

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

2006

Thèse de DOCTORAT

Spécialité : Automatique et Informatique Appliquée

Présentée et soutenue publiquement par

Iteb OUERGI

le 7 décembre 2006

à l'ISTIA - Université d'Angers

**Etude de systèmes $(max, +)$ -linéaires
soumis à des contraintes, application à la
commande des graphes d'événements
P-temporel**

Jury

Président	:		
Rapporteurs	:	Stephane Gaubert, Directeur de recherche INRIA	Rocquencourt
		Bruno Gaujal, Directeur de recherche INRIA	ID-IMAG Montbonnot
Examineurs	:	Marc Bourcerie, Professeur	Université d'Angers
		Alessandro Giua, Professeur	Univ. of Cagliari, Italy
		Laurent Hardouin, Professeur	Université d'Angers
		Jean-Claude Hennet, Directeur de Recherche CNRS	LAAS Toulouse

Directeurs de thèse : Laurent Hardouin et Marc Bourcerie

Laboratoire : LABORATOIRE D'INGÉNIERIE DES SYSTÈMES AUTOMATISÉS. 62, avenue Notre Dame du Lac, F-49000 ANGERS

**ETUDE DE SYSTÈMES $(MAX, +)$ -LINÉAIRES SOUMIS À
DES CONTRAINTES, APPLICATION À LA COMMANDE
DES GRAPHES D'ÉVÉNEMENTS P-TEMPOREL**

Iteb OUERGHI



Université d'Angers

Iteb OUERGI

Etude de systèmes $(max, +)$ -linéaires soumis à des contraintes, application à la commande des graphes d'événements P-temporel

xviii+

Résumé

Les systèmes à événements discrets sont essentiellement caractérisés par des changements d'état (marche-arrêt d'une machine, départ-arrivée d'un train). L'introduction de paramètres temporels permet d'évaluer leur performances (taux de production d'une cellule d'usinage, temps de parcours pour un système de transport). Ces systèmes dynamiques peuvent également faire l'objet de contraintes de temps de séjour (temps maximal de cuisson d'une pièce dans un four, attente maximum d'une correspondance entre trains,...). Ce type de contraintes n'affecte pas uniquement les performances du système mais aussi sa validité fonctionnelle (pièce brûlée, ...). Il apparaît alors primordial de disposer de méthodes d'analyse et de synthèse de commande de ces systèmes afin d'en garantir le bon fonctionnement en dépit de ces contraintes. Nous nous intéressons plus précisément aux modèles de type réseau de Petri P-temporel. L'étude de systèmes du type graphes d'événements P-temporels et leur supervision par un système de commande, conduisent à des modèles $(max, +)$ -linéaires soumis à des contraintes, et rendent nécessaire le développement de nouveaux outils algébriques combinant la théorie des dioïdes et la résiduation. L'objectif de cette thèse est de contribuer à la modélisation, la vérification et la commande des graphes d'événements temporels, et d'élaborer une théorie analogue à celle concernant les graphes d'événements déterministes décrits dans l'algèbre $(max, +)$.

Mots-clés : graphes d'événements temporisés, graphes d'événements P-temporels, dioïdes, commande en juste-à-temps, commande de type boucle fermée, algèbre $(max, +)$, résiduation, analyse par intervalles.

Abstract

Sommaire

Table des matières	vii
Introduction	xi
1 Outils algébriques	1
2 Modélisation des graphes d'événements P-temporel	55
3 Sur la commande optimale en boucle ouverte des GEP-T	85
4 Commande en boucle fermée des graphes d'événements P-temporel	111
Bibliographie	125

Table des matières

Table des matières	vii
Introduction	xi
1 Outils algébriques	1
1.1 Ensembles ordonnés et treillis	1
1.1.1 Structures ordonnées	1
1.1.2 Semi-treillis et treillis	3
1.2 Isotonie, morphismes et continuité	5
1.2.1 Isotonie	5
1.2.2 Morphismes	5
1.2.3 Continuité	7
1.3 Fermetures	7
1.4 Semi-anneau idempotent, Dioïde	11
1.4.1 Sous-dioïde	12
1.4.2 Calcul matriciel dans les dioïdes	12
1.4.3 Séries formelles dans les dioïdes	12
1.5 Dioïdes et structures ordonnées	13
1.5.1 Dioïdes canoniquement ordonnés	13
1.5.2 Dioïdes et treillis	14
1.5.3 Dioïde complet	14
1.5.4 Dioïde distributif	15
1.6 Théorie de la résiduation	16
1.6.1 Morphismes de dioïdes	19
1.6.2 Congruence et dioïde quotient	19
1.6.3 Restrictions d'applications	20
1.6.4 Application dans le contexte des dioïdes	22
1.7 Solutions extrémales et points fixes	24
1.7.1 Équations implicites linéaires dans les dioïdes	27
1.7.2 Fermetures résiduables sur les dioïdes complets	28
1.7.3 Complément sur l'étoile de Kleene	29
1.8 Résiduation duale	31
1.8.1 Cas particulier	34
1.8.2 Résiduation duale et contrainte	40
1.9 Noyaux, images	41
1.10 Projecteurs	42
1.10.1 Projection dans l'image d'une application	42
1.10.2 Projection parallèlement au noyau d'une application	43
1.10.3 Projecteurs dans l'image d'une application parallèlement au noyau d'une autre application	43
1.11 Dioïde et analyse par intervalles	44

1.11.1	Dioïde de couple	45
1.11.2	Dioïde d'intervalles	46
1.11.3	Matrices d'intervalles	49
1.12	Résiduation duale dans un dioïde d'intervalles	49
1.13	Conclusion	53
2	Modélisation des graphes d'événements P-temporel	55
2.1	Rappel sur les réseaux de Petri	56
2.1.1	Tir des transitions	57
2.1.2	Ensemble des marquages accessibles	58
2.1.3	Modélisation des systèmes à événements discrets	58
2.1.4	Quelques propriétés des RdP	59
2.2	Les graphes d'événements temporisés	60
2.2.1	Propriétés des graphes d'événements	60
2.2.2	Les graphes d'événements temporisés	60
2.3	Représentation d'état des graphes d'événements temporisés	61
2.3.1	Dateurs, forme implicite	61
2.3.2	Forme explicite "ARMA", forme d'état	63
2.3.3	Quelques éléments de théorie spectrale des matrices $(\max, +)$	64
2.4	Relation entrée-sortie d'un GET	66
2.4.1	Réponse impulsionnelle	66
2.4.2	La transformée en γ et en δ	67
2.5	Réalisabilité, rationalité et périodicité	70
2.6	Graphes d'événements incertains	72
2.6.1	Graphes d'événements temporisés et analyse par intervalles	73
2.7	Graphes d'événements P-temporels	75
2.7.1	Règle de franchissement pour les GEP-T	76
2.7.2	Modèle algébrique pour les GEP-T	77
2.8	Graphes d'événements P-temporels incertains	81
2.9	Conclusion	83
3	Sur la commande optimale en boucle ouverte des GEP-T	85
3.1	Commande en juste-à-temps des graphes d'événements temporisés	86
3.1.1	Poursuite de trajectoire	86
3.1.2	Poursuite de modèle	88
3.2	Commande en boucle ouverte des GEP-T ; Poursuite de trajectoire	91
3.2.1	Vérification de la consistance d'un GEP-T	92
3.2.2	Recherche d'une commande optimale garantissant le respect des contraintes.	96
3.2.3	Illustrations	101
3.3	Commande en boucle ouverte d'un GEP-T : Poursuite de modèle.	107
3.3.1	Algorithme de calcul d'un précompensateur optimal garantissant le respect des contraintes.	108
3.3.2	Illustration	109
3.4	Conclusion	110

4	Commande en boucle fermée des graphes d'événements P-temporel	111
4.1	Ensembles A-invariants et invariants contrôlés	112
4.2	Contrôleur de type retour d'état pour les graphes d'événements P-temporels	114
4.3	Contrôleur de type retour de sortie pour les GEP-T.	122
4.4	Conclusion	123
	Bibliographie	125

Introduction

La théorie des systèmes et de leur commande, alias l'Automatique, s'est intéressée dès ses origines à des systèmes physiques généralement décrits par les équations différentielles ou aux dérivées partielles auxquelles obéissent les phénomènes physiques correspondants. Ces systèmes admettent, généralement, des modèles linéaires et ont été largement étudiés au cours des années 60. L'avènement des ordinateurs conduit à décrire parfois l'évolution de ces systèmes par des équations dynamiques en temps discret, ce qui ne remet pas en cause la nature continue de cette évolution.

La linéarité est une propriété mathématique intéressante qui simplifie beaucoup la manipulation de modèles mathématiques. L'Automatique non linéaire a commencé à se développer dans les années 70 et 80. L'Automatique non linéaire s'adresse généralement à des équations dynamiques "lisses" ou "différentiables". Au début des années 80, l'automatique s'est tournée vers des systèmes non linéaires dont la dynamique est régie par des événements.

C'est ainsi que la théorie des *systèmes dynamiques à événements discrets*¹, a vu le jour. Cette théorie s'intéresse à l'analyse et à la conduite de systèmes qui sont souvent de conception humaine. On peut par exemple citer les systèmes de production (ateliers flexibles, lignes d'assemblage) [Cohen et al., 1983, Cohen et al., 1985], les réseaux de communication (réseaux informatiques) [Le Boudec and Thiran, 2001] et les systèmes de transport (routier, ferroviaire ou aérien) [Lotito et al., 2001, Houssin, 2003]. Ces systèmes obéissent à des règles opérationnelles, ou algorithmes, et dont les transformations ont lieu à des instants discrets, en réponse à des événements ponctuels (typiquement l'arrivée d'un client, d'un signal ou l'achèvement d'une tâche). Ces systèmes sont alors souvent représentés par des modèles états-transitions. Les plus connus sont les automates d'états finis qui servent pour représenter les systèmes déterministes les plus simples, les chaînes de Markov pour leurs analogues stochastiques et les réseaux de Petri pour des systèmes plus complexes qui comportent à la fois des phénomènes de synchronisation, de concurrence et de parallélisme. Parmi ces derniers la sous classe des Graphes d'Événements Temporisés (caractérisés uniquement par des phénomènes de synchronisation et de retard) a fait l'objet d'étude particulière car ils peuvent être modélisés par des équations linéaires dans l'algèbre $(\max,+)$. Au cours des années 80, l'équipe $(\max,+)$ de l'INRIA a construit une théorie des systèmes $(\max,+)$ linéaires à l'image de celle qui existait pour les systèmes linéaires dans l'algèbre classique. Le cadre de notre étude se situe dans le prolongement de ces travaux. Les modèles considérés dans ce mémoire seront linéaires dans l'algèbre $(\max,+)$ mais soumis au respect de contraintes non linéaires.

Historiquement, la nécessité de pouvoir représenter des durées d'activités variables ou de modéliser l'incertitude sur une durée d'activité a conduit à associer des intervalles de temps aux transitions du réseau, ce fut la naissance des réseaux de Petri T-temporels [Merlin, 1974], [Menache, 1982] et [Roux,]. Puis Lhommeau [Lhommeau, 2004] a étudié une sous classe de ces réseaux de Petri qui est caractérisée uniquement par des phénomènes de synchronisation et de retard et qui est linéaire dans l'algèbre $(\max,+)$, il s'agit de la classe des graphes d'événements incertains. Ces modèles ont, notamment, été utilisés pour étudier les protocoles de communication [Merlin, 1974], [Roux,], [Berthomieu and Diaz, 1991] et également pour la vérification de l'interfaçage des modules électroniques [MacMillan and Dill, 1992], [Walkup, 1995]. Ces modèles permettent de décrire des temps de séjour variant entre un minimum et un

¹On pourra également utiliser le terme *systèmes à événements discrets*, en gardant à l'esprit qu'il s'agit d'un système dynamique.

maximum mais ils n'imposent aucune contrainte sur le temps maximum de séjour d'un jeton dans une place du réseau de Petri.

Or, l'industrie manufacturière utilise parfois des procédés dont les temps d'activités doivent être compris entre des durées minimales et des durées maximales. C'est le cas par exemple de l'industrie utilisant des réactions chimiques pour assurer le traitement d'une pièce [Khansa et al., 1996]. Il est clair que le décapage d'une pièce par immersion dans un bain d'acide nécessite un temps de trempe minimum, et ne doit pas dépasser un temps maximum, sous peine de détérioration de la qualité de la production. Pour modéliser ces systèmes Khansa [Khansa et al., 1996] a introduit les réseaux de Petri P-temporels où un intervalle de temps est associé non plus aux transitions mais aux places et il a introduit une nouvelle politique de fonctionnement. Elle consiste à tirer les transitions avant que les durées de séjours des jetons dans les places ne dépassent les durées maximales associées à ces mêmes places.

Le travail présenté dans ce mémoire se situe dans la continuité de ces travaux. Nous allons nous intéresser à la modélisation algébrique et à la commande d'une sous classe des réseaux de Petri P-temporels qui est caractérisée uniquement par des phénomènes de synchronisation et de retard et qui est sujet à des contraintes non linéaires dans l'algèbre $(\max, +)$. Cette classe sera appelée graphe d'événement P-temporel.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres organisés de la manière suivante :

- Dans le premier chapitre nous présentons les outils algébriques nécessaires à la représentation et à la commande des graphes d'événements P-temporels. Nous donnons tout d'abord des résultats généraux sur les structures ordonnées et les treillis. Nous rappelons également les axiomes des semi aneaux idempotents, que nous continuerons à appeler, par soucis de concision, dioïdes dans ce mémoire. Les liens entre dioïde et les structures ordonnées sont également présentés dans la première partie. Une part importante de ce premier chapitre est ensuite consacrée à la théorie de la résiduation et de la résiduation duale. La contribution principale de ce chapitre est l'introduction de la résiduation duale d'une application particulière qui servira, par la suite, pour la modélisation des contraintes de temps maximal de séjour. En particulier il est mis en évidence que certaines applications non résiduables (respectivement non dualement résiduables) peuvent bénéficier de restrictions résiduables (respectivement restrictions dualement résiduables). Ce point constitue une des contributions de ce chapitre. La dernière section est dédiée à la présentation des dioïdes d'intervalles, à la résiduation et à la résiduation duale dans ces structures algébriques.
- Le second chapitre rappelle, dans un premier temps, la modélisation des graphes d'événements temporisés sur différents dioïdes rencontrés dans la littérature et particulièrement sur la présentation du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, qui permet de manipuler des trajectoires considérées à la fois dans le domaine événementiel et dans le domaine temporel. Cette structure permet de représenter le transfert entrée-sortie d'un GET sous forme d'une matrice rationnelle. Dès lors, l'étude des GET est liée à l'algèbre des séries rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Dans un deuxième temps, nous rappelons la modélisation du comportement des systèmes $(\max, +)$ -linéaires qualifiés d'incertains. Ensuite, nous introduisons les graphes d'événements P-temporels et nous développons la modélisation algébrique de ces graphes. Pour conclure ce chapitre, nous généralisons ce modèle au graphes d'événements P-temporels présentant des incertitudes sur le temps minimum et/ou maximum de séjour.
- Dans le troisième chapitre, nous étudions la synthèse des lois de commande en boucle ouverte pour les systèmes modélisables par des graphes d'événements P-temporels dans un contexte de juste-à-temps. Cette méthode se base sur la théorie de la résiduation et de la résiduation duale.

Dans un premier temps, nous donnons une méthode de test de la consistance des contraintes. Dans un deuxième temps, nous donnons quelques conditions suffisantes pour garantir l'existence de la commande optimale, puis un algorithme de type point fixe permettant de calculer la commande optimale et une condition d'arrêt pour ce dernier. Enfin, nous généralisons cette méthode pour calculer un précompensateur optimal permettant de résoudre le problème de poursuite de modèle dans le contexte de boucle ouverte.

- Dans le quatrième chapitre, après un rappel des notions de sous-espace (A, B) -invariant, de sous-espace de commandabilité et d'idéaux principaux invariants, nous examinons le problème de synthèse de contrôleurs de type retour d'état et retour de sortie pour les graphes d'événement P-temporels. Pour cela, nous montrons que pour certains idéaux principaux invariants il existe une commande en boucle fermée permettant de conserver l'état du système à l'intérieur de ceux-ci. Ces propriétés, nous permettent alors de donner l'expression de correcteurs de type retour d'état et de type retour de sortie. Les contributions de ce chapitre peuvent se résumer en trois points :
 - Une condition nécessaire et suffisante pour garantir l'existence du contrôleur.
 - Une méthode, pour remédier au problème de non causalité du contrôleur, est introduite. Cette méthode utilise un nouveau précompensateur neutre qui préserve le vecteur d'état.
 - L'utilisation de la notion de parallélisme dans l'algèbre $(\max, +)$, introduite par [Katz, 2006], pour résoudre le problème de non causalité du précompensateur qui préserve le vecteur d'état.

CHAPITRE 1

Outils algébriques

Ce premier chapitre a pour vocation de rappeler les définitions et les principaux outils algébriques utilisés par la suite. Sans être exhaustif, nous présentons, dans la première partie, un ensemble de définitions, de notations et de résultats relatifs aux treillis [Birkhoff, 1940] et à l'algèbre des dioïdes [Baccelli et al., 1992]. Nous rappelons qu'un dioïde de par la propriété d'idempotence de la loi additive, notée \oplus , est une structure algébrique que l'on peut munir d'une relation d'ordre. La loi additive et la loi multiplicative, notée \otimes , d'un dioïde n'ont pas nécessairement d'inverse, néanmoins la théorie de la résiduation et de la résiduation duale [Baccelli et al., 1992, Blyth and Janowitz, 1972] offrent une alternative au problème d'inversion d'applications définies sur les dioïdes. Dans la troisième partie, nous considérons la résolution d'équations linéaires et au point fixe dans les dioïdes. La quatrième partie de ce chapitre présente quelques éléments relatifs à la résiduation duale d'une applications particulière, utilisée par la suite dans la modélisation des graphes d'événements P-temporels. La cinquième partie est dédiée à la présentation des dioïdes d'intervalles [Litvinov and Sobolevskii, 2001, Lhommeau, 2004], à la résiduation et à la résiduation duale dans ces structures algébriques. Pour conclure ce chapitre, nous donnons un ensemble de définitions et de notations relatives aux noyaux et aux images d'applications définies sur les dioïdes, les notions de projection parallèlement au noyau d'une application, de projection dans l'image d'une application et de projecteurs dans l'image d'une application parallèlement au noyau d'une autre seront également rappelées [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1996, Lhommeau, 2004].

1.1 Ensembles ordonnés et treillis

Cette section présente la théorie des treillis (en anglais, "lattice") qui sont des ensembles ordonnés dont le formalisme algébrique sera rappelé au fur et à mesure de l'énoncé des propriétés axiomatiques. Les treillis sont des objets mathématiques que l'on peut manipuler en tant qu'ensembles ordonnés ou en tant que structures algébriques. Les treillis ont été amplement étudiés dans la littérature, nous renvoyons le lecteur à [Birkhoff, 1940] et [Dubreil-Jacotin et al., 1953] pour cette partie. Des rappels sur la théorie des treillis sont également donnés dans [Baccelli et al., 1992] et [Blyth and Janowitz, 1972].

1.1.1 Structures ordonnées

Définition 1.1 (Ensemble ordonné). Un ensemble ordonné est un ensemble \mathcal{S} muni d'une relation d'ordre notée \preceq , c'est-à-dire une relation binaire qui est réflexive (tout élément x de \mathcal{S} est en relation avec lui-même : $x \preceq x$), antisymétrique (pour x et y appartenant à \mathcal{S} si $x \preceq y$ et $y \preceq x$ alors $x = y$) et transitive (pour x et y appartenant à \mathcal{S} si $x \preceq y$ et $y \preceq z$ alors $x \preceq z$). Un ensemble ordonné sera noté (\mathcal{S}, \preceq) .

Un ensemble est dit totalement ordonné si deux éléments quelconques x et x' sont toujours comparables, c'est-à-dire si l'on a $x \preceq x'$ ou $x' \preceq x$.

La notation $x \prec x'$ signifie $x \preceq x'$ et $x \neq x'$.

Remarque 1.2. En présence d'ambiguïté sur l'ensemble considéré, nous désignerons par la notation \preceq_S l'ordre d'un ensemble S .

Tout sous-ensemble \mathcal{U} d'un ensemble ordonné (S, \preceq) peut également être ordonné par la restriction de l'ordre de S aux éléments de \mathcal{U} , notée $\preceq_{\mathcal{U}}$. Cet ordre restreint est simplement défini par

$$y, y' \in \mathcal{U} \subseteq S; y \preceq y' \Leftrightarrow y \preceq_{\mathcal{U}} y'.$$

Remarque 1.3. Si (S, \preceq) est partiellement ordonné, un sous-ensemble $\mathcal{U} \subseteq S$ ordonné par la restriction de \preceq à \mathcal{U} peut être tel que tous les éléments de \mathcal{U} soient incomparables deux à deux. L'ensemble (\mathcal{U}, \preceq) est alors dit totalement non ordonné. Un ensemble ordonné fini (S, \preceq) peut être représenté par un graphe appelé diagramme de Hasse. Chaque élément de S est représenté par un sommet (\bullet). Un arc reliant deux sommets du diagramme signifie que les éléments représentés par ces sommets sont comparables. Par convention, l'ordre est croissant dans le sens du bas vers le haut du diagramme.

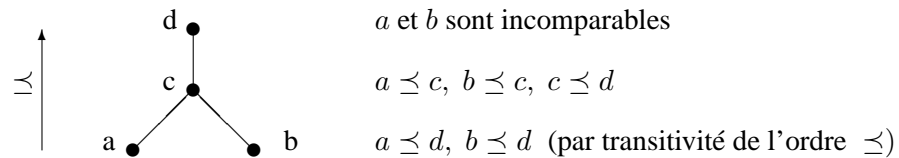


Figure 1.1 – Diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné $(\{a, b, c, d\}, \preceq)$

Pour la figure 1.1, l'ensemble $S = \{a, b, c, d\}$ est partiellement ordonné pour l'ordre \preceq décrit par le diagramme. Le sous-ensemble $\mathcal{U} = \{a, b\} \subset S$ est un ensemble ordonné par la restriction de \preceq à \mathcal{U} . Néanmoins, dans ce cas précis, (\mathcal{U}, \preceq) est totalement non ordonné (remarque 1.3).

Remarque 1.4. Un ensemble totalement ordonné est également appelé une chaîne en référence à son diagramme de Hasse qui en est une.

Exemple 1.5 (Ensembles ordonnés). • (\mathbb{N}, \leq) , (\mathbb{Z}, \leq) , (\mathbb{Q}, \leq) , (\mathbb{R}, \leq) où \leq est l'ordre naturel, sont totalement ordonnés.

• Soit S un ensemble. L'ensemble des parties de S , noté $\mathcal{P}(S)$, est un ensemble ordonné par l'inclusion. Cet ensemble ordonné est noté $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$. Il s'agit d'un ordre partiel. Par exemple, deux sous-ensembles A et B de S tel que $A \cap B \neq A$ et $A \cap B \neq B$ ne sont pas comparables suivant l'ordre \subseteq .

• Soit (\mathcal{U}, \preceq) un ensemble ordonné. L'ensemble des vecteurs $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \in \mathcal{S}^{2 \times 1}$, muni de l'ordre \preceq , défini par

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \preceq \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\alpha \preceq a \text{ et } \beta \preceq b).$$

Même si \preceq est total sur S , l'ordre qu'il induit sur $\mathcal{S}^{2 \times 1}$ n'est que partiel.

Remarque 1.6. *On dira que deux ensembles ordonnés sont isomorphes si leurs diagrammes de Hasse ont la même forme.*

Définition 1.7 (Majorant, minorant). Soit \mathcal{S} un ensemble muni d'une relation d'ordre \preceq et \mathcal{U} un sous-ensemble de \mathcal{S} . On appelle minorant de \mathcal{U} tout élément m de \mathcal{S} tel que $\forall x \in \mathcal{U}, m \preceq x$. On appelle majorant de \mathcal{U} tout élément M de \mathcal{S} tel que $\forall x \in \mathcal{U}, x \preceq M$.

Définition 1.8 (Bornes d'un ensemble). Un sous-ensemble $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{S}$ est dit borné s'il admet un majorant et un minorant. Lorsque l'ensemble des majorants de \mathcal{U} a un plus petit élément, ce plus petit élément est appelé borne supérieure de \mathcal{U} . On le note $\sup(\mathcal{U})$ ou $\bigvee \mathcal{U}$. De même, lorsque l'ensemble des minorants de \mathcal{U} a un plus grand élément, on l'appelle borne inférieure de \mathcal{U} (notée $\inf(\mathcal{U})$ ou $\bigwedge \mathcal{U}$).

Remarque 1.9 (Éléments particuliers dans un ensemble ordonné). Dans un ensemble ordonné \mathcal{S} , on appelle plus petit élément, un élément $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ tel que lon ait $\varepsilon_{\mathcal{S}} \preceq s$ pour tout $s \in \mathcal{S}$. Notons qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement unique, car s'il y en avait deux, $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ et $\varepsilon'_{\mathcal{S}}$, on aurait $\varepsilon_{\mathcal{S}} \preceq \varepsilon'_{\mathcal{S}}$ et $\varepsilon'_{\mathcal{S}} \preceq \varepsilon_{\mathcal{S}}$, donc $\varepsilon_{\mathcal{S}} = \varepsilon'_{\mathcal{S}}$. De même, on appelle plus grand élément, un élément $\top_{\mathcal{S}}$ tel que l'on ait $s \preceq \top_{\mathcal{S}}$ pour tout $s \in \mathcal{S}$. Notons également qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement unique.

1.1.2 Semi-treillis et treillis

Définition 1.10 (Semi-treillis). Un *sup-semi-treillis* est un ensemble \mathcal{S} ordonné, dans lequel tout couple d'éléments (x, x') (ou toute famille finie) admet une *borne supérieure* (plus petit majorant) notée $\sup(x, x')$ ou $x \vee x'$. De même, un *inf-semi-treillis* est un ensemble \mathcal{S} ordonné, dans lequel tout couple d'éléments (x, x') admet une *borne inférieure* notée $\inf(x, x')$ ou $x \wedge x'$.

Remarque 1.11 (Principe de dualité). Notons \succeq l'inverse de la relation d'ordre \preceq . Si (\mathcal{S}, \preceq) est un *sup-semi-treillis*, alors (\mathcal{S}, \succeq) est un *inf-semi-treillis*, et vice versa. Par conséquent, une relation impliquant \preceq, \vee et \wedge reste vraie en remplaçant \preceq par \succeq et en permutant \vee et \wedge . Il s'agit du principe de dualité.

Définition 1.12 (Treillis). Un *treillis* est un ensemble ordonné (\mathcal{S}, \preceq) qui est à la fois un *sup-semi-treillis* et un *inf-semi-treillis*; autrement dit, un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant. On parle aussi d'espace réticulé.

Exemple 1.13. L'ensemble des parties d'un ensemble muni de l'inclusion forme un treillis où la borne supérieure est l'union et la borne inférieure l'intersection.

Remarque 1.14. Si $(\mathcal{S}, \wedge, \vee, \preceq)$ est un treillis, alors son treillis dual est $(\mathcal{S}, \vee, \wedge, \succeq)$.

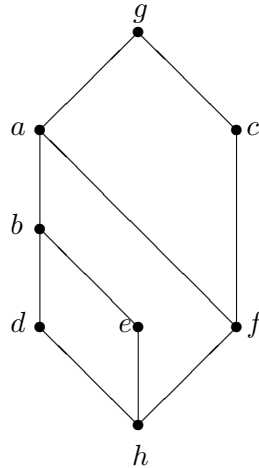
Définition 1.15 (Sous-treillis). Par définition, un sous-treillis d'un treillis \mathcal{S} est une partie \mathcal{U} de \mathcal{S} fermée pour les opérations \wedge et \vee : si a et b sont dans \mathcal{U} , $a \wedge b$ et $a \vee b$ sont dans \mathcal{U} .

Remarque 1.16. Il faut noter qu'un sous-ensemble \mathcal{U} peut être un treillis sans être un sous-treillis de \mathcal{S} .

Exemple 1.17. Considérons le diagramme de Hasse d'un treillis fini \mathcal{S} contenant 8 éléments (figure 1.2). On remarque que les ensembles $\{h, d, e, b\}$, $\{h, d, f, a\}$ sont des sous-treillis, il en est de même pour l'ensemble $\{h, f, c, g\}$ qui en outre est une chaîne.

Par contre, l'ensemble $\{h, d, e, a\}$ n'est pas un sous-treillis, car $d \vee e = (c \text{-à-} d) \cdot b$ ne fait pas partie de l'ensemble.

Néanmoins on voit que $\{h, d, e, a\}$ est un treillis (pour la relation d'ordre existant entre a, d, e et h dans \mathcal{S}) mais pas un sous-treillis de \mathcal{S} puisque dans $\{h, d, e, a\}$, $d \vee e = a$ alors que dans \mathcal{S} , $d \vee e = b$.

Figure 1.2 – Diagramme de Hasse du Treillis (\mathcal{S}, \preceq)

Définition 1.18 (Semi-treillis complet et treillis complet). Un sup-semi-treillis (resp. inf-semi-treillis) \mathcal{S} est dit sup-complet (resp. inf-complet) si tout sous-ensemble (fini ou infini) de \mathcal{S} admet un plus petit majorant (resp. un plus grand minorant) dans \mathcal{S} . Donc en particulier il est non vide. Un treillis est dit complet s'il est à la fois inf-complet et sup-complet.

Remarque 1.19. Pour un sup-semi-treillis complet noté (\mathcal{S}, \vee) , la borne sup de tout sous-ensemble de \mathcal{S} est définie, y compris pour \mathcal{S} . Un sup-semi-treillis complet \mathcal{S} a donc nécessairement un plus grand élément noté $\top_{\mathcal{S}} = \bigvee_{s \in \mathcal{S}} s$. Pour la même raison, un inf-semi-treillis complet (\mathcal{S}, \wedge) a toujours un plus petit élément noté $\varepsilon_{\mathcal{S}} = \bigwedge_{s \in \mathcal{S}} s$. En outre, un semi-treillis fini est complet (sup-complet ou inf-complet) et un treillis fini est complet.

Exemple 1.20.

- En ajoutant l'élément $+\infty$ à \mathbb{Z} , l'ensemble $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \leq)$ est totalement ordonné sup-complet.
- En revanche, $(\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné qui n'est ni sup-complet ni inf-complet. Par exemple, le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq \sqrt{2}\}$ de \mathbb{Q} n'a pas de plus petit majorant dans \mathbb{Q} .

Théorème 1.21. Un sup-semi treillis complet \mathcal{S} est un treillis complet si, et seulement si, il a un plus petit élément $\varepsilon_{\mathcal{S}}$.

Démonstration.

(\Rightarrow) si \mathcal{S} est un treillis complet alors il admet un plus petit élément $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ (cf. définition 1.18 et remarque 1.19).

(\Leftarrow) supposons que \mathcal{S} est un sup-semi-treillis complet et possède un plus petit élément $\varepsilon_{\mathcal{S}}$. Soit $\mathcal{U} = \{u_{\alpha}\}_{\alpha \in A}$ un sous-ensemble non vide de \mathcal{S} , et $\mathcal{M} = \{m_{\beta}\}_{\beta \in B}$ l'ensemble des minorants de \mathcal{U} . L'ensemble \mathcal{M} est non vide puisque $\varepsilon_{\mathcal{S}} \in \mathcal{M}$. Posons $m = \bigvee_{\beta \in B} m_{\beta}$; l'élément m est défini dans \mathcal{S} puisque \mathcal{S} est complet.

Par définition de l'ensemble \mathcal{M} ,

$$\forall u_{\alpha} \in \mathcal{U}, \forall m_{\beta} \in \mathcal{M}, \quad m_{\beta} \preceq u_{\alpha},$$

ou encore,

$$\forall u_\alpha \in \mathcal{U}, \quad m = \bigvee_{\beta \in B} m_\beta \preceq u_\alpha.$$

Donc m est minorant de \mathcal{U} , et par conséquent, le plus grand des minorants de \mathcal{U} . Tout sous-ensemble non vide de \mathcal{S} admettant un plus grand minorant, \mathcal{S} est un inf-semi-treillis complet et donc également un treillis complet. \square

Remarque 1.22. *En raison du principe de dualité énoncé dans la remarque 1.11, on peut énoncer le dual du théorème précédent : un inf-semi-treillis complet est un treillis complet si, et seulement si, il a un plus grand élément $\top_{\mathcal{S}}$.*

Remarque 1.23. *Les définitions précédentes de semi-treillis et treillis ont été introduites de façon ensembliste, elles font uniquement intervenir les propriétés de la relation d'ordre \preceq définie sur l'ensemble. Il est intéressant de faire le lien entre ce point de vue ensembliste et le point de vue algébrique.*

En algèbre, un treillis est parfois défini comme un ensemble muni de deux opérations binaires \vee et \wedge jouissant des propriétés classiques d'associativité, de commutativité et d'idempotence, et de la propriété dite d'absorption : $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$. Dans ce cas, la notion d'ordre peut être dérivée ; $x \preceq y$ est par définition $x = x \wedge y$ (ou $x \vee y = y$).

C'est là une des principales raisons de l'importance de la notion de treillis : elle permet de remplacer la relation $x \preceq y$ par des équations $x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$, et par conséquent de traiter les questions relatives à l'ordre par des moyens algébriques : des opérations, des équations. De plus, il est désormais possible de remplacer l'expression "soit \mathcal{S} un treillis" par (\mathcal{S}, \preceq) ou par $(\mathcal{S}, \vee, \wedge)$.

1.2 Isotonie, morphismes et continuité

1.2.1 Isotonie

Définition 1.24 (Isotone, antitone, monotone). Soit $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ une application définie sur des ensembles ordonnés. On dira :

l'application Π est **isotone** si elle préserve l'ordre de $\mathcal{S} \equiv \forall x, x' \in \mathcal{S} \ x \preceq x' \Rightarrow \Pi(x) \preceq \Pi(x')$,

l'application Π est **antitone** si elle inverse l'ordre de $\mathcal{S} \equiv \forall x, x' \in \mathcal{S} \ x \preceq x' \Rightarrow \Pi(x) \succeq \Pi(x')$,

l'application Π est **monotone** $\equiv \Pi$ isotone ou Π antitone.

Remarque 1.25. *La composition de fonctions monotones est une fonction monotone.*

- *La composition de deux fonctions isotones est isotone.*
- *La composition de deux fonctions antitones est isotone.*
- *La composition d'une fonction isotone et une fonction antitone est antitone.*

1.2.2 Morphismes

Définition 1.26 (Morphismes). Un morphisme est une application entre deux ensembles munis d'une même espèce de structure algébrique, qui respecte cette structure. Soient (\mathcal{S}, \preceq) et (\mathcal{T}, \preceq) deux treillis et Π une application de \mathcal{S} vers \mathcal{T} . Alors Π est un \vee -morphisme si

$$\Pi(x \vee x') = \Pi(x) \vee \Pi(x')$$

pour tout $x, x' \in \mathcal{S}$.

De façon analogue, Π est un \wedge -morphisme si

$$\Pi(x \wedge x') = \Pi(x) \wedge \Pi(x')$$

pour tout $x, x' \in \mathcal{S}$.

Si Π est à la fois un \vee -morphisme et un \wedge -morphisme, alors Π est un morphisme de treillis.

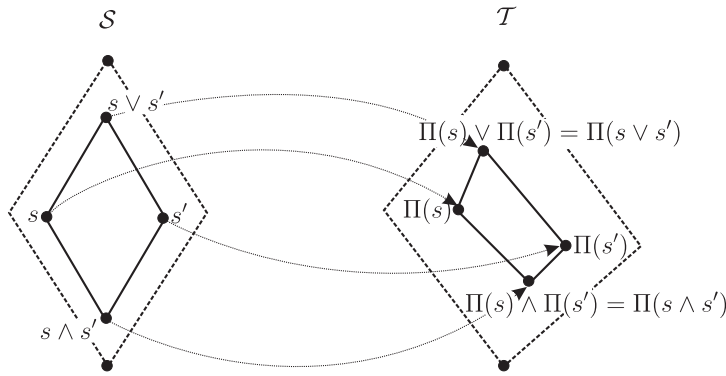


Figure 1.3 – Morphisme entre les treillis \mathcal{S} et \mathcal{T} .

Remarque 1.27. Un \vee -morphisme (resp. un \wedge -morphisme) est une application isotone. En effet, pour un \vee -morphisme par exemple : si $x \preceq x'$, alors $x \vee x' = x'$, donc $\Pi(x \vee x') = \Pi(x) \vee \Pi(x') = \Pi(x')$, d'où $\Pi(x) \preceq \Pi(x')$. Par contre la réciproque est fautive, une application isotone n'est pas nécessairement un \vee ou \wedge -morphisme. Cependant, si $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ est isotone, on aura toujours

$$\Pi(x \vee x') \succeq \Pi(x) \vee \Pi(x') \quad \forall x, x' \in \mathcal{S},$$

puisque

$$\left. \begin{array}{l} x \vee x' \succeq x \Rightarrow \Pi(x \vee x') \succeq \Pi(x) \\ x \vee x' \succeq x' \Rightarrow \Pi(x \vee x') \succeq \Pi(x') \end{array} \right\} \Rightarrow \Pi(x \vee x') \succeq \Pi(x) \vee \Pi(x').$$

De même, pour un \wedge -morphisme

$$\Pi(x \wedge x') \preceq \Pi(x) \wedge \Pi(x') \quad , \quad \forall x, x' \in \mathcal{S}.$$

Exemple 1.28. Considérons l'ensemble $(\mathbb{N}^*, \preceq_{div})$, où l'ordre sur \mathbb{N}^* est défini par

$$a \preceq_{div} b \iff a \text{ divise } b, \tag{1.1}$$

est un treillis. Les lois de treillis de $(\mathbb{N}^*, \preceq_{div})$ sont $a \vee b = \text{ppcm}(a, b)$ et $a \wedge b = \text{pgcd}(a, b)$. Considérons également l'application isotone $\Pi : (\mathbb{N}^*, \preceq_{div}) \rightarrow (\mathbb{N}^*, \preceq)$, $x \mapsto x$. Alors, soient les éléments 4 et 6 dans $(\mathbb{N}^*, \preceq_{div})$, le \vee vaut $4 \vee 6 = 12$, alors que le \vee des éléments 4 et 6 dans (\mathbb{N}^*, \preceq) vaut 6. Par conséquent on a, $\Pi(4 \vee 6) = 12 \neq \Pi(4) \vee \Pi(6) = 6$. Cependant, on remarque que $\Pi(4 \vee 6) \succeq \Pi(4) \vee \Pi(6)$.

Définition 1.29 (Image d'une application). L'image de $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ est le sous-ensemble de \mathcal{T} constitué par les éléments de \mathcal{T} de la forme $\Pi(x)$ où $x \in \mathcal{S}$; l'image de Π se note $\Pi(\mathcal{S})$ ou $\text{Im}\Pi$.

1.2.3 Continuité

Définition 1.30 (Continuité). Soit Π une application d'un treillis complet \mathcal{S} dans un treillis complet \mathcal{T} , l'application Π est *semi-continue inférieurement* (s.c.i. en abrégé), respectivement *semi-continue supérieurement* (s.c.s.) si, pour toute partie $X \subset \mathcal{S}$, on a

$$\Pi \left(\bigvee_{x \in X} x \right) = \bigvee_{x \in X} \Pi(x), \quad (1.2)$$

respectivement,

$$\Pi \left(\bigwedge_{x \in X} x \right) = \bigwedge_{x \in X} \Pi(x). \quad (1.3)$$

L'application Π est *continue* si elle est à la fois s.c.i et s.c.s.

Remarque 1.31. Toute fonction semi-continue inférieurement (respectivement semi-continue supérieurement) est un \vee -morphisme (respectivement un \wedge -morphisme). Alors d'après la remarque 1.27, toute fonction semi-continue inférieurement (respectivement semi-continue supérieurement) est isotone.

Remarque 1.32. Si Π est une fonction isotone mais non semi-continue inférieurement, on ne peut plus écrire $\Pi \left(\bigvee_{x \in \mathcal{X}} x \right) = \bigvee_{x \in \mathcal{X}} \Pi(x)$, mais on a toujours $\Pi \left(\bigvee_{x \in \mathcal{X}} x \right) \succeq \bigvee_{x \in \mathcal{X}} \Pi(x)$. En effet, $\Pi \left(\bigvee_{x \in \mathcal{X}} x \right)$ est un majorant de l'ensemble $\Pi(\mathcal{X})$, en raison de l'isotonie de Π , tandis que, par définition, $\bigvee_{x \in \mathcal{X}} \Pi(x)$ est le plus petit majorant de ce même ensemble.

1.3 Fermetures

Nous étudions ici une classe particulière d'applications isotones : les fermetures.

Définition 1.33 (Fermeture). On appelle fermeture une application $\Pi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$ qui a les propriétés suivantes :

- elle est extensive : $\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$
- elle est idempotente : $\Pi \circ \Pi = \Pi$
- elle est isotone : $\forall s, s' \in \mathcal{S}, s \preceq s' \Rightarrow \Pi(s) \preceq \Pi(s')$

Définition 1.34 (Fermeture duale). On appelle fermeture duale une application $\Phi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$ qui a les propriétés suivantes :

- elle est contractive : $\Phi \preceq \text{Id}_{\mathcal{S}}$
- elle est idempotente : $\Phi \circ \Phi = \Phi$
- elle est isotone : $\forall s, s' \in \mathcal{S}, s \preceq s' \Rightarrow \Phi(s) \preceq \Phi(s')$

Dans ces conditions, l'image $\Pi(s)$ (respectivement l'image $\Phi(s)$) d'un élément $s \in \mathcal{S}$ s'appelle Π -fermeture de s (respectivement Φ -fermeture duale de s), et si l'élément s est égal à sa Π -fermeture (respectivement Φ -fermeture duale), on dit que s est Π -fermé (respectivement Φ -fermé dual).

Notons que si l'ensemble \mathcal{S} possède un élément maximum \top , celui-ci est Π -fermé ; en effet, il résulte du fait que l'application Π est extensive $\top \preceq \Pi(\top) \preceq \top$.

Si l'ensemble \mathcal{S} possède un élément minimum ε , celui-ci est Φ -fermé dual ; en effet, il résulte du fait que l'application Φ est contractive $\varepsilon \succeq \Phi(\varepsilon) \succeq \varepsilon$.

Exemple 1.35. L'application $\Pi_a : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, x \mapsto a \vee x$ est une fermeture ; en effet on a

$$\Pi_a \circ \Pi_a(x) = a \vee (a \vee x) = a \vee x = \Pi_a(x) \succeq x,$$

c'est-à-dire $\Pi_a \circ \Pi_a = \Pi_a \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$.

L'application $\Phi_a : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}, x \mapsto a \wedge x$ est une fermeture duale ; en effet on a

$$\Phi_a \circ \Phi_a(x) = a \wedge (a \wedge x) = a \wedge x = \Phi_a(x) \preceq x,$$

c'est-à-dire $\Phi_a \circ \Phi_a = \Phi_a \preceq \text{Id}_{\mathcal{S}}$.

Lemme 1.36. Si $\Pi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$ et $\Psi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$ sont des fermetures et des \wedge -morphisms, alors $\Pi \wedge \Psi$ est aussi une fermeture.

Démonstration. Comme $\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$ et $\Psi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$, on a $\Pi \wedge \Psi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$. De plus, Π et Ψ étant des \wedge -morphisms, on a

$$\begin{aligned} (\Pi \wedge \Psi) \circ (\Pi \wedge \Psi) &= (\Pi \wedge \Psi) \circ \Pi \wedge (\Pi \wedge \Psi) \circ \Psi \\ &= \Pi \circ \Pi \wedge \Psi \circ \Pi \wedge \Pi \circ \Psi \wedge \Psi \circ \Psi. \end{aligned}$$

D'autre part, comme Π et Ψ sont idempotentes, on a

$$\Pi \circ \Pi \wedge \Psi \circ \Pi \wedge \Pi \circ \Psi \wedge \Psi \circ \Psi = \Pi \wedge \Psi \circ \Pi \wedge \Pi \circ \Psi \wedge \Psi.$$

Mais comme, $\Psi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \Psi \circ \Pi \succeq \Pi$ et $\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}} \Rightarrow \Pi \circ \Psi \succeq \Psi$, on peut donc écrire

$$\Pi \wedge \Psi \circ \Pi \wedge \Pi \circ \Psi \wedge \Psi = \Pi \wedge \Psi,$$

ce qui prouve que $\Pi \wedge \Psi$ est une fermeture. □

Lemme 1.37. Si $\Phi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$ et $\Theta : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$ sont des fermetures duales et des \vee -morphisms, alors $\Phi \wedge \Theta$ est aussi une fermeture duale.

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du lemme 1.36. □

Notation 1.38. Soit $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ une fermeture définie sur un treillis \mathcal{S} . On notera $\text{Im}\Pi$ l'image de Π , c'est-à-dire

$$\text{Im}\Pi = \{\Pi(s) \mid s \in \mathcal{S}\}.$$

Proposition 1.39. L'image de $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$, soit $\text{Im}\Pi$, correspond à l'ensemble des Π -fermés de \mathcal{S} .

Démonstration. Par définition $\Pi(s)$ est un fermé et d'autre part tout élément s fermé est l'image par Π d'au moins s lui-même, puisque $\Pi(s) = s$. □

Proposition 1.40. Soient Π une fermeture d'un treillis complet \mathcal{S} et R une partie de $\text{Im}\Pi$. Si la partie R a une borne inférieure, celle-ci appartient encore à $\text{Im}\Pi$.

Démonstration. Soit R une partie de \mathcal{S} constituée d'éléments de $\text{Im}\Pi$ pour laquelle $u = \bigwedge_{r \in R} r$ existe. Par définition de la borne inférieure, pour tout élément r de R , $r \succeq u$, et, puisque Π est isotone, $\Pi(r) \succeq \Pi(u)$. De plus, comme tout élément de $\text{Im}\Pi$ est Π -fermé, on a $r = \Pi(r)$. Il s'ensuit que $\Pi(r) = r \succeq \Pi(u)$, c'est-à-dire que $\Pi(u)$ est un minorant de R et donc que $\Pi(u) \preceq \bigwedge_{r \in R} r = u$. Toutefois, Π étant extensive, $\Pi(u) \succeq u$. Finalement, on a $\Pi(u) = u$, donc la borne inférieure de R appartient bien à l'image de Π . □

Proposition 1.41. Soit Π une fermeture d'un treillis complet \mathcal{S} . L'image de Π est, elle aussi, un treillis complet (notée $(\text{Im}\Pi, \bigvee^{\text{Im}\Pi}, \bigwedge^{\text{Im}\Pi})$) pour l'ordre de \mathcal{S} ; de plus, pour toute partie R de $\text{Im}\Pi$,

$$\bigwedge_{r \in R}^{\text{Im}\Pi} r = \bigwedge_{r \in R} r \quad , \quad \bigvee_{r \in R}^{\text{Im}\Pi} r = \Pi \left(\bigvee_{r \in R} r \right). \quad (1.4)$$

Démonstration. Soit R une partie de $\text{Im}\Pi$. D'après la proposition 1.40, $\bigwedge_{r \in R} r \in \text{Im}\Pi$, par conséquent

$\bigwedge_{r \in R}^{\text{Im}\Pi} r = \bigwedge_{r \in R} r$, c'est-à-dire que $\text{Im}\Pi$ est un inf-semi-treillis complet. En outre, on sait que le plus grand élément de \mathcal{S} est fermé. Ainsi, d'après le théorème 1.21 et la remarque 1.22, $\text{Im}\Pi$ est un treillis complet.

Il reste à prouver la formule relative aux bornes supérieures. On pose $u = \Pi \left(\bigvee_{r \in R} r \right)$. L'application Π étant extensive, on a $u = \Pi \left(\bigvee_{r \in R} r \right) \succeq \bigvee_{r \in R} r$; autrement dit, u est un majorant de R dans \mathcal{S} . En outre, $u \in \text{Im}\Pi$; par conséquent u est un majorant de R dans $\text{Im}\Pi$. Alors, soit $y \succeq \bigvee_{r \in R} r$, et, puisque Π est croissante, $\Pi(y) \succeq \Pi \left(\bigvee_{r \in R} r \right) = u$. Si, en particulier, $y \in \text{Im}\Pi$, on voit que $\Pi(y) = y \succeq u$. On prouve ainsi que u est effectivement le plus petit majorant de R dans $\text{Im}\Pi$. \square

Remarque 1.42. La proposition précédente montre que l'image d'une fermeture Π , soit $\text{Im}\Pi$, dans un treillis complet \mathcal{S} est stable pour l'opération \wedge , c'est-à-dire $\Pi(s) \wedge \Pi(s') \in \text{Im}\Pi$, et que l'opération \vee n'est d'ordinaire pas fermée, c'est-à-dire que $\Pi(s) \vee \Pi(s')$ n'appartient pas à $\text{Im}\Pi$. Par conséquent $\text{Im}\Pi$ n'est donc pas un sous-treillis de \mathcal{S} . Néanmoins, on peut munir $\text{Im}\Pi$ d'une structure de treillis, ce treillis $(\text{Im}\Pi, \bigvee^{\text{Im}\Pi}, \bigwedge^{\text{Im}\Pi})$ est défini par

$$\forall s_1, \forall s_2 \in \text{Im}\Pi \quad \begin{cases} s_1 \bigvee^{\text{Im}\Pi} s_2 = \Pi(s_1 \vee s_2) \\ s_1 \bigwedge^{\text{Im}\Pi} s_2 = s_1 \wedge s_2 \end{cases} .$$

Ce treillis $(\text{Im}\Pi, \bigvee^{\text{Im}\Pi}, \bigwedge^{\text{Im}\Pi})$ admet \top , le plus grand élément de \mathcal{S} , pour majorant universel, et $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{S}}) = \varepsilon_{\text{Im}\Pi}$, élément minimum de $\text{Im}\Pi$ dans \mathcal{S} , pour minorant universel. Schématiquement, les éléments de \mathcal{S} et $\text{Im}\Pi$ peuvent être représentés par la figure 1.4.

Proposition 1.43. Soit ${}_{\text{Im}\Pi} \Pi$ une fermeture définie du treillis $(\mathcal{S}, \vee, \wedge)$ dans le treillis $(\text{Im}\Pi, \bigvee^{\text{Im}\Pi}, \bigwedge^{\text{Im}\Pi})$, alors ${}_{\text{Im}\Pi} \Pi$ est un \vee -morphisme, c'est-à-dire

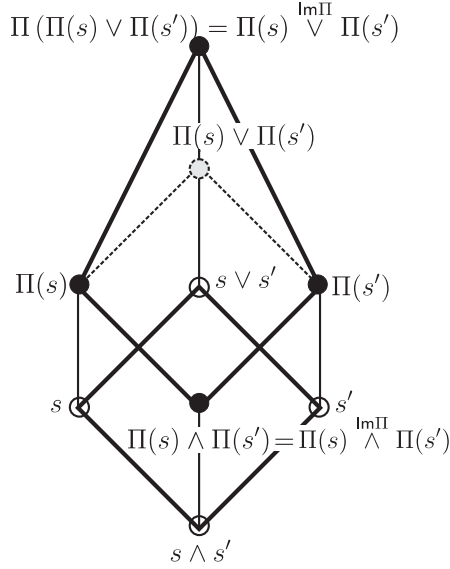
$${}_{\text{Im}\Pi} \Pi(s \vee s') = {}_{\text{Im}\Pi} \Pi(s) \vee_{{\text{Im}\Pi}} {}_{\text{Im}\Pi} \Pi(s') \quad , \quad \forall s, s' \in \mathcal{S} .$$

Démonstration. Pour tout couple $s, s' \in \mathcal{S}$, l'application Π étant extensive, on a $\Pi(s) \succeq s$ et $\Pi(s') \succeq s'$, d'où

$$\Pi(s) \vee \Pi(s') \succeq s \vee s' .$$

D'autre part, par définition de $\bigvee^{\text{Im}\Pi}$ et par isotonie de Π on a

$$\Pi(s) \bigvee^{\text{Im}\Pi} \Pi(s') = \Pi(\Pi(s) \vee \Pi(s')) \succeq \Pi(s \vee s') \succeq \Pi(s) \vee \Pi(s') \quad (\text{cf. remarque 1.27}).$$

Figure 1.4 – \circ éléments du treillis \mathcal{S} et \bullet éléments de $\text{Im}\Pi$.

Par ailleurs, l'application Π étant idempotente, on a $\Pi^2 = \Pi$; on obtient alors

$$\Pi(s \vee s') = \Pi^2(s \vee s') = \Pi(\Pi(s \vee s')) \succeq \Pi(\Pi(s) \vee \Pi(s')) = \Pi(s) \vee^{\text{Im}\Pi} \Pi(s').$$

Donc, $\Pi(s \vee s') = \Pi(s) \vee^{\text{Im}\Pi} \Pi(s')$, par conséquent $\text{Im}\Pi|_{\Pi}$ est un \vee -morphisme. \square

Remarque 1.44. De manière analogue aux résultats précédents, on peut montrer que l'image d'une fermeture duale Φ , définie de \mathcal{S} dans \mathcal{S} , soit $\text{Im}\Phi$, est un treillis $(\text{Im}\Phi, \vee^{\text{Im}\Phi}, \wedge^{\text{Im}\Phi})$ défini par :

$$\forall s_1, \forall s_2 \in \text{Im}\Phi \quad \left\{ \begin{array}{l} s_1 \vee^{\text{Im}\Phi} s_2 = s_1 \vee s_2 \\ s_1 \wedge^{\text{Im}\Phi} s_2 = \Phi(s_1 \wedge s_2) \end{array} \right.$$

Ce treillis admet ε , le plus petit élément de \mathcal{S} pour minorant universel, et $\Phi(\top) = \varepsilon_{\text{Im}\Phi}$, élément minimum de $\text{Im}\Phi$ dans \mathcal{S} , pour minorant universel.

De même on peut établir la proposition suivante.

Proposition 1.45. Soit $\text{Im}\Phi|_{\Phi}$ une fermeture duale définie du treillis $(\mathcal{S}, \vee, \wedge)$ dans le treillis $(\text{Im}\Phi, \vee^{\text{Im}\Phi}, \wedge^{\text{Im}\Phi})$, alors $\text{Im}\Phi|_{\Phi}$ est un \wedge -morphisme, c'est-à-dire

$$\text{Im}\Phi|_{\Phi}(s \wedge s') = \text{Im}\Phi|_{\Phi}(s) \wedge_{\text{Im}\Phi|_{\Phi}} \text{Im}\Phi|_{\Phi}(s') \quad , \quad \forall s, s' \in \mathcal{S}.$$

Démonstration. La démonstration est identique à celle de la proposition 1.43. \square

1.4 Semi-anneau idempotent, Dioïde

Cette section est un rappel sur les structures algébriques considérées. Le but de ce paragraphe est d'introduire les concepts et notations qui seront utiles pour l'étude de la commande de graphes d'événements considérés dans la suite. Les ouvrages de référence qui ont inspiré cette synthèse sont [Cuninghame-Green, 1979], [Baccelli et al., 1992] et [Gunawardena, 1998] ainsi que les thèses [Moller, 1988], [Gaubert, 1992] et [Cottenceau, 1999].

Définition 1.46. (Monoïde). Un monoïde est un ensemble \mathcal{C} muni d'une loi de composition interne associative, et d'un élément neutre pour cette loi. Nous noterons la loi additivement

$$\begin{aligned} \mathcal{C} \times \mathcal{C} &\rightarrow \mathcal{C} \\ (a, b) &\mapsto a \oplus b \end{aligned}$$

et l'élément neutre sera noté ε . Le monoïde est dit commutatif si l'on a

$$a \oplus b = b \oplus a$$

pour tous les éléments $a, b \in \mathcal{C}$.

Remarque 1.47. Un élément $a \in \mathcal{C}$ est idempotent si $a \oplus a = a$. Si tous les éléments de \mathcal{C} sont idempotents, le monoïde (\mathcal{C}, \oplus) est dit idempotent.

Exemple 1.48. L'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} muni de l'addition est un monoïde. Il s'agit d'un monoïde commutatif : $\forall a, b \in \mathbb{N}; a + b = b + a$. L'élément neutre de \mathbb{N} est 0.

Définition 1.49. (Semi-anneau, dioïde). On appelle semi-anneau un ensemble \mathcal{D} , muni de deux lois internes \oplus et \otimes , tel que :

- (\mathcal{D}, \oplus) est un monoïde commutatif dont l'élément neutre ε est appelé élément nul.
- (\mathcal{D}, \otimes) est un monoïde. Son élément neutre est appelé unité et est noté e .
- La loi multiplicative \otimes est distributive à droite et à gauche par rapport à la loi additive \oplus .
- L'élément neutre ε est absorbant pour la loi \otimes ($\forall a \in \mathcal{D}; a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$).

Si en outre la loi \oplus est idempotente (cf. remarque 1.47), alors $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est qualifié de semi-anneau idempotent ou dioïde.

Exemple 1.50 (Algèbres $(\max, +)$ et $(\min, +)$). On peut vérifier aisément que :

- $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ est un dioïde commutatif pour lequel $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est noté \mathbb{R}_{\max} et est traditionnellement appelé "algèbre $(\max, +)$ ".
- $\mathbb{R}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ est un dioïde commutatif, appelé "algèbre $(\min, +)$ ", pour lequel $\varepsilon = +\infty$ et $e = 0$.

Lemme 1.51. Soit l'application Π définie d'un dioïde \mathcal{D} vers un dioïde \mathcal{C} . On a les équivalences suivantes :

1. L'application Π est isotone;
2. L'application Π est un \oplus -morphisme, c.-à-d. ,

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \Pi(a \oplus b) \succeq \Pi(a) \oplus \Pi(b). \quad (1.5)$$

3. Si la borne inférieure existe dans les dioïdes \mathcal{D} et \mathcal{C} , Π est un \wedge -morphisme, c.-à-d. ,

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \Pi(a \wedge b) \preceq \Pi(a) \wedge \Pi(b). \quad (1.6)$$

Démonstration. Le résultat est une déduction de la remarque 1.27 □

1.4.1 Sous-dioïde

Définition 1.52 (Sous-dioïde). Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde. Un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$ est un sous-dioïde de $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ si et seulement si :

- Les éléments neutres de \mathcal{D} appartiennent à \mathcal{C} ;
- \mathcal{C} est fermé pour les lois \oplus et \otimes ($\forall a, b \in \mathcal{C}, a \oplus b \in \mathcal{C}$ et $a \otimes b \in \mathcal{C}$).

Exemple 1.53. $\mathbb{Z}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ et $\mathbb{Z}_{\min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ sont respectivement des sous-dioïdes de \mathbb{R}_{\max} et \mathbb{R}_{\min} .

1.4.2 Calcul matriciel dans les dioïdes

Définition 1.54 (Dioïde matriciel). L'ensemble des matrices carrées de dimension n , à coefficients dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, est un dioïde matriciel, noté $(\mathcal{D}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$, où les opérations sont définies, à partir des opérations du dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ de manière analogue à l'algèbre classique, de la façon suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{D}^{n \times n};$$

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n,$$

$$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

L'élément identité de $\mathcal{D}^{n \times n}$ est la matrice, notée e , ou E lorsqu'il est utile de la distinguer du scalaire e , elle est composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs. L'élément zéro est la matrice composée exclusivement de ε et est noté ε .

La somme et le produit de deux matrices de dimensions compatibles, pas nécessairement carrées, peuvent être définis de la façon suivante :

$$A \in \mathcal{D}^{n \times p}, \quad B \in \mathcal{D}^{n \times p}; \quad A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, p,$$

$$C \in \mathcal{D}^{n \times p}, \quad D \in \mathcal{D}^{p \times q}; \quad C \otimes D : (C \otimes D)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p C_{ik} \otimes D_{kj}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad \forall j = 1, \dots, q.$$

Pour que ces matrices puissent être manipulées comme des éléments d'un dioïde matriciel, il faut, en toute rigueur, considérer qu'elles appartiennent au dioïde de matrices carrées de dimension $\max(n, p, q) \times \max(n, p, q)$, en les complétant, si nécessaire, pour cela de lignes et/ou de colonnes constituées de l'élément ε .

1.4.3 Séries formelles dans les dioïdes

Définition 1.55 (Dioïde de séries formelles). Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde, on définit une série formelle en q variables, notées p_1 à p_q , à coefficients dans \mathcal{D} comme une application Π de \mathbb{Z}^q dans \mathcal{D} : $\forall \kappa = (\kappa_1, \dots, \kappa_q) \in \mathbb{Z}^q$, $\Pi(\kappa)$ représente le coefficient de $p_1^{\kappa_1} \dots p_q^{\kappa_q}$. Une autre représentation équivalente de la série Π est :

$$\Pi = \bigoplus_{\kappa \in \mathbb{Z}^q} \Pi(\kappa_1, \dots, \kappa_q) p_1^{\kappa_1} \dots p_q^{\kappa_q}.$$

L'ensemble des séries formelles muni des opérations :

$$\begin{aligned}\Pi \oplus \Psi &: (\Pi \oplus \Psi)(\kappa) = \Pi(\kappa) \oplus \Psi(\kappa), \\ \Pi \otimes \Psi &: (\Pi \otimes \Psi)(\kappa) = \bigoplus_{i+j=\kappa} \Pi(i) \otimes \Psi(j),\end{aligned}$$

est un dioïde noté $\mathcal{D}[[p_1, \dots, p_q]]$.

On appelle *support* de la série formelle Π l'ensemble :

$$\text{Supp}(\Pi) = \{\kappa \in \mathbb{Z}^q \mid \Pi(\kappa) \neq \varepsilon\}.$$

Une série formelle à support fini est appelée *polynôme*. Une série formelle dont le support est un singleton (de \mathbb{Z}^q) est appelée *monôme*.

Exemple 1.56. Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde et f une application de \mathbb{Z} dans \mathcal{D} . On définit la série formelle $F(z)$ en l'indéterminée z à coefficients dans \mathcal{D} par :

$$F(z) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} f(t)z^t.$$

Nous désignerons par $\langle F(z), z^t \rangle$ le coefficient $f(t)$ de $F(z)$ pour z^t . L'ensemble des séries formelles en l'indéterminée z et à coefficients dans \mathcal{D} muni des opérations

$$\begin{aligned}F(z) \oplus G(z) &: \langle F(z) \oplus G(z), z^t \rangle = \langle F(z), z^t \rangle \oplus \langle G(z), z^t \rangle \\ F(z) \otimes G(z) &: \langle F(z) \otimes G(z), z^t \rangle = \bigoplus_{i+j=t} \langle F(z), z^i \rangle \otimes \langle G(z), z^j \rangle\end{aligned}$$

est un dioïde noté $\mathcal{D}[[z]]$.

Le sous-ensemble des polynômes muni des mêmes lois que $\mathcal{D}[[z]]$ est un sous-dioïde de $\mathcal{D}[[z]]$ noté $\mathcal{D}[z]$.

1.5 Dioïdes et structures ordonnées

L'objet de ce paragraphe est d'établir un lien entre les dioïdes présentés précédemment de façon purement combinatoire et la théorie des treillis. Ce lien entre dioïdes et treillis va permettre d'énoncer les résultats obtenus en appliquant certains résultats de la partie consacrée aux treillis. Les ouvrages de référence pour cette partie sont [Cuninghame-Green, 1979] et [Baccelli et al., 1992]

1.5.1 Dioïdes canoniquement ordonnés

L'idempotence de la loi additive \oplus permet de définir naturellement une relation d'ordre dans un dioïde. Le théorème suivant affirme de plus que cette relation d'ordre est compatible avec les lois du dioïde.

Théorème 1.57. Dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, la relation \preceq définie par

$$a \preceq b \iff a \oplus b = b \tag{1.7}$$

est une relation d'ordre. De plus cette relation d'ordre est compatible avec les lois de structure de \mathcal{D} , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned}a \preceq b &\Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c && \forall c \in \mathcal{D}, \\ a \preceq b &\Rightarrow a \otimes c \preceq b \otimes c \text{ et } c \otimes a \preceq c \otimes b && \forall c \in \mathcal{D}.\end{aligned}$$

Démonstration. Comme l'addition est idempotente, on a $a = a \oplus a \succeq a$, ce qui montre la réflexivité. L'addition étant commutative, si $a \preceq b$ et $b \preceq a$ alors $b = a \oplus b = b \oplus a = a$, d'où $a = b$, ce qui prouve l'antisymétrie. Il reste à montrer la transitivité : $a \preceq b$ et $b \preceq c$ alors $c = b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c$. On en déduit que \preceq est une relation d'ordre.

Montrons que la relation d'ordre est compatible avec les lois \oplus et \otimes . Soit $a, b \in \mathcal{D}$ avec $a \preceq b$ et soit $c \in \mathcal{D}$, on a $b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus b \oplus c = a \oplus c \oplus b \oplus c = (a \oplus c) \oplus (b \oplus c)$, d'où $a \oplus c \preceq b \oplus c$. De même, $b \otimes c = (a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$, d'où $a \otimes c \preceq b \otimes c$ (*idem* pour la multiplication à gauche). \square

La relation d'ordre est dite *totale* si

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \preceq b \quad \text{ou} \quad b \preceq a.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre d'un dioïde soit total, s'écrit de façon évidente

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \oplus b = b \quad \text{ou} \quad a.$$

C'est-à-dire que l'opération \oplus vérifie la propriété dite de sélectivité ; dans ce cas le monoïde (\mathcal{D}, \oplus) et le dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ sont dits sélectifs ([Gondran and Minoux, 2001, § 6.4]).

Remarque 1.58. L'ordre \preceq défini dans \mathbb{R}_{\max} est total et coïncide avec l'ordre usuel \leq . En revanche, l'ordre total \preceq défini dans \mathbb{R}_{\min} est l'inverse de l'ordre usuel \leq (par exemple $2 \preceq 1$).

1.5.2 Dioïdes et treillis

Dans cette partie nous présentons les relations entre dioïdes, sup-semi-treillis et treillis. Le théorème 1.57 de la partie précédente permet d'établir que l'idempotence de la somme dans un dioïde induit une structure de *sup-semi-treillis* (définition 1.10), pour lequel la borne supérieure, notée \vee , correspond à la loi additive \oplus ($a \oplus b$ est le plus petit majorant de a et b) du dioïde. De même en considérant la remarque 1.23 sur la définition algébrique d'un *sup-semi-treillis*, on peut noter que la loi \vee d'un *sup-semi-treillis* est associative, commutative et idempotente, c'est-à-dire que \vee possède les mêmes axiomes que la loi additive \oplus d'un dioïde. De plus, on sait, d'après la définition 1.49, qu'un dioïde possède un élément minimum ε (plus petit que tous les autres éléments du dioïde), ce qui confère au dioïde une structure de treillis (voir théorème 1.21).

1.5.3 Dioïde complet

Définition 1.59 (Dioïde complet). Un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi \otimes distribue (à gauche et à droite) sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $b \in \mathcal{D}$ et tout sous-ensemble $A \subset \mathcal{D}$,

$$b \otimes \left(\bigoplus_{a \in A} a \right) = \bigoplus_{a \in A} (b \otimes a) \quad \text{et} \quad \left(\bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes b = \bigoplus_{a \in A} (a \otimes b).$$

Il résulte de cette définition que, pour tout $A \subset \mathcal{D}$ et $B \subset \mathcal{D}$:

$$\left(\bigoplus_{a \in A} a \right) \otimes \left(\bigoplus_{b \in B} b \right) = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} (a \otimes b).$$

Exemple 1.60. *Le dioïde \mathbb{Z}_{\max} complété par l'élément $+\infty$ est un dioïde complet noté $\overline{\mathbb{Z}}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$. De même on note $\overline{\mathbb{R}}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \max, +)$ le dioïde \mathbb{R}_{\max} complété par l'élément $+\infty$.*

Puisque un dioïde \mathcal{D} a une structure de *treillis* (\mathcal{D}, \preceq) , s'il est complet, il admet un plus grand élément. On notera \top ce plus grand élément. L'élément \top correspond à la somme de tous les éléments de \mathcal{D}

$$\top = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x.$$

Cet élément est absorbant pour la loi additive $\forall a, \top \oplus a = \top$, et vérifie $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \top = \varepsilon$.

Définition 1.61 (Borne inf). Si \mathcal{D} est un dioïde complet, alors \wedge est la loi associative commutative et idempotente vérifiant

$$a \wedge b = \bigoplus \{x \mid x \preceq a \text{ et } x \preceq b\},$$

et faisant de $(\mathcal{D}, \oplus, \wedge)$ un treillis complet. Cette loi \wedge vérifie en conséquence

$$a = a \oplus b \iff a \succeq b \iff b = a \wedge b. \quad (1.8)$$

Remarque 1.62. *La relation (1.8) peut faire penser que les opérateurs \oplus et \wedge jouent un rôle symétrique dans un dioïde. En considérant uniquement la structure de treillis d'un dioïde cette assertion est vraie (en considérant le principe de dualité). Mais, elle devient fausse si l'on considère la seconde opération d'un dioïde \otimes . Cependant, le produit à droite (il en est de même pour le produit à gauche) étant une opération isotone, on vérifie la relation de sous-distributivité suivante :*

$$c \otimes (a \wedge b) \preceq (c \otimes a) \wedge (c \otimes b) \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}.$$

L'exemple qui suit (emprunté à [Baccelli et al., 1992]) illustre cette propriété.

Exemple 1.63. *On considère le dioïde $(2^{\mathbb{R}^2}, \cup, +)$. Soient*

$$a = \{(1, 0)\}, \quad b = \{(0, 1)\} \quad \text{et} \quad c = [-1, 1] \times [-1, 1]$$

on a

$$\begin{aligned} c(a \wedge b) &= c + (a \cap b) = c + \emptyset = \emptyset, \\ (ca) \wedge (cb) &= (c + a) \cap (c + b) \\ &= ([0, 2] \times [-1, 1]) \cap ([-1, 1] \times [0, 2]) \\ &= [0, 1] \times [0, 1], \end{aligned}$$

donc $(ca) \wedge (cb) \succeq c(a \wedge b)$.

1.5.4 Dioïde distributif

Définition 1.64 (Dioïde distributif). Un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est distributif s'il est complet et si $\forall a \in \mathcal{D}$ et pour tout sous-ensemble C de \mathcal{D} , on a :

$$\left(\bigwedge_{c \in C} c \right) \oplus a = \bigwedge_{c \in C} (c \oplus a)$$

et

$$\left(\bigoplus_{c \in C} c \right) \wedge a = \bigoplus_{c \in C} (c \wedge a).$$

Remarque 1.65. Les lois \oplus et \wedge sont des lois de treillis, elles sont donc isotones pour l'ordre \preceq . Si le dioïde n'est pas distributif, on vérifie néanmoins toujours les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} a \oplus (b \wedge c) &\preceq (a \oplus b) \wedge (a \oplus c) \\ a \wedge (b \oplus c) &\succeq (a \wedge b) \oplus (a \wedge c). \end{aligned}$$

1.6 Théorie de la résiduation

Soit $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ une application définie sur des ensembles ordonnés. On s'intéresse à la résolution d'équations du type

$$\Pi(x) = b, \quad b \in \mathcal{D}. \quad (1.9)$$

Cette application Π peut être non surjective (problème de l'existence) et/ou non injective (problème de l'unicité). La théorie de la résiduation permet de donner une alternative à ce problème de résolution d'équation, en déterminant la plus grande sous-solution de l'équation (1.9) (c'est-à-dire la plus grande solution de $\Pi(x) \preceq b$). La résiduation duale permet de déterminer la plus petite super-solution de l'équation $\Pi(x) \succeq b$ (la section 1.8 sera dédiée à cette résiduation duale). On parle aussi de pseudo-inverse.

Le lecteur trouvera également dans [Cuninghame-Green, 1979, §10], [Baccelli et al., 1992, §4.4.2], [Gaubert, 1992] et [Cottenceau, 1999, §1.2] des rappels détaillés sur cette théorie qui joue un rôle central lors de la résolution des problèmes de commande considérés par la suite.

Définition 1.66 (Applications résiduables). Une application isotone $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ définie sur des ensembles ordonnés est dite résiduable, si l'équation $\Pi(x) \preceq b$ admet une plus grande solution dans \mathcal{C} pour tout $b \in \mathcal{D}$. On notera Π^\sharp l'application résiduée, avec $\Pi^\sharp(b) = \bigvee \{x \in \mathcal{C} \mid \Pi(x) \preceq b\}$.

Le théorème suivant fournit une caractérisation de ces applications.

Théorème 1.67. [Baccelli et al., 1992] Soit $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ une application isotone définie sur des ensembles ordonnés. Nous avons les équivalences suivantes :

1. l'application Π est résiduable ;
2. il existe une application $\Pi^\sharp : (\mathcal{D}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{C}, \preceq)$ isotone telle que

$$\Pi \circ \Pi^\sharp \preceq \text{Id}_{\mathcal{D}} \quad (\text{identité de } \mathcal{D}) \quad (1.10)$$

$$\Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{C}} \quad (\text{identité de } \mathcal{C}). \quad (1.11)$$

Démonstration.

1 \Rightarrow 2 L'application Π résiduable implique que $\Pi^\sharp(b) = \bigvee \{x \in \mathcal{C} \mid \Pi(x) \preceq b\}$ existe pour tout $b \in \mathcal{D}$. Par hypothèse, Π est isotone ; on a alors $\Pi(\Pi^\sharp(b)) \preceq b$, c.-à-d. , $\Pi \circ \Pi^\sharp \preceq \text{Id}_{\mathcal{D}}$.

D'autre part, par la définition 1.66, on a $\Pi^\sharp(\Pi(x')) = \bigvee \{x \in \mathcal{C} \mid \Pi(x) \preceq \Pi(x')\}$ et comme $x' \in \{x \in \mathcal{C} \mid \Pi(x) \preceq \Pi(x')\}$, on a $\bigvee \{x \in \mathcal{C} \mid \Pi(x) \preceq \Pi(x')\} \succeq x'$, c'est-à-dire $\Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{C}}$.

Il reste à montrer que Π^\sharp est isotone ; soit $b' \preceq b$, alors

$$\Pi \circ \Pi^\sharp(b') \preceq b' \preceq b \Rightarrow \Pi^\sharp(b') \in \{x \in \mathcal{C} \mid \Pi(x) \preceq b\}.$$

En d'autres termes, $\Pi^\sharp(b')$ est solution de $\Pi(x) \preceq b$, ce qui implique $\Pi^\sharp(b') \preceq \bigvee \{x \in \mathcal{C} \mid \Pi(x) \preceq b\} = \Pi^\sharp(b)$. Donc on a $b' \preceq b \Rightarrow \Pi^\sharp(b') \preceq \Pi^\sharp(b)$, c'est-à-dire que l'application Π^\sharp est isotone.

2 \Rightarrow 1 Soit Π^\sharp telle que $\Pi \circ \Pi^\sharp(b) \preceq b$ pour tout $b \in \mathcal{D}$, alors $x = \Pi^\sharp(b)$ est toujours solution de $\Pi(x) \preceq b$. De plus, pour toute solution $x' \in \mathcal{C}$ vérifiant $\Pi(x') \preceq b$, on a $\Pi^\sharp(\Pi(x')) \preceq \Pi^\sharp(b)$ puisque Π^\sharp est isotone, c'est-à-dire d'après (1.11), $x' \preceq \Pi^\sharp \circ \Pi(x') \preceq \Pi^\sharp(b)$. Toute solution x' de $\Pi(x) \preceq b$, et ce pour tout $b \in \mathcal{D}$, est plus petite que $\Pi^\sharp(b)$. Donc l'élément $\Pi^\sharp(b)$ est la plus grande solution de l'équation $\Pi(x) \preceq b$ pour $b \in \mathcal{D}$, ou encore Π est résiduable. □

Propriétés 1.68 (Unicité de Π^\sharp). Soit $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ une application résiduable, l'application Π^\sharp est unique. En effet supposons qu'il existe une autre application Φ vérifiant le point 2 du théorème 1.67. On remarque que

$$\begin{aligned}\Pi^\sharp &= \text{Id}_{\mathcal{C}} \circ \Pi^\sharp \preceq (\Phi \circ \Pi) \circ \Pi^\sharp = \Phi \circ (\Pi \circ \Pi^\sharp) \preceq \Phi \circ \text{Id}_{\mathcal{D}} = \Phi, \\ \Phi &= \text{Id}_{\mathcal{C}} \circ \Phi \preceq (\Pi^\sharp \circ \Pi) \circ \Phi = \Pi^\sharp \circ (\Pi \circ \Phi) \preceq \Pi^\sharp \circ \text{Id}_{\mathcal{D}} = \Pi^\sharp.\end{aligned}$$

Par conséquent on a $\Pi^\sharp = \Phi$.

Le théorème qui suit donne une condition nécessaire et suffisante d'existence de l'application Π^\sharp lorsque l'application Π est définie sur des treillis complets.

Théorème 1.69. [Baccelli et al., 1992] Soit $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ une application isotone définie sur des treillis complets \mathcal{C} et \mathcal{D} de plus petits éléments respectifs $\varepsilon_{\mathcal{C}}$ et $\varepsilon_{\mathcal{D}}$. L'application isotone $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est résiduable si et seulement si Π est semi-continue inférieurement (s.c.i) et $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) = \varepsilon_{\mathcal{D}}$.

Démonstration. Si Π est résiduable, l'ensemble $\{x \in \mathcal{C} \mid \Pi(x) \preceq \varepsilon_{\mathcal{D}}\}$ admet un plus grand élément x' et par isotonie de Π , $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) \preceq \Pi(x') \preceq \varepsilon_{\mathcal{D}}$. Comme, d'autre part, $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) \succeq \varepsilon_{\mathcal{D}}$, on a $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) = \varepsilon_{\mathcal{D}}$.

Montrons ensuite que Π est semi-continue inférieurement. L'application Π étant isotone, alors on a pour tout $\mathcal{S} \subset \mathcal{C}$:

$$\Pi\left(\bigvee_{s \in \mathcal{S}} s\right) \succeq \bigvee_{s \in \mathcal{S}} \Pi(s). \quad (1.12)$$

Soit Π^\sharp l'application résiduée de Π . La relation (1.11) donne $s \preceq \Pi^\sharp \circ \Pi(s)$, alors

$$\Pi\left(\bigvee_{s \in \mathcal{S}} s\right) \preceq \Pi\left(\bigvee_{s \in \mathcal{S}} \Pi^\sharp \circ \Pi(s)\right).$$

De même l'isotonie de Π^\sharp donne

$$\Pi\left(\bigvee_{s \in \mathcal{S}} \Pi^\sharp \circ \Pi(s)\right) \preceq \Pi \circ \Pi^\sharp\left(\bigvee_{s \in \mathcal{S}} \Pi(s)\right).$$

D'autre part, la relation (1.10) donne

$$\Pi \circ \Pi^\sharp\left(\bigvee_{s \in \mathcal{S}} \Pi(s)\right) \preceq \bigvee_{s \in \mathcal{S}} \Pi(s).$$

Finalement, on obtient

$$\Pi\left(\bigvee_{s \in \mathcal{S}} s\right) \preceq \Pi\left(\bigvee_{s \in \mathcal{S}} \Pi^\sharp \circ \Pi(s)\right) \preceq \Pi \circ \Pi^\sharp\left(\bigvee_{s \in \mathcal{S}} \Pi(s)\right) \preceq \bigvee_{s \in \mathcal{S}} \Pi(s),$$

soit l'inverse de la relation (1.12), ce qui prouve que Π est semi-continue inférieurement.

Réciproquement, si $\Pi(\varepsilon_{\mathcal{C}}) = \varepsilon_{\mathcal{D}}$, pour tout $b \in \mathcal{D}$, l'ensemble $S' = \{x \in \mathcal{C} \mid \Pi(x) \preceq b\}$ est non vide. De plus, Π étant semi-continue inférieurement, $\Pi(\bigvee_{x \in S'} x) = \bigvee_{x \in S'} \Pi(x)$, donc $S' \subset \mathcal{C}$ admet un plus grand élément. \square

Le théorème suivant fournit des résultats de la théorie de la résiduation auxquels il sera fréquemment fait référence par la suite.

Théorème 1.70. [Baccelli et al., 1992] Soit $\Pi : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ et $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux applications résiduables.

$$\Pi = \Pi \circ \Pi^{\sharp} \circ \Pi \text{ et } \Pi^{\sharp} = \Pi^{\sharp} \circ \Pi \circ \Pi^{\sharp} \quad (1.13)$$

$$(\Phi \circ \Pi)^{\sharp} = \Pi^{\sharp} \circ \Phi^{\sharp} \quad (1.14)$$

$$\Pi \text{ est injective} \iff \Pi^{\sharp} \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{B}} \iff \Pi^{\sharp} \text{ est surjective} \quad (1.15)$$

$$\Pi \text{ est surjective} \iff \Pi \circ \Pi^{\sharp} = \text{Id}_{\mathcal{C}} \iff \Pi^{\sharp} \text{ est injective} \quad (1.16)$$

Démonstration.

(1.13) L'application Π étant résiduable, la relation (1.11) permet d'écrire

$$\Pi \circ \Pi^{\sharp} \circ \Pi = \Pi \circ (\Pi^{\sharp} \circ \Pi) \succeq \Pi.$$

Inversement, la relation (1.10) donne

$$\Pi \circ \Pi^{\sharp} \circ \Pi = (\Pi \circ \Pi^{\sharp}) \circ \Pi \preceq \Pi.$$

Ceci implique que $\Pi = \Pi \circ \Pi^{\sharp} \circ \Pi$. La démonstration de $\Pi^{\sharp} = \Pi^{\sharp} \circ \Pi \circ \Pi^{\sharp}$ est similaire en se rappelant que Π^{\sharp} est isotone.

(1.14) Soient Π et Φ deux applications résiduables, alors d'après (1.11) et (1.10), d'une part

$$\Phi \circ \Pi \circ \Pi^{\sharp} \circ \Phi^{\sharp} = \Phi \circ (\Pi \circ \Pi^{\sharp}) \circ \Phi^{\sharp} \preceq \Phi \circ \text{Id}_{\mathcal{C}} \circ \Phi^{\sharp} = \Phi \circ \Phi^{\sharp} \preceq \text{Id}_{\mathcal{D}},$$

et d'autre part,

$$\Pi^{\sharp} \circ \Phi^{\sharp} \circ \Phi \circ \Pi = \Pi^{\sharp} \circ (\Phi^{\sharp} \circ \Phi) \circ \Pi \succeq \Pi^{\sharp} \circ \text{Id}_{\mathcal{C}} \circ \Pi = \Pi^{\sharp} \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{B}}.$$

En outre, d'après la propriété 1.68, si l'application $(\Phi \circ \Pi)^{\sharp}$ existe, elle est unique ; par conséquent, $(\Phi \circ \Pi)^{\sharp} = \Pi^{\sharp} \circ \Phi^{\sharp}$.

(1.15) ($\Pi^{\sharp} \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \Pi^{\sharp}$ est surjective) $\forall x \in \mathcal{B}$, $\Pi^{\sharp} \circ \Pi(x) = x$ implique $\mathcal{B} = \text{Im} \Pi^{\sharp}$, c.-à-d. Π^{\sharp} est surjective.

($\Pi^{\sharp} \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{B}} \Leftarrow \Pi^{\sharp}$ est surjective) Inversement, si Π^{\sharp} est surjective, pour tout $x \in \mathcal{B}$, il existe $b \in \mathcal{C}$ tel que $\Pi^{\sharp}(b) = x$, donc $\Pi^{\sharp} \circ \Pi(x) = \Pi^{\sharp} \circ \Pi \circ \Pi^{\sharp}(b) = \Pi^{\sharp}(b) = x$ (application de (1.13)).

($\Pi^{\sharp} \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{B}} \Rightarrow \Pi$ est injective) $\Pi(x) = \Pi(x') \Rightarrow x = \Pi^{\sharp} \circ \Pi(x) = \Pi^{\sharp} \circ \Pi(x') = x'$, donc Π est injective.

($\Pi^{\sharp} \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{B}} \Leftarrow \Pi$ est injective) Si Π est injective, pour tout $x \in \mathcal{B}$ l'égalité suivante $\Pi \circ (\Pi^{\sharp} \circ \Pi(x)) = \Pi(x)$ implique $\Pi^{\sharp} \circ \Pi(x) = x$.

(1.16) Preuve semblable à (1.15). \square

1.6.1 Morphismes de dioïdes

Définition 1.71 (Homomorphisme). Une application $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ définie sur des dioïdes est un homomorphisme si

$$\forall a, b \in \mathcal{D} \quad \Pi(a \oplus b) = \Pi(a) \oplus \Pi(b) \text{ et } \Pi(\varepsilon) = \varepsilon \quad (1.17)$$

$$\Pi(a \otimes b) = \Pi(a) \otimes \Pi(b) \text{ et } \Pi(e) = e \quad (1.18)$$

Une application vérifiant seulement (1.17) est dite \oplus -morphisme, c'est-à-dire que l'image d'une somme d'éléments de \mathcal{D} est la somme, dans \mathcal{C} , de leurs images. Une application vérifiant seulement (1.18) est dite \otimes -morphisme, c'est-à-dire que l'image d'un produit d'éléments de \mathcal{D} est le produit, dans \mathcal{C} , de leurs images.

Définition 1.72 (Isomorphisme). Une application $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ définie sur des dioïdes est un isomorphisme, si Π^\sharp est définie sur \mathcal{C} et si Π et Π^\sharp sont des homomorphismes.

1.6.2 Congruence et dioïde quotient

Définition 1.73 (Congruence). Une congruence sur un dioïde \mathcal{D} est une relation d'équivalence (notée \mathcal{R}) compatible avec les lois du dioïde, c'est-à-dire

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow (a \oplus c) \mathcal{R} (b \oplus c), \quad (a \otimes c) \mathcal{R} (b \otimes c), \quad \forall a, b, c \in \mathcal{D}.$$

Théorème 1.74. [Baccelli et al., 1992, Cottenceau, 1999][Dioïde Quotient] Soit un dioïde \mathcal{D} et \mathcal{R} une congruence sur \mathcal{D} . En notant $[a] = \{x \in \mathcal{D} \mid x \mathcal{R} a\}$ la classe d'équivalence de $a \in \mathcal{D}$, le dioïde quotient de \mathcal{D} par cette congruence est un dioïde noté \mathcal{D}/\mathcal{R} pour lequel la somme et le produit sont définis par

$$\begin{aligned} [a] \oplus [b] &\stackrel{\text{déf}}{=} [a \oplus b] \\ [a] \otimes [b] &\stackrel{\text{déf}}{=} [a \otimes b] \end{aligned} \quad (1.19)$$

Démonstration. Il convient de souligner qu'en raison de la compatibilité de \mathcal{R} avec les lois du dioïde \mathcal{D} , en prenant a, a' et b, b' tels que $[a] = [a']$ et $[b] = [b']$ on obtient

$$[a \oplus b] = [a' \oplus b'] \text{ et } [a \otimes b] = [a' \otimes b'],$$

c'est-à-dire que les classes $[a \oplus b]$ et $[a \otimes b]$ dépendent seulement des classes $[a]$ et $[b]$ et non des représentants de ces classes. Les opérations sur le quotient données par (1.19) sont par conséquent parfaitement définies et confèrent au quotient \mathcal{D}/\mathcal{R} une structure de dioïde. \square

Théorème 1.75. [Baccelli et al., 1992, Cottenceau, 1999] Soit Π un homomorphisme de \mathcal{D} dans \mathcal{C} . La relation \mathcal{R}_Π définie par

$$a \mathcal{R}_\Pi b \iff \Pi(a) = \Pi(b), \quad \forall a, b \in \mathcal{D},$$

est une congruence.

Démonstration. Le fait que \mathcal{R}_Π est une relation d'équivalence est immédiat. D'autre part, puisque Π est un homomorphisme, l'ensemble $\Pi(\mathcal{D})$ est fermé pour les lois \oplus et \otimes de \mathcal{C} . De plus, les éléments neutres pour l'addition et le produit de \mathcal{C} appartiennent également à $\Pi(\mathcal{D})$ (Π est un homomorphisme donc $\Pi(\varepsilon) = \varepsilon$ et $\Pi(e) = e$). Donc, $\Pi(\mathcal{D})$ bénéficie d'une structure de dioïde. L'application $\mathcal{D}/\mathcal{R}_\Pi \rightarrow \Pi(\mathcal{D}), [a]_\Pi \mapsto \Pi(a)$ définit alors un isomorphisme de dioïdes. \square

1.6.3 Restrictions d'applications

Nous rappelons dans cette partie des résultats énoncés dans [Blyth and Janowitz, 1972] et certains dans [Cohen, 1998a] et [Cottenceau, 1999, §1.2.2]. Par *restriction d'une application* on entend la restriction de son domaine et/ou de son codomaine de définition. Les restrictions d'applications vont permettre d'étudier des cas où la propriété de résiduabilité est conservée après restriction, ou à l'inverse, des cas où la restriction d'une application non résiduable devient résiduable.

Définition 1.76 (Injection canonique d'un sous-ensemble). Soit U un sous-ensemble de l'ensemble \mathcal{S} . L'injection canonique de U dans \mathcal{S} est l'application $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$, définie par $I_U(u) = u$ pour tout $u \in U$.

Définition 1.77 (Application image). L'application image de $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ est l'injection canonique de $\Pi(\mathcal{S})$ dans \mathcal{T} ; cette application sera notée $I_{\text{Im}\Pi}$.

Définition 1.78 (Restriction d'une application à un domaine). Soit $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ et U un sous-ensemble de \mathcal{S} . Nous noterons $\Pi|_U : U \rightarrow \mathcal{T}$ l'application vérifiant

$$\Pi|_U = \Pi \circ I_U$$

où $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$ représente l'injection canonique de U dans \mathcal{S} . L'application $\Pi|_U$ sera appelée restriction de Π au domaine U .

Définition 1.79 (Restriction d'une application à un codomaine). Soit $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ et $\text{Im}\Pi \subset V \subset \mathcal{T}$. Nous noterons ${}_{V|}\Pi : \mathcal{S} \rightarrow V$ l'application définie par l'égalité

$$\Pi = (I_V) \circ ({}_{V|}\Pi)$$

où $I_V : V \rightarrow \mathcal{T}$ représente l'injection canonique de V dans \mathcal{T} . L'application ${}_{V|}\Pi$ sera dite restriction de Π au codomaine V .

Définition 1.80 (Restriction double). Soit $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$, $U \subset \mathcal{S}$ et $\Pi(U) \subset V \subset \mathcal{T}$. Nous noterons ${}_{V|}\Pi|_U : U \rightarrow V$ l'application définie par l'égalité

$${}_{V|}\Pi|_U = \Pi \circ I_U = (I_V) \circ ({}_{V|}\Pi|_U).$$

La proposition suivante concerne la résiduabilité de l'injection canonique.

Proposition 1.81 (Lemme de projection [Blyth and Janowitz, 1972, Gaubert, 1992]). Soient \mathcal{S} un treillis complet (cf. définition 1.18) et U un sous-treillis complet de \mathcal{S} contenant le plus petit élément $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S} . L'injection canonique $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$ est résiduable. L'application résiduée I_U^{\sharp} vérifie les propriétés suivantes :

- (i) I_U^{\sharp} est un projecteur c.-à-d. $I_U^{\sharp} \circ I_U^{\sharp} = I_U^{\sharp}$
- (ii) $I_U^{\sharp} \leq \text{Id}_{\mathcal{S}}$
- (iii) $u \in U \iff I_U^{\sharp}(u) = u$.

Démonstration. Vérifions d'abord que I_U est une application résiduable. D'une part, comme $\varepsilon_{\mathcal{S}} \in U$, on a $I_U(\varepsilon_{\mathcal{S}}) = \varepsilon_{\mathcal{S}}$. D'autre part, U étant un sous-treillis complet, on a $I_U\left(\bigvee_{x \in X} x\right) = \bigvee_{x \in X} I_U(x)$, pour tout $X \subset U$. Par conséquent l'injection canonique $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$ est résiduable (cf. théorème 1.69).

- (i) $I_U^\# \circ I_U^\# = (I_U \circ I_U)^\# = I_U^\#$ (par (1.14))
- (ii) $I_U^\# = I_U \circ I_U^\# \preceq \text{Id}_S$
- (iii) si $u \in U$, alors $u = I_U(u)$, donc $I_U^\#(u) = I_U^\# \circ I_U(u) \succeq u$. En outre d'après (ii), $\text{Pr}_U(u) = I_U \circ \text{Pr}_U(u) = I_U \circ I_U^\#(u) \preceq u$, d'où $u \in U \Rightarrow I_U^\#(u) = u$. La réciproque est immédiate. \square

1.6.3.1 Résiduation contrainte

Comme nous l'avons vu (§1.6) la théorie de la résiduation permet de caractériser si une application isotone Π définie de \mathcal{S} dans \mathcal{T} des ensembles ordonnés admet une unique application jouant le rôle d'application inverse. Si l'application est définie sur des treillis complets, il a été montré que l'existence était assurée pour peu que l'application soit semi-continue inférieure.

Dans cette partie nous allons nous intéresser à la résiduation contrainte introduite par [Cohen, 1998a, §1.3] et [Cottenceau, 1999]. Le problème de résiduation contrainte consiste à rechercher une solution à $\Pi(s) \preceq b$, $b \in \mathcal{T}$, non pas dans \mathcal{S} tout entier, mais dans un sous treillis complet \mathcal{S}_{sub} de \mathcal{S} contenant le plus petit élément $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S} .

Remarque 1.82. Soit $I_{\mathcal{S}_{sub}}$ l'injection canonique de \mathcal{S}_{sub} dans \mathcal{S} . Résoudre $\Pi(s) \preceq t$ avec $s \in \mathcal{S}_{sub}$ revient à considérer une équation du type

$$\Pi|_{\mathcal{S}_{sub}}(t) = \Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}}(s) \preceq t, \quad (1.20)$$

et à rechercher la plus grande solution dans \mathcal{S}_{sub} . Le diagramme suivant commute¹ :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \xrightarrow{\Pi} & \mathcal{T} \\ I_{\mathcal{S}_{sub}} \uparrow & & \nearrow \Pi|_{\mathcal{S}_{sub}} \\ \mathcal{S}_{sub} & & \end{array}$$

D'après la proposition 1.81, on sait que l'injection canonique d'un sous-treillis dans un treillis est résiduable, la proposition suivante donne un élément de réponse au problème de résiduation contrainte.

Proposition 1.83. Soient $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ une application résiduable définie sur des treillis complets et $I_{\mathcal{S}_{sub}}$ l'injection canonique du sous-treillis complet \mathcal{S}_{sub} (contenant le plus petit élément $\varepsilon_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S}) dans \mathcal{S} . $\Pi|_{\mathcal{S}_{sub}} = \Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}}$ est résiduable et sa résiduée est donnée par

$$(\Pi|_{\mathcal{S}_{sub}})^\#(t) = (\Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}})^\#(t) = I_{\mathcal{S}_{sub}}^\# \circ \Pi^\#(t). \quad (1.21)$$

Démonstration. D'après (1.14), on a $(\Pi|_{\mathcal{S}_{sub}})^\# = (\Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}})^\# = I_{\mathcal{S}_{sub}}^\# \circ \Pi^\#$. De plus par application du lemme de projection (cf. proposition 1.81), $I_{\mathcal{S}_{sub}}^\#$ existe et est notée $\text{Pr}_{\mathcal{S}_{sub}}$, d'où le résultat (1.21). \square

Proposition 1.84. Soient $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ une application résiduable définie sur des treillis complets et $I_{\mathcal{T}_{sub}}$ l'injection canonique du sous-treillis complet \mathcal{T}_{sub} (avec $\text{Im}\Pi \subset \mathcal{T}_{sub} \subset \mathcal{T}$) dans \mathcal{T} . L'application $\mathcal{T}_{sub}|\Pi$ est résiduable et

$$(\mathcal{T}_{sub}|\Pi)^\# = \Pi^\# \circ I_{\mathcal{T}_{sub}} = (\Pi^\#)|_{\mathcal{T}_{sub}}.$$

¹ un tel diagramme est dit commutatif lorsque les différentes applications permettant d'aller d'un point à un autre sont égales.

Démonstration. Si Π est résiduable, alors pour tout $t \in \mathcal{T}$, $\Pi^\sharp(t)$ est la plus grande solution de $\Pi(s) \preceq t$. En particulier, pour tout $t \in \mathcal{T}_{sub} \subset \mathcal{T}$, il existe une plus grande solution à $\Pi(s) \preceq t$. L'application $\tau_{sub|\Pi}$ est donc, par définition, résiduable. Sa résiduée $(\tau_{sub|\Pi})^\sharp$ est simplement la restriction de Π^\sharp au domaine \mathcal{T}_{sub} , notée $(\Pi^\sharp)|_{\mathcal{T}_{sub}}$. \square

1.6.3.2 Fermeture et résiduation

Proposition 1.85. *Soit $\Pi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$ une fermeture définie sur un treillis complet \mathcal{S} . La restriction ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi$ est résiduable et sa résiduée*

$$({}_{\text{Im}\Pi}\Pi)^\sharp = I_{\text{Im}\Pi}$$

est l'injection canonique $I_{\text{Im}\Pi}$ de $\text{Im}\Pi$ dans \mathcal{S} .

Démonstration. D'après le théorème 1.67 ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi$ est résiduable si et seulement si il existe une application Π^\sharp telle que ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi \circ \Pi^\sharp \preceq \text{Id}_{\text{Im}\Pi}$ et $\Pi^\sharp \circ {}_{\text{Im}\Pi}\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$. En posant $\Pi^\sharp = I_{\text{Im}\Pi}$, où $I_{\text{Im}\Pi}$ est l'injection canonique de $\text{Im}\Pi$ dans \mathcal{S} , on vérifie que ${}_{\text{Im}\Pi}\Pi \circ I_{\text{Im}\Pi} = {}_{\text{Im}\Pi}\Pi|_{\text{Im}\Pi} = \text{Id}_{\text{Im}\Pi}$ (identité de $\text{Im}\Pi$) puisque $\Pi \circ \Pi = \Pi$ (définition 1.34); de même, d'après la définition 1.79, on a $I_{\text{Im}\Pi} \circ {}_{\text{Im}\Pi}\Pi = \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$. \square

Proposition 1.86. *Une fermeture résiduable $\Pi : (\mathcal{S}, \preceq) \rightarrow (\mathcal{S}, \preceq)$ vérifie :*

- (i) $\Pi = \Pi^\sharp \circ \Pi$
- (ii) $\Pi = \Pi \circ \Pi^\sharp$.

Démonstration.

- (i) L'application Π étant résiduable, le point (ii) du théorème 1.67 donne $\Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$, ce qui implique $\Pi^\sharp \circ \Pi \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}} \circ \Pi = \Pi$; Π étant une fermeture, on a $\Pi^\sharp \circ \Pi \circ \Pi = \Pi^\sharp \circ \Pi$, soit $\Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \Pi$. D'autre part, Π étant résiduable, on a (d'après (1.13)) $\Pi = \Pi \circ \Pi^\sharp \circ \Pi$; de plus, d'après la définition d'une fermeture $\Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$, nous avons donc $\Pi = \Pi \circ \Pi^\sharp \circ \Pi \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}} \circ \Pi^\sharp \circ \Pi = \Pi^\sharp \circ \Pi$, soit $\Pi \succeq \Pi^\sharp \circ \Pi$. Finalement, on a $\Pi = \Pi^\sharp \circ \Pi$.
- (ii) Preuve duale de (i).

\square

1.6.4 Application dans le contexte des dioïdes

Les principaux résultats présentés ici sont issus de [Baccelli et al., 1992] et [Gaubert, 1992]. Le lecteur retrouvera également la plupart des ces résultats dans [Cohen, 1998a]. On se propose ici d'étudier le caractère résiduable de certaines applications de référence définies sur des dioïdes complets.

Théorème 1.87. *Soient $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ et $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ deux dioïdes complets de plus petits éléments respectifs $\varepsilon_{\mathcal{D}}$ et $\varepsilon_{\mathcal{C}}$. Une application isotone $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ est résiduable si et seulement si, pour tout ensemble X de \mathcal{D}*

$$\Pi \left(\bigoplus_{x \in X} x \right) = \bigoplus_{x \in X} \Pi(x) \tag{1.22}$$

$$\Pi(\varepsilon_{\mathcal{D}}) = \varepsilon_{\mathcal{C}}. \tag{1.23}$$

Démonstration. La preuve de ce théorème est identique à celle du théorème 1.69 puisqu'il a été montré précédemment (voir §1.5) qu'un dioïde complet pouvait être assimilé à un treillis complet. \square

Soient L_a et R_a les applications suivantes définies sur un dioïde complet \mathcal{D}

$$L_a : x \mapsto a \otimes x \quad (1.24)$$

$$R_a : x \mapsto x \otimes a \quad (1.25)$$

En référence à la définition 1.59, sur un dioïde complet, la multiplication distribuée sur les sommes infinies, à gauche ou à droite. De plus, $L_a(\varepsilon) = \varepsilon$ et $R_a(\varepsilon) = \varepsilon$. En appliquant le théorème 1.87, L_a et R_a sont donc résiduables sur un dioïde complet.

Lorsque \mathcal{D} est commutatif, $L_a = R_a$ implique donc également $L_a^\sharp = R_a^\sharp$.

Nous utiliserons les notations suivantes introduites notamment dans [Baccelli et al., 1992].

Notation 1.88 (Applications Résiduées de L_a, R_a). *Nous noterons*

$$L_a^\sharp(x) = a \backslash x = \frac{x}{a}$$

$$R_a^\sharp(x) = x \not\! / a = \frac{x}{a}$$

les applications résiduées respectives de L_a et R_a .

On rappelle que $\varepsilon \backslash x = \top$, $\top \not\! / x = \varepsilon$ et $\top \not\! / \top = \top$.

Le tableau qui suit présente un ensemble de propriétés de ces applications dont le lecteur pourra trouver les preuves dans [Baccelli et al., 1992, p. 182-185],[Gaubert, 1992, §5.3], [Cottenceau, 1999, §1.3.3].

$a(a \backslash x) \preceq x$	$(x \not\! / a)a \preceq x$	(f.1)
$a \backslash (ax) \succeq x$	$(xa) \not\! / a \succeq x$	(f.2)
$a(a \backslash (ax)) = ax$	$((xa) \not\! / a)a = xa$	(f.3)
$a \backslash (x \wedge y) = a \backslash x \wedge a \backslash y$	$(x \wedge y) \not\! / a = x \not\! / a \wedge y \not\! / a$	(f.4)
$(a \oplus b) \backslash x = a \backslash x \wedge b \backslash x$	$x \not\! / (a \oplus b) = x \not\! / a \wedge x \not\! / b$	(f.5)
$(ab) \backslash x = b \backslash (a \backslash x)$	$x \not\! / (ba) = (x \not\! / a) \not\! / b$	(f.6)
$b(a \backslash x) \preceq (a \not\! / b) \backslash x$	$(x \not\! / a)b \preceq x \not\! / (b \not\! / a)$	(f.7)
$(a \backslash x)b \preceq a \backslash (xb)$	$b(x \not\! / a) \preceq (bx) \not\! / a$	(f.8)

$$(a \backslash b) \not\! / c = a \backslash (b \not\! / c) = a \backslash b \not\! / c \quad (1.26)$$

1.6.4.1 Résiduation matricielle

Lemme 1.89 ([Baccelli et al., 1992]). *Si $A = (A_{ij}) \in \mathcal{D}^{m \times n}$ où \mathcal{D} est un dioïde dans lequel \wedge existe, et $y \in \mathcal{D}^n$, alors*

$$(A \backslash y)_i = \bigwedge_{j=1}^n (A_{ji} \backslash y_j).$$

Quand $\mathcal{D} = \overline{\mathbb{Z}}_{\max}$, alors on obtient

$$(A \bowtie y)_i = \bigwedge_{j=1}^m (A_{ji} \bowtie y_j) = \min_{j=1, \dots, m} (-A_{ji} + y_j).$$

Théorème 1.90. Soient $A, D \in \mathcal{D}^{m \times n}$, $B \in \mathcal{D}^{m \times p}$ et $C \in \mathcal{D}^{n \times p}$, alors d'après le lemme précédent on obtient pour $C = A \bowtie B$ et $D = B \not\leftarrow C$:

$$C_{ij} = \bigwedge_{k=1}^m (A_{ki} \bowtie B_{kj}) \quad , \quad D_{ij} = \bigwedge_{k=1}^p (B_{ik} \not\leftarrow C_{jk}). \quad (1.27)$$

La remarque suivante est due à [Cohen, 1998a].

Remarque 1.91. Il est important de noter que certaines expressions impliquant la résiduation peuvent être ambiguës. Considérons $A \in \mathcal{D}^{m \times n}$, $B \in \mathcal{D}^{m \times p}$ et $x \in \mathcal{D}^p$, il faut être prudent quand on utilise des expressions comme $A \bowtie Bx$. En effet, d'un côté, remarquons que $A \bowtie (Bx)$ peut être interprétée comme $L_A^\# \circ L_B(x)$. Cette application $L_A^\# \circ L_B$ n'est en général pas un \oplus -morphisme de $\mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^n$, mais par isotonie elle vérifie

$$L_A^\# \circ L_B(x \oplus y) \succeq L_A^\# \circ L_B(x) \oplus L_A^\# \circ L_B(y).$$

Mais, d'un autre côté, $x \mapsto (A \bowtie B)x$ peut être interprétée comme un opérateur linéaire de $\mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^n$, car en fait cet opérateur correspond à la multiplication à gauche par $C = A \bowtie B$ (voir (1.27)).

Par contre, d'après (f.8), on a toujours $L_A^\# \circ L_B \succeq A \bowtie B$ car $A \bowtie (Bx) \succeq (A \bowtie B)x$.

1.7 Solutions extrémales et points fixes

Cette section synthétise les résultats proposés par Kumar et Garg [Kumar and Garg, 1995]. Ils se sont intéressés à la recherche des solutions extrémales d'inégalité de la forme :

$$\Pi(u) \preceq \Phi(u). \quad (1.28)$$

Ils ont notamment montré, moyennant quelques hypothèses, que la solution peut être obtenue en calculant le point fixe d'une fonction déduite de ce système. Les résultats importants sont résumés par les théorèmes suivants.

Théorème 1.92. [Kumar and Garg, 1995] Soit (\mathcal{X}, \preceq) un treillis complet et $\Pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ une fonction isotone. Soit $\mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{X} \mid \Pi(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de Π . Alors :

1. $\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y \in \mathcal{Y}$, et $\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y = \bigwedge \{x \in \mathcal{X} \mid \Pi(x) \preceq x\}$.
2. $\bigvee_{y \in \mathcal{Y}} y \in \mathcal{Y}$, et $\bigvee_{y \in \mathcal{Y}} y = \bigvee \{x \in \mathcal{X} \mid x \preceq \Pi(x)\}$.

Démonstration. On montre le point 1, la preuve du second est analogue.

On définit $\mathcal{Z} = \{x \in \mathcal{X} \mid \Pi(x) \preceq x\}$. Il suffit donc de montrer que $\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z \in \mathcal{Y}$ et que $\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y = \bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z$.

Premièrement, on montre que $\Pi(\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z) \preceq \bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z$. Par définition, on a $\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z \preceq z \forall z \in \mathcal{Z}$. Par isotonie de Π , on obtient $\Pi(\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z) \preceq \Pi(z) \forall z \in \mathcal{Z}$. Puisque $\forall z \in \mathcal{Z}$, $\Pi(z) \preceq z$ on a $\Pi(\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z) \preceq \bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z \preceq z \forall z \in \mathcal{Z}$.

Deuxièmement, on montre que $\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z \preceq \Pi(\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z)$. Du point précédent on a $\Pi(\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z) \preceq \bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z$. Par isotonie on obtient $\Pi(\Pi(\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z)) \preceq \Pi(\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z)$ donc, par définition de \mathcal{Z} , on a $\Pi(\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z) \in \mathcal{Z}$, alors,

$$\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z \preceq \Pi(\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z).$$

En résumé $\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z \in \mathcal{Y}$.

Montrons maintenant que $\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z = \bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y$.

Par définition, nous avons $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$. Par conséquent $\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y \in \mathcal{Z}$. Donc $\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y \succeq \bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z$. Par ailleurs, $\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y$ est, par définition, le plus petit point fixe de Π et puisque dans la première partie de la démonstration nous avons montré que $\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z$ est un point fixe donc $\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y \preceq \bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z$.

En résumé $\bigwedge_{z \in \mathcal{Z}} z = \bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y$. □

Remarque 1.93. *Le théorème précédent montre qu'une fonction isotone sur un treillis complet admet un plus grand point fixe et un plus petit point fixe, et ces derniers correspondent respectivement à la plus petite solution de $\{x \in \mathcal{X} \mid \Pi(x) \preceq x\}$ et la plus grande solution de $\{x \in \mathcal{X} \mid x \preceq \Pi(x)\}$.*

Théorème 1.94. *[Kumar and Garg, 1995] Soit (\mathcal{X}, \preceq) un treillis complet et $\Pi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ une fonction. Soit $\mathcal{Y} = \{x \in \mathcal{X} \mid \Pi(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de Π .*

1. Si Π est semi continue inférieure, alors $\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y = \Pi^*(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x)$.
2. Si Π est semi continue supérieure, alors $\bigvee_{y \in \mathcal{Y}} y = \Pi_*(\bigvee_{x \in \mathcal{X}} x)$.

Π^* et Π_* sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{X} : \Pi^*(x) &= \bigoplus_{i \geq 0} \Pi^i(x), \\ \forall x \in \mathcal{X} : \Pi_*(x) &= \bigwedge_{i \geq 0} \Pi^i(x). \end{aligned}$$

Π^0 est la fonction identité, et pour chaque $i \geq 0$, $\Pi^{i+1} = \Pi \circ \Pi^i$.

Démonstration. Nous prouvons le point 1, la preuve du second est identique. D'après les remarques 1.27 et 1.31, si la fonction Π est semi-continue inférieure alors elle est isotone. On déduit du théorème 1.92 que $\bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y \in \mathcal{Y}$. En suite, on montre que $\{\Pi^i(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x), i \geq 0\}$ est une suite décroissante. Par définition de Π^0 et de \mathcal{X} , on a

$$\Pi^0(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) = \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x \preceq \Pi(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) = \Pi^1(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x).$$

D'où par isotonie de Π , $\forall i \geq 0$, $\Pi^i(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) \preceq \Pi^{i+1}(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x)$.

Il reste à prouver que $\Pi^*(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x)$ est un point fixe. Ceci est déduit des égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\Pi(\Pi^*(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x)) &= \Pi(\bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Pi^i(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x)) \\
&= \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} \Pi^{i+1}(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) \\
&= \bigoplus_{i \geq 1} \Pi^i(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) \\
&= \bigoplus_{i \geq 1} \Pi^i(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) \oplus \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x \\
&= \bigoplus_{i \geq 0} \Pi^i(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) \\
&= \Pi^*(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x),
\end{aligned}$$

la deuxième égalité est conséquence de la sup-semi continuité de Π , la quatrième égalité est déduite du fait que $\Pi^0(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) = \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x \preceq \Pi^i(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x)$ pour tout $i \geq 1$.

Il reste à montrer qu'il s'agit du plus petit point fixe, c'est à dire que $\Pi^*(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) \preceq y \forall y \in \mathcal{Y}$. Soit $y \in \mathcal{Y}$, par définition de $\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x$ on a $\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x \preceq y$, l'isotonie de Π induit :

$$\forall i \geq 0 : \Pi^i(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) \preceq \Pi^i(y) = y,$$

la dernière égalité provient du fait que y est un point fixe. On conclut que $\Pi^*(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) \preceq y \forall y \in \mathcal{Y}$ et donc que $\Pi^*(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x) = \bigwedge_{y \in \mathcal{Y}} y$. \square

Théorème 1.95. *Considérons le système d'inégalités 1.28 défini sur un treillis complet (\mathcal{U}, \preceq) , soit*

$$U_1 = \{u \in \mathcal{U} \mid \Pi(u) \preceq \Phi(u)\}$$

l'ensemble des solutions du système 1.28.

Si Π est une application résiduable et Φ est une application isotone, alors on peut considérer la fonction Ψ définie par

$$\Psi(u) = \Pi^\sharp \circ \Phi(u), \text{ et l'ensemble de ses points fixes } U = \{u \in \mathcal{U} \mid \Psi(u) = u\}$$

alors

$$\bigvee U_1 \in U_1, \bigvee U \in U \text{ et } \bigvee U_1 = \bigvee U.$$

Démonstration. Notons tout d'abord que la fonction Π est résiduable, la définition 1.66 donne directement :

$$\Pi(u) \preceq \Phi(u) \Leftrightarrow u \preceq \Pi^\sharp(\Phi(u)) = \Psi(u),$$

soit

$$u \in U_1 \Leftrightarrow u \preceq \Psi(u)$$

Les fonctions Π^\sharp et Φ sont isotones, donc, la fonction Ψ est isotone. Donc, d'après le théorème 1.92 $\bigvee U \in U$ et $\bigvee U = \bigvee \{u \in \mathcal{U} \mid u \preceq \Psi(u)\}$. Comme $u \preceq \Psi(u) \Leftrightarrow u \in U_1$, nous avons $\bigvee U = \bigvee U_1$ et $\bigvee U_1 \in U_1$. \square

Remarque 1.96. *Sous les conditions citées dans le théorème 1.95, la fonction Ψ est isotone. Dans un treillis complet, l'isotonie garantit l'existence d'un plus grand et d'un plus petit point fixe (voir théorème 1.92). Quand Π et Φ satisfont ces conditions, la plus grande solution de 1.28 existe et correspond au plus grand point fixe de Ψ .*

Le théorème qui suit utilise la fonction Ψ pour calculer la solution extrême de 1.28.

Théorème 1.97. *Considérons l'inégalité 1.28 définie sur le treillis complet (\mathcal{X}, \preceq) et l'ensemble $U = \{u \in \mathcal{U} \mid u = \Psi(u)\}$ contenant toutes les solutions de ce système .*

Si la fonction Π est résiduable et la fonction Φ est isotone. Considérons le calcul itératif suivant :

- $u_0 := \bigvee \mathcal{U}$
- $u_{k+1} := \Psi(u_k)$

Si $u_{m+1} = u_m$ pour $m \in \mathbb{N}$ alors $u_m = \bigvee U$.

Démonstration. Tout d'abord, on déduit du théorème 1.95 que la plus grande solution de l'inégalité 1.28, $\bigvee U$, existe. Dans un premier temps, on va montrer que si $u_m \in U$ alors u_m est une solution de l'inégalité 1.28. Puisque $u_{m+1} = u_m$ on a $\Psi(u_m) = u_m$ donc $u_m \in U$.

Dans un deuxième temps, on montre que pour une solution z tel que $\Psi(z) = z$, on a $z \preceq u_m$. On utilisera des inductions pour montrer que pour tous $m \geq 0$, $z \preceