b} \wedge \overline{a} \backslash \overline{b}, \overline{a} \backslash \overline{b}].$$

*Démonstration.* Soit  $\Psi : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), (x_1, x_2) \mapsto [x_1, x_2]$  l'application qui à un couple ordonné associe un intervalle. Il est clair que cette application est un isomorphisme (voir définition 1.93) de dioïdes puisqu'ajouter ou multiplier deux intervalles se fait en considérant leurs bornes. Par conséquent, la proposition 4.12 donne directement le résultat.  $\square$

**Remarque 4.26.** *On peut montrer de la même manière que l'application  $R_{\mathbf{a}} : I(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), x \mapsto x \otimes \mathbf{a}$  est résiduable.*

**Proposition 4.27.** *Soit  $\mathcal{K} : x \mapsto x^*$  l'application définie sur un dioïde complet  $I(\mathcal{D})$ . L'application  $\text{Im}_{\mathcal{K}} \mathcal{K}$  est résiduable et sa résiduée est*

$$(\text{Im}_{\mathcal{K}} \mathcal{K})^{\sharp} = I_{\text{Im}_{\mathcal{K}}}.$$

où  $I_{\text{Im}_{\mathcal{K}}}$  est l'injection canonique de  $\text{Im}_{\mathcal{K}}$  dans  $I(\mathcal{D})$ .

*Démonstration.* Immédiate en remarquant que l'application  $\mathcal{K}$  est isotone, autrement dit,  $\mathcal{K}(x)$  peut aussi s'écrire  $\mathcal{K}(x) = [\mathcal{K}(\underline{x}), \mathcal{K}(\overline{x})]$ . On remarque donc que l'on se ramène au problème de la résiduation de l'application  $\mathcal{K}$  sur un dioïde  $\mathcal{D}$  complet. On peut donc appliquer directement le résultat de la proposition 1.102 sur la résiduation de l'application  $\text{Im}_{\mathcal{K}} \mathcal{K}$  définie sur un dioïde.  $\square$

**Remarque 4.28.** *D'après la proposition précédente, on peut déduire que  $x = \mathbf{a}^*$  est la plus grande solution de l'inéquation  $x^* = [\underline{x}^*, \overline{x}^*] \preceq \mathbf{a}^* = [\underline{a}^*, \overline{a}^*]$ .*

### 4.3.2 Matrices d'intervalles

Dans ce paragraphe on généralise les définitions et les règles précédentes sur les dioïdes d'intervalles au cas matriciel. Une matrice  $m \times n$  d'intervalles est définie par

$$\mathbf{A} = \mathbf{a}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} & \cdots & \mathbf{a}_{1n} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} & \cdots & \mathbf{a}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a}_{m1} & \mathbf{a}_{m2} & \cdots & \mathbf{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

où  $\mathbf{a}_{ij}$  sont des éléments de  $\mathbb{I}(\mathcal{D})$ . L'ensemble des matrices d'intervalles sera noté  $(\mathbb{I}(\mathcal{D}))^{m \times n}$ , si  $\mathbb{I}(\mathcal{D})$  est un dioïde alors  $(\mathbb{I}(\mathcal{D}))^{m \times n}$  peut être muni d'une structure de dioïde (voir exemple 1.80). Une matrice  $n \times 1$  d'intervalles est un vecteur noté  $(\mathbb{I}(\mathcal{D}))^n$ . Les matrices  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{a}_{ij}$  et  $\overline{\mathbf{A}} = \overline{a}_{ij}$  sont appelées, respectivement, la matrice inférieure et supérieure de la matrice d'intervalles  $\mathbf{A}$ . En considérant l'ordre canonique partiel, il est possible de donner une autre description des matrices d'intervalles. En effet, La matrice  $\mathbf{A} \in (\mathbb{I}(\mathcal{D}))^{m \times n}$  correspond aussi à l'intervalle  $[\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] = \{B \in \mathcal{D}^{m \times n} \mid \underline{\mathbf{A}} \preceq B \preceq \overline{\mathbf{A}}\}$  si  $\underline{\mathbf{A}} = \underline{a}_{ij}$  et  $\overline{\mathbf{A}} = \overline{a}_{ij} \in \mathcal{D}^{m \times n}$  et si  $\mathbf{A} = \mathbf{a}_{ij} \preceq \mathbf{B} = \mathbf{b}_{ij}$  ce qui signifie  $\mathbf{a}_{ij} \preceq \mathbf{b}_{ij}$  pour tout  $i, j$ .

Les additions  $\oplus$  et les multiplications  $\otimes$  de matrices d'intervalles s'étendent naturellement au dioïde des matrices d'intervalles.

**Remarque 4.29.** Notons que les deux descriptions de matrices peuvent sembler différentes. En effet, pour la première description on a  $\mathbf{A} \in (\mathbb{I}(\mathcal{D}))^{m \times n}$ , alors que dans la deuxième description,  $\mathbf{A} = [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] \in \mathbb{I}(\mathcal{D}^{m \times n})$ . Il est possible de montrer que l'application  $\mathbf{A} \in (\mathbb{I}(\mathcal{D}))^{m \times n} \mapsto [\underline{\mathbf{A}}, \overline{\mathbf{A}}] \in \mathbb{I}(\mathcal{D}^{m \times n})$  est un isomorphisme entre les dioïdes  $(\mathbb{I}(\mathcal{D}))^{m \times n}$  et  $\mathbb{I}(\mathcal{D}^{m \times n})$ . Cet isomorphisme est évident en considérant la proposition 4.19. En effet cette proposition implique que les additions et les multiplications de matrices d'intervalles sont réduites à l'addition et la multiplication de leurs matrices inférieures et supérieures.

## 4.4 Graphes d'événements temporisés et analyse par intervalles

### 4.4.1 Incertitudes de modélisation

On rappelle qu'il est toujours possible d'obtenir la représentation d'état d'un GET sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

où  $x \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^n$  représente le vecteur d'état,  $u \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^p$  représente le vecteur de commande et  $y \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^q$  est le vecteur de sortie. Par ailleurs, la matrice  $A \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{n \times n}$  représente la matrice d'évolution,  $B \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{n \times p}$  représente la matrice de commande et  $C \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{q \times n}$  représente la matrice de sortie.

Cette représentation déterministe suppose que le modèle est parfaitement connu et ne fait pas l'objet de variations paramétriques au cours du temps. Cette hypothèse peut parfois être trop restrictive, il semble alors souhaitable de prendre en compte, dans le modèle, les informations relatives aux incertitudes ; soit en considérant des hypothèses sur la nature statistique de ces incertitudes (voir [Baccelli et al., 1992] pour l'étude des GET stochastiques), soit en émettant des hypothèses sur les amplitudes de variations des paramètres. Nous considérons ici ce second point de vue.

La classe des systèmes incertains que nous allons donc considérer est celle des graphes d'événements temporisés dans lesquels le nombre de jetons initial et/ou la durée des temporisations associées aux places sont incertains, mais supposés appartenir à un intervalle.

#### 4.4.2 Représentation d'état incertaine

Pour représenter les incertitudes lors de la modélisation de GET nous allons considérer que les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  du système peuvent prendre n'importe quelle valeur dans des intervalles. La connaissance de l'amplitude maximale des variations de chacun des paramètres du système permettra d'établir ce modèle incertain sous la forme d'un système décrit dans un dioïde d'intervalles.

Le système pourra donc s'écrire :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} \oplus \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (4.9)$$

où  $\mathbf{A} \in \mathbf{A} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{B} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{n \times p}$  et  $\mathbf{C} \in \mathbf{C} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times n}$ . Autrement dit, les éléments des matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{C}$  appartiennent au dioïde des intervalles  $\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])$ , et les bornes de chaque élément appartiennent au dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .

A partir de cette représentation d'état, nous pouvons donner l'expression de l'intervalle contenant l'ensemble des transferts entrée-sortie possibles pour le GET incertain. Dans un premier temps, le corollaire 1.118 donne  $\mathbf{x} = \mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{u}$  comme plus petite solution de (4.8) (on rappelle que  $\mathbf{A}^* = [\underline{\mathbf{A}}^*, \overline{\mathbf{A}}^*] \in \mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n})$ ). De plus, d'après la proposition 4.19, la matrice d'intervalles  $\mathbf{A}^*\mathbf{B} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{n \times p}$  est la plus petite contenant l'ensemble

$$\{\mathbf{A}^*\mathbf{B} \mid \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B}\}.$$

Ensuite, en reportant l'état  $\mathbf{x}$  dans l'équation de sortie (4.9), on a

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{A}^*\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{H}\mathbf{u}, \quad (4.10)$$

où  $\mathbf{H} = \mathbf{C}\mathbf{A}^*\mathbf{B} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times p}$  représente l'intervalle contenant l'ensemble des relations entrée-sortie du GET incertain. En outre, soit l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{C}\mathbf{A}^*\mathbf{B} \mid \mathbf{C} \in \mathbf{C}, \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B}\}, \quad (4.11)$$

des relations entrée-sortie possibles pour le GET, d'après la proposition 4.19, on a  $\mathcal{H} \subset \mathbf{H}$ .

Pour illustrer cette représentation, considérons le graphe d'événements temporisé de la figure 4.1. Sur ce schéma  $u_1$ ,  $u_2$  et  $y$  désignent les entrées et la sortie du système, les jetons en pointillés représentent le fait qu'une ressource peut ou ne peut pas être présente, les temporisations entre crochets donnent respectivement le temps de séjour obligé minimal et obligé maximal d'un jeton dans une place avant de pouvoir contribuer au tir de la transition aval.

Par exemple, la machine  $M_2$  a la possibilité de traiter 1 ou 2 pièces en même temps et chaque traitement dure 3 unités de temps. Ensuite chaque jeton traité reste entre 2 et 6 unités de temps dans la place aval avant de contribuer au tir de la transition  $x_3$ . Donc la machine  $M_2$  peut traiter au mieux 2 pièces toutes les 3 unités de temps et au pire 1 pièce toutes les 3 unités de temps. La composante correspondante dans la matrice  $\mathbf{A}$  est par conséquent  $a_{22} = [\gamma^2\delta^3, \gamma\delta^3]$  où la borne inférieure de l'intervalle  $\underline{a}_{22} = \gamma^2\delta^3$  représente le fonctionnement le plus rapide (le plus petit au sens du dioïde) et  $\overline{a}_{22} = \gamma\delta^3$  représente le fonctionnement le plus lent (le plus grand au sens du dioïde). De même, l'intervalle  $\mathbf{a}_{32} = [2, 6]$  représente le temps de séjour dans la place en aval de la transition  $x_2$  avant de pouvoir contribuer au tir de la transition  $x_3$ .

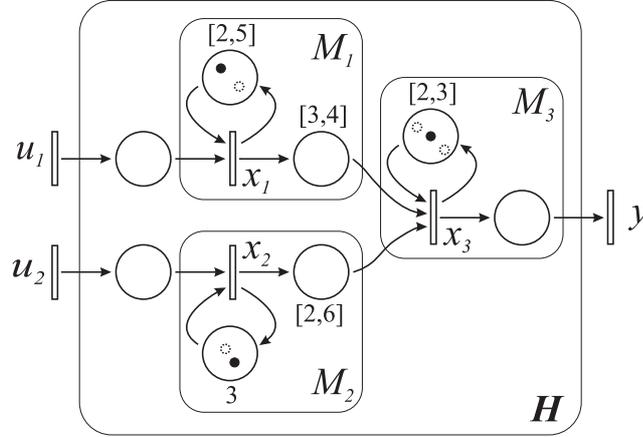


Figure 4.1 – Modélisation incertaine d'un graphe d'événements temporisé.

En appliquant la même démarche à l'ensemble du GET, nous obtenons le modèle suivant :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [\gamma^2\delta^2, \gamma\delta^5] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma^2\delta^3, \gamma\delta^3] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\delta^3, \delta^4] & [\delta^2, \delta^6] & [\gamma^3\delta^2, \gamma\delta^3] \end{pmatrix} \mathbf{x} \oplus \begin{pmatrix} [e, e] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [e, e] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & \varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = ([\varepsilon, \varepsilon] \quad [\varepsilon, \varepsilon] \quad [e, e]) \mathbf{x}.$$

De cette représentation d'état, il est possible de donner l'intervalle contenant l'ensemble des transferts entrée-sortie du système. Tout d'abord, l'état s'exprime par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} [(\gamma^2\delta^2)^*, (\gamma\delta^5)^*] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [(\gamma^2\delta^3)^*, (\gamma\delta^3)^*] \\ [\delta^3 (\gamma^2\delta^2)^*, \delta^4 (\gamma\delta^5)^*] & [\delta^2 (\gamma^2\delta^3)^*, \delta^6 (\gamma\delta^3)^*] \end{pmatrix} \mathbf{u}. \quad (4.12)$$

En reportant, l'expression de l'état (4.12) dans l'équation de sortie (4.9), on obtient l'intervalle contenant l'ensemble des relations entrée-sortie du GET incertain :

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{u} = ([\delta^3 (\gamma^2\delta^2)^*, \delta^4 (\gamma\delta^5)^*] \quad [\delta^2 (\gamma^2\delta^3)^*, \delta^6 (\gamma\delta^3)^*]) \mathbf{u}.$$

La figure 4.2 montre l'ensemble des relations entrée/sortie possibles du graphe d'événements temporisé de la figure 4.1. En d'autres termes, les zones grisées de la figure 4.2 caractérisent complètement le comportement du GET (figure 4.1) dans le cas où s'exercent des variations paramétriques comprises dans les intervalles (prédéfinis au moment de la modélisation du système) associés au nombre de jetons et/ou aux temporisations de chacune des places du GET.

## 4.5 Synthèse de contrôleurs robustes

Les variations du comportement d'un système au cours du temps<sup>1</sup> rendent souvent insuffisante la synthèse de correcteurs ne considérant que le modèle déterministe du système. Nous allons considérer

<sup>1</sup>Elles peuvent être dues aux variations physiques du système. Elles se traduisent généralement par des variations paramétriques du modèle.

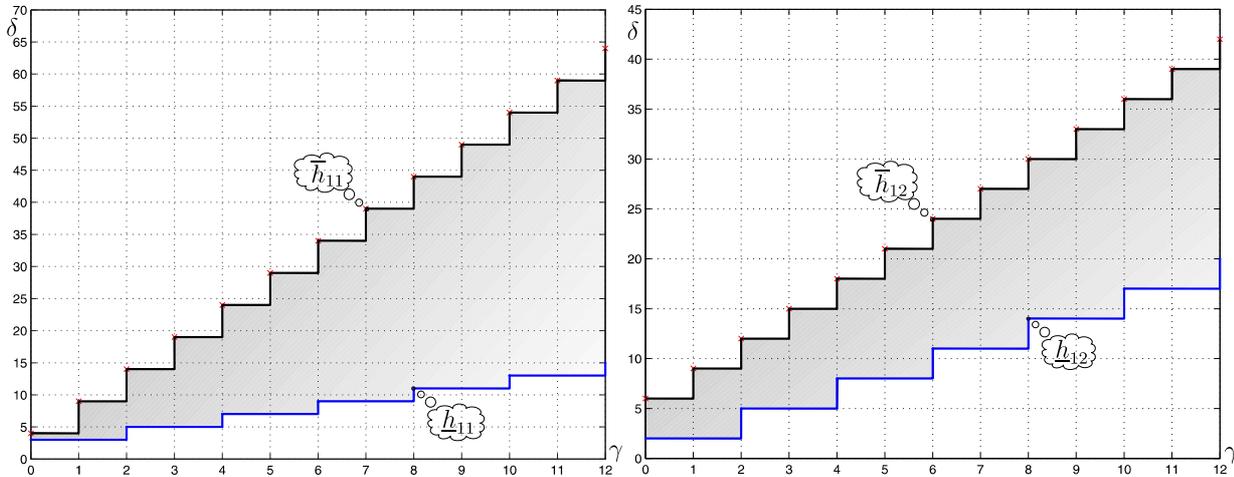


Figure 4.2 – Représentation de  $H$  ; les zones grisées correspondent à l'ensemble des comportements du GET :  $\mathcal{H} \subset [\underline{H}, \overline{H}] = [(\underline{h}_{11} \ \underline{h}_{12}), (\overline{h}_{11} \ \overline{h}_{12})]$ .

dans ce paragraphe la synthèse de correcteurs lorsque le modèle est supposé appartenir à un ensemble de type (4.11). L'approche proposée ici prend pour point de départ la synthèse de correcteurs de type retour de sortie présentée dans le paragraphe 3.4.

### 4.5.1 Présentation du problème standard

Le schéma traditionnellement associé à un problème de synthèse de correcteur est donné figure 4.3, où  $H$  est la matrice de transfert et  $F$  la matrice du correcteur de retour de sortie.

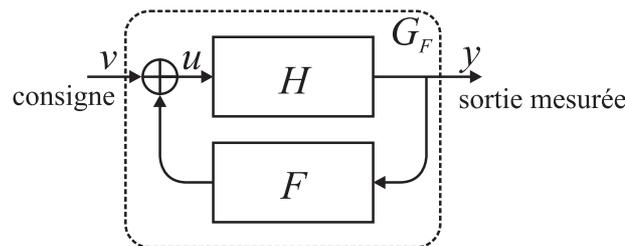


Figure 4.3 – Représentation traditionnelle d'un asservissement.

Le système en boucle fermée vérifie :

$$\begin{cases} u = v \oplus Fy \\ y = Hu \end{cases}$$

En considérant le corollaire 1.118, on obtient la relation entrée-sortie du système en boucle fermée :

$$y = (HF)^* H v. \tag{4.13}$$

On rappelle alors que le problème de commande avec modèle de référence se formule de la façon suivante : étant donné un système de transfert  $H$  et un modèle de référence  $G_{ref}$ , existe-t-il un plus grand retour de sortie  $F$  tel que le système en boucle fermée  $(HF)^*H$  soit inférieur ou égal au modèle de référence. Formellement, cela revient à chercher la borne supérieure de l'ensemble suivant :

$$\{F \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times q} \mid (HF)^*H \preceq G_{ref}\}.$$

#### 4.5.2 Formulation du problème de commande robuste

Dans ce paragraphe, nous allons considérer le problème précédent dans le contexte des systèmes incertains. Nous allons chercher à synthétiser des commandes robustes, c'est-à-dire des commandes permettant au système en boucle fermée de respecter les spécifications quelles que soient les valeurs des paramètres du modèle incluses dans des intervalles établis a priori.

Nous supposons donc connu un modèle incertain sous la forme (4.8) et (4.9), et nous cherchons à synthétiser un correcteur garantissant le respect des performances pour tous les comportements découlant de ce modèle.

D'après la proposition 4.19, la relation de transfert d'un GET appartient à l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{CA^*B \mid C \in \mathbf{C}, A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\} \subset \mathbf{H} = \mathbf{CA}^*B \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times p}.$$

Nous supposons donné  $G_{ref} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times p}$  un intervalle spécifiant l'ensemble des comportements admissibles du système corrigé, et nous allons chercher le plus grand intervalle  $F \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{p \times q}$  au sens de l'ordre  $\preceq_{(\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{p \times q}}$  et noté  $\hat{F}$  garantissant que le comportement du système corrigé soit représenté par un intervalle inférieur ou égal à la spécification  $G_{ref}$ , quel que soit le comportement du système  $H \in \mathcal{H} \subset \mathbf{H}$ .

Formellement ce problème de commande consiste à déterminer la borne supérieure de l'ensemble suivant :

$$\{F \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{p \times q} \mid (HF)^*H \preceq G_{ref}\}. \quad (4.14)$$

Si l'on considère des restrictions sur le choix des modèles de référence, le résultat suivant peut être énoncé :

**Proposition 4.30.** *Soit  $M_H : (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{p \times q} \rightarrow (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times p}$ ,  $F \mapsto (HF)^*H$  une application définie sur des diodes complets. On considère les ensembles suivants :*

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_1 &= \{G \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times p} \mid \exists D \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times q}, G = D^*H\}, \\ \mathcal{G}_2 &= \{G \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times p} \mid \exists D \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{p \times p}, G = HD^*\}. \end{aligned}$$

Pour tout  $G_{ref} \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ , il existe un plus grand  $F$  tel que  $M_H(F) \preceq G_{ref}$ , donné par

$$\hat{F} = \bigoplus_{\{F \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{p \times q} \mid (HF)^*H \preceq G_{ref}\}} F = H \bar{\setminus} G_{ref} \bar{\setminus} H.$$

*Démonstration.* Considérons  $G_{ref} \in \mathcal{G}_1$ , alors il existe  $D$  tel que  $G_{ref} = D^*H$ , par conséquent on cherche la plus grande solution de  $(HF)^*H \preceq D^*H$  qui est encore égale à  $(e \oplus HF \oplus HFHF \oplus \dots)H \preceq DH^*$ . On voit donc que résoudre  $(HF)^*H \preceq D^*H$  revient à satisfaire un ensemble d'inéquations :

$$H \preceq D^*H \quad (4.15)$$

$$HFH \preceq D^*H \quad (4.16)$$

$$HFHFH \preceq D^*H \quad (4.17)$$

$$\vdots$$

$$\forall n \quad (HF)^n H \preceq D^*H \quad (4.18)$$

D'après la définition de l'application  $\mathcal{K}$ , on a  $D^* \succeq e$  (voir § 1.11.2), donc (4.15) est satisfaite. De plus,  $L_H \circ R_H(F)$  est une application résiduable (théorème 1.40), donc la plus grande solution de (4.16) est donnée par

$$\hat{F} = R_H^\sharp \circ L_H^\sharp(D^*H) = H\overline{\preceq}(D^*H)\overline{\preceq}H.$$

En outre,  $\hat{F} = H\overline{\preceq}(D^*H)\overline{\preceq}H$  est solution de (4.17); en effet on rappelle que  $D^*D^* = D^*$  et comme  $H\hat{F}H \preceq D^*H$ , on a

$$H\hat{F}H\hat{F}H \preceq D^*H\hat{F}H \preceq D^*D^*H = D^*H.$$

On vérifie les autres égalités de la même façon, alors  $\hat{F}$  est la plus grande solution. La démonstration pour  $G_{ref} \in \mathcal{G}_2$  s'effectue par la même démarche.  $\square$

**Remarque 4.31.** La preuve donnée ci-dessus est une alternative à celle proposée dans [Cottenceau et al., 2001].

**Corollaire 4.32.** Si  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$ , alors  $\hat{F} = H\overline{\preceq}G_{ref}\overline{\preceq}H$  est la plus grande solution de

$$M_H(\hat{F}) = (H\hat{F})^*H = G_{ref}.$$

*Démonstration.* Notons tout d'abord que  $\text{Im}M_H \subset (\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2)$  donc  ${}_{\text{Im}M_H}M_H$  est résiduable. De plus, si  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$ , alors il existe un  $F \in I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times q})$  tel que  $M_H(F) = G_{ref}$ . En d'autres termes, l'application  ${}_{\text{Im}M_H}M_H$  est surjective. Par conséquent d'après (1.10), on a  ${}_{\text{Im}M_H}M_H \circ ({}_{\text{Im}M_H}M_H)^\sharp = \text{Id}_{\text{Im}M_H}$ , autrement dit si  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$  alors  $M_H(H\overline{\preceq}G_{ref}\overline{\preceq}H) = G_{ref}$ .  $\square$

Ci-dessous, nous considérons l'ensemble des contrôleurs robustes, noté  $\mathcal{F}$ , tel que le transfert du système en boucle fermée soit inclus dans l'intervalle  $G_{ref}$  pour tout  $H \in \mathcal{H} \subset \mathbf{H}$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times q} \mid (HF)^*H \subset G_{ref}\}. \quad (4.19)$$

**Corollaire 4.33.** Si  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$ , alors  $\hat{F} \subset \mathcal{F}$ .

*Démonstration.* Si  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$ , alors d'après le corollaire 4.32, on a  $M_H(\hat{F}) = G_{ref}$ , c'est-à-dire  $(H\hat{F})^*H \subset G_{ref}$  (voir remarque 4.15). Par conséquent,  $\forall F \in \hat{F}$ ,  $(HF)^*H \subset G_{ref}$ , ce qui conduit au résultat.  $\square$

Ce dernier corollaire montre que si l'ensemble des modèles de référence  $G_{ref}$  appartient à l'image de l'application  $M_H$ , alors tout contrôleur  $F \in \hat{F}$  est aussi dans l'ensemble  $\mathcal{F}$ . D'un point de vue pratique cela signifie que pour toutes variations de jetons et/ou de temporisations dans les intervalles spécifiés lors de la modélisation, le système en boucle fermée est inclus dans l'ensemble des modèles de référence  $G_{ref}$  caractérisé sous forme d'intervalles.

**Corollaire 4.34.** Si  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$ , alors la borne supérieure de l'intervalle  $\hat{F}$ , notée  $\overline{\hat{F}}$ , correspond à la borne supérieure de l'ensemble  $\mathcal{F}$ .

*Démonstration.* D'après le corollaire 4.32, si  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$  alors  $(H\hat{F})^*H = G_{ref}$ , c'est-à-dire d'après la relation d'ordre que  $(\overline{H\hat{F}})^*H = \overline{G_{ref}}$ . De plus, la borne supérieure de  $\hat{F}$ , soit  $\overline{\hat{F}}$ , s'exprime par  $\overline{\hat{F}} = \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \overline{H}$  qui est bien le plus grand retour de sortie tel que  $(\overline{H\hat{F}})^*H = \overline{G_{ref}}$ , et donc le plus grand retour de sortie dans l'ensemble  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Corollaire 4.35.** Si  $G_{ref} = H$ , alors l'ensemble des contrôleurs robustes  $\mathcal{F}$  peut être confondu avec l'intervalle  $[\varepsilon, \overline{\hat{F}}]$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{F} \equiv [\varepsilon, \overline{\hat{F}}].$$

*Démonstration.* Si  $G_{ref} = H$ , alors  $G_{ref} \in \text{Im}M_H$  puisque  $G_{ref} = (H\varepsilon)^*H$ ;  $\overline{\hat{F}}$  est donc la borne supérieure de l'ensemble  $\mathcal{F}$  (corollaire 4.34). Par ailleurs  $\varepsilon$  assure que  $(H\varepsilon)^*H = H$ , c'est-à-dire que la spécification est respectée même si  $F = \varepsilon$ . Il s'agit donc du plus petit correcteur.  $\square$

**Remarque 4.36.** D'un point de vue pratique  $\hat{F}$  est donné par

$$\begin{aligned} \hat{F} &= H \overline{\setminus} G_{ref} \overline{\setminus} H \\ &= [\underline{H}, \overline{H}] \overline{\setminus} [\underline{G_{ref}}, \overline{G_{ref}}] \overline{\setminus} [\underline{H}, \overline{H}] = [\underline{H} \overline{\setminus} \underline{G_{ref}} \wedge \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}}, \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}}] \overline{\setminus} [\underline{H}, \overline{H}] \\ &= [(\underline{H} \overline{\setminus} \underline{G_{ref}} \wedge \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}}) \overline{\setminus} \underline{H} \wedge \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \overline{H}, \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \overline{H}] \\ &= [\underline{H} \overline{\setminus} \underline{G_{ref}} \overline{\setminus} \underline{H} \wedge \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \underline{H} \wedge \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \overline{H}, \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \overline{H}]. \end{aligned}$$

La dernière expression est simplifiable. En effet,  $(\overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}}) \overline{\setminus} \underline{H} \succeq (\overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}}) \overline{\setminus} \overline{H}$  par antitonicité de l'application  $a \overline{\setminus} x$  (c.-à-d.  $x_1 \succeq x_2 \Rightarrow a \overline{\setminus} x_1 \preceq a \overline{\setminus} x_2$ ), par conséquent  $\overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \underline{H} \wedge \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \overline{H} = \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \overline{H}$ . Finalement,

$$\hat{F} = H \overline{\setminus} G_{ref} \overline{\setminus} H = [\underline{H} \overline{\setminus} \underline{G_{ref}} \overline{\setminus} \underline{H} \wedge \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \overline{H}, \overline{H} \overline{\setminus} \overline{G_{ref}} \overline{\setminus} \overline{H}]. \quad (4.20)$$

## 4.6 Exemple d'application

Nous proposons maintenant une illustration de la méthode de synthèse de contrôleurs robustes présentée dans les paragraphes précédents, ceci dans un objectif de stabilisation. On rappelle que l'accumulation "possible" de jetons dans le GET (ou non bornitude) peut être vue comme un phénomène d'instabilité du modèle (voir le chapitre 2). Dans le cas d'un système manufacturier, l'instabilité du modèle est synonyme d'une possible "explosion" de la taille des stocks internes du système modélisé. Par conséquent, la stabilisation d'un GET constitue un enjeu important.

Pour les GET, la stabilité est une propriété liée aux caractéristiques structurelles du modèle. En effet, on sait que le nombre de jetons d'un circuit d'un GET est invariant. Aussi, il est suffisant que le GET soit fortement connexe pour qu'il soit stable. En d'autres termes, le GET est stable si toutes ses transitions "fonctionnent en moyenne à la même vitesse", ce qui évite l'accumulation de jetons dans les places du GET. Il a été montré qu'un GET structurellement contrôlable et observable pouvait être stabilisé par un retour de sortie tout en préservant le taux de production du système [Cohen et al., 1984, Cohen et al., 1991].

**Théorème 4.37** ([Baccelli et al., 1992, §6.6.2]). *Tout graphe d'événements structurellement contrôlable et observable peut être stabilisé par un retour de sortie.*

Le problème de stabilisation de GET est par conséquent souvent relié au problème de synthèse de contrôleur de type retour de sortie dans la littérature.

L'objectif visé dans cet exemple va être de caractériser des contrôleurs de type retour de sortie assurant la stabilité d'un graphe d'événements temporisé à paramètres incertains, tout en conservant son taux de production compris à l'intérieur d'un intervalle. Nous considérons le GET incertain de la figure 4.1 qui a pour relation entrée-sortie

$$y = CA^*Bu = Hu = ([\delta^3 (\gamma^2 \delta^2)^*, \delta^4 (\gamma \delta^5)^*] \quad [\delta^2 (\gamma^2 \delta^3)^*, \delta^6 (\gamma \delta^3)^*]) u.$$

La méthode de stabilisation que nous allons mettre en oeuvre est très proche de celle présentée dans [Cottenceau et al., 2003]. Il s'agit de stabiliser un GET par la synthèse d'un contrôleur de type retour de sortie avec un objectif de poursuite de modèle. Pour utiliser cette approche, il nous faut tout d'abord déterminer le modèle de référence  $G_{ref}$ . Le choix du modèle de référence pour le problème de stabilisation est lié aux différents taux de production du GET à stabiliser. Dans notre exemple, il est possible de déterminer les différents taux de production directement à partir du graphe d'événements temporisé. Pour un GET incertain, le taux de production appartiendra à un intervalle, où les bornes de l'intervalle seront respectivement, le taux minimum et le taux maximum de production. Le taux minimum correspond au fonctionnement le plus lent du système (représenté sur la figure 4.4.(a)), une énumération de tous les circuits du GET nous donne :

$$\underline{\lambda} = \min \left( \frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{5}. \quad (4.21)$$

De même, le taux de production maximum correspondant au fonctionnement le plus rapide (représenté sur la figure 4.4.(b)) est donné par

$$\bar{\lambda} = \min \left( \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2} \right) = \frac{2}{3}, \quad (4.22)$$

on obtient finalement comme taux de production, l'intervalle  $\lambda = \left[ \frac{1}{5}, \frac{2}{3} \right]$ . La figure 4.4 donne une représentation (traits gras) des deux circuits critiques correspondant aux bornes de l'intervalle. D'un point de vue pratique, cet intervalle contient l'ensemble des taux de productions que peut prendre le GET quand il est soumis à des variations de jetons et/ou de temporisations dans les intervalles spécifiés lors de la modélisation.

**Remarque 4.38.** *L'énumération naïve de tous les circuits n'est possible que pour des graphes de petites tailles puisque pour un graphe à  $n$  sommets, cela conduit à une complexité en  $O((n-1)!)$ . Dans le cas de graphes de grandes tailles, il est plus judicieux d'utiliser l'algorithme de Karp (voir [Baccelli et al., 1992, §2.2.3],[Gondran and Minoux, 1979]) dont la complexité est en  $O(mn)$  ou  $m$  désigne le nombre d'arcs du graphe et  $n$  son nombre de sommets.*

Dans cet exemple l'instabilité du GET vient de la désadaptation des taux de production des chemins allant de  $u_1 \rightarrow y$  et  $u_2 \rightarrow y$ . Dans le cas du fonctionnement le plus lent (figure 4.4.(a)) on voit que la machine  $M_1$  est la machine goulot (elle ralentit l'ensemble du système). Par conséquent, dans le cas d'un fonctionnement au plus tôt du système il va y avoir une accumulation de jetons en aval de la machine  $M_2$ . De même, pour le fonctionnement le plus rapide (figure 4.4.(b)), la machine goulot se trouve être la machine  $M_2$ , donc il va y avoir une accumulation de jetons en aval de la machine  $M_1$ .

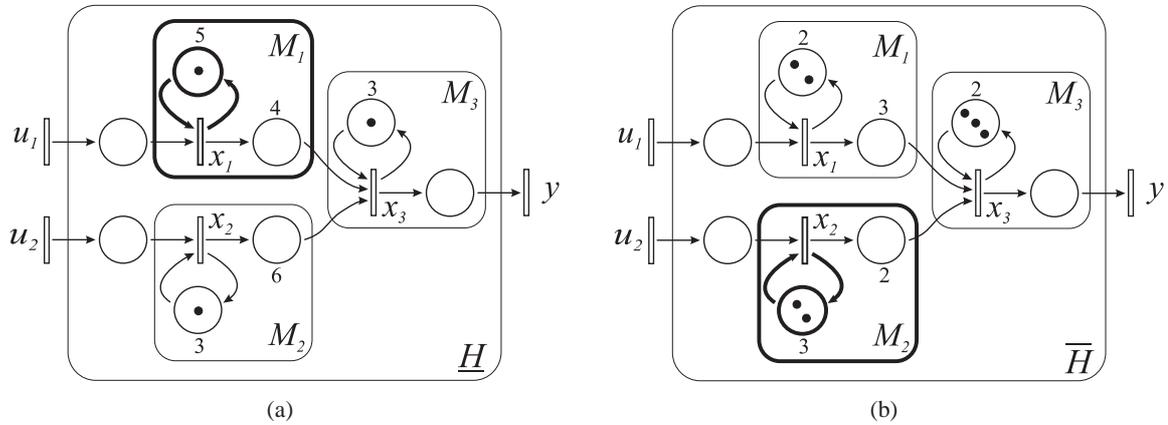


Figure 4.4 – Taux de production minimum et maximum du GET

Nous nous proposons dans ce contexte incertain de stabiliser ce GET tout en conservant son taux de production, et en minimisant le nombre de jetons dans les arcs du retour de sortie.

La procédure de stabilisation sera réalisée en deux étapes.

- la première consiste à établir un intervalle de modèles de référence stabilisant le GET (voir [Gaubert, 1992]);
- la seconde consiste à établir le plus grand intervalle de contrôleurs stabilisant en appliquant les résultats de la proposition 4.30.

#### 4.6.1 Choix du modèle de référence

En accord avec le théorème 4.37, le GET peut être stabilisé (en le rendant fortement connexe) tout en conservant son taux de production. Pour cela il est nécessaire d'ajouter des arcs entre les sorties et les entrées. Les arcs via des places devront contenir un nombre de jetons garantissant la conservation du taux de production. Ces jetons pouvant représenter des ressources il est intéressant d'en limiter le nombre<sup>2</sup>. Il s'agit donc de minimiser le marquage initial de ces places tout en stabilisant le GET et en préservant le taux de production. Ce problème d'optimisation de ressources a été initialement formalisé dans [Cohen et al., 1983].

Dans le cas d'un GET déterministe à  $p$  entrées et  $q$  sorties, il suffit d'ajouter des arcs entre les transitions de sortie et les transitions d'entrée via des places contenant au moins un jeton (pour assurer la vivacité du système en boucle fermée) pour obtenir la forte connexité du graphe. Le problème consiste alors à calculer le nombre minimum de jetons à placer dans chacune de ces places de manière à conserver le taux de production du système en boucle ouverte. Cet ensemble d'arcs et de places peut être vu comme un correcteur de type retour de sortie, représenté par une matrice  $F = (F_{ij}) \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times q}$  où  $F_{ij} = \gamma^{q_{ij}}$  avec  $q_{ij}$  le nombre de jetons mis dans la place entre la sortie  $j$  et l'entrée  $i$ ; en l'absence d'arc,  $F_{ij} = \varepsilon$ .

Il s'agit donc de minimiser  $q = \{q_{ij}\}$  avec comme contrainte de préserver le taux de production du système en boucle ouverte. Cette minimisation se traduit en un problème de programmation linéaire en

<sup>2</sup>Dans un contexte manufacturier, ces jetons peuvent représenter des moyens de transport dans une cellule automatisée.

nombre entier où la fonction coût est donnée par

$$J(q) = \sum_{i=1, j=1}^{i=p, j=q} \alpha_{ij} q_{ij},$$

avec  $\alpha_{ij}$  une pondération associée à chaque ressource. Les contraintes sont données par

$$\lambda(q) \geq \lambda_{\text{bo}}$$

avec  $\lambda_{\text{bo}}$  le taux de production du système en boucle ouverte et  $\lambda(q)$  le taux de production avec les arcs stabilisants.

En notant  $w_{N_c}(q)$  la somme des jetons d'un circuit  $c$  et  $w_{T_c}$  la somme des temporisations de ce même circuit alors

$$\lambda(q) = \min_c \frac{w_{N_c}(q)}{w_{T_c}},$$

c'est-à-dire que pour chaque circuit élémentaire, les contraintes peuvent s'écrire

$$w_{N_c}(q) \geq \lambda_{\text{bo}} \times w_{T_c}.$$

La solution de ce problème fournit les  $q_{ij}$  jetons à mettre initialement dans les places. Nous noterons  $F_{\mathcal{R}\mathcal{O}}$  ce correcteur de type retour de sortie qui stabilise, minimise le nombre de ressources et préserve le taux de production.

**Remarque 4.39.** *Le problème d'optimisation de ressources a également été abordé par Gaubert dans [Gaubert, 1992, Gaubert, 1995]. Il propose une alternative à l'énumération des circuits d'un GET (opération de complexité  $O((n-1)!)^2$ ), envisageable seulement pour des graphes de petites dimensions. Il montre en effet que le problème d'optimisation peut se ramener à un problème de programmation linéaire à  $n^2$  inégalités (où  $n$  correspond au nombre de sommets du graphe).*

L'application de ce correcteur  $F_{\mathcal{R}\mathcal{O}}$  conduit au comportement en boucle fermée égal à  $M_H(F_{\mathcal{R}\mathcal{O}})$ . Il est ensuite aisé d'améliorer les performances de ce correcteur vis-à-vis du critère de juste-à-temps en considérant le plus grand correcteur  $\hat{F}_{\mathcal{R}\mathcal{O}+}$  préservant ce comportement, c'est-à-dire  $M_H(\hat{F}_{\mathcal{R}\mathcal{O}+}) = M_H(F_{\mathcal{R}\mathcal{O}})$ .

En considérant le corollaire 3.18, ce plus grand correcteur est donné par

$$\hat{F}_{\mathcal{R}\mathcal{O}+} = \text{Pr}_+(H \setminus M_H(F_{\mathcal{R}\mathcal{O}}) \setminus H).$$

L'extension au GET incertain est assez naturelle puisqu'il suffit de considérer l'intervalle de variation du taux de production  $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$  et l'intervalle de variation de la somme (au sens classique) des temporisations de chaque circuit  $[\underline{w}_{T_c}, \bar{w}_{T_c}]$ . Les contraintes s'écrivent dans l'algèbre usuelle :

$$[\underline{w}_{N_c}(q), \bar{w}_{N_c}(q)] \succeq [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \times [\underline{w}_{T_c}, \bar{w}_{T_c}] = [\min(\underline{\lambda}\underline{w}_{T_c}, \underline{\lambda}\bar{w}_{T_c}, \bar{\lambda}\underline{w}_{T_c}, \bar{\lambda}\bar{w}_{T_c}), \max(\underline{\lambda}\underline{w}_{T_c}, \underline{\lambda}\bar{w}_{T_c}, \bar{\lambda}\underline{w}_{T_c}, \bar{\lambda}\bar{w}_{T_c})],$$

Autrement dit,  $\forall w_{N_c}(q) \in [\underline{w}_{N_c}(q), \bar{w}_{N_c}(q)]$  et  $\forall \lambda w_{T_c} \in [\underline{\lambda}, \bar{\lambda}] \times [\underline{w}_{T_c}, \bar{w}_{T_c}]$ , on doit avoir  $w_{N_c} \succeq \lambda w_{T_c}$ . Puisque  $\underline{\lambda}, \bar{\lambda}, \underline{w}_{T_c}$  et  $\bar{w}_{T_c} \in \mathbb{R}^+$ , cela revient à satisfaire la contrainte :

$$\underline{w}_{N_c}(q) \succeq \max(\underline{\lambda}\underline{w}_{T_c}, \underline{\lambda}\bar{w}_{T_c}, \bar{\lambda}\underline{w}_{T_c}, \bar{\lambda}\bar{w}_{T_c}) = \bar{\lambda}\bar{w}_{T_c}.$$

La solution de ce nouveau problème de programmation linéaire en nombre entier fournit le correcteur  $F_{\mathcal{R}\mathcal{O}}$  qui stabilise le système incertain et préserve son taux de production tout en minimisant le nombre de ressources.

Dans l'exemple de la figure 4.1, la forte connexité du graphe est assurée en ajoutant deux arcs (via deux places), l'un entre  $y$  et  $u_1$  et l'autre entre  $y$  et  $u_2$ . C'est-à-dire que le correcteur s'écrira

$$F_{\mathcal{RO}} = \begin{pmatrix} \gamma^{q_{11}} \\ \gamma^{q_{21}} \end{pmatrix}.$$

Nous considérons donc la fonction coût

$$J(q) = q_{11} + q_{21} \quad (\text{soit } \alpha_{11} = \alpha_{21} = 1),$$

et les contraintes obtenues par énumération des circuits ( $\bar{\lambda} = \frac{2}{3}$  voir (4.22)) :

$$\underline{w}_{N_{c_1}}(q) \succeq \bar{\lambda} \times \bar{w}_{T_{c_1}} = \frac{2}{3} \times 4$$

$$\underline{w}_{N_{c_2}}(q) \succeq \bar{\lambda} \times \bar{w}_{T_{c_2}} = \frac{2}{3} \times 6$$

où  $\underline{w}_{N_{c_1}}$  (resp.  $\bar{w}_{T_{c_1}}$ ) représente la somme des jetons (resp. la somme des temporisations) du circuit élémentaire créé par l'arc de retour  $y \rightarrow u_1$  et  $\underline{w}_{N_{c_2}}$  (resp.  $\bar{w}_{T_{c_2}}$ ) représente la somme des jetons (resp. la somme des temporisations) du circuit élémentaire créé par l'arc de retour  $y \rightarrow u_2$ .

La résolution du problème donne  $q_{11} = 3$  et  $q_{21} = 4$ , soit un contrôleur de type retour de sortie de la forme :

$$F_{\mathcal{RO}} = \begin{pmatrix} \gamma^3 \\ \gamma^4 \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

Passons maintenant au calcul du modèle de référence proprement dit. Notons que le correcteur (4.23) est considéré dans la suite comme un intervalle dégénéré. L'expression du modèle de référence est donnée par

$$\mathbf{G}_{ref} = \left( \left[ \underline{g}_{+11}, \bar{g}_{+11} \right] \left[ \underline{g}_{+12}, \bar{g}_{+12} \right] \right) = M_{\mathbf{H}}(F_{\mathcal{RO}}) = \left( \mathbf{H} \begin{pmatrix} \gamma^3 \\ \gamma^4 \end{pmatrix} \right)^* \mathbf{H}$$

Après calcul, nous obtenons comme valeur pour  $\mathbf{G}_{ref} = [\underline{\mathbf{G}}_{ref}, \bar{\mathbf{G}}_{ref}]$  :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{G}}_{ref} = [\underline{g}_{+11}, \underline{g}_{+12}] &= [\delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^7 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^9 \oplus \gamma^7 \delta^{10} \oplus \gamma^8 \delta^{11} \oplus \gamma^9 \delta^{12} \oplus \gamma^{10} \delta^{14} (\gamma^2 \delta^3)^*, \delta^4 (\gamma \delta^5)^*] \\ \bar{\mathbf{G}}_{ref} = [\bar{g}_{+11}, \bar{g}_{+12}] &= [\delta^2 (\gamma^2 \delta^3)^*, \delta^6 \oplus \gamma \delta^9 \oplus \gamma^2 \delta^{12} \oplus \gamma^3 \delta^{15} \oplus \gamma^4 \delta^{18} \oplus \gamma^5 \delta^{21} \oplus \gamma^6 \delta^{25} (\gamma \delta^5)^*]. \end{aligned}$$

Notons que ce modèle de référence appartient à l'image de l'application  $M_{\mathbf{H}} : \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{H}\mathbf{x})^* \mathbf{H}$ .

La figure 4.5 donne une représentation du système en boucle ouverte  $\mathbf{H}$  ainsi qu'une représentation du modèle de référence  $\mathbf{G}_{ref}$ . Maintenant que l'on dispose du modèle de référence, il est alors possible de déterminer le plus grand intervalle de contrôleurs robustes  $\mathbf{F}_{\mathcal{RO}+} = [\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{RO}+}, \bar{\mathbf{F}}_{\mathcal{RO}+}]$  tel que  $(\mathbf{H}\mathbf{F}_{\mathcal{RO}+})^* \mathbf{H} \preceq \mathbf{G}_{ref}$ . D'après la proposition 4.30, cet intervalle de contrôleurs robustes est donné par

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\mathcal{RO}+} &= \left( \left[ \underline{f}_{\mathcal{RO}+11}, \bar{f}_{\mathcal{RO}+11} \right] \left[ \underline{f}_{\mathcal{RO}+21}, \bar{f}_{\mathcal{RO}+21} \right] \right) = [\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{RO}+}, \bar{\mathbf{F}}_{\mathcal{RO}+}] = \text{Pr}_+ \left( \mathbf{H} \setminus \bar{\mathbf{G}}_{ref} \setminus \bar{\mathbf{H}} \right) \\ &= \text{Pr}_+ \left( [\underline{\mathbf{H}} \setminus \underline{\mathbf{G}}_{ref} \setminus \underline{\mathbf{H}} \wedge \bar{\mathbf{H}} \setminus \bar{\mathbf{G}}_{ref} \setminus \bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{H}} \setminus \bar{\mathbf{G}}_{ref} \setminus \bar{\mathbf{H}}] \right). \end{aligned}$$

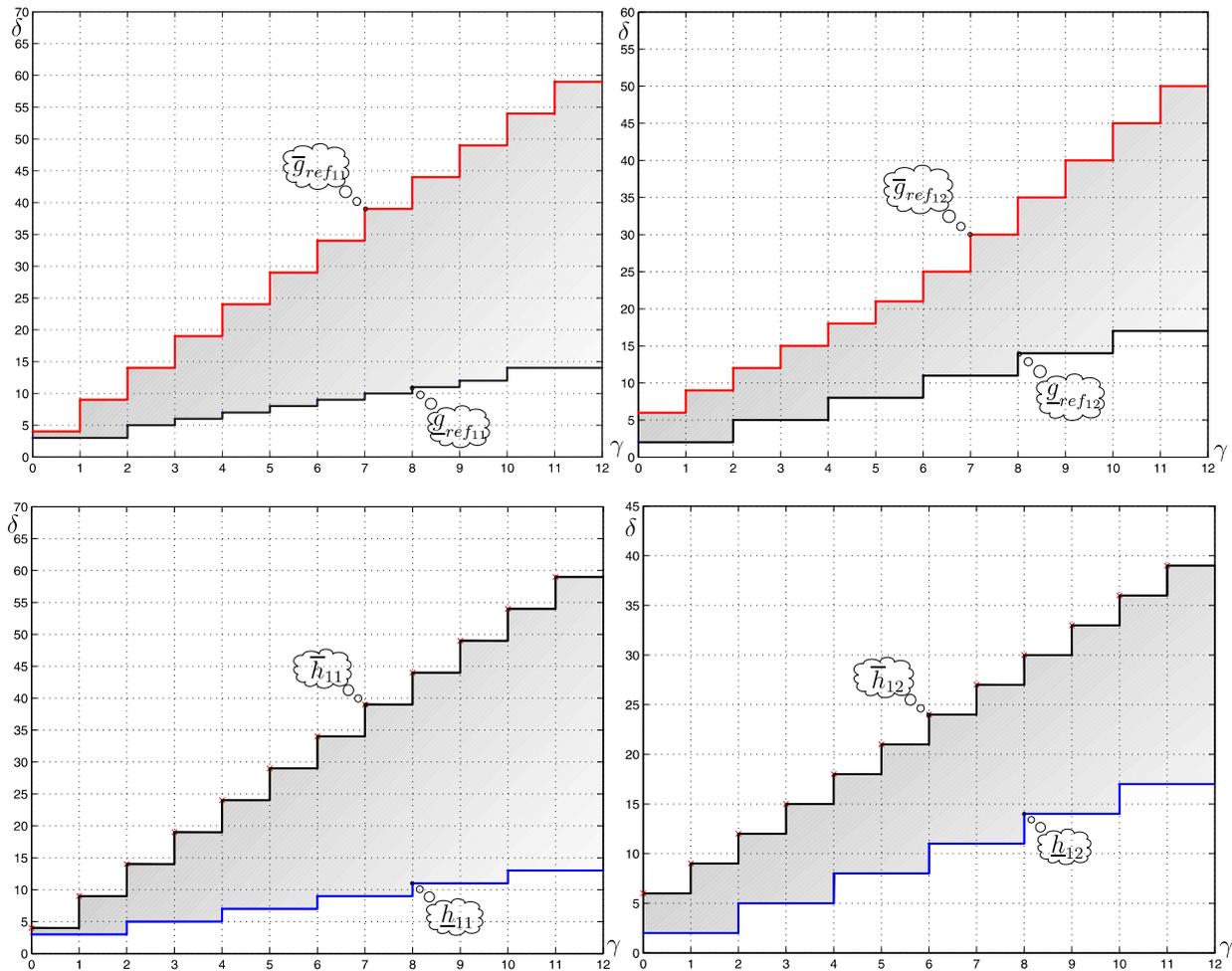


Figure 4.5 – Représentation de  $\mathbf{G}_{ref} = [\underline{\mathbf{G}}_{ref}, \bar{\mathbf{G}}_{ref}] = [(\underline{g}_{ref11} \ \underline{g}_{ref12}), (\bar{g}_{ref11} \ \bar{g}_{ref12})]$  et  $\mathbf{H} = [\underline{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{H}}] = [(h_{11} \ h_{12}), (\bar{h}_{11} \ \bar{h}_{12})]$ .

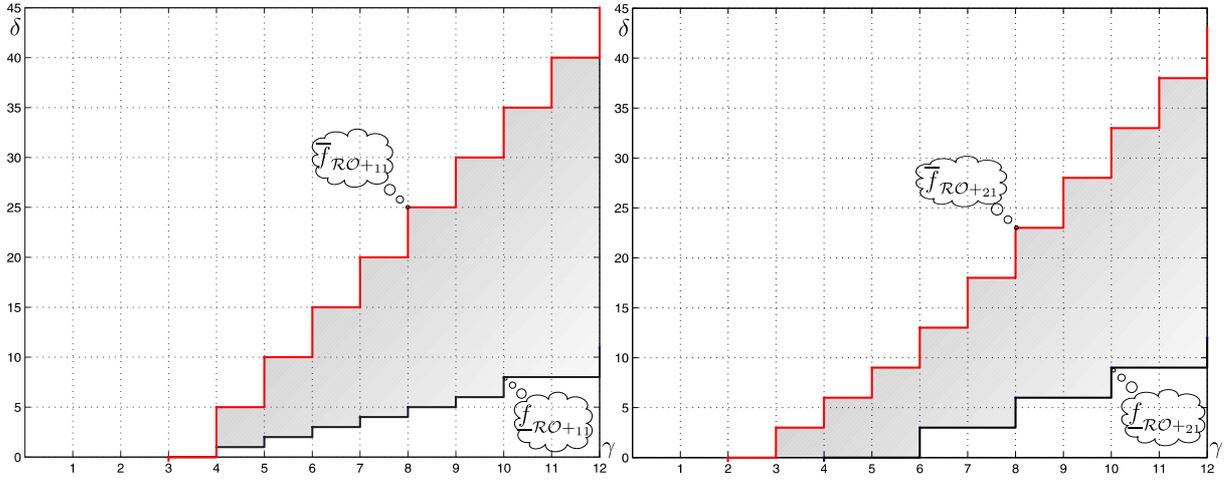


Figure 4.6 – Représentation de l'intervalle de contrôleurs robustes  $\mathbf{F}_{\mathcal{R}O+} = [\underline{\mathbf{F}}_{\mathcal{R}O+}, \overline{\mathbf{F}}_{\mathcal{R}O+}] = [(\underline{f}_{\mathcal{R}O+11}, \underline{f}_{\mathcal{R}O+21})^t, (\overline{f}_{\mathcal{R}O+11}, \overline{f}_{\mathcal{R}O+21})^t]$ .

Après calcul, nous obtenons les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{f}_{\mathcal{R}O+11}, \overline{f}_{\mathcal{R}O+11} \\ \underline{f}_{\mathcal{R}O+21}, \overline{f}_{\mathcal{R}O+21} \end{bmatrix} &= [\gamma^3 \oplus \gamma^4 \delta \oplus \gamma^5 \delta^2 \oplus \gamma^6 \delta^3 \oplus \gamma^7 \delta^4 \oplus \gamma^8 \delta^5 \oplus \gamma^9 \delta^6 \oplus \gamma^{10} \delta^8 (\gamma^2 \delta^3)^* , \gamma^3 (\gamma \delta^5)^*] \\ &= [\gamma^4 (\gamma^2 \delta^3)^* , \gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^9 \oplus \gamma^6 \delta^{13} (\gamma \delta^5)^*]. \end{aligned}$$

La figure 4.6 donne une représentation de l'intervalle  $\mathbf{F}_{\mathcal{R}O+}$  contenant l'ensemble des contrôleurs robustes. On peut faire plusieurs remarques concernant cet intervalle de contrôleurs robustes. Tout d'abord, comme  $\mathbf{G}_{ref} \in \text{Im}M_{\mathbf{H}}$ , d'après le corollaire 4.32, l'intervalle  $\mathbf{F}_{\mathcal{R}O+}$  est le plus grand tel que

$$(\mathbf{H}\mathbf{F}_{\mathcal{R}O+})^* \mathbf{H} = \mathbf{G}_{ref}.$$

D'autre part, il faut rappeler que l'objectif de commande robuste est de caractériser l'ensemble suivant :

$$\mathcal{F} = \{F \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{p \times q} \mid (\mathbf{H}F)^* \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_{ref}\},$$

c'est-à-dire de chercher l'ensemble des contrôleurs de type retour de sortie tel que l'ensemble des systèmes en boucle fermée soit inclus dans l'ensemble des modèles de référence. Or, d'après le corollaire 4.33, comme  $\mathbf{G}_{ref} \in \text{Im}M_{\mathbf{H}}$  on a

$$\mathbf{F}_{\mathcal{R}O+} \subset \mathcal{F}.$$

Par conséquent, l'objectif de commande robuste est atteint, puisque

$$\forall F \in \mathbf{F}_{\mathcal{R}O+} \quad , \quad (\mathbf{H}F)^* \mathbf{H} \subset \mathbf{G}_{ref}.$$

Donc, tous les correcteurs  $F \in \mathbf{F}_{\mathcal{R}O+}$  réalisent l'objectif de commande. C'est-à-dire que tous les contrôleurs  $F \in \mathbf{F}_{\mathcal{R}O+}$  stabilisent le GET incertain malgré les possibles variations (du nombre de jetons et/ou de la durée des temporisations) du GET dans les intervalles définis lors de la modélisation, tout en gardant le taux de production dans l'intervalle  $[\frac{1}{5}, \frac{2}{3}]$ .

## 4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons effectué la synthèse de correcteurs robustes aux incertitudes paramétriques. Ce problème de commande peut être vu comme une extension des résultats présentés dans la troisième partie de ce mémoire.

Le problème de commande robuste pour les systèmes  $(\max, +)$ -linéaires est appréhendé avec le formalisme de l'analyse par intervalles dans les dioïdes. La formulation par intervalles permet de caractériser de façon rigoureuse les incertitudes de ces systèmes. Pour un graphe d'événements temporisé, les incertitudes concernent le nombre de jetons et/ou la durée des temporisations. La caractérisation de ces incertitudes au moyen d'intervalles sur un dioïde conduit également à borner les comportements entrée-sortie possibles d'un GET incertain. A la différence des approches ponctuelles, l'ensemble de correcteurs solution tient compte de toute l'information qui était contenue dans le problème de départ et qui était susceptible de nous intéresser.

Le chapitre suivant s'intéresse à la commande de systèmes  $(\max, +)$ -linéaires en présence de perturbations sur les états. Ce problème de commande comporte certaines analogies avec le très classique problème du rejet de perturbations de la théorie des systèmes continus, où l'objectif est la synthèse d'une loi de commande telle que la perturbation n'affecte pas la sortie du système.

## Commande de systèmes (max, +)-linéaires en présence de perturbations

### 5.1 Introduction

En théorie des systèmes linéaires, le problème du rejet de perturbations consiste à trouver (si possible) une commande telle que la sortie du système soit indépendante de la perturbation. Ce problème a pu être mieux appréhendé grâce au développement de la théorie géométrique des systèmes multivariables. Dans ce contexte, le problème consiste à rechercher une commande capable de maintenir l'état du système dans le noyau de la matrice de sortie. En théorie des systèmes, ce problème a été résolu par Wonham et Morse [Wonham and Morse, 1970, Wonham, 1985] en utilisant les notions de sous-espace  $(A, B)$ -invariant et de sous-espace de commandabilité, dans le cas de la synthèse de commande par retour d'état.

Ce chapitre s'intéresse au problème analogue dans le contexte des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires. Nous allons proposer la synthèse de lois de commande lorsque des entrées non maîtrisables (des perturbations) agissent sur le système. L'objectif de la synthèse sera de maintenir l'état du système dans le noyau de la matrice de sortie. Bien que l'énoncé du problème soit analogue à celui des systèmes linéaires classiques, la solution ne conduit pas à annuler l'influence de la perturbation sur la sortie. En effet, le noyau d'une application définie sur des ensembles ordonnés ne correspond pas à un sous-espace ayant une image nulle mais à un ensemble de classes d'équivalences. Chacune de ces classes d'équivalences regroupe l'ensemble des éléments ayant la même image.

Par conséquent, la commande recherchée sera une commande visant à maintenir l'état dans la classe d'équivalence générée par la trajectoire de la perturbation. Plus précisément nous chercherons la plus grande des commandes respectant ce critère, il s'agira donc de la commande optimale (dans le sens du juste-à-temps) telle que la sortie soit inchangée au regard de celle générée par la perturbation.

Pour un graphe d'événements temporisé, le problème de commande en présence de perturbations consiste à retarder au plus le tir des transitions d'entrée contrôlables, tout en poursuivant la trajectoire de sortie due aux transitions non contrôlables. En effet, il est possible de retarder l'entrée des jetons qui se retrouveraient inutilement bloqués à l'intérieur du graphe du fait des perturbations, sans retarder davantage le tir des transitions de sortie.

Rappelons que depuis 1996 l'équipe  $(\max, +)$  de l'INRIA forge les outils nécessaires à l'élaboration d'une théorie géométrique des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires (voir § 1.12,1.13) [Cohen et al., 1996,

Cohen et al., 1997]. Ces outils ont largement contribué à la présentation et à la résolution des problèmes de commande présentés ici.

Ce chapitre est composé comme suit.

Dans un premier temps nous proposons les définitions d'ensembles  $A$ -invariants et  $(A, B)$ -invariants dans les dioïdes. Nous montrons notamment qu'il est possible de caractériser le plus grand idéal principal  $A$ -invariant, noté  $\mathcal{V}^*$ , inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ . Ce résultat est assez proche de celui proposé par Ines Klimann [Klimann, 2003] dans le contexte de la théorie des langages.

Nous montrons également qu'il existe un plus grand correcteur de type retour d'état tel que le plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$ , noté  $\hat{\mathcal{V}}$ , soit égal à  $\mathcal{V}^*$ .

Dans le paragraphe 5.3, nous appliquons ces résultats au problème de synthèse de commande en présence de perturbations. Nous considérons successivement le problème de la synthèse de correcteurs de type retour d'état puis de type retour de sortie.

Dans le cas des correcteurs de type retour d'état, nous verrons que deux correcteurs peuvent être considérés. Le premier est le plus grand qui assure  $\mathcal{V}^* = \hat{\mathcal{V}}$ . Nous montrons naturellement que ce correcteur satisfait l'objectif qui est de maintenir l'état dans le noyau de la matrice de sortie. Le second correcteur est le plus grand laissant les trajectoires du vecteur d'état inchangées (par conséquent il maintient le vecteur d'état dans la même classe d'équivalence que celle générée par la trajectoire des entrées non maîtrisables), ce correcteur se révèle réellement neutre vis-à-vis du comportement interne du système.

Dans le cas du correcteur de type retour de sortie, nous verrons également la synthèse de deux correcteurs. Le premier est le plus grand préservant l'état dans le noyau de la matrice de sortie. Le second, plus petit, permet de maintenir l'état inchangé.

Finalement nous traiterons un exemple illustrant l'intérêt de notre approche.

Les premiers éléments de cette étude ont été publiés dans [Lhommeau et al., 2002b, Lhommeau et al., 2002a] pour la commande en boucle fermée et dans [Lhommeau et al., 2003a] pour la commande en boucle ouverte.

## 5.2 Notations et préliminaires algébriques

Soit un système  $(\max, +)$ -linéaire

$$x = Ax \oplus Bu \tag{5.1}$$

où  $x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  est le vecteur d'état et  $u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^p$  le vecteur des entrées. Les applications

$$A : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \quad \text{et} \quad B : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^p \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$$

sont représentées par leurs matrices (avec  $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$  et  $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times p}$ ).

Nous allons nous intéresser aux possibilités qu'offre la commande  $u$  pour que la trajectoire résultant du système (5.1) reste à l'intérieur d'un sous-ensemble donné de l'ensemble de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ .

### 5.2.1 Les sous-ensembles $A$ -invariants

**Définition 5.1.** Soit  $\mathcal{N}$  un sous-ensemble de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ . L'ensemble image de  $\mathcal{N}$  par l'application  $A : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ , noté  $A\mathcal{N}$ , est donné par

$$\begin{aligned} A\mathcal{N} &= \{x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid \exists n \in \mathcal{N}, An = x\} \\ &= \{An \mid n \in \mathcal{N}\}. \end{aligned}$$

En considérant une commande  $u = \varepsilon$  dans le système (5.1), il est possible de définir la notion d'ensemble  $A$ -invariant.

**Définition 5.2 (A-invariant).** Soit  $A : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  une application définie sur un dioïde. L'ensemble  $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  est dit  $A$ -invariant si  $A\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ .

En d'autres termes,  $\mathcal{N}$  est un ensemble  $A$ -invariant du système (5.1) si toute trajectoire issue de  $\mathcal{N}$  reste dans  $\mathcal{N}$ , c'est-à-dire pour tout  $x \in \mathcal{N}$ ,  $Ax \in \mathcal{N}$  et par extension  $A^*x \in \mathcal{N}$ .

**Définition 5.3.** Soit  $\hat{k} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ , nous définissons par

$$\mathcal{K} = \{x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq \hat{k}\},$$

l'idéal principal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  (voir définition 1.24) généré par l'élément  $\hat{k}$ ; clairement  $\sup \mathcal{K} = \hat{k}$ .

**Notation 5.4.** L'ensemble des idéaux principaux de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  sera noté  $\mathcal{S}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n)$ .

**Notation 5.5.** Nous noterons par  $\mathcal{I}(A, \mathcal{K})$ , l'ensemble des idéaux principaux  $A$ -invariants inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ , c'est-à-dire

$$\mathcal{I}(A, \mathcal{K}) = \{\mathcal{V} \in \mathcal{S}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n) \mid A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{K}\}.$$

**Remarque 5.6.** L'ensemble des idéaux principaux  $A$ -invariants,  $\mathcal{I}(A, \mathcal{K})$ , n'est jamais vide. En effet, le plus petit élément du dioïde  $\varepsilon$  engendre l'idéal principal  $\{\varepsilon\}$ , de plus l'élément  $\varepsilon$  est  $A$ -invariant, puisque  $A\varepsilon = \varepsilon$ .

**Proposition 5.7.** Les ensembles ordonnés  $(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n, \preceq)$  et  $(\mathcal{S}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n), \subset)$  sont isomorphes (voir remarque 1.6).

*Démonstration.* La définition d'un idéal (définition 1.24) donne

$$\begin{aligned} \forall a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n, a \preceq b \Rightarrow \mathcal{V}_a = \{x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq a\} \subset \mathcal{V}_b = \{x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq b\}, \\ \forall \mathcal{V}_a, \mathcal{V}_b \in \mathcal{S}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n), \mathcal{V}_a \subset \mathcal{V}_b \Rightarrow \sup \mathcal{V}_a = a \preceq \sup \mathcal{V}_b = b. \end{aligned}$$

□

Nous nous intéressons à présent à la caractérisation du plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$  donné. Pour cela considérons le lemme et la proposition qui suivent.

**Lemme 5.8.** Le système d'équations suivant

$$\begin{cases} Ax \preceq x \\ x \preceq \hat{k} \end{cases} \quad (5.2)$$

admet  $\hat{x} = A^* \hat{k}$  comme plus grande solution.

*Démonstration.* D'une part, l'application  $L_A : x \mapsto Ax$  est résiduable (§1.11), par conséquent le système (5.2) s'écrit aussi

$$\begin{cases} x \preceq A \bowtie x \\ x \preceq \hat{k} \end{cases} \quad (5.3)$$

D'autre part, par définition de la borne inférieure (définition 1.87), résoudre le système (5.3) est équivalent à chercher la plus grande solution de l'inéquation

$$x \preceq A \bowtie x \wedge \hat{k}.$$

Finalement, le corollaire 1.120, donne  $\hat{x} = A^* \bowtie \hat{k}$ .  $\square$

**Proposition 5.9.** *Soit  $\mathcal{K}$  un idéal principal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  généré par l'élément  $\hat{k}$ . Alors, le  $\sup \mathcal{I}(A, \mathcal{K})$ , noté  $\mathcal{V}^*$  (le plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$ ) est donné par*

$$\sup \mathcal{I}(A, \mathcal{K}) = \mathcal{V}^* = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq A^* \bowtie \hat{k} \right\}.$$

*Démonstration.* D'une part, d'après la définition 5.3,  $\mathcal{K}$  est défini par  $\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq \hat{k} \right\}$ . D'autre part, compte tenu de l'isomorphisme entre  $(\mathcal{S}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n), \subset)$  et  $(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n, \preceq)$  (lemme 5.7), chercher la borne supérieure de l'ensemble  $\mathcal{I}(A, \mathcal{K})$ , revient à chercher le plus grand  $v$  tel que  $Av \preceq v \preceq \hat{k}$ . Le lemme 5.8 donne directement  $\hat{v} = A^* \bowtie \hat{k}$  comme plus grande solution. Par conséquent l'idéal principal généré par l'élément  $\hat{v}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{V}^* = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq \hat{v} = A^* \bowtie \hat{k} \right\}$ , correspond au plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$ .  $\square$

## 5.2.2 Les sous-ensembles $(A, B)$ -invariants

**Définition 5.10.** Un sous-ensemble non vide  $\mathcal{N}$  est dit  $(A, B)$ -invariant par rapport au système (5.1) si  $\forall x \in \mathcal{N}$  il existe une commande  $u$  telle que  $Ax \oplus Bu = x \in \mathcal{N}$ .

Autrement dit, si  $\mathcal{N}$  est  $(A, B)$ -invariant, il est possible de maintenir l'état du système dans l'ensemble  $\mathcal{N}$  à l'aide d'une commande adéquate.

**Exemple 5.11.** *Le sous-ensemble  $\{\varepsilon\} \subset \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  est  $(A, B)$ -invariant puisqu'il suffit de prendre  $x = \varepsilon$  et  $u = \varepsilon$ .*

**Proposition 5.12.** *Tout sous-ensemble  $A$ -invariant est  $(A, B)$ -invariant.*

*Démonstration.* D'après la définition 5.2 d'un  $A$ -invariant, il suffit de prendre  $u = \varepsilon$ .  $\square$

Nous allons maintenant préciser le lien entre la notion d' $(A, B)$ -invariance et les bouclages (retour de sortie/retour d'état).

**Définition 5.13.** Un sous-ensemble non vide  $\mathcal{N}$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  est dit  $(A \oplus BF)$ -invariant par rapport au système (5.1) s'il existe une application  $F : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^p$  telle que  $(A \oplus BF)\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$ .

En d'autres termes, dire que l'ensemble  $\mathcal{N}$  est  $(A \oplus BF)$ -invariant pour le système (5.1) revient à dire que pour tout état  $x \in \mathcal{N}$  il existe une commande en boucle fermée de type retour d'état  $u = Fx$  telle que l'état résultant  $(A \oplus BF)x$  appartient toujours à  $\mathcal{N}$ .

Nous cherchons à présent à caractériser le plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant qui soit inclus dans un idéal principal.

**Proposition 5.14.** *L'ensemble des idéaux principaux  $(A \oplus BF)$ -invariants inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$  possède un plus grand élément pour la relation d'inclusion, défini par*

$$\hat{\mathcal{V}} = \sup \mathcal{I}((A \oplus BF), \mathcal{K}) = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq (A \oplus BF)^* \mathfrak{q} \hat{k} \right\}.$$

*Démonstration.* En posant  $\hat{A} = (A \oplus BF)$ , chercher le plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$  est équivalent à déterminer le plus grand  $\hat{A}$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$ , soit  $\hat{A}\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ . La proposition 5.9 donne  $\hat{\mathcal{V}} = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq \hat{A}^* \mathfrak{q} \hat{k} = (A \oplus BF)^* \mathfrak{q} \hat{k} \right\}$ .  $\square$

**Propriétés 5.15.** *Soient  $\mathcal{K}$  un idéal principal de  $\mathcal{S}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n)$ ,  $\mathcal{V}^*$  le plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$  et  $\hat{\mathcal{V}}$  le plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$ . Ils vérifient*

$$\hat{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}^* \subset \mathcal{K}.$$

*Démonstration.* Rappelons que par définition  $A^* \succeq e$  (puisque  $A^* = e \oplus A^+$ ) et  $(A \oplus BF)^* \succeq A^*$ . L'antitonicité de l'application  $x \mapsto x \mathfrak{q} a$  implique

$$(A \oplus BF)^* \mathfrak{q} \hat{k} \preceq A^* \mathfrak{q} \hat{k} \preceq \hat{k}.$$

Finalement  $(\mathcal{S}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n), \subset)$  et  $(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n, \preceq)$  étant isomorphes, on a

$$(A \oplus BF)^* \mathfrak{q} \hat{k} \preceq A^* \mathfrak{q} \hat{k} \preceq \hat{k} \iff \hat{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}^* \subset \mathcal{K}.$$

$\square$

En regroupant les résultats précédents, nous pouvons énoncer :

**Proposition 5.16.** *Soit  $\mathcal{K}$  un idéal principal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ , les propriétés suivantes sont équivalentes*

- (i)  $\mathcal{K}$  est  $A$ -invariant.
- (ii) Il existe un correcteur de type retour d'état  $u = Fx$ , tel que  $\mathcal{K}$  soit  $(A \oplus BF)$ -invariant.

*Démonstration.*

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Supposons que  $\mathcal{K}$  soit  $A$ -invariant, c'est-à-dire  $A\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ , alors, il existe toujours un correcteur retour d'état  $F$  tel que  $(A \oplus BF)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ , en effet il suffit de prendre  $F = \varepsilon$ .
- (ii)  $\Rightarrow$  (i) Soit  $F$  un correcteur de type retour d'état tel que  $(A \oplus BF)\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ , alors on a  $A\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$  et  $BF\mathcal{K} \subset \mathcal{K}$ . Par conséquent si  $\mathcal{K}$  est  $(A \oplus BF)$ -invariant, il est également  $A$ -invariant.

$\square$

**Proposition 5.17.** *Soit  $\mathcal{K}$  un idéal principal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  généré par un élément  $\hat{k}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq \hat{k} \right\}$ . Le plus grand correcteur  $F$  de type retour d'état tel que  $\hat{\mathcal{V}} = \mathcal{V}^*$  est donné par*

$$\hat{F} = B \mathfrak{q} (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \mathfrak{q} (A^* \mathfrak{q} \hat{k}).$$

*Démonstration.*

- Montrons que  $\hat{F} = B \mathfrak{q} (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \mathfrak{q} (A^* \mathfrak{q} \hat{k})$  est le plus grand correcteur tel que  $\mathcal{V}^* \subset \hat{\mathcal{V}}$ . Tout d'abord, d'après (1.38) et (f.6),

$$\mathcal{V}^* \subset \hat{\mathcal{V}} \iff (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \preceq (A \oplus BF)^* \mathfrak{q} \hat{k} = (A^*(A \oplus BF)^*) \mathfrak{q} \hat{k} = (A \oplus BF)^* \mathfrak{q} (A^* \mathfrak{q} \hat{k}).$$

En considérant les résultats sur les correspondances de Galois de la section 3.2 (voir aussi remarque 3.4), nous avons

$$(A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \preceq (A \oplus BF)^* \mathfrak{q} (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \iff (A \oplus BF)^* \preceq (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \phi (A^* \mathfrak{q} \hat{k}).$$

Notons que  $(A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \phi (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) = \left( (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \phi (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \right)^*$  (voir théorème 1.126) et rappelons que (cf. chapitre 1, remarque 1.103)  $x^* \preceq a^*$  admet  $x = a^*$  comme plus grande solution. Par conséquent

$$(A \oplus BF)^* \preceq (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \phi (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \iff A \oplus BF \preceq (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \phi (A^* \mathfrak{q} \hat{k}).$$

De plus, comme  $A^* \mathfrak{q} \hat{k}$  est la borne supérieure du plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$ , on a  $A \mathcal{V}^* \preceq \mathcal{V}^* \iff A(A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \preceq (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \iff A \preceq (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \phi (A^* \mathfrak{q} \hat{k})$ . Par conséquent

$$A \oplus BF \preceq (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \phi (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \iff BF \preceq (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \phi (A^* \mathfrak{q} \hat{k}),$$

finaleme

$$F \preceq B \mathfrak{q} (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) \phi (A^* \mathfrak{q} \hat{k}) = \hat{F}.$$

- Montrons que  $\hat{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}^*$ . La propriété 5.15 a montré que pour tout  $F$ ,  $\hat{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}^*$ .

Par conséquent  $\hat{F}$  est le plus grand correcteur tel que  $\hat{\mathcal{V}} = \mathcal{V}^*$ . □

**Remarque 5.18.** La proposition précédente montre que le correcteur  $\hat{F}$  est le plus grand correcteur tel que  $\hat{\mathcal{V}} = \sup \mathcal{I}((A \oplus BF), \mathcal{K})$ , le plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant, soit égal à  $\mathcal{V}^* = \sup \mathcal{I}(A, \mathcal{K})$ , plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans l'idéal principal  $\mathcal{K}$ .

## 5.3 Commande en présence de perturbations

### 5.3.1 Commande en boucle ouverte

Considérons la représentation (max, +)-linéaire suivante :

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu \oplus Sq \\ y = Cx \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  est le vecteur d'état,  $u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^p$  le vecteur des entrées,  $y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^r$  le vecteur des sorties et  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$  le vecteur des perturbations. Les applications

$$\begin{aligned} A : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n &\rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n, & B : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^p &\rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n, \\ C : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n &\rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^r & \text{et} & S : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m &\rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \end{aligned}$$

sont représentées par leurs matrices (où  $A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n}$ ,  $B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times p}$ ,  $C \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{r \times n}$  et  $S \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times m}$ ).

Le vecteur  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$  regroupe des entrées exogènes non maîtrisables. Les trajectoires que décrivent les composantes de ce vecteur ont pour effet de ralentir le franchissement des transitions sur lesquelles elles agissent.

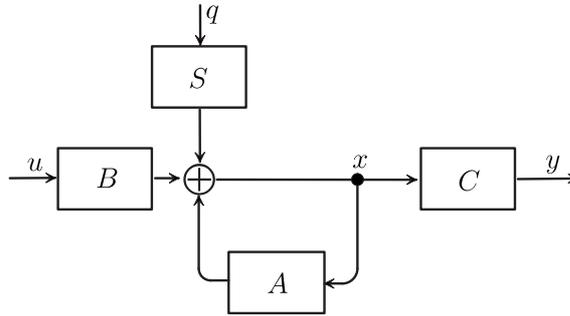


Figure 5.1 – Représentation du système en boucle ouverte (5.4).

En théorie des systèmes le problème du rejet de perturbations s'énonce comme suit. Existe-t-il une commande  $u$  pour le système (5.4) telle que la perturbation  $q$  n'affecte pas la sortie  $y$ . Autrement dit, le rejet de perturbations est effectif si  $y = 0$  pour toute perturbation  $q \in \mathcal{Q}$ , c'est-à-dire que la commande maintient l'état du système  $x$  dans le noyau de l'application  $C$  (noté  $\ker C$ ).

Dans le contexte des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires, l'annulation de la sortie ne peut être considérée comme objectif puisque les trajectoires  $u, x, y$  et  $q$  sont par nature non décroissantes.

Néanmoins la définition du noyau dans un dioïde (définition 1.104) préserve un sens à l'objectif de maintien de l'état dans le noyau de l'application  $C$ . En effet, la définition 1.104 précise que le noyau d'une application définie sur des dioïdes ne correspond pas à un sous-espace du domaine de l'application conduisant à une image nulle, mais correspond à une décomposition du domaine de l'application en classes d'équivalences conduisant à une même image.

Par conséquent, dans le cas de systèmes  $(\max, +)$ -linéaires, il s'agit de déterminer une commande  $u$  qui maintient l'état  $x$  dans la classe d'équivalence engendrée par  $q$ . Autrement dit, il s'agit d'établir une commande qui ne modifie pas la sortie due à la perturbation  $q$ . Dans l'ensemble des commandes qui permettent d'atteindre cet objectif, nous allons chercher la plus grande, c'est-à-dire celle qui satisfait le critère de juste-à-temps.

Formellement le problème énoncé précédemment peut s'établir de la manière suivante. Soit la plus petite solution de l'équation d'état du système (5.4) :

$$x = A^*Bu \oplus A^*Sq \quad (5.5)$$

conduisant à la sortie

$$y = CA^*Bu \oplus CA^*Sq.$$

Nous cherchons donc la plus grande commande  $u$  qui maintient l'état  $x$  dans la classe d'équivalence de  $A^*Sq$  modulo  $\ker C$  (notée aussi  $[A^*Sq]_C$ , voir notation 1.106). C'est-à-dire, qu'il faut déterminer une commande  $u$  telle que

$$A^*Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} x.$$

Soit l'expression de  $x$  donnée par (5.5), on a

$$A^*Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*Bu \oplus A^*Sq.$$

En considérant la définition du noyau d'une application (voir définition 1.104) définie sur des dioïdes, nous avons les équivalences suivantes

$$A^*Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} x \iff A^*Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*Bu \oplus A^*Sq \iff CA^*Sq = CA^*Bu \oplus CA^*Sq. \quad (5.6)$$

La dernière équivalence montre que l'objectif est assuré si et seulement si  $CA^*Sq \succeq CA^*Bu$ . Dans l'ensemble des commandes vérifiant l'équivalence (5.6), nous cherchons la plus grande (notée  $u_{opt}$ ), c'est-à-dire

$$u_{opt} = \sup \left\{ u \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^p \mid A^*Bu \oplus A^*Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*Sq \right\}. \quad (5.7)$$

En considérant le lemme 1.112, le plus grand élément de la classe d'équivalence  $[A^*Sq]_C$  est donné par

$$\Pi^C(A^*Sq) = C^\# \circ C(A^*Sq).$$

Cependant, ce plus grand élément de la classe  $[A^*Sq]_C$  n'est pas toujours commandable, c'est-à-dire qu'il n'existe pas toujours de commande  $u$  permettant de l'atteindre. Il faut pas conséquent considérer la projection de  $\Pi^C(A^*Sq)$  dans  $\text{Im}A^*B$  (voir proposition 1.115), définie par

$$\xi = \Pi_{A^*B} \circ \Pi^C(A^*Sq) = A^*B \circ (A^*B)^\# \circ C^\# \circ C(A^*Sq).$$

L'élément  $\xi$  correspond au plus grand état dans  $\text{Im}A^*B$  qui soit sous-équivalent au plus grand élément de la classe  $[A^*Sq]_C$ . Autrement dit, l'élément  $\xi$  est tel que  $C(\xi) \preceq C(A^*Sq)$ .

La commande optimale  $u_{opt}$  permettant d'atteindre ce plus grand état commandable, connaissant  $q$ , est

$$u_{opt} = (A^*B)^\# \circ C^\# \circ C(A^*Sq) = (CA^*B) \setminus (CA^*Sq). \quad (5.8)$$

**Remarque 5.19.** *Remarquons que si l'égalité*

$$C \circ \Pi_{A^*B} \circ \Pi^C = C \quad (5.9)$$

*est vérifiée, alors en accord avec le paragraphe 1.13.3, le projecteur  $\Pi_{A^*B}^C = \Pi_{A^*B} \circ \Pi^C$  existe. Cela signifie que  $\xi = \Pi_{A^*B}^C(x)$  est dans la même classe d'équivalence que  $x$  modulo  $\ker C$  ou autrement dit que  $\text{Im}A^*B$  rencontre toutes les classes d'équivalence de  $\ker C$ . En d'autres termes, on dira que le système est commandable puisque toutes les sorties peuvent être atteintes par une commande ad-hoc, c'est-à-dire que l'application  $H : u \rightarrow y = CA^*Bu$  est surjective. Par ailleurs, si ce projecteur existe et si l'égalité*

$$\Pi_{A^*B}^C \circ A^*B = A^*B \quad (5.10)$$

*est vérifiée, alors tous les  $x \in \text{Im}A^*B$  restent invariants par  $\Pi_{A^*B}^C$ , en d'autres termes, cela traduit le fait que  $\text{Im}A^*B$  intersecte les classes d'équivalence de  $\ker C$  au plus en un point ; le système est donc observable puisque  $\text{Im}B \cap [x]_C$  est un singleton. En outre, si les égalités (5.9) et (5.10) sont toutes les deux vérifiées (existence et unicité du projecteur  $\Pi_{A^*B}^C$ ), alors  $\Pi_{A^*B}^C(x)$  correspond à la projection de  $x$  dans l'image de  $A^*B$  parallèlement au noyau de  $C$ .*

**Remarque 5.20.** *Notons que le système (5.4) peut représenter un graphe d'événements temporisé, où  $u$  représente les transitions d'entrée,  $x$  les états internes du GET,  $y$  représente les transitions de sortie et  $q$  représente des transitions incontrôlables<sup>1</sup> ayant pour effet de ralentir le franchissement des transitions sur lesquelles elles agissent. Dans ce contexte, il y a une accumulation inutile de jetons dans les places se trouvant en amont des transitions perturbées. L'objectif est donc de retarder le plus possible le tir des transitions d'entrée en prenant en compte l'évolution de la perturbation. La commande  $u_{opt}$  (5.8) correspond à cette plus grande commande lorsque des perturbations agissent sur le système.*

<sup>1</sup>dans un contexte manufacturier ces entrées peuvent représenter des arrêts machines dus à des pannes ou des ruptures d'approvisionnement

### 5.3.2 Commande en boucle fermée

#### 5.3.2.1 Correcteur de type retour d'état

Dans cette partie nous allons étudier une loi de commande en boucle fermée de type retour d'état. C'est-à-dire une loi de commande de la forme

$$u = Fx \quad (\text{où } F \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times n}).$$

Sous l'action de cette loi de commande, l'équation d'état

$$x = Ax \oplus Bu \oplus Sq \quad (5.11)$$

devient

$$x = (A \oplus BF)x \oplus Sq. \quad (5.12)$$

En considérant le corollaire 1.118, nous avons

$$\begin{aligned} x &= (A \oplus BF)^* Sq \\ &= (A^* BF)^* A^* Sq \quad (\text{par (1.38)}) \end{aligned}$$

où  $(A \oplus BF)^* S$  représente la matrice de transfert liant la perturbation  $q$  à l'état  $x$ . L'équation de sortie est alors donnée par

$$y = C(A \oplus BF)^* Sq.$$

Le système (5.4) muni du correcteur  $F$  est représenté sur la figure 5.2.

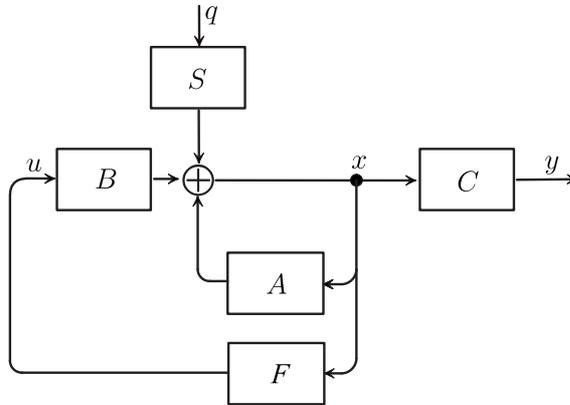


Figure 5.2 – Schéma de la commande en boucle fermée (retour d'état).

L'objectif du correcteur  $F$  est de prélever des informations sur l'action de la perturbation au niveau du vecteur d'état afin d'en tenir compte au moment de l'élaboration de la commande  $u = Fx$ .

Le correcteur recherché ne devra pas modifier le comportement de la sortie. Dans le contexte des GET, il s'agit d'un correcteur qui génère une commande qui retarde l'entrée des jetons sans modifier la trajectoire de sortie, ou, autrement dit, qui retarde sans altérer les performances du système. Il ne fait qu'éviter l'entrée prématurée de jetons.

Formellement il s'agit donc de maintenir le vecteur d'état dans la classe d'équivalence générée par la perturbation modulo  $\ker C$ .

Deux correcteurs atteignant cet objectif sont présentés :

- Le premier génère un vecteur d'état supérieur à celui obtenu en l'absence de correcteurs bien que n'altérant pas la sortie. Dans le contexte des graphes d'événements temporisés, cela signifie que le tir des transitions internes sera plus tardif sous l'action du correcteur bien que le tir des transitions de sortie soit identique à celui obtenu en l'absence de correcteur.
- Le second vise à maintenir l'état du système inchangé. Ce correcteur est neutre vis-à-vis du comportement interne du graphe d'événements temporisé mais le tir des transitions d'entrée est plus tardif.

Notons tout d'abord qu'en considérant une commande  $u = \varepsilon$  dans l'équation (5.11) nous obtenons l'état  $x = A^*Sq$ . L'objectif est donc d'obtenir un correcteur  $F$  tel que le vecteur d'état résultant soit dans la classe d'équivalence de  $A^*Sq$  modulo  $\ker C$ .

### 5.3.2.2 Correcteur de type retour d'état accroissant les trajectoires du vecteur d'état et laissant les sorties inchangées

Formellement, nous cherchons un correcteur  $F$  tel que

$$(A \oplus BF)^*Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*Sq.$$

pour toute perturbation  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^m$ .

Dans ce premier cas nous allons considérer le plus grand élément de la classe  $[A^*Sq]_C$ , c'est-à-dire le plus grand  $x \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*Sq$ . Le lemme (1.112) nous donne directement ce plus grand élément

$$\Pi^C(A^*Sq) = C^\# \circ C(A^*Sq). \quad (5.13)$$

Il génère l'idéal principal suivant

$$\mathcal{K}_1 = \{x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^n \mid x \preceq \Pi^C(A^*Sq)\}. \quad (5.14)$$

Naturellement nous avons

$$[A^*Sq]_C \subset \mathcal{K}_1. \quad (5.15)$$

Autrement dit la classe d'équivalence modulo  $\ker C$  générée par  $A^*Sq$  est incluse dans l'idéal principal  $\mathcal{K}_1$ .

**Proposition 5.21.** *Soit  $\mathcal{V}_1^*$  le plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans l'idéal principal  $\mathcal{K}_1$ . Soit  $\hat{\mathcal{V}}_1$  le plus grand idéal principal  $(A \oplus BF)$ -invariant inclus dans l'idéal principal  $\mathcal{K}_1$ . Le correcteur*

$$\hat{F}_1 = (B \setminus (A^* \setminus \Pi^C(A^*Sq))) \setminus (A^* \setminus \Pi^C(A^*Sq)) = (CA^*B \setminus CA^*Sq) \setminus (CA^* \setminus CA^*Sq)$$

*est le plus grand correcteur de type retour d'état tel que  $\mathcal{V}_1^* = \hat{\mathcal{V}}$ , c'est-à-dire tel que  $(A \oplus B\hat{F}_1)\mathcal{V}_1^* \subset \mathcal{V}_1^* \subset \mathcal{K}_1$ .*

*Démonstration.* Il s'agit d'une application directe de la proposition 5.17, en prenant  $\hat{k} = \sup \mathcal{K}_1 = \Pi^C(A^*Sq)$ .  $\square$

**Remarque 5.22.** *Cette proposition montre qu'une trajectoire  $x \in \mathcal{V}_1^*$  en absence de contrôle reste dans  $\mathcal{V}_1^*$  lorsqu'on applique la commande  $u = \hat{F}_1x$ . En outre,  $\hat{F}_1$  est le plus grand correcteur satisfaisant cette propriété. La proposition suivante montre que l'état obtenu en présence du correcteur appartient à  $[A^*Sq]_C$ .*

**Proposition 5.23.** *Le correcteur  $\hat{F}_1 = (B \setminus (A^* \setminus \Pi^C(A^*Sq))) \setminus (A^* \setminus \Pi^C(A^*Sq))$  garantit que l'état  $x = (A \oplus B\hat{F}_1)^*Sq \in [A^*Sq]_C$ .*

*Démonstration.* D'après (f.2) on a  $Sq \preceq CA^* \setminus (CA^*Sq)$ , c'est-à-dire  $Sq \in \mathcal{V}_1^*$  (d'après la proposition 5.21). En accord avec la définition 5.2, on a donc  $(A \oplus BF_1)^*Sq \in \mathcal{V}_1^*$ , c'est-à-dire que

$$(A \oplus BF_1)^*Sq \preceq CA^* \setminus (CA^*Sq) \preceq C \setminus (CA^*Sq) = \Pi^C(A^*Sq).$$

Par ailleurs  $(A \oplus BF_1)^*Sq \succeq A^*Sq$ , nous avons donc

$$A^*Sq \preceq (A \oplus BF_1)^*Sq \preceq \Pi^C(A^*Sq),$$

c'est-à-dire  $(A \oplus BF_1)^*Sq \in [A^*Sq]_C$ . □

**Remarque 5.24.** *Notons que l'état obtenu  $(A \oplus B\hat{F}_1)^*Sq$  est supérieur ou égal à celui obtenu en l'absence de contrôleur,  $A^*Sq$ .*

**Remarque 5.25.** *Pratiquement, l'objectif est d'obtenir un contrôleur  $F_1$  tel que*

$$(A \oplus BF_1)^*Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*Sq$$

pour tout  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ . C'est-à-dire que  $F_1$  doit être tel que

$$(A \oplus BF_1)^*S \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*S.$$

Ceci conduit à considérer la classe d'équivalence  $[A^*S]_C$  et son plus grand élément qui est  $\Pi^C(A^*S)$ ; on obtient alors le plus grand correcteur suivant

$$\hat{F}_1 = (B \setminus (A^* \setminus \Pi^C(A^*S))) \setminus (A^* \setminus \Pi^C(A^*S)) = (CA^*B \setminus CA^*S) \setminus (CA^* \setminus CA^*S). \quad (5.16)$$

### 5.3.2.3 Correcteur de type retour d'état laissant le vecteur d'état inchangé

Cette partie concerne l'étude d'un contrôleur de type retour d'état qui laisse le vecteur d'état inchangé par rapport à l'état généré par la perturbation  $q$ , et qui par conséquent maintient l'état  $x$  dans la classe d'équivalence engendrée par la perturbation  $q$  modulo  $\ker C$ . Nous cherchons donc un contrôleur  $F$  tel que

$$(A \oplus BF)^*Sq = A^*Sq$$

pour toute perturbation  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ .

Considérons cette fois l'idéal principal (voir définition 5.3) généré par la perturbation  $q$  suivant :

$$\mathcal{K}_2 = \{x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq A^*Sq\}. \quad (5.17)$$

**Proposition 5.26.** *Soit  $\mathcal{V}_2^*$  le plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}_2$ , alors*

$$\mathcal{V}_2^* = \mathcal{K}_2.$$

*Démonstration.* D'après la proposition 5.17,  $\mathcal{V}_2^* = \{x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq A^* \backslash A^* Sq\}$ ; considérons l'application  $L_{A^*} : x \mapsto A^* x$ , cette application est une fermeture, puisque  $L_{A^*} \circ L_{A^*} = L_{A^*}$  et  $L_{A^*} \succeq \text{Id}$ . En considérant cette application nous avons  $\text{sup } \mathcal{V}_2^* = L_{A^*}^\# \circ L_{A^*}(Sq)$  et  $\text{sup } \mathcal{K}_2 = L_{A^*}(Sq)$ . D'après la proposition 1.62,  $L_{A^*}^\# \circ L_{A^*} = L_{A^*}$  d'où le résultat

$$A^* \backslash (A^* Sq) = A^* Sq \iff \mathcal{V}_2^* = \mathcal{K}_2.$$

□

**Proposition 5.27.** *Le correcteur*

$$\hat{F}_2 = (B \backslash (A^* \backslash (A^* Sq))) \phi (A^* \backslash (A^* Sq)) = B \backslash (A^* Sq) \phi (A^* Sq),$$

*est le plus grand correcteur de type retour d'état tel que*

$$(A \oplus B \hat{F}_2) \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_2.$$

*Démonstration.* Tout d'abord la proposition 5.26 donne  $\mathcal{V}_2^* = \mathcal{K}_2$ . Ensuite, la proposition 5.17 établit que  $\hat{F}_2 = B \backslash (A^* \backslash (A^* Sq)) \phi (A^* \backslash (A^* Sq))$  est le plus grand correcteur tel que  $\hat{\mathcal{V}}_2 = \mathcal{V}_2^*$  (en prenant  $\hat{k} = \text{sup } \mathcal{K}_2 = A^* Sq$ ). De plus, comme  $A^* \backslash (A^* Sq) = A^* Sq$  (cf. preuve de la proposition 5.26), nous obtenons finalement  $B \backslash (A^* Sq) \phi (A^* Sq)$ .

□

**Proposition 5.28.** *Le correcteur  $\hat{F}_2 = B \backslash (A^* Sq) \phi (A^* Sq)$  est le plus grand correcteur qui garantit que l'état  $x = A^* Sq$  reste inchangé, c'est-à-dire*

$$A^* Sq = (A \oplus B \hat{F}_2)^* Sq.$$

*Démonstration.* D'une part, notons que  $Sq \in \mathcal{K}_2$  et d'après la proposition 5.27,  $\hat{F}_2$  est le plus grand correcteur tel que  $(A \oplus B \hat{F}_2) \mathcal{K}_2 \subset \mathcal{K}_2$ , par conséquent

$$(A \oplus B \hat{F}_2)^* Sq \in \mathcal{K}_2 \iff (A \oplus B \hat{F}_2)^* Sq \preceq A^* Sq.$$

D'autre part, comme  $(A \oplus B \hat{F}_2)^* \succeq A^*$ , on a

$$A^* Sq \preceq (A \oplus B \hat{F}_2)^* Sq \preceq A^* Sq,$$

soit  $A^* Sq = (A \oplus B \hat{F}_2)^* Sq$ .

□

**Remarque 5.29.** *Ce correcteur est celui qui fournit la plus grande commande de type  $u = \hat{F}_2 x$  telle que l'état reste identique à celui généré par la perturbation en l'absence de contrôleur. C'est-à-dire qu'il retarde autant que possible l'entrée des jetons sans modifier le tir des transitions internes. Naturellement, la sortie est inchangée, c'est-à-dire  $C A^* Sq = C (A \oplus B \hat{F}_2)^* Sq$ .*

**Remarque 5.30.** *Rappelons que l'objectif initial était d'obtenir le plus grand correcteur de type retour d'état (conservant l'état) tel que*

$$(A \oplus BF)^* Sq = A^* Sq$$

*pour toute perturbation  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ . Autrement dit, le plus grand correcteur  $F$  doit vérifier*

$$(A \oplus BF)^* S = A^* S.$$

*Cela revient à considérer le contrôleur suivant*

$$\hat{F}_2 = B \backslash (A^* S) \phi (A^* S). \tag{5.18}$$

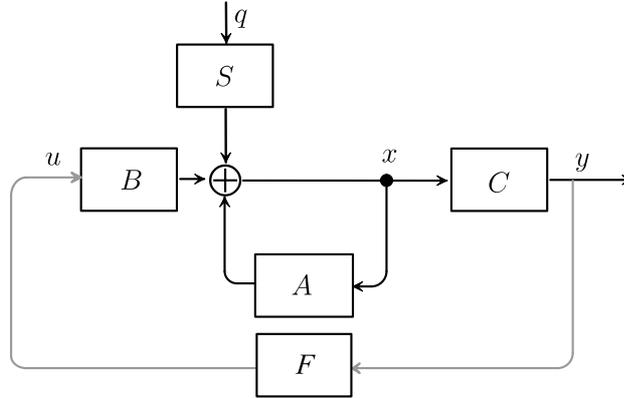


Figure 5.3 – Schéma de la commande en boucle fermée (retour de sortie).

#### 5.3.2.4 Correcteur de type retour de sortie

Nous avons étudié dans la première partie deux correcteurs de type retour d'état. Le problème posé maintenant est la synthèse de correcteurs de type retour de sortie, réalisant les mêmes objectifs que précédemment. Autrement dit, nous allons chercher à synthétiser deux correcteurs de type retour de sortie, l'un donnant un vecteur d'état plus grand que celui obtenu en l'absence de correcteurs et l'autre conservant l'état. L'objectif global étant de maintenir la sortie inchangée au regard de la perturbation. Dans le contexte des graphes d'événements temporisés, il s'agit de la commande  $u = Fy$  qui retarde le plus l'entrée des jetons sans modifier la trajectoire de sortie.

Soit le système (max, +)-linéaire suivant :

$$\begin{cases} x &= Ax \oplus Bu \oplus Sq \\ y &= Cx \end{cases}$$

bouclé par le retour de sortie  $F$  fournissant la commande :

$$u = Fy$$

où  $F \in \mathcal{M}_{in}^{qx}[\gamma, \delta]^{p \times r}$ . Le système en boucle fermée se schématise comme suit et a pour équation

$$\begin{cases} x &= Ax \oplus BFy \oplus Sq \\ y &= Cx \end{cases}$$

En posant  $y = Cx$  dans l'équation d'état, nous obtenons

$$x = Ax \oplus BFCx \oplus Sq = (A \oplus BFC)x \oplus Sq.$$

La plus petite solution (cf. corollaire 1.118) de cette dernière équation est donnée par

$$x = (A \oplus BFC)^* Sq.$$

La sortie s'exprime alors par :

$$y = C(A \oplus BFC)^* Sq,$$

où  $C(A \oplus BFC)^*S \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{r \times m}$  représente la matrice de transfert liant la perturbation  $q$  à la sortie  $y$ .

Nous introduisons à présent les outils permettant de transposer au cas des correcteurs de type retour de sortie les méthodes étudiées dans la première partie de ce chapitre et relatives au cas des correcteurs de type retour d'état.

**Définition 5.31** ( $(A \oplus BFC)$ -invariants). Un sous-ensemble  $\mathcal{N}$  est dit  $(A \oplus BFC)$ -invariant s'il existe un correcteur de type retour de sortie  $F : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^r \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^p$  tel que

$$(A \oplus BFC)\mathcal{N} \subset \mathcal{N}.$$

En d'autres termes, dire que l'ensemble  $\mathcal{N}$  est  $(A \oplus BFC)$ -invariant revient à dire que pour tout état  $x \in \mathcal{N}$ , il existe une commande de type retour de sortie  $u = Fy$  telle que l'état résultant  $(A \oplus BFC)x$  reste dans  $\mathcal{N}$ . On remarque immédiatement qu'il s'agit d'un cas particulier d' $(A \oplus BF)$ -invariants.

La proposition qui suit donne une caractérisation du plus grand idéal principal  $(A \oplus BFC)$ -invariant inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$ .

**Proposition 5.32.** *L'ensemble des idéaux principaux  $(A \oplus BFC)$ -invariants inclus dans un idéal principal  $\mathcal{K}$  possède un plus grand élément pour la relation d'inclusion. Cet élément est donné par*

$$\tilde{\mathcal{V}} = \sup \mathcal{I}((A \oplus BFC), \mathcal{K}) = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq (A \oplus BFC)^* \hat{k} \right\}.$$

*Démonstration.* Immédiate, en posant  $\hat{A} = (A \oplus BFC)$  cela revient à déterminer le plus grand  $\hat{A}$ -invariant inclus dans  $\mathcal{K}$ . Alors la proposition 5.9 donne directement  $\tilde{\mathcal{V}} = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq \hat{A}^* \hat{k} = (A \oplus BFC)^* \hat{k} \right\}$ . □

**Proposition 5.33.** *Soit  $\mathcal{K}$  un idéal principal de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$  généré par un élément  $\hat{k}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{K} = \left\{ x \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n \mid x \preceq \hat{k} \right\}$ . Le plus grand correcteur  $F$  de type retour de sortie tel que  $\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{V}^*$  est donné par*

$$\tilde{F} = B \flat \left( \left( A^* \flat \hat{k} \right) \phi \left( A^* \flat \hat{k} \right) \right) \phi C.$$

*Démonstration.* Découle directement de la proposition 5.17 en prenant  $\tilde{F}C = \hat{F} = B \flat (A^* \flat \hat{k}) \phi (A^* \flat \hat{k})$ , et comme l'application  $R_C$  est résiduable (voir §1.11) on a directement  $\tilde{F} = \hat{F} \phi C = B \flat \left( (A^* \flat \hat{k}) \phi (A^* \flat \hat{k}) \right) \phi C$ . □

**Remarque 5.34.** *La proposition précédente montre que le correcteur  $\tilde{F}$  est le plus grand tel que le plus grand idéal principal  $(A \oplus BFC)$ -invariant soit égal au plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans l'idéal principal  $\mathcal{K}$ .*

### 5.3.2.5 Correcteur de type retour de sortie accroissant les trajectoires du vecteur d'état et laissant la sortie inchangée

L'objectif est ici d'établir le plus grand correcteur de type retour de sortie tel que

$$(A \oplus BFC)^* Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} A^* Sq$$

pour toute perturbation  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ .

**Proposition 5.35.** Soit  $\mathcal{V}_1^*$  le plus grand idéal principal  $A$ -invariant inclus dans l'idéal principal  $\mathcal{K}_1$ . Soit  $\tilde{\mathcal{V}}_1$  le plus grand idéal principal  $(A \oplus BFC)$ -invariant inclus dans l'idéal principal  $\mathcal{K}_1$ . Le correcteur

$$\tilde{F}_1 = (B \backslash (A^* \backslash \Pi^C(A^* Sq)) \phi (A^* \backslash \Pi^C(A^* Sq))) \phi C = (CA^* B) \backslash (CA^* Sq) \phi (CA^* Sq)$$

est le plus grand correcteur de type retour de sortie tel que  $\mathcal{V}_1^* = \tilde{\mathcal{V}}_1$ , c'est-à-dire tel que  $(A \oplus BFC)\mathcal{V}_1^* \subset \mathcal{V}_1^* \subset \mathcal{K}_1$ .

*Démonstration.* Il s'agit d'une application directe de la proposition 5.33, en prenant  $\hat{k} = \sup \mathcal{K}_1$ . De plus  $A^* \backslash \Pi^C(A^* Sq) = (CA^*) \backslash (CA^* Sq)$ , alors

$$\begin{aligned} \tilde{F}_1 &= (B \backslash (CA^* \backslash (CA^* Sq)) \phi (CA^* \backslash (CA^* Sq))) \phi C \\ &= ((CA^* B) \backslash (CA^* Sq)) \phi (CA^* \backslash (CA^* Sq)) \phi C \quad (\text{d'après (f.6)}) \\ &= ((CA^* B) \backslash (CA^* Sq)) \phi (C(CA^* \backslash (CA^* Sq))) \quad (\text{d'après (f.6)}) \end{aligned}$$

et finalement, comme

$$C((CA^*) \backslash (CA^* Sq)) = C(A^* \backslash \Pi^C(A^* Sq)) = CA^* Sq \quad (\text{d'après le lemme 1.112}),$$

on obtient donc  $\tilde{F}_1 = (CA^* B) \backslash (CA^* Sq) \phi (CA^* Sq)$ . □

**Remarque 5.36.** Cette proposition montre qu'une trajectoire  $x \in \mathcal{V}_1^*$  en absence de contrôle reste dans  $\mathcal{V}_1^*$  lorsqu'on applique la commande  $u = \tilde{F}_1 y$ . En outre,  $\tilde{F}_1$  est le plus grand correcteur satisfaisant cette propriété. La propriété suivante montre que l'état obtenu en présence du correcteur appartient à  $[A^* Sq]_C$ .

**Proposition 5.37.** Le correcteur  $\tilde{F}_1 = (CA^* B) \backslash (CA^* Sq) \phi (CA^* Sq)$  garantit que l'état  $x \in [A^* Sq]_C$ .

*Démonstration.* Identique à la preuve de la proposition 5.23 en remplaçant  $(A \oplus B\hat{F}_1)^*$  par  $(A \oplus B\tilde{F}_1 C)^*$ . □

**Remarque 5.38.** Ce résultat signifie que le contrôleur  $\tilde{F}_1$  maintient l'état  $x = (A \oplus B\tilde{F}_1 C)^* Sq$  dans la classe d'équivalence  $[A^* Sq]_C$ , c'est-à-dire celle générée par la perturbation  $q$ .

**Proposition 5.39.** Le correcteur  $\tilde{F}_1 = (CA^* B) \backslash (CA^* Sq) \phi (CA^* Sq)$  est également le plus grand correcteur  $F$  de type retour de sortie tel que

$$(A \oplus BFC)^* Sq \preceq \Pi^C(A^* Sq),$$

pour toute perturbation  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, d'après la définition de  $\Pi^C(A^*Sq)$ , on a

$$(A \oplus BFC)^*Sq \preceq \Pi^C(A^*Sq) = C \backslash (CA^*Sq).$$

Par ailleurs, par définition de la résiduabilité ( $x \preceq a \backslash b \Leftrightarrow ax \preceq b$ ), nous avons donc l'équivalence suivante :

$$(A \oplus BFC)^*Sq \preceq C \backslash (CA^*Sq) \iff C(A \oplus BFC)^*Sq \preceq CA^*Sq$$

En considérant (1.38) et (1.37), on a

$$C(A \oplus BFC)^*Sq = C(A^*BFC)^*A^*Sq = (CA^*BF)^*CA^*Sq \preceq CA^*Sq,$$

et comme l'application  $R_{CA^*Sq}$  est résiduable, cela conduit à

$$(CA^*BF)^* \preceq (CA^*Sq) \phi (CA^*Sq).$$

Par ailleurs, notons que  $((CA^*Sq) \phi (CA^*Sq)) = ((CA^*Sq) \phi (CA^*Sq))^*$  (voir théorème 1.126) et rappelons que (cf. chapitre 1, remarque 1.103)  $x^* \preceq a^*$  admet  $x = a^*$  comme plus grande solution. Par conséquent, on a alors l'équivalence

$$(CA^*BF)^* \preceq (CA^*Sq) \phi (CA^*Sq) \iff CA^*BF \preceq (CA^*Sq) \phi (CA^*Sq)$$

d'où

$$F \preceq (CA^*B) \backslash (CA^*Sq) \phi (CA^*Sq) = \tilde{F}_1.$$

□

**Remarque 5.40.** Le correcteur  $\tilde{F}_1$  correspond au plus grand retour de sortie qui garantit que l'état appartient à  $[A^*Sq]_C$ .

**Remarque 5.41.** Pratiquement, l'objectif est d'obtenir le plus grand contrôleur  $F_1$  tel que

$$(A \oplus BF_1C)^*Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*Sq$$

pour tout  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ . Ceci revient à dire que  $F_1$  doit être tel que

$$(A \oplus BF_1C)^*S \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*S.$$

Ce qui conduit à considérer la classe d'équivalence  $[A^*S]_C$  et son plus grand élément qui est  $\Pi^C(A^*S)$ ; on obtient alors le plus grand correcteur suivant

$$\tilde{F}_1 = (CA^*B) \backslash (CA^*S) \phi (CA^*S). \quad (5.19)$$

### 5.3.2.6 Correcteur de type retour de sortie laissant le vecteur d'état inchangé

L'objectif est ici d'établir le plus grand correcteur de type retour de sortie tel que

$$(A \oplus BF_2C)^*Sq = A^*Sq$$

pour toute perturbation  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ .

**Proposition 5.42.** *Le correcteur*

$$\tilde{F}_2 = B \backslash (A^*Sq) \phi (CA^*Sq)$$

*est le plus grand correcteur  $F$  de type retour de sortie tel que*

$$(A \oplus BFC)K_2 \subset K_2.$$

*Démonstration.* Dans un premier temps la proposition 5.26 donne  $\mathcal{V}_2^* = K_2$ . Ensuite, la proposition 5.33 établit que  $\tilde{F}_2 = B \backslash ((A^* \backslash (A^*Sq)) \phi (A^* \backslash (A^*Sq))) \phi C$  est le plus grand correcteur tel que  $\tilde{\mathcal{V}}_2 = \mathcal{V}_2^*$  (en prenant  $\hat{k} = \sup K_2 = A^*Sq$ ). En outre,  $A^* \backslash A^*Sq = A^*Sq$  (voir proposition 5.26), alors  $\tilde{F}_2 = (B \backslash (A^*Sq) \phi (A^*Sq)) \phi C$  qui s'écrit aussi  $\tilde{F}_2 = B \backslash (A^*Sq) \phi (CA^*Sq)$  (par f.6).  $\square$

**Proposition 5.43.** *Le correcteur  $\tilde{F}_2 = B \backslash (A^*Sq) \phi (CA^*Sq)$  est le plus grand correcteur qui garantit que l'état  $x = A^*Sq$  reste inchangé, c'est-à-dire que*

$$A^*Sq = (A \oplus B\tilde{F}_2C)^*A^*Sq.$$

*Démonstration.* Identique à la preuve de la proposition 5.28, en remplaçant  $(A \oplus B\hat{F}_2)$  par  $(A \oplus B\tilde{F}_2C)$ .  $\square$

**Remarque 5.44.** *Ce correcteur est celui qui fournit la plus grande commande de type  $u = \tilde{F}_2x$  telle que l'état reste identique à celui généré par la perturbation. Ceci revient à dire qu'il retarde autant que possible l'entrée des jetons sans modifier le tir des transitions internes. Par conséquent, la sortie est inchangée, c'est-à-dire que  $CA^*Sq = C(A \oplus B\tilde{F}_2C)^*Sq$ .*

**Remarque 5.45.** *Rappelons que l'objectif considéré était d'obtenir un contrôleur  $F_2$  tel que*

$$(A \oplus BF_2C)^*Sq = A^*Sq$$

*pour tout  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ , c'est-à-dire  $(A \oplus BF_2C)^*S = A^*S$ . Par conséquent, le plus grand correcteur de type retour de sortie  $\hat{F}_2$ , qui maintient l'état dans la classe d'équivalence  $[A^*S]_C$  pour tout  $q$  est donné par*

$$\tilde{F}_2 = B \backslash (A^*S) \phi (CA^*S). \quad (5.20)$$

### 5.3.3 Récapitulatif des résultats

Nous venons de voir qu'il était possible de considérer quatre correcteurs pour résoudre le problème de commande en présence de perturbations. Le tableau ci-dessous récapitule l'objectif et l'expression de chacun de ces correcteurs :

Expression du correcteur	Objectifs
$\begin{aligned}\hat{F}_1 &= (B \backslash (A^* \backslash \Pi^C(A^*S))) \phi(A^* \backslash \Pi^C(A^*S)) \\ &= (CA^*B \backslash CA^*S) \phi(CA^* \backslash CA^*S)\end{aligned}$ <p>(Correcteur de type retour d'état)</p>	<p>Il s'agit du plus grand correcteur tel que</p> $(A \oplus B\hat{F}_1)\mathcal{V}_1^* \subset \mathcal{V}_1^* \subset \mathcal{K}_1.$ <p>Il assure que l'état reste dans <math>[A^*Sq]_C</math> et génère un état tel que</p> $(A \oplus B\hat{F}_1)^*Sq \succeq A^*Sq,$ <p>pour toute perturbation <math>q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^m</math>.</p>
$\hat{F}_2 = B \backslash (A^*S) \phi(A^*S)$ <p>(Correcteur de type retour d'état)</p>	<p>Il s'agit du plus grand correcteur tel que</p> $(A \oplus B\hat{F}_2)^*Sq = A^*Sq,$ <p>pour toute perturbation <math>q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^m</math>. Il assure naturellement que l'état reste dans <math>[A^*Sq]_C</math>.</p>
$\tilde{F}_1 = (CA^*B) \backslash (CA^*S) \phi(CA^*S)$ <p>(Correcteur de type retour de sortie)</p>	<p>Il s'agit du plus grand correcteur tel que</p> $(A \oplus B\tilde{F}_1C)^*Sq \stackrel{\ker C}{\equiv} A^*Sq,$ <p>pour toute perturbation <math>q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^m</math>. Il génère un état tel que</p> $(A \oplus B\tilde{F}_1C)^*Sq \succeq A^*Sq,$ <p>pour toute perturbation <math>q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^m</math>.</p>
$\tilde{F}_2 = B \backslash (A^*S) \phi(CA^*S)$ <p>(Correcteur de type retour de sortie)</p>	<p>Il s'agit du plus grand correcteur tel que</p> $(A \oplus B\tilde{F}_2C)^*Sq = A^*Sq,$ <p>pour toute perturbation <math>q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^m</math>. Il assure naturellement que l'état reste dans <math>[A^*Sq]_C</math>.</p>

Table 5.1 – Récapitulatif des correcteurs

Le choix du correcteur à appliquer se fera en fonction de l'application considérée et des objectifs assignés au contrôleur vis-à-vis du critère de juste-à-temps.

Dans le cas des correcteurs de type retour de sortie :

- Le correcteur  $\tilde{F}_1$  génère une plus grande commande que celle de  $\tilde{F}_2$ . Il est donc préférable vis-à-vis du critère de juste-à-temps, cependant ce correcteur réduit les marges qui pouvaient exister au niveau des transitions internes d'un GET.
- A l'inverse,  $\tilde{F}_2$  est neutre vis-à-vis du comportement interne puisqu'il ne retarde que le tir des transitions d'entrée.

## 5.4 Prise en compte d'une commande

Précédemment la synthèse a été considérée en supposant qu'initialement la commande  $v$  était nulle, c'est-à-dire  $v = \varepsilon$ . Si tel n'est pas le cas, il est possible de considérer le principe de superposition des systèmes linéaires pour ajouter le signal  $u$  à la commande générée par le contrôleur  $F$ .

### 5.4.1 Correcteur de type retour d'état

Soit le schéma du système en boucle fermée suivant :

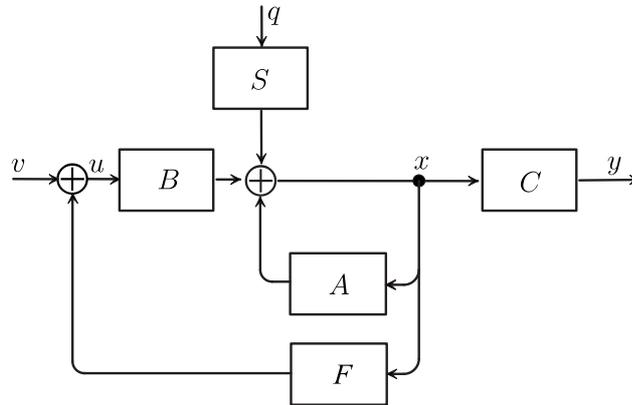


Figure 5.4 – Schéma de la commande en boucle fermée (retour d'état) avec une consigne  $v$ .

En présence d'une telle commande

$$u = Fx \oplus v$$

l'équation d'état devient (en considérant le corollaire 1.118) :

$$x = (A \oplus BF)x \oplus Bv \oplus Sq = (A \oplus BF)^* Bv \oplus (A \oplus BF)^* Sq.$$

Clairement on s'aperçoit que le correcteur  $F$  risque de modifier la relation de transfert entre le vecteur d'état  $x$  et l'entrée  $v$ . De même, en considérant l'équation de sortie :

$$y = C(A \oplus BF)^* Bv \oplus C(A \oplus BF)^* Sq$$

on remarque que le correcteur  $F$  risque de modifier la relation de transfert entre la sortie  $y$  et l'entrée  $v$ .

Afin d'éviter que le correcteur  $F$  ne modifie le transfert entre l'état  $x$  et l'entrée  $v$ , il doit satisfaire l'égalité suivante :

$$(A \oplus BF)^* B = A^* B.$$

C'est-à-dire que la relation de transfert entre  $v$  et  $x$  en présence du correcteur doit être égale à cette même fonction de transfert en l'absence du correcteur.

De même, pour que le correcteur  $F$  préserve le transfert entre la sortie  $y$  et l'entrée  $v$ , il doit respecter l'égalité

$$C(A \oplus BF)^* B = CA^* B,$$

dans ce cas, la relation de transfert entre  $v$  et  $y$  en présence du correcteur doit être égale à cette même fonction de transfert en l'absence du correcteur.

**Proposition 5.46.** *Pour préserver la relation de transfert entre l'entrée  $v$  et l'état  $x$ , le correcteur doit satisfaire la contrainte suivante :*

$$F \preceq (A^*B) \setminus (A^*B) \phi(A^*B).$$

*Démonstration.* Tout d'abord, nous avons les équivalences suivantes

$$(A \oplus BF)^* B \preceq A^* B \iff (A^*BF)^* A^* B \preceq A^* B \iff (A^*BF)^* \preceq (A^*B) \phi(A^*B).$$

Par ailleurs, notons que  $(A^*B) \phi(A^*B) = ((A^*B) \phi(A^*B))^*$  (voir théorème 1.126) et rappelons que (cf. chapitre 1, remarque 1.103)  $x^* \preceq a^*$  admet  $x = a^*$  comme plus grande solution. Par conséquent, on a alors l'équivalence

$$(A^*BF)^* \preceq (A^*B) \phi(A^*B) \iff A^*BF \preceq (A^*B) \phi(A^*B)$$

d'où

$$F \preceq (A^*B) \setminus (A^*B) \phi(A^*B).$$

□

**Proposition 5.47.** *Pour préserver la relation de transfert entre l'entrée  $v$  et la sortie  $y$ , le correcteur doit satisfaire la contrainte suivante :*

$$F \preceq (CA^*B) \setminus (CA^*B) \phi(A^*B).$$

*Démonstration.* Soit les équivalences suivantes  $C(A \oplus BF)^* B \preceq CA^*B \iff C(A^*BF)^* A^* B \preceq CA^*B \iff CA^*B(FA^*B)^* \preceq CA^*B \iff (FA^*B)^* \preceq CA^*B \setminus CA^*B$ , notons que  $CA^*B \setminus CA^*B = (CA^*B \setminus CA^*B)^*$  (voir théorème 1.126) et rappelons que (cf. chapitre 1, remarque 1.103)  $x^* \preceq a^*$  admet  $x = a^*$  comme plus grande solution. Par conséquent, on a alors l'équivalence

$$(FA^*B)^* \preceq CA^*B \setminus CA^*B \iff FA^*B \preceq CA^*B \setminus CA^*B,$$

d'où

$$F \preceq CA^*B \setminus CA^*B \phi(A^*B).$$

□

Méthodologiquement, le correcteur à mettre en place lors de la présence de perturbations sera  $\hat{F}_1$  (ou  $\hat{F}_2$  suivant les objectifs souhaités vis-à-vis du critère de juste-à-temps) sous les contraintes données par les propositions 5.46 et 5.47.

C'est-à-dire que le contrôleur à mettre en place, dans le cas où l'on souhaite conserver le transfert entre l'état  $x$  et l'entrée  $v$ , sera

$$\begin{aligned} F &= \hat{F}_1 \wedge (A^*B) \setminus (A^*B) \phi(A^*B) \\ \text{ou} \quad F &= \hat{F}_2 \wedge (A^*B) \setminus (A^*B) \phi(A^*B). \end{aligned}$$

Dans le cas où l'on désire conserver le transfert entre la sortie  $y$  et l'entrée  $v$ , le correcteur sera donné par l'une des expressions suivantes

$$\begin{aligned} F &= \hat{F}_1 \wedge (CA^*B) \setminus (CA^*B) \phi(A^*B) \\ \text{ou} \quad F &= \hat{F}_2 \wedge (CA^*B) \setminus (CA^*B) \phi(A^*B). \end{aligned}$$

### 5.4.2 Correcteur de type retour de sortie

La même démarche conduit à considérer une commande  $u = FCx \oplus v$ . D'après le schéma suivant

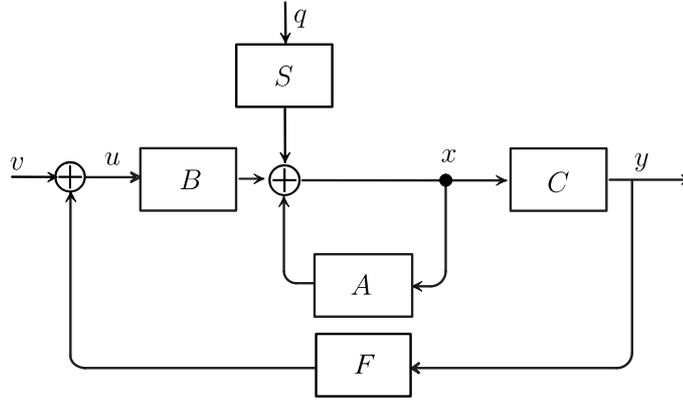


Figure 5.5 – Schéma de la commande en boucle fermée (retour de sortie) avec une consigne  $v$ .

l'équation d'état s'écrit

$$x = (A \oplus BFC)x \oplus Bv \oplus Sq = (A \oplus BFC)^*Bv \oplus (A \oplus BFC)^*Sq$$

et l'équation de sortie est donnée par

$$y = C(A \oplus BFC)^*Bv \oplus C(A \oplus BFC)^*Sq.$$

Le correcteur devra donc être tel que la relation de transfert entre l'entrée  $v$  et la sortie  $y$  satisfasse l'égalité suivante

$$C(A \oplus BFC)^*B = CA^*B$$

c'est-à-dire que l'action du correcteur doit être neutre vis-à-vis de la relation d'entrée-sortie.

**Proposition 5.48.** *Pour préserver la relation de transfert entre l'entrée  $v$  et la sortie  $y$ , le correcteur doit satisfaire la contrainte suivante :*

$$F \preceq (CA^*B) \setminus (CA^*B) \phi (CA^*B).$$

*Démonstration.* Considérons tout d'abord l'application  $M_H : x \mapsto H(xH)^*$  (où  $H = CA^*B$ ), le calcul de ce correcteur neutre revient à résoudre l'équation suivante

$$M_H(F) \preceq H.$$

Comme  $H \in \text{Im}M_H$ , le corollaire 3.18 donne directement l'expression du plus grand correcteur neutre :

$$F \preceq H \setminus H \phi H = (CA^*B) \setminus (CA^*B) \phi (CA^*B).$$

□

**Remarque 5.49.** *Par conséquent, le correcteur à mettre en oeuvre en présence de perturbations sera  $\tilde{F}_1$  ou  $\tilde{F}_2$  sous cette contrainte, c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} F &= \tilde{F}_1 \wedge (CA^*B) \setminus (CA^*B) \phi (CA^*B) \\ \text{ou } F &= \tilde{F}_2 \wedge (CA^*B) \setminus (CA^*B) \phi (CA^*B). \end{aligned}$$

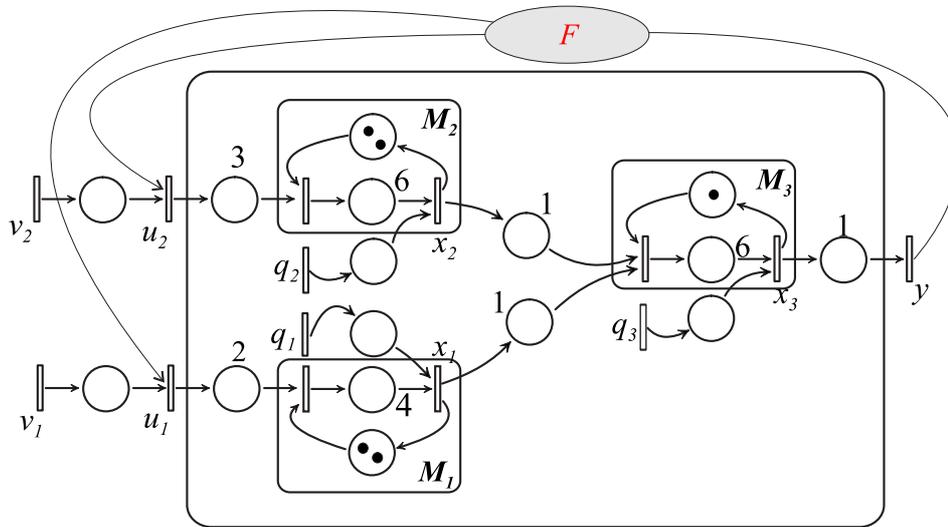


Figure 5.6 – Graphe d'événements temporisé en présence de perturbations.

## 5.5 Illustration

De façon à concrétiser les résultats présentés dans ce paragraphe, nous allons examiner un exemple. Soit le graphe d'événements temporisé de la figure 5.6. Il peut représenter un système d'assemblage où deux machines  $M_1$  et  $M_2$  produisent des pièces assemblées sur la machine  $M_3$ .

Les transitions  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  représentent des entrées non contrôlables qui ont pour effet de retarder la sortie des pièces des machines  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ . Dans un contexte de production, ces entrées non maîtrisables peuvent représenter des incidents sur le fonctionnement de la ligne d'assemblage, comme par exemple des ruptures d'approvisionnements, des pannes machines, ... Elles représentent donc des perturbations sur le fonctionnement du système.

Un telle panne entraîne inévitablement l'arrêt de la ligne de production. Cet arrêt se fait plus ou moins rapidement suivant l'importance des stocks entre les différentes machines. Pour illustrer ce blocage, considérons la figure 5.7 représentant de façon schématique la ligne de production que pourrait modéliser le GET de la figure 5.6 en l'absence du correcteur  $F$ . Le mécanisme de paralysie progressive de la ligne est décrit sur la figure 5.8. La panne de la machine  $M_2$  empêche la poursuite de l'approvisionnement du stock amont (stock 4) de la machine  $M_3$ , provoquant :

- un vidage progressif du stock aval (stock 4) de la machine  $M_2$ , qui une fois vide, conduit à l'arrêt de la machine  $M_3$ ;
- une saturation du stock amont (stock 2) de la machine  $M_2$  et des stocks de la machine  $M_1$  (stock 1 et stock 3).

Notre objectif est donc le contrôle optimal des entrées du système afin d'assurer une bonne gestion des stocks internes. Pour cela nous allons synthétiser un correcteur (noté  $F$  sur la figure 5.6) de type retour de sortie accroissant les trajectoires du vecteur d'état (correcteur  $\tilde{F}_1$  dans le tableau 5.1) et laissant la sortie inchangée.

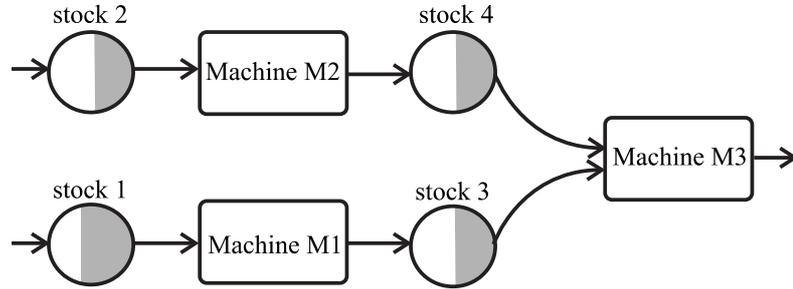


Figure 5.7 – Ligne de production en fonctionnement normal.

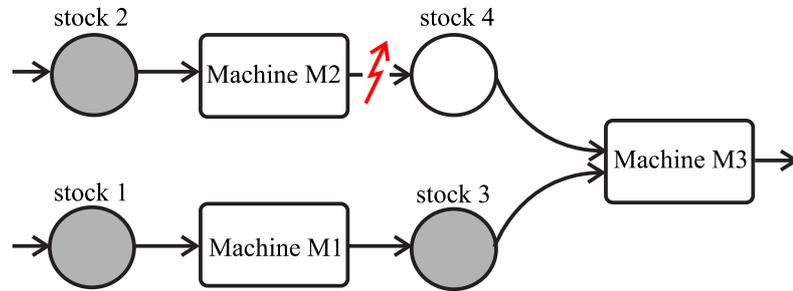


Figure 5.8 – Propagation des effets d'une panne.

Commençons par donner la représentation d'état du GET de la figure 5.6 dans le dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$  :

$$\begin{aligned} x &= Ax \oplus Bu \oplus Sq \\ y &= Cx \end{aligned}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^4 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \gamma^2 \delta^6 & \varepsilon \\ \delta^7 & \delta^7 & \gamma \delta^6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \delta^6 & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^9 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \text{ et } C = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad \delta).$$

L'expression de la fonction de transfert du système est donnée par :

$$H = \underbrace{CA^*B}_{H_u} u \oplus \underbrace{CA^*S}_{H_q} q,$$

où la matrice

$$H_q = CA^*S = (\delta^8 (\gamma \delta^6)^* \quad \delta^8 (\gamma \delta^6)^* \quad \delta (\gamma \delta^6)^*) \quad (5.21)$$

détermine la relation de transfert entre la perturbation  $q$  et la sortie  $y$ . Par ailleurs, la matrice

$$H_u = CA^*B = (\delta^{14} (\gamma \delta^6)^* \quad \delta^{17} (\gamma \delta^6)^*) \quad (5.22)$$

détermine la relation de transfert entre l'entrée  $u$  et la sortie  $y$ .

### 5.5.1 Synthèse de correcteur de type retour de sortie accroissant l'état et laissant la sortie inchangée

Les résultats précédents s'appliquent directement. D'après proposition 5.35 et en considérant la remarque 5.41, nous avons

$$\begin{aligned}\tilde{F}_1 &= \text{Pr}_+ ((CA^*B) \setminus (CA^*S) / (CA^*S)) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^3 \delta^4 (\gamma \delta^6)^* \\ \gamma^3 \delta (\gamma \delta^6)^* \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Ce correcteur  $\tilde{F}_1$  correspond au plus grand correcteur tel que

$$(A \oplus B\tilde{F}_1 C)^* S q \stackrel{\ker C}{\equiv} A^* S q$$

pour toute perturbation  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ .

**Remarque 5.50.** Notons que ce correcteur n'est pas nécessairement causal, on doit donc considérer sa projection dans l'ensemble des causaux  $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$  donnée par l'opérateur  $\text{Pr}_+$  (voir §2.8 pour plus de détails).

Rappelons que le correcteur final (noté  $F$  sur la figure 5.6) doit également être neutre vis-à-vis du transfert entre l'entrée  $v$  et la sortie  $y$ . Nous devons donc considérer la proposition 5.48 (ainsi que la remarque 5.49) sur la contrainte que doit vérifier le contrôleur final. Par conséquent le plus grand correcteur assurant la commande en présence de perturbations et laissant le transfert inchangé entre l'entrée  $v$  et la sortie  $y$  est donné par

$$\begin{aligned}F &= \tilde{F}_1 \wedge \text{Pr}_+ ((CA^*B) \setminus (CA^*B) / (CA^*B)) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^3 \delta^4 (\gamma \delta^6)^* \\ \gamma^3 \delta (\gamma \delta^6)^* \end{pmatrix} \wedge \text{Pr}_+ ((CA^*B) \setminus (CA^*B) / (CA^*B)) \\ &= \begin{pmatrix} \gamma^3 \delta^4 (\gamma \delta^6)^* \\ \gamma^3 \delta (\gamma \delta^6)^* \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On peut voir une réalisation de ce correcteur sur la figure 5.9. Ce correcteur  $\hat{F}$  fournit les commandes

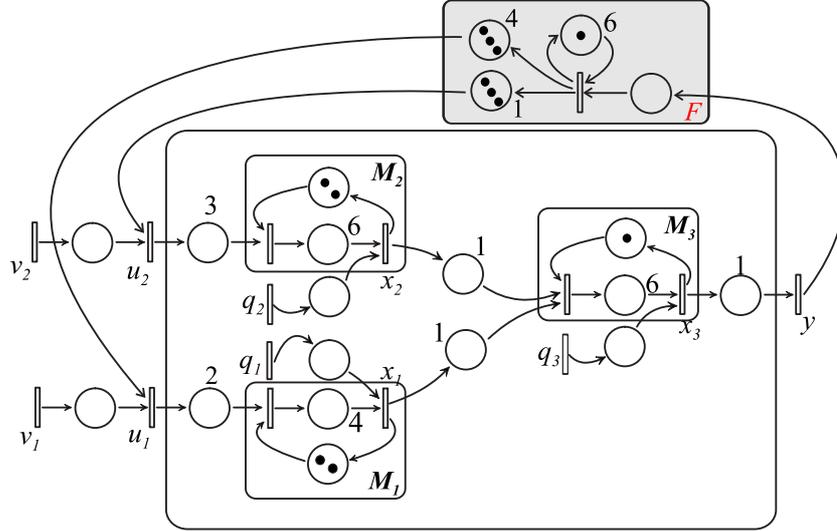
$$\begin{aligned}u_1 &= \gamma^3 \delta^4 (\gamma \delta^6)^* y \oplus v_1 \\ u_2 &= \gamma^3 \delta (\gamma \delta^6)^* y \oplus v_2\end{aligned}$$

Les formes implicites de ces commandes sont les suivantes :

$$\begin{aligned}u_1 &= \gamma \delta^6 u_1 \oplus \gamma^3 \delta^4 y \oplus v_1 \\ u_2 &= \gamma \delta^6 u_2 \oplus \gamma^3 \delta y \oplus v_2.\end{aligned}$$

Les équations récurrentes donnant l'expression des commandes  $u_1$  et  $u_2$  en fonction des états  $x_1$  et  $x_2$  sont les suivantes sur le dioïde  $\mathbb{Z}_{\max}$  :

$$\begin{aligned}u_1(k) &= 6u_1(k-1) \oplus 4y(k-3) \oplus v_1(k) \\ u_2(k) &= 6u_2(k-1) \oplus 1y(k-3) \oplus v_2(k).\end{aligned}$$


 Figure 5.9 – Réalisation du correcteur  $F$ .

Nous allons à présent vérifier si le correcteur  $F$  remplit correctement les objectifs. Tout d'abord, considérons le transfert entre l'état et la perturbation en boucle ouverte donné par

$$A^*S = \begin{pmatrix} (\gamma^2\delta^4)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & (\gamma^2\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma\delta^6)^* & \delta^7(\gamma\delta^6)^* & (\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix}$$

et comparons-le, avec la relation de transfert entre l'état et la perturbation en boucle fermée ; on a

$$(A \oplus BFC)^*S = \begin{pmatrix} e \oplus \gamma^2\delta^4 \oplus \gamma^3\delta^{18}(\gamma\delta^6)^* & \gamma^3\delta^{18}(\gamma\delta^6)^* & \gamma^3\delta^{11}(\gamma\delta^6)^* \\ \gamma^3\delta^{18}(\gamma\delta^6)^* & e \oplus \gamma^2\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{18}(\gamma\delta^6)^* & \gamma^3\delta^{11}(\gamma\delta^6)^* \\ \delta^7(\gamma\delta^6)^* & \delta^7(\gamma\delta^6)^* & (\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix}.$$

On remarque que  $(A \oplus BFC)^*S \succeq A^*S$ , c'est-à-dire que la relation de transfert en boucle fermée est supérieure à celle en boucle ouverte. Par ailleurs, par isotonie on vérifie aisément que

$$(A \oplus BFC)^*Sq \succeq A^*Sq, \quad \forall q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m.$$

De même, on peut s'assurer que l'état en boucle fermée  $(A \oplus BFC)^*Sq$  appartient à la classe d'équivalence  $[A^*Sq]_C$ , puisque

$$H_{q_{bf}} = C(A \oplus BFC)^*S = (\delta^8(\gamma\delta^6)^* \quad \delta^8(\gamma\delta^6)^* \quad \delta(\gamma\delta^6)^*) = H_q.$$

On s'aperçoit que la fonction de transfert entre la perturbation  $q$  et la sortie  $y$  en boucle fermée est inchangée par rapport à celle en boucle ouverte (5.21). Donc, en considérant la proposition 1.108, pour tout transfert  $X$  tel que

$$A^*S \preceq X \preceq (A \oplus BFC)^*S \Rightarrow CA^*S = CX = C(A \oplus BFC)^*S$$

ou encore par isotonie

$$CA^*Sq = C(A \oplus BFC)^*Sq \quad , \quad \forall q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m.$$

Par conséquent  $(A \oplus BFC)^*Sq \in [A^*Sq]_C$  pour toute perturbation  $q \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^m$ .

On considère maintenant le vecteur de consigne suivant (demande client) :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{20}(\gamma\delta^6)^* \\ \delta^{20}(\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix}.$$

Par convention, le premier tir étant le numéro 0, ces trajectoires doivent être interprétées comme suit : on souhaite que la pièce 0 soit mise en production à l'instant 20 puis ensuite on désire "en moyenne" une pièce toute les 6 unités de temps. L'application de cette loi de commande a permis l'obtention de l'état  $x = A^*Bv$  en boucle ouverte suivant (avec  $q = \varepsilon$ , c'est-à-dire en absence de perturbations) :

$$\begin{pmatrix} x_{1v} \\ x_{2v} \\ x_{3v} \end{pmatrix} = A^*Bv = \begin{pmatrix} \delta^6(\gamma^2\delta^4)^* & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^9(\gamma^2\delta^6)^* \\ \delta^{13}(\gamma\delta^6)^* & \delta^{16}(\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta^{20}(\gamma\delta^6)^* \\ \delta^{20}(\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^{26}(\gamma\delta^6)^* \\ \delta^{29}(\gamma\delta^6)^* \\ \delta^{36}(\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix}, \quad (5.23)$$

à partir de cet état, nous pouvons alors calculer la sortie du système (sans la perturbation) donnée par

$$y_v = \delta^{37}(\gamma\delta^6)^*.$$

Jusqu'à présent nous avons supposé que l'état du système n'était pas perturbé. Considérons à présent qu'une panne surgisse à la sortie de la machine  $M_2$  (perturbation  $q_2$ ). Dans cet exemple, nous supposons que la panne sur  $M_2$  intervient à l'événement 6 et que cette perturbation repousse le tir de la transition  $x_2$  à l'instant 85 (au lieu de 65) c'est-à-dire que la machine s'est arrêtée 20 unités de temps. Formellement le vecteur des perturbations est de la forme suivante

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \gamma^6\delta^{85} \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad (5.24)$$

d'où l'expression de l'état en présence de la perturbation donnée par

$$\begin{aligned} x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= A^*Bv \oplus A^*Sq \\ &= \begin{pmatrix} \delta^{29} \oplus \gamma\delta^{35} \oplus \gamma^2\delta^{41} \oplus \gamma^3\delta^{47} \oplus \gamma^4\delta^{53} \oplus \gamma^5\delta^{59} \oplus \gamma^6\delta^{65} \oplus \gamma^8\delta^{85} \oplus \gamma^{10}\delta^{97} \oplus \gamma^{12}\delta^{103} \oplus \gamma^{13}\delta^{107} (\gamma\delta^6)^* \\ \delta^{36} \oplus \gamma\delta^{42} \oplus \gamma^2\delta^{48} \oplus \gamma^3\delta^{54} \oplus \gamma^4\delta^{60} \oplus \gamma^5\delta^{66} \oplus \gamma^6\delta^{72} (\gamma\delta^6)^* \\ \delta^{26} (\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La sortie en présence de la perturbation est alors donnée par

$$y = \delta^{37} \oplus \gamma\delta^{43} \oplus \gamma^2\delta^{49} \oplus \gamma^3\delta^{55} \oplus \gamma^4\delta^{61} \oplus \gamma^5\delta^{67} \oplus \gamma^6\delta^{73} (\gamma\delta^6)^*.$$

On donne sur la figure 5.10 la représentation de l'état non perturbé  $x_v$  ainsi que la représentation de l'état perturbé  $x$ . On donne également la représentation de la sortie avec et sans la présence de la perturbation (respectivement  $y_{bo}$  et  $y_v$ ). Remarquons qu'une perturbation sur la machine  $M_2$  se propage sur la machine  $M_3$ ; en effet on voit que l'état  $x_3$  (correspondant à la sortie de la machine  $M_3$ ) est retardé. Par ailleurs, on s'aperçoit qu'à l'instant 13, l'état  $x_2$  (l'état perturbé) rattrape l'état non perturbé  $x_{2v}$ . Ceci

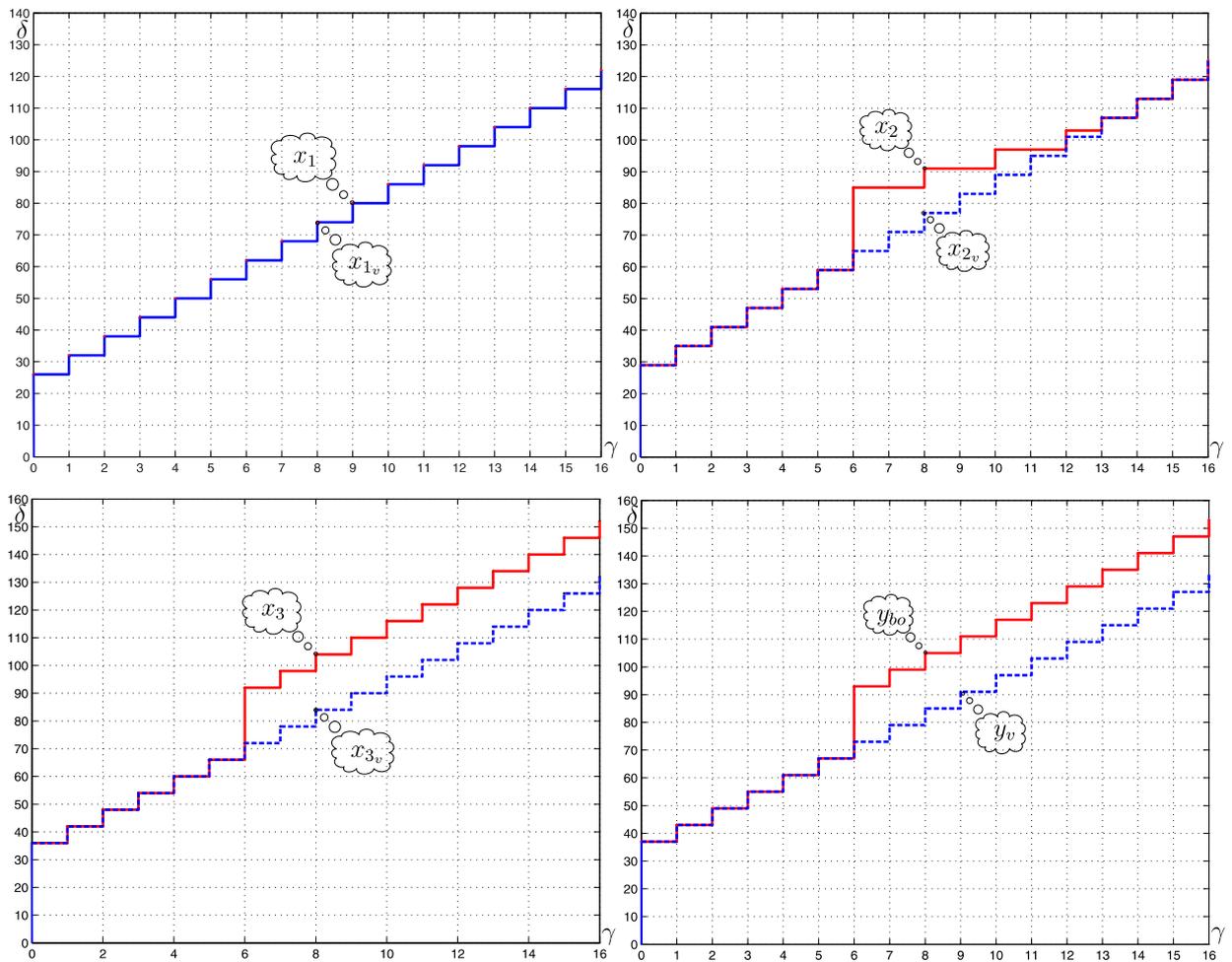


Figure 5.10 – Représentation des états perturbés :  $x_1, x_2$  et  $x_3$  ; des états non perturbés :  $x_{1v}, x_{2v}$  et  $x_{3v}$  ; de la sortie perturbée  $y_{bo}$ , et la sortie non perturbée  $y_v$ .

est dû au fait que la machine  $M_2$  a un taux de production (2 pièces toutes les 6 unités de temps) plus élevé que celui de la machine  $M_3$  (1 pièce toutes les 6 unités de temps).

Il est alors possible de déterminer les trajectoires de la commande produites par le correcteur  $F$ , en considérant la loi de commande  $u = Fy \oplus v$ . On obtient

$$\begin{aligned} u &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = Fy \oplus v \\ &= \begin{pmatrix} \delta^{20} \oplus \gamma \delta^{26} \oplus \gamma^2 \delta^{32} \oplus \gamma^3 \delta^{41} \oplus \gamma^4 \delta^{47} \oplus \gamma^5 \delta^{53} \oplus \gamma^6 \delta^{59} \oplus \gamma^7 \delta^{65} \oplus \gamma^8 \delta^{71} \oplus \gamma^9 \delta^{97} (\gamma \delta^6)^* \\ \delta^{20} \oplus \gamma \delta^{26} \oplus \gamma^2 \delta^{32} \oplus \gamma^3 \delta^{38} \oplus \gamma^4 \delta^{44} \oplus \gamma^5 \delta^{50} \oplus \gamma^6 \delta^{56} \oplus \gamma^7 \delta^{62} \oplus \gamma^8 \delta^{68} \oplus \gamma^9 \delta^{94} (\gamma \delta^6)^* \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ce vecteur de commande est celui qui retarde au plus l'entrée des jetons dans le GET, tout en assurant l'objectif. On voit, sur la figure 5.11, que les commandes produites par le correcteur sont supérieures aux consignes  $v_1$  et  $v_2$  ; par conséquent, on évite l'accumulation de jetons inutiles dans le GET.

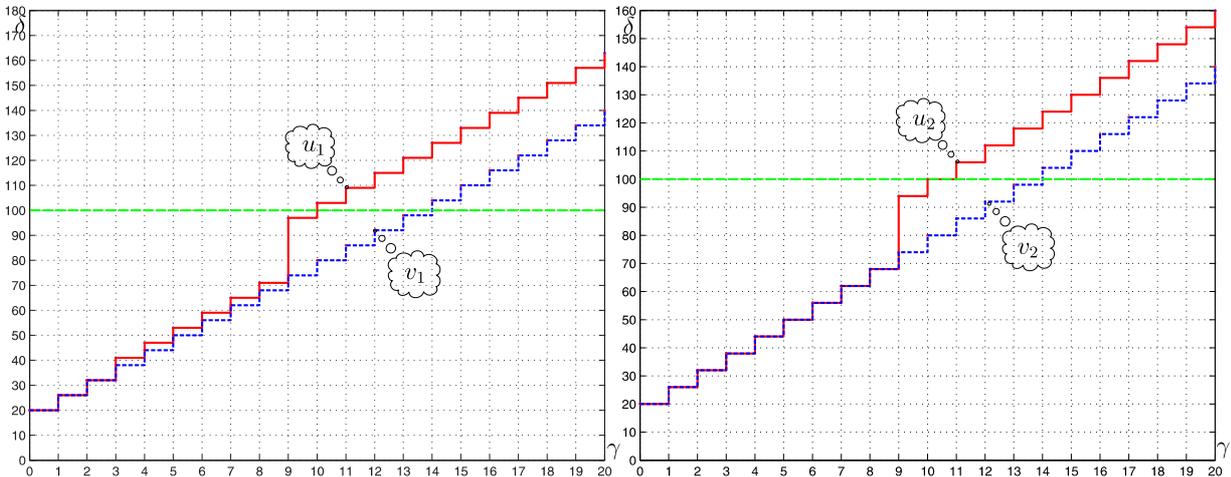


Figure 5.11 – Représentation de la commande  $u = Fy \oplus v$  et de la consigne  $v$ .

Calculons maintenant l'état du système en boucle fermée. On obtient

$$\begin{aligned} x_{bf} &= \begin{pmatrix} x_{1_{bf}} \\ x_{2_{bf}} \\ x_{3_{bf}} \end{pmatrix} = (A \oplus BFC)^* S q \oplus (A \oplus BFC)^* B v \\ &= \begin{pmatrix} \delta^{26} \oplus \gamma \delta^{32} \oplus \gamma^2 \delta^{38} \oplus \gamma^3 \delta^{47} \oplus \gamma^4 \delta^{53} \oplus \gamma^5 \delta^{59} \oplus \gamma^6 \delta^{65} \oplus \gamma^7 \delta^{71} \oplus \gamma^8 \delta^{77} \oplus \gamma^9 \delta^{103} (\gamma \delta^6)^* \\ \delta^{29} \oplus \gamma \delta^{35} \oplus \gamma^2 \delta^{41} \oplus \gamma^3 \delta^{47} \oplus \gamma^4 \delta^{53} \oplus \gamma^5 \delta^{59} \oplus \gamma^6 \delta^{65} \oplus \gamma^7 \delta^{71} \oplus \gamma^8 \delta^{77} \oplus \gamma^9 \delta^{103} (\gamma \delta^6)^* \\ \delta^{36} \oplus \gamma \delta^{42} \oplus \gamma^2 \delta^{48} \oplus \gamma^3 \delta^{54} \oplus \gamma^4 \delta^{60} \oplus \gamma^5 \delta^{66} \oplus \gamma^6 \delta^{92} (\gamma \delta^6)^* \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La figure 5.12 donne une représentation de l'état en boucle fermée (noté  $x_{bf}$ ) et de l'état en boucle ouverte (noté  $x$ ). On s'aperçoit sur cette figure que l'état en boucle fermée est supérieur à celui généré par la perturbation en boucle ouverte. Cela signifie que ce correcteur réduit les marges sur le tir des transitions  $x_1$  et  $x_2$ . En d'autres termes, cela signifie que ce correcteur retarde le plus possible le tir des transitions  $x_1$  et  $x_2$  tout en assurant l'objectif.

Ces marges trouvent leur justification dans le fait que la perturbation, en ralentissant le fonctionnement de la machine  $M_2$ , ralentit également le fonctionnement de la machine  $M_3$ , puisque cette machine se trouve sous-alimentée en pièces brutes. Par conséquent, il est intéressant de pouvoir ralentir l'alimentation en matières premières de la machine  $M_1$  par l'intermédiaire du correcteur pour éviter

une accumulation inutile de pièces dans le stock (représenté par une place dans le GET) placé entre la machine  $M_2$  et la machine  $M_3$ . Par ailleurs, on remarque que l'on ne peut pas retarder plus le tir de la transition  $x_3$  que ne le fait la perturbation. En effet, retarder plus le tir de la transition  $x_3$  reviendrait à ralentir la sortie du système et par conséquent à modifier la sortie en boucle fermée par rapport à la sortie du système lorsqu'une perturbation agit.

La figure 5.12 présente la sortie obtenue en boucle fermée et la sortie obtenue en boucle ouverte. On remarque que la sortie est bien conservée, par conséquent l'objectif de maintien de la sortie est atteint.

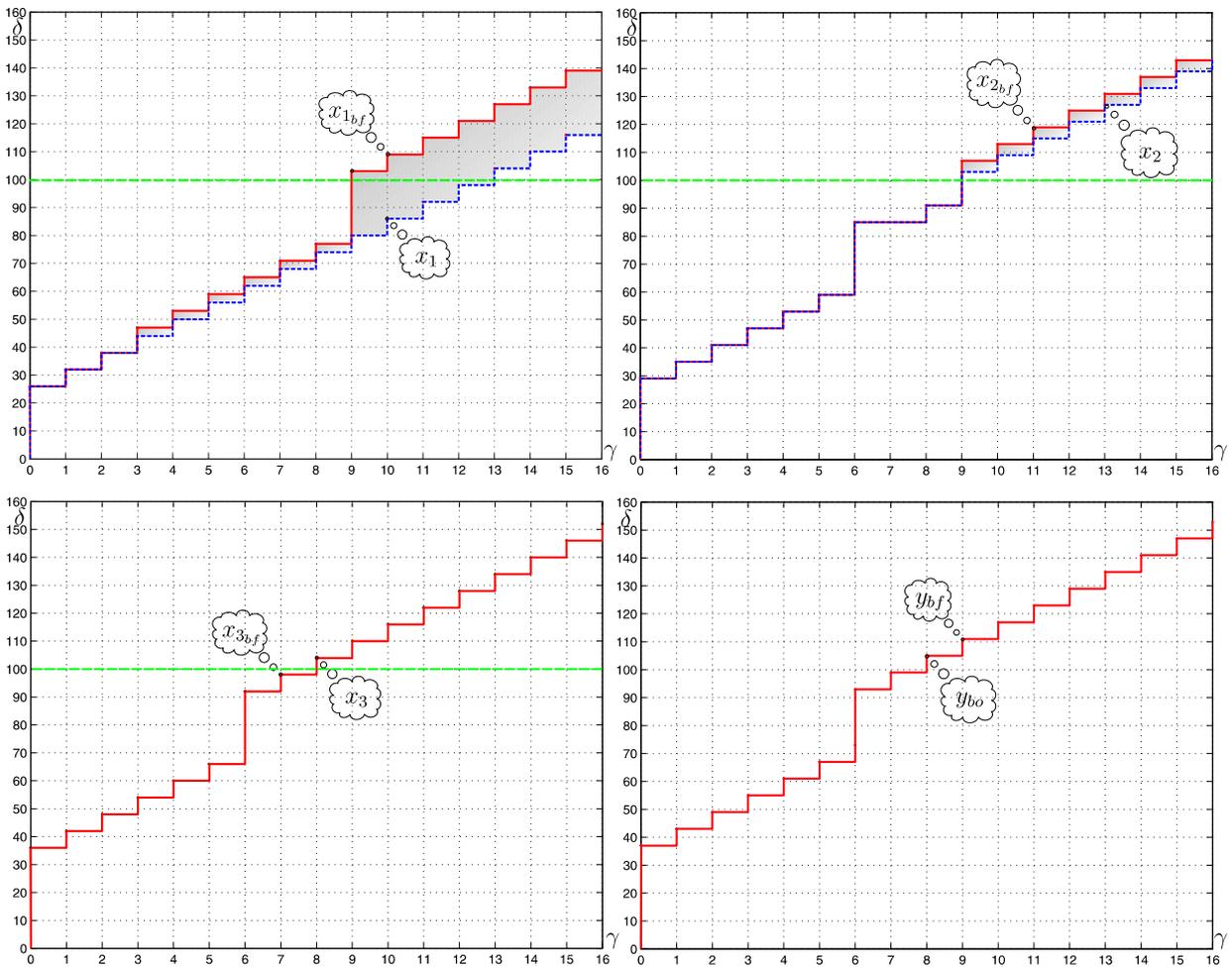


Figure 5.12 – Représentation des états et de la sortie en boucle fermée en présence de la perturbation. Les valeurs  $x_1, x_2$  et  $x_3$  correspondent aux états en boucle ouverte tandis que les valeurs  $x_{1_{bf}}, x_{2_{bf}}$  et  $x_{3_{bf}}$  correspondent aux états en boucle fermée. Les valeurs  $y_{bo}$  et  $y_{bf}$  correspondent respectivement à la sortie en boucle ouverte et à la sortie en boucle fermée (elles sont naturellement égales).

D'après l'expression de la perturbation 5.24, la machine  $M_2$  tombe en panne juste après le 5<sup>ème</sup> franchissement de la transition  $x_2$ . La machine  $M_2$  n'est réparée qu'à l'instant 85. Après la réparation de la machine, la transition  $x_2$  peut immédiatement être franchie, la figure 5.10 donne une représenta-

tion de ce scénario. Pour s'assurer de l'intérêt du correcteur, regardons à l'instant 100 l'état du graphe d'événements temporisé avec et sans correcteur.

Tout d'abord, la figure 5.11 permet de connaître le nombre exact de jetons qui à l'instant 100 sont entrés dans le GET. Sur les graphes d'événements temporisés de la figure 5.13, nous avons indiqué pour chacune des transitions d'entrée le nombre de franchissements effectifs à l'instant 100. Il est possible de faire la même démarche pour chacun des états en considérant la figure 5.12, et de même que pour les transitions d'entrées, nous avons indiqué pour chacune des transitions internes du système le nombre de franchissements effectifs à l'instant 100.

On remarque immédiatement que dans le cas du système en boucle ouverte, il y a eu 13 franchissements des entrées  $u_1$  et  $u_2$ , par conséquent à l'instant 100, il y a eu 13 jetons entrés dans le graphe, tandis que dans le cas du système en boucle fermée, il y a eu seulement 9 franchissements pour  $u_1$  et 10 franchissements pour  $u_2$ . Par ailleurs, dans le cas du système en boucle ouverte les transitions  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  ont respectivement été franchies 12, 8 et 7 fois chacune, on peut alors donner une photographie précise du nombre de jetons dans les places du GET situées entre ces transitions. En procédant de la même manière pour le GET en boucle fermée, on remarque qu'il y a eu moins de franchissements des transitions internes. De même, le nombre de jetons dans les stocks est moindre dans le cas du système en boucle fermée.

Pour faire le parallèle avec un système de production, le système en boucle ouverte se retrouve dans la situation de la ligne d'assemblage décrite sur la figure 5.8, c'est-à-dire que les stocks du système se retrouvent saturés. A l'inverse, pour le système en boucle fermée, le correcteur permet d'assurer une bonne gestion des stocks internes.

## 5.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le problème de commande de système  $(\max, +)$ -linéaires en présence de perturbations. L'objectif est de synthétiser une loi de commande maintenant l'état  $x$  dans le noyau de la matrice de sortie  $C$ . Formulé de cette façon, on remarque que ce problème présente une forte analogie avec le problème du rejet de perturbations de l'automatique classique.

Il faut cependant noter que l'objectif atteint ne conduit pas à une annulation de sortie, en effet la définition spécifique du noyau d'une application sur un treillis et la nature des systèmes considérés conduisent à obtenir la plus grande commande telle que la sortie reste inchangée quelle que soit la perturbation. Pour un graphe d'événements temporisé, cette commande correspond à celle qui permet de retarder au plus l'entrée de jetons dans le graphe, évitant ainsi une accumulation inutile de jetons à l'intérieur du graphe.

La formulation et la résolution de ce problème reposent sur la notion d'idéaux invariants. En effet les objectifs considérés tout au long de ce chapitre se formulaient comme la recherche de plus grands idéaux principaux invariants inclus dans des idéaux principaux. On retrouve une fois de plus une certaine analogie avec la notion de sous-espace invariant de l'approche géométrique des systèmes. Notons que des travaux sont actuellement en cours [Gaubert and Katz, 2003] pour développer une théorie analogue sur les semi-anneaux. Il serait alors intéressant de comparer les expressions des correcteurs obtenus par notre approche, avec ceux obtenus par ces auteurs.

De même en théorie des systèmes, parallèlement au développement de la théorie géométrique, il a été montré que tous les résultats obtenus par cette technique pouvaient également être retrouvés par une approche dite polynômiale [Wolowich, 1974], il serait également intéressant d'essayer de transposer ces méthodes au cas des systèmes considérés ici.

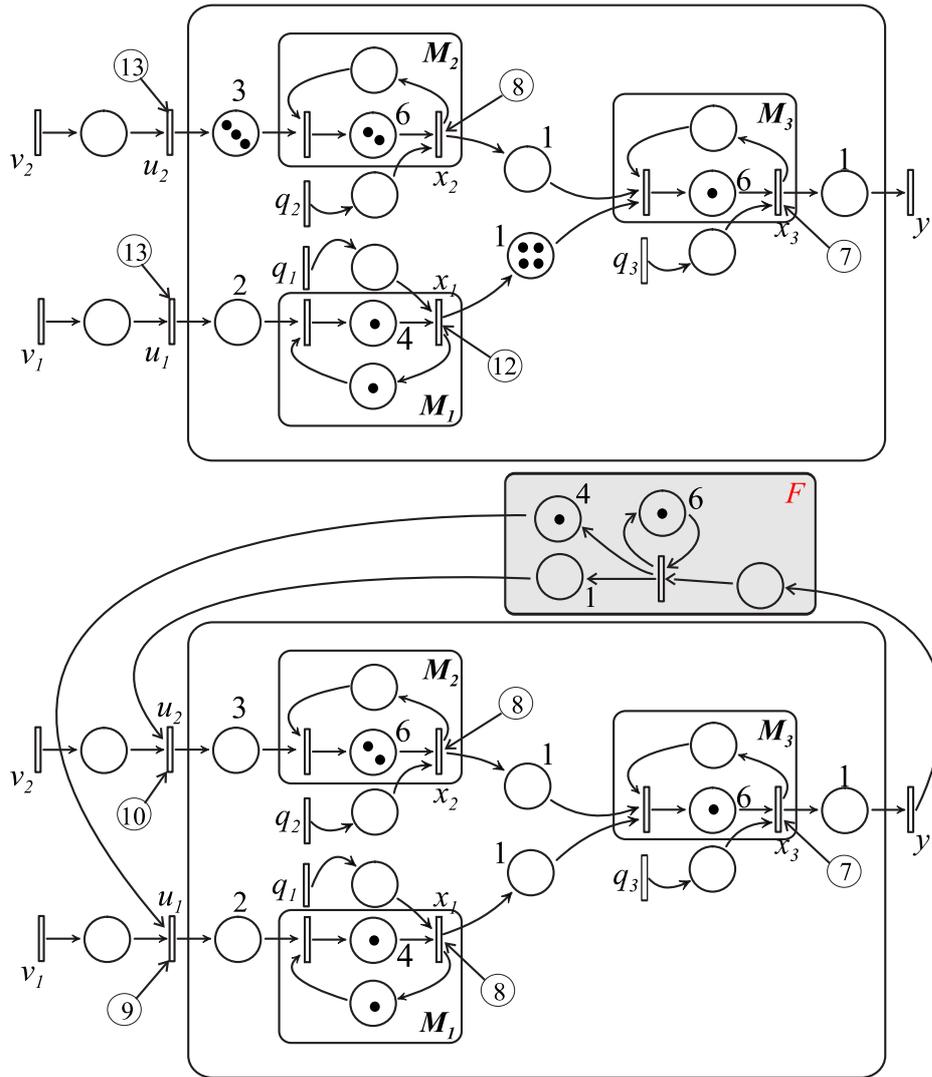


Figure 5.13 – Représentation du GET à l’instant 100 avec et sans correcteur. Les  $\textcircled{n}$  indiquent pour chaque transition le nombre de franchissements effectifs à l’instant 100. On remarque, dans le cas du GET en boucle fermée, que les places internes contiennent moins de jetons.



# Table des matières

---

<b>Notations</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>xiii</b>
<b>1 Outils algébriques</b>	<b>1</b>
1.1 Introduction	1
1.2 Structures ordonnées et treillis	2
1.2.1 Structures ordonnées	2
1.2.2 Demi-treillis et treillis	3
1.3 Idéaux et filtres	6
1.3.1 Idéaux	6
1.3.2 Filtres	6
1.3.3 Cas d'un treillis	7
1.4 Isotonie, morphismes et continuité	8
1.4.1 Isotonie	8
1.4.2 Morphismes	8
1.4.3 Continuité	9
1.5 Théorie de la résiduation	9
1.5.1 Applications résiduables	10
1.6 Restrictions d'applications	13
1.6.1 Résiduation contrainte	14
1.7 Fermetures	15
1.7.1 Fermeture et résiduation	17
1.8 Correspondances de Galois	18
1.8.1 Lien entre correspondance de Galois et résiduation	20
1.9 Monoïdes et dioïdes : approche combinatoire	21
1.9.1 Sous-dioïde	21
1.9.2 Calcul matriciel dans les dioïdes	22
1.9.3 Séries formelles dans les dioïdes	22
1.10 Dioïdes et structures ordonnées	22
1.10.1 Dioïdes canoniquement ordonnés	23
1.10.2 Dioïdes et treillis	23
1.10.3 Dioïde complet	24
1.10.4 Dioïde distributif	25
1.10.5 Morphismes de dioïdes	25
1.10.6 Congruence et dioïde quotient	25
1.11 Théorie de la résiduation appliquée aux dioïdes	26
1.11.1 Applications résiduables sur les dioïdes complets	26
1.11.2 Fermetures résiduables sur les dioïdes complets	27
1.12 Noyaux, images	28
1.13 Projecteurs	30

1.13.1	Projection parallèlement au noyau d'une application . . . . .	30
1.13.2	Projection dans l'image d'une application . . . . .	30
1.13.3	Projecteurs dans l'image d'une application parallèlement au noyau d'une autre application . . . . .	31
1.13.4	Équations implicites linéaires dans les dioïdes . . . . .	31
1.13.5	Résiduation matricielle . . . . .	34
1.14	Conclusion . . . . .	35
<b>2</b>	<b>Comportement linéaire des GET dans les dioïdes</b>	<b>37</b>
2.1	Introduction . . . . .	37
2.2	Modélisation de systèmes à événements discrets par réseaux de Petri . . . . .	38
2.2.1	Les réseaux de Petri . . . . .	38
2.2.2	Définitions et notations . . . . .	38
2.2.3	Tir des transitions . . . . .	39
2.2.4	Ensemble des marquages accessibles . . . . .	40
2.2.5	Modélisation des systèmes à événements discrets . . . . .	41
2.2.6	Quelques propriétés des RdP . . . . .	41
2.3	Les graphes d'événements temporisés . . . . .	42
2.3.1	Propriétés des graphes d'événements . . . . .	43
2.3.2	Introduction du temps dans les graphes d'événements . . . . .	43
2.4	Représentation d'état des graphes d'événements temporisés . . . . .	44
2.4.1	Dateurs, forme implicite . . . . .	44
2.4.2	Forme explicite "ARMA", forme d'état . . . . .	46
2.4.3	Quelques éléments de théorie spectrale des matrices $(\max, +)$ . . . . .	47
2.5	Relation entrée-sortie d'un GET . . . . .	49
2.5.1	Réponse impulsionnelle . . . . .	50
2.6	La transformée en $\gamma$ . . . . .	50
2.6.1	Définition . . . . .	51
2.6.2	Propriétés de la transformée en $\gamma$ . . . . .	51
2.6.3	Matrice de transfert . . . . .	52
2.6.4	Filtrage des trajectoires monotones . . . . .	53
2.6.5	Simplifications . . . . .	54
2.6.6	Transformée en $\delta$ . . . . .	55
2.7	Représentation bi-dimensionnelle : dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . . . . .	56
2.7.1	Dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ . . . . .	56
2.7.2	Construction du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . . . . .	57
2.7.3	Manipulation des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ et règles de simplification . . . . .	57
2.7.4	Représentation graphique des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . . . . .	58
2.7.5	Exemples de calculs sur des polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . . . . .	59
2.7.6	Modélisation des graphes d'événements temporisés sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . . . . .	60
2.8	Réalisabilité, rationalité et périodicité . . . . .	61
2.9	Conclusion . . . . .	64

<b>3</b>	<b>Commande et analyse de la robustesse de systèmes <math>(\max, +)</math>-linéaires</b>	<b>65</b>
3.1	Introduction . . . . .	65
3.2	Préliminaires algébriques . . . . .	66
3.3	Commande en boucle ouverte . . . . .	68
3.3.1	Formulation du problème . . . . .	68
3.3.2	Analyse de la robustesse . . . . .	68
3.3.3	Illustration . . . . .	70
3.4	Commande en boucle fermée : synthèse d'un retour de sortie . . . . .	73
3.4.1	Formulation du problème . . . . .	74
3.4.2	Retour de sortie - analyse de la robustesse . . . . .	76
3.4.3	Formulation du problème . . . . .	76
3.4.4	Illustration . . . . .	77
3.5	Conclusion . . . . .	79
<b>4</b>	<b>Synthèse de contrôleurs robustes pour les GET</b>	<b>81</b>
4.1	Introduction . . . . .	81
4.2	Résultats préliminaires . . . . .	82
4.2.1	Dioïde $C(\mathcal{D})$ . . . . .	82
4.2.2	Propriétés du dioïde $C(\mathcal{D})$ . . . . .	83
4.2.3	Résiduation dans $C(\mathcal{D})$ . . . . .	83
4.2.4	Dioïde $C_0(\mathcal{D})$ . . . . .	84
4.3	Dioïde et analyse par intervalles . . . . .	85
4.3.1	Résiduation d'inéquations linéaires dans le dioïde $I(\mathcal{D})$ . . . . .	88
4.3.2	Matrices d'intervalles . . . . .	89
4.4	Graphes d'événements temporisés et analyse par intervalles . . . . .	89
4.4.1	Incertitudes de modélisation . . . . .	89
4.4.2	Représentation d'état incertaine . . . . .	90
4.5	Synthèse de contrôleurs robustes . . . . .	91
4.5.1	Présentation du problème standard . . . . .	92
4.5.2	Formulation du problème de commande robuste . . . . .	93
4.6	Exemple d'application . . . . .	95
4.6.1	Choix du modèle de référence . . . . .	97
4.7	Conclusion . . . . .	102
<b>5</b>	<b>Commande de systèmes <math>(\max, +)</math>-linéaires en présence de perturbations</b>	<b>103</b>
5.1	Introduction . . . . .	103
5.2	Notations et préliminaires algébriques . . . . .	104
5.2.1	Les sous-ensembles $A$ -invariants . . . . .	105
5.2.2	Les sous-ensembles $(A, B)$ -invariants . . . . .	106
5.3	Commande en présence de perturbations . . . . .	108
5.3.1	Commande en boucle ouverte . . . . .	108
5.3.2	Commande en boucle fermée . . . . .	111
5.3.3	Récapitulatif des résultats . . . . .	119
5.4	Prise en compte d'une commande . . . . .	121
5.4.1	Correcteur de type retour d'état . . . . .	121
5.4.2	Correcteur de type retour de sortie . . . . .	123

5.5	Illustration . . . . .	124
5.5.1	Synthèse de correcteur de type retour de sortie accroissant l'état et laissant la sortie inchangée . . . . .	126
5.6	Conclusion . . . . .	132
<b>Table des matières</b>		<b>135</b>
<b>A</b>	<b>MinMaxGD : librairie de Calcul dans le dioïde <math>\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]</math></b>	<b>141</b>
A.1	MinMaxGD : librairie de Calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . . . . .	141
A.1.1	Introduction . . . . .	141
A.2	Syntaxe générale . . . . .	144
A.3	Exemples . . . . .	144
A.3.1	Analyse de la robustesse . . . . .	144
A.3.2	Synthèse de contrôleurs robustes . . . . .	145
A.3.3	Commande en présence de perturbations . . . . .	147
<b>Bibliographie</b>		<b>151</b>

# **Annexes**



## MinMaxGD : librairie de Calcul dans le dioïde

$$\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$$

### A.1 MinMaxGD : librairie de Calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

#### A.1.1 Introduction

La librairie MinMaxGD<sup>1</sup> [Cottenceau et al., 2000] se présente comme un ensemble de routines écrites en C++, liées au logiciel Scilab<sup>2</sup>. Cette librairie permet de manipuler des séries rationnelles dans le dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ .

Une partie des travaux de thèse a porté sur le développement des interfaces entre la librairie C++ et Scilab<sup>3</sup>.

Notons également que le groupe Max Plus de l'INRIA a également développé<sup>4</sup> une librairie pour Scilab, permettant le calcul dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ .

Dans la suite de cette annexe, on trouvera l'ensemble des scripts Scilab utilisés pour effectuer les calculs des différents exemples de ce mémoire.

Tout d'abord, nous allons découvrir l'utilisation de la MinMaxGD dans Scilab à travers un exemple. L'exemple traité dans la suite correspond à l'illustration présentée dans la section 3.3.3. Il s'agit de caractériser l'ensemble des systèmes préservant les performances de la commande optimale.

```

=====
scilab-2.7
Copyright (C) 1989-2003 INRIA/ENPC
=====

```

```

Startup execution:
loading initial environment

```

<sup>1</sup>Disponible librement à l'adresse [www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html](http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html)

<sup>2</sup>Le logiciel Scilab est disponible à l'adresse : [www.scilab.org](http://www.scilab.org)

<sup>3</sup>Nous en profitons une nouvelle fois pour remercier J.-P. Chancelier (ENPC) pour les multiples réponses et conseils qu'il nous a fournis lors de cette phase de développement

<sup>4</sup>Cette librairie est disponible librement à l'adresse [www.scilab.org/contributions](http://www.scilab.org/contributions). Plus récemment un site dédié à l'algèbre Max Plus a été développé par l'équipe Max Plus de l'INRIA : [www.maxplus.org](http://www.maxplus.org), le lecteur trouvera de nombreuses informations (cours, articles, logiciels, ...) concernant l'algèbre Max Plus sur ce site.

Commençons par charger la librairie dans l'environnement Scilab

```
-->exec('C:\scilab2.7\contrib\Minmaxgd0.9b1\loader.sce');disp('exec done');
shared archive loaded

exec done
```

La commande `A = smatrix(m,n)` permet de déclarer une matrice (notée  $A$ ) de  $m$  lignes et  $n$  colonnes. Après la déclaration, tous les termes de la matrices sont initialisés à  $\varepsilon$ . Nous définissons maintenant les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  du système :

```
-->A = smatrix(6,6);
-->B = smatrix(6,2);
-->C = smatrix(1,6);
```

Passons à l'initialisation des termes de la matrice. L'initialisation s'effectue à l'aide de la commande `series`. Par exemple pour une série  $s = \gamma\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^8(\gamma^2\delta^5)^*$  la syntaxe serait la suivante `s = series([1 2],[5 8],[2 5])`. Les lignes suivantes permettent d'initialiser les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  du système :

```
-->A(1,2) = series(eps,[1 0],e);
-->A(2,1) = series(eps,[0 2],e);
-->A(3,4) = series(eps,[1 0],e);
-->A(4,3) = series(eps,[0 5],e);
-->A(5,2) = series(eps,[0 1],e);
-->A(5,4) = series(eps,[0 3],e);
-->A(5,6) = series(eps,[3 0],e);
-->A(6,5) = series(eps,[0 2],e);
-->B(1,1) = series(eps,[0 1],e);
-->B(3,2) = series(eps,[0 2],e);
-->C(1,6) = s_e
```

Dans l'exemple, nous commençons par le calcul de la fonction de transfert du système  $H = CA^*B$ , dans Scilab ce calcul est donné par les lignes suivantes :

```
-->H = C*stargd(A)*B
ans =
```

```
[1,1] eps+(g^0d^6)[g^1d^2]*
[1,2] eps+(g^0d^12)[g^1d^5]*
```

Initialisation de la consigne (demande du client)  $z = \delta^{12} \oplus \gamma\delta^{27} \oplus \gamma^4\delta^{32}(\gamma\delta^5)^* \oplus \gamma^{12}\delta^{+\infty}$

```
-->z = series([0 12; 1 27],[4 32],[1 5]) + series(eps,[12 %inf],e)
z =
```

```
[1,1] g^0d^12+g^1d^27+g^4d^32+g^5d^37+g^6d^42+g^7d^47+g^8d^52+g^9d^57+
g^10d^62+g^11d^67+(g^12d^+*)[g^0d^+]*
```

Calcul de la commande optimale  $u_{opt} = H \setminus z$  est donné par

```
-->uopt = H \ z
uopt =
```

```
[1,1] g^0d^6+g^1d^17+g^2d^19+g^3d^21+g^4d^26+g^5d^31+g^6d^36+
g^7d^41+g^8d^46+g^9d^51+g^10d^56+g^11d^61+(g^12d^+*)[g^0d^+]*
[2,1] g^0d^0+g^1d^5+g^2d^10+g^3d^15+g^4d^20+g^5d^25+g^6d^30+
g^7d^35+g^8d^40+g^9d^45+g^10d^50+g^11d^55+(g^12d^+*)[g^0d^+]*
```

La sortie  $y_{opt} = H u_{opt}$  correspondante à la commande optimale  $u_{opt}$  vaut

```
-->yopt = H * uopt
yopt =
```

```
[1,1] g^0d^12+g^1d^23+g^2d^25+g^3d^27+g^4d^32+g^5d^37+g^6d^42+
g^7d^47+g^8d^52+g^9d^57+g^10d^62+g^11d^67+(g^12d^+*)[g^0d^+]*
```

Le plus grand transfert  $H_{sup}$  préservant le critère de juste-à-temps est donné par

```
-->Hsup = z / uopt
Hsup =
```

```
[1,1] g^0d^6+g^1d^8+g^2d^10+g^3d^15+g^4d^20+g^5d^25+g^6d^30+g^7d^35+
g^8d^40+g^9d^45+g^10d^50+g^11d^61+(g^12d^+*)[g^0d^+]*
[1,2] g^0d^12+g^1d^17+g^2d^22+g^3d^27+g^4d^32+g^5d^37+g^6d^42+g^7d^47+
g^8d^52+g^9d^57+g^10d^62+g^11d^67+(g^12d^+*)[g^0d^+]*
```

On considère le transfert  $H_r$  représentant le comportement réel du système :

```
-->Hr = [series([0 6;1 8;2 10],[3 12],[1 4]) series(eps,[0 12],[1 5])]
Hr =
```

```
[1,1] g^0d^6+g^1d^8+g^2d^10+(g^3d^12)[g^1d^4]*
[1,2] eps+(g^0d^12)[g^1d^5]*
```

Vérifions si la commande optimale pour ce nouveau transfert  $H_r$  s'exprimant par

```
-->uopt2 = Hr \ z
uopt2 =
```

```
[1,1] g^0d^6+g^1d^17+g^2d^19+g^3d^21+g^4d^26+g^5d^31+g^6d^36+g^7d^41+
g^8d^46+g^9d^51+g^10d^56+g^11d^61+(g^12d^+*) [g^0d^+*]*
[2,1] g^0d^0+g^1d^5+g^2d^10+g^3d^15+g^4d^20+g^5d^25+g^6d^30+g^7d^35+
g^8d^40+g^9d^45+g^10d^50+g^11d^55+(g^12d^+*) [g^0d^+*]*
```

est égale à la commande optimale déterminée pour le modèle nominal :

```
-->uopt == uopt2
ans =
```

```
! T !
! T !
```

## A.2 Syntaxe générale

MinMaxGD reconnaît les types élémentaires suivants : type série (noté *series*) et le type matrice (noté *smatrix*) correspondant au dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ . MinMaxGD reconnaît les opérations algébriques de base suivantes (pour deux éléments  $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ ) :

opération	syntaxe
$\oplus$ (somme)	$a + b$
$\otimes$ (produit)	$a * b$
$\oslash$ (résiduation à droite)	$a / b$
$\oslash$ (résiduation à gauche)	$b \setminus a$
$*$ (étoile de Kleene)	$stargd(a)$
$Pr_+$ (projection dans les causaux)	$prcaus(a)$
$\wedge$ (inf)	$a \wedge b$

## A.3 Exemples

### A.3.1 Analyse de la robustesse

On donne dans la suite le script Scilab commenté de l'exemple d'atelier traité dans la partie 3.4.4

```
1 //Transfert du système en boucle ouverte.
2 H = [series(eps,[0 6],[1 2]) series(eps,[0 13],[1 5])]
3
4 //Détermination du modèle de référence.
```

```

5 Gref = series(eps,e,[1 5]) * H
6
7 //Calcul du correcteur optimal (noté Fopt) de type retour de sortie
8 //tel que MH(Fopt) <= Gref.
9 Fopt = H \ Gref / H;
10
11 //Calcul du plus grand correcteur causal Fopt+
12 Fopt_p = prcaus(Fopt)
13
14 //D'après la proposition 3.19 le plus grand transfert Hsup est donné par
15 Hsup = stargd(H * Fopt_p)*H
16
17 //En considérant Hr=Hsup, c'est-à-dire que le comportement réel du système
18 //est égal à Hsup
19 Hr = Hsup
20
21 //alors le transfert entrée-sortie en boucle fermée vaut
22 Hrbf = stargd(Hsup*Fopt_p)*Hsup
23
24 //Vérifions si le feedback Fopt_p calculé pour le modèle nominal est
25 //toujours optimal
26 Fopt_p2 = prcaus( Hsup \ Gref / Hsup)
27
28 Fopt_p2 == Fopt_p

```

### A.3.2 Synthèse de contrôleurs robustes

L'exemple traité ci-dessous correspond à l'illustration de la section 4.6 sur la synthèse de contrôleurs robustes permettant de stabiliser un graphe d'événements temporisé.

```

1 //Déclaration des variables Am,Bm,Cm,Ap,Bp et Cp
2 //On a A=[Am,Ap], B=[Bm,Bp] et C=[Cm,Cp]
3
4 Am = smatrix(3,3);
5 Ap = smatrix(3,3);
6 Bm = smatrix(3,2);
7 Bp = smatrix(3,2);
8 Cm = smatrix(1,3);
9 Cp = smatrix(1,3);
10
11 // Paramètres du système
12 // n1m,t1m : n1m/t1m taux de production (le plus lent) de la machine M1
13 // n2m,t2m : n2m/t2m taux de production (le plus lent) de la machine M2
14 // n3m,t3m : n3m/t3m taux de production (le plus lent) de la machine M3
15
16 // n1p,t1p : n1p/t1p taux de production (le plus rapide) de la machine M1
17 // n2p,t2p : n2p/t2p taux de production (le plus rapide) de la machine M2
18 // n3p,t3p : n3p/t3p taux de production (le plus rapide) de la machine M3
19
20 // t4m,t5m : delais (le plus lent) M1->M3 M2->M3 */
21 // t4p,t5p : delais (le plus rapide) M1->M3 M2->M3 */

```

```

22
23 n1m=2; t1m=2; n2m=2; t2m=3; n3m=3; t3m=2;
24 n1p=1; t1p=5; n2p=1; t2p=3; n3p=1; t3p=3;
25 t4m=3; t5m=2;
26 t4p=4; t5p=6;
27
28 Am(1,1) = series(eps,[n1m t1m],e);
29 Am(2,2) = series(eps,[n2m t2m],e);
30 Am(3,1) = series(eps,[0 t4m],e);
31 Am(3,2) = series(eps,[0 t5m],e);
32 Am(3,3) = series(eps,[n3m t3m],e);
33
34 Ap(1,1) = series(eps,[n1p t1p],e);
35 Ap(2,2) = series(eps,[n2p t2p],e);
36 Ap(3,1) = series(eps,[0 t4p],e);
37 Ap(3,2) = series(eps,[0 t5p],e);
38 Ap(3,3) = series(eps,[n3p t3p],e);
39
40 Bm(1,1) = s_e;
41 Bm(2,2) = s_e;
42
43 Bp = Bm;
44
45 Cm(1,3) = s_e;
46 Cp = Cm;
47
48 // Calcul de l'équation d'état X=[Xm,Xp]
49
50 Xm = stargd(Am)*Bm;
51 Xp = stargd(Ap)*Bp;
52
53 // Calcul de la fonction de transfert entrée sortie H=[Hm,Hp]
54
55 Hm = Cm*Xm;
56 Hp = Cp*Xp;
57
58 //*****/
59 // Taux de production de la machine bouchon
60
61 lambdam = min(min(n1m/t1m,n2m/t2m),n3m/t3m);
62 lambdap = min(min(n1p/t1p,n2p,t2p),n3p/t3p);
63
64 lambda = max(lambdam,lambdap)
65
66 //*****/
67 // Calcul du nombre de jetons à mettre dans le feedback
68
69 Wnc1 = ceil(lambda*t4p)
70 Wnc2 = ceil(lambda*t5p)
71
72 //*****/
73 // Le correcteur stabilisant (noté Fro) le GET et

```

```

74 // minimisant le nombre de jetons est donné par
75
76 Fro = smatrix(2,1);
77
78 Fro(1,1) = series(eps,[Wnc1 0],e);
79 Fro(2,1) = series(eps,[Wnc2 0],e);
80
81 //*****/
82 // Le modèle de référence est donné par Gref=H(Fro*H)*
83 // Gref=[Grefm,Grefp]
84
85 Grefm = Hm*stargd(Fro*Hm)
86 Grefp = Hp*stargd(Fro*Hp)
87
88 //*****/
89 // L'intervalle de correcteurs optimaux est donné par
90 // Fro+=prcaus(H \ Gbf / H)
91
92 From = prcaus(Hm \ Grefm / Hm)
93 Fropp = prcaus(Hp \ Grefp / Hp)

```

### A.3.3 Commande en présence de perturbations

L'exemple traité ci-dessous correspond à l'illustration de la section 5.5 sur la synthèse de correcteurs appliqués à la commande en présence de perturbations.

```

1 //Déclaration des variables A,B,C et C
2 //X = AX B BU et Y=CX
3
4 A = smatrix(3,3);
5 B = smatrix(3,2);
6 C = smatrix(1,3);
7 S = smatrix(3,3);
8
9 // Paramètres du système
10 //Initialisation des matrices
11
12 A(1,1) = series(eps,[2 4],e);
13 A(2,2) = series(eps,[2 6],e);
14 A(3,1) = series(eps,[0 7],e);
15 A(3,2) = series(eps,[0 7],e);
16 A(3,3) = series(eps,[1 6],e);
17
18 B(1,1) = series(eps,[0 6],e);
19 B(2,2) = series(eps,[0 9],e);
20
21 C(1,3) = series(eps,[0 1],e);
22
23 S(1,1) = s_e;
24 S(2,2) = s_e;
25 S(3,3) = s_e;

```

```

26
27 // Calcul des équations d'état
28 // AS : equation d'état
29 // AB : equation d'état
30
31 AS = stargd(A)*S;
32 AB = stargd(A)*B;
33
34 // Calcul de des fonctions de transfert en boucle ouverte
35 //Hq : matrice reliant la perturbation q à la sortie y
36 //Hu : matrice reliant l'entrée u à la sortie y
37 Hq = C*AS
38 Hu = C*AB
39
40
41 // Calcul du correcteur de type retour de sortie
42 // accroissant le vecteur d'état
43 F1 = prcaus(Hu \ Hq / Hq)
44
45 //Correcteur final (prise en compte d'une consigne)
46 F = F1 ^ prcaus(Hu \ Hu / Hu)
47
48
49 // Comparaison de la matrice de transfert entre l'état
50 // et la perturbation en boucle ouverte et de la matrice
51 // de transfert entre l'état et la perturbation en boucle fermée
52 stargd(A + B*F*C)*S
53 // En boucle ouverte :
54 AS
55
56 //Fonction de transfert entre la perturbation q et la sortie y
57 Hqbf = C*stargd(A + B*F*C)*S
58
59 // Trajectoires de l'entrée v
60 v1 = series(eps,[0 20],[1 6])
61 v2 = series(eps,[0 20],[1 6])
62
63 v = [v1 ; v2]
64
65 // Etat en boucle ouverte (avec une consigne sans perturbations)
66 Xv = AB*v
67 // Sortie associée à cette état
68 ybv = C*Xv
69
70 //Trajectoires de la perturbation
71 q1 = s_eps;
72 q2 = series(eps,[6 85],[1 0]);
73 q3 = s_eps;
74
75 q = [q1 ; q2 ; q3]
76
77 //Etat en boucle ouverte (avec une consigne et une perturbation

```

```
78 X = AS*q + AB*v
79 //sortie associée
80 y = C*X
81
82 //sortie générée par le correcteur
83 u = F*y + v
84
85 //état en boucle fermée
86 xbf = stargd(A + B*F*C)*S*q + stargd(A + B*F*C)*B*v
87
88 //Sortie du système en boucle fermée
89 ybf = C*xbf
90 //à comparer avec la sortie en boucle ouverte
91 y
```



# Bibliographie

---

- [Akian et al., 2002] Akian, M., Gaubert, S., and Kolokolstov, V. (2002). Invertibility of functional galois connections. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 335(11):883–888.
- [Alazard et al., 1999] Alazard, D., Cumer, C., Apkarian, P., Gauvrit, M., and Ferreres, G. (1999). *Robustesse et Commande Optimale*. Cépaduès-Éditions, Toulouse, France.
- [Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.-J., and Quadrat, J.-P. (1992). *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons. <http://maxplus.org/>.
- [Baccelli et al., 1995] Baccelli, F., Foss, S., and B.Gaujal (1995). Free-choice Petri nets : the algebraic approach. In *34th Conf. On Dec. & Cont.*, New Orleans.
- [Baccelli et al., 1996] Baccelli, F., Foss, S., and B.Gaujal (1996). Free-choice Petri nets : an algebraic approach. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(12):1751–1778.
- [Basile and Marro, 1992] Basile, T. and Marro, M. (1992). *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice Hall.
- [Birkhoff, 1940] Birkhoff, G. (1940). *Lattice theory*. Number XXV. Providence, Rhode Island.
- [Blyth and Janowitz, 1972] Blyth, T.-S. and Janowitz, M.-F. (1972). *Residuation Theory*. Pergamon press.
- [Brams, 1983] Brams, G.-W. (1983). *Réseaux de Petri : théorie et pratique*. Masson, Paris, France.
- [Chretienne, 1983] Chretienne, P. (1983). *Les Réseaux de Petri Temporisés*. Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, France.
- [Cohen, 1998a] Cohen, G. (1998a). Residuation and applications. In *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique*, Noirmoutier, France.
- [Cohen, 1998b] Cohen, G. (1998b). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. In *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique*, Noirmoutier, France.
- [Cohen, 2001] Cohen, G. (2001). *Analisis y Control de Sistemas de Eventos Discretos : de Redes de Petri Temporizadas al algebra*. CUADERNOS Del Instituto de Matematica "BEPPO LEVI". Universidad Nacional de Rosario, Argentine.
- [Cohen et al., 1983] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1983). Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France.
- [Cohen et al., 1985] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1985). A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 30(3):210–220.
- [Cohen et al., 1991] Cohen, G., Gaubert, S., Nikoukhah, R., and Quadrat, J.-P. (1991). Second Order Theory of Min-linear Systems and its Application to Discrete Event Systems. In *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, England.
- [Cohen et al., 1996] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1996). Kernels, images and projections in dioids. In *Proceedings of WODES'96*, Edinburgh.

- [Cohen et al., 1997] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1997). Linear projectors in the max-plus algebra. In *Proceedings of the IEEE-Mediterranean Conference*, Cyprus.
- [Cohen et al., 1998a] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.-P. (1998a). Algebraic System Analysis of Timed Petri Nets. In Gunawardena, J., editor, *Idempotency*, Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press.
- [Cohen et al., 1998b] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.-P. (1998b). Max-plus algebra and system theory : Where we are and where to go now. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes, France.
- [Cohen et al., 1984] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1984). Linear system theory for discrete-event systems. In *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada.
- [Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1):39–58.
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Cottenceau et al., 1999] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (1999). Synthesis of Greatest Linear Feedback for TEG in Dioid. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 44(6):1258–1262.
- [Cottenceau et al., 2001] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (2001). Model Reference Control for Timed Event Graphs in Dioid. *Automatica*, 37:1451–1458.
- [Cottenceau et al., 2000] Cottenceau, B., Lhommeau, M., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2000). Data Processing Tool for Calculation in Dioid. In *Workshop On Discrete Event Systems (WODES'2000)*, Ghent, Belgium.
- [Cottenceau et al., 2003] Cottenceau, B., Lhommeau, M., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2003). On Timed Event Graphs Stabilization by Output Feedback in Dioid. *Kybernetika*, 39(2):165–176.
- [Cuninghame-Green, 1979] Cuninghame-Green, R.-A. (1979). *Minimax Algebra*. Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer.
- [David and Alla, 1989] David, R. and Alla, H. (1989). *Du grafcet aux réseaux de Petri*. Hermès, Paris, France.
- [Dubreil and Dubreil-Jacotin, 1964] Dubreil, P. and Dubreil-Jacotin, M. (1964). *Leçons d'Algèbre Moderne*, 2nd ed. Dunod, Paris.
- [Dubreil-Jacotin et al., 1953] Dubreil-Jacotin, M.-L., Lesieur, L., and Croisot, R. (1953). *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, volume XXI of *Cahiers Scientifiques*. Gauthier Villars, Paris, France.
- [Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). *Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes*. Thèse, École des Mines de Paris.
- [Gaubert, 1995] Gaubert, S. (1995). Resource Optimization and (min,+) Spectral Theory. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(11):1931–1934.
- [Gaubert and Katz, 2003] Gaubert, S. and Katz, R. (2003). Rational semimodules over the max-plus semiring and geometric approach of discrete event systems. to appear in *Kybernetika*.

- [Gondran and Minoux, 1979] Gondran, M. and Minoux, M. (1979). *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, France. Engl. transl. *Graphs and Algorithms*, Wiley, 1984.
- [Gondran and Minoux, 2001] Gondran, M. and Minoux, M. (2001). *Graphes, dioïdes et semi-anneaux*. Tec & Doc, Paris, France.
- [Gruet, 1995] Gruet, B. (1995). Structure de commande en boucle fermée des systèmes à événements discrets. Rapport de stage de DEA, DEA Automatique et Informatique Appliquée, Ecole Centrale de Nantes, France.
- [Gunawardena, 1998] Gunawardena, J., editor (1998). *Idempotency*. Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press.
- [Houssin, 2003] Houssin, L. (2003). Contribution à l'étude des systèmes à événements discrets dans l'algèbre des dioïdes. Applications aux systèmes de transport. Rapport de stage de DEA, DEA Automatique et Informatique Appliquée, Nantes-Angers, France.
- [Jaulin et al., 2001] Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., and Walter, E., editors (2001). *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer-Verlag, London.
- [Klimann, 2003] Klimann, I. (2003). A solution of the problem of (AB)-invariance for series. *Theoretical Computer Science*, 293(1):115–139.
- [Lüders and Santos-Mendes, 2002] Lüders, R. and Santos-Mendes, R. (2002). Multivariable control of discrete event systems in dioids. In *IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona.
- [Le Boudec and Thiran, 2001] Le Boudec, J.-Y. and Thiran, P. (2001). *Newtork Calculus*. Springer-Verlag. [http://icalwww.epfl.ch/PS\\_files/NetCal.htm](http://icalwww.epfl.ch/PS_files/NetCal.htm).
- [Lhommeau et al., 2001a] Lhommeau, M., Hardouin, L., and Cottenceau, B. (2001a). A propos de la commande optimale de systèmes à événements discrets décrits dans les dioïdes. In *Journées Doctorales d'Automatique (JDA'2001)*, Toulouse, France.
- [Lhommeau et al., 2002a] Lhommeau, M., Hardouin, L., and Cottenceau, B. (2002a). Disturbance Decoupling of Timed Event Graphs by Output Feedback Controller. In *Workshop On Discrete Event Systems (WODES'2002)*, Zaragoza, Spain.
- [Lhommeau et al., 2002b] Lhommeau, M., Hardouin, L., and Cottenceau, B. (2002b). Sur le rejet de perturbation dans les dioïdes. In *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'2002)*, Nantes, France.
- [Lhommeau et al., 2003a] Lhommeau, M., Hardouin, L., and Cottenceau, B. (2003a). Control for (max,+)-linear systems with disturbance. In *Positive Systems : Theory and Applications (POSTA'2003)*, Rome, Italie.
- [Lhommeau et al., 2001b] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B., and Boimond, J.-L. (2001b). Sur les correcteurs en boucle fermée dans les dioïdes. In *Modélisation des Systèmes Réactifs (MSR'2001)*, Toulouse, France.
- [Lhommeau et al., 2003b] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B., and Jaulin, L. (2003b). Interval analysis in dioid : Application to robust controller design for timed event graphs. Accepted in *Automatica*.
- [Lhommeau et al., 2003c] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B., and Jaulin, L. (2003c). Robust controller design for timed event graphs in dioid. In *Emerging Technologies and Factory Automation (ETFA'2003)*, Lisbon, Portugal.

- [Libeaut, 1996] Libeaut, L. (1996). *Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes à événements discrets*. Thèse, Ecole centrale de Nantes.
- [Libeaut and Loiseau, 1996] Libeaut, L. and Loiseau, J.-J. (1996). On the control of timed event graphs. In *Proceedings of WODES'96*, Edinburgh.
- [Litvinov and Sobolevskiĭ, 2001] Litvinov, G.-L. and Sobolevskiĭ, A.-N. (2001). Idempotent Interval Analysis and Optimization Problems. *Reliable Computing*, 7(5).
- [Lotito et al., 2001] Lotito, P., Mancinelli, E., and Quadrat, J.-P. (2001). A Minplus Derivation of the Fundamental Car-Traffic Law. Research Report 4324, INRIA. <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4324.html>.
- [Maia et al., 2003] Maia, C.-A., Hardouin, L., Santos-Mendes, R., and Cottenceau, B. (2003). Optimal Closed-Loop Control of Timed-Event Graphs in Dioids. To appear in *IEEE Transactions on Automatic Control*.
- [Menguy, 1997] Menguy, E. (1997). *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Menguy et al., 2000] Menguy, E., Boimond, J.-L., Hardouin, L., and Ferrier, J.-L. (2000). Just in Time Control of Timed Event Graphs: Update of Reference Input, Presence of Uncontrollable Input. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(11):2155–2158.
- [Moller, 1988] Moller, P. (1988). *Théorie algébrique des Systèmes à Événements Discrets*. Thèse, École des Mines de Paris.
- [Moore, 1979] Moore, R. (1979). *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM Publ., Philadelphia.
- [Munier, 1993] Munier, A. (1993). Régime asymptotique optimal d'un graphe d'événements temporisé généralisé: application à un problème d'assemblage. *APII*, 27(5):487–513.
- [Murata, 1989] Murata, T. (1989). Petri nets : Properties, analysis and applications. volume 77, pages 541–581.
- [Ore, 1944] Ore, O. (1944). Galois Connexions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 55:493–513.
- [Petri, 1962] Petri, C.-A. (1962). *Kommunikation mit Automaten*. Thèse, Institut für Instrumentelle Mathematik, Bonn, Germany.
- [Picado, ] Picado, J. The Quantale of Galois Connections. <http://www.mat.uc.pt/~picado/preprint/quantale.ps>.
- [Reutenauer, 1989] Reutenauer, C. (1989). *Aspects mathématiques des réseaux de Pétri*. Masson, Paris, France.
- [SW2001, 2001] SW2001 (2001). Software Tools for Manipulating Periodic Series. <http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html>, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/PAPERS/MAX.html>.
- [Terrason et al., 1998] Terrason, J.-C., Cohen, G., Gaubert, S., Gettrick, M.-M., and Quadrat, J.-P. (1998). Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes, France.
- [Trouillet et al., 2001] Trouillet, B., Benasser, A., and Gentina, J.-C. (2001). Sur la modélisation du comportement dynamique des graphes d'événements pondérés. In Juanole, G. and Valette, R., editors, *MSR'2001*, pages 447–462, Toulouse, France. Hermès.

- 
- [Wang and Desoer, 1972] Wang, S. and Desoer, C. (1972). The exact model matching of linear multivariable systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 17(3):347–349.
- [Wolowich, 1974] Wolowich, W.-A. (1974). *Linear Multivariable Systems*. Springer Verlag.
- [Wonham, 1985] Wonham, W.-M. (1985). *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach, 3rd edition*. Springer Verlag.
- [Wonham and Morse, 1970] Wonham, W.-M. and Morse, A.-S. (1970). Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems : a geometric approach. *SIAM Journal on Control*, pages 1–18.



# Index

---

- application
  - antitone, 8
  - continuité, 9
  - correspondances de Galois, 18
  - fermeture, 15
  - fermeture et résiduation, 17
  - isotone, 8
  - résiduée, 12
  - résiduable, 10
  - résiduation contrainte, 14
  - restreinte, 13
  - restrictions, 13
- diagramme de Hasse, 2
- dioïde
  - $C_0(\mathcal{D})$ , 84
  - $C(\mathcal{D})$ , 82
  - $I(\mathcal{D})$ , 86
  - $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , 56
  - canoniquement ordonné, 23
  - complet, 24
  - congruence, 25
  - distributif, 25
  - equations implicites, 31
  - fermeture résiduable, 27
  - homomorphisme, 25
  - isomorphisme, 25
  - matriciel, 22
  - noyaux, 28
  - projecteurs, 30
  - quotient, 25
  - résiduation, 26
  - résiduation matricielle, 34
  - series formelles, 22
  - sous-dioïde, 21
- filtres, 6
- graphes d'événements temporisés, 42
- graphes d'événements temporisés incertains, 89
- idéaux, 6
- monoïde, 21
- morphismes, 8
- réseaux de Petri, 38
- relation d'ordre, 2
- série
  - causale, 62
  - périodique, 62
  - penne ultime, 63
  - réalisable, 62
  - rationnelle, 62
- treillis
  - complet, 5
  - filtres, 7
  - idéaux, 7
  - sous-treillis, 4





# Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre $(\max, +)$ . Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations.

Mehdi LHOMMEAU

## Résumé

Les systèmes dynamiques à événements discrets mettant en jeu des phénomènes de synchronisation peuvent être modélisés par des équations linéaires dans les algèbres de type  $(\max, +)$ . Cette propriété a motivé l'élaboration de ce que l'on appelle communément la théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Cette théorie présente de nombreuses analogies avec la théorie conventionnelle des systèmes linéaires continus et permet notamment d'aborder des problèmes de commandes.

La première contribution concerne l'analyse de la robustesse de lois de commandes pour des systèmes  $(\max, +)$ -linéaires. L'objectif est de caractériser l'ensemble des systèmes préservant les performances recherchées lors de la synthèse. Autrement dit, nous cherchons à caractériser les marges de variations ou dérives du système admissibles vis à vis des critères de performances imposés.

Ensuite, le problème de commande robuste est considéré. Cette fois nous supposons connue, sous forme d'intervalles, l'amplitude de variation des paramètres du système à commander et nous cherchons l'ensemble des correcteurs permettant d'atteindre un objectif donné. Au préalable est introduit un dioïde d'intervalles, qui permet de modéliser les systèmes incertains sous forme de matrices d'intervalles incluant l'ensemble des comportements possibles du système. La synthèse de contrôleurs présentée dans le cas déterministe s'étend alors naturellement au contexte incertain.

La dernière partie de ce mémoire traite du problème de commande en présence de perturbations. En se conformant à la littérature sur les systèmes continus conventionnels, nous montrons que ce problème présente de fortes analogies avec le problème classique du rejet de perturbations. Il est notamment montré qu'il est possible de synthétiser des contrôleurs optimaux préservant l'état du système dans le noyau de la matrice de sortie.

**Mots-clés :** graphes d'événements temporisés, dioïdes, robustesse, commande en présence de perturbations, algèbre  $(\max, +)$ , analyse par intervalles

## Abstract

Discrete event dynamic systems involving synchronization phenomena can be modelled by linear equations in some dioids. This property justified the development of what one commonly calls linear system theory in dioids. This theory presents many analogies with the classical linear system theory and allows to tackle control problems.

The first contribution concerns the robustness analysis of control laws for  $(\max, +)$ -linear systems. The objective is to characterize the set of systems preserving the desired performances at the time of the synthesis. In other words, we try to characterize the acceptable variation margins or drifts for the system with respect to the imposed performances criteria.

Then, the robust control problem is addressed. This time we suppose known, in the form of intervals, the amplitude of parameter variations of the system to be control and we seek the controller set allowing to achieve a given objective. As a preliminary a dioid of intervals is introduced, it makes possible to model the uncertain systems in the form of interval matrices including the set of all possible system behaviors. The controller synthesis presented in the deterministic case spreads then naturally to the uncertain context.

The last part of this report, deals with the problem of control in the presence of disturbances. Following the literature on classical continuous systems, we show that this problem presents strong analogies with the classical problem of disturbance decoupling. In particular it is shown that it is possible to synthesize optimal controllers preserving the system state trajectories in the kernel of the output matrix.

**Keywords:** discrete event systems, dioid, robustness, control in presence of disturbances, interval analysis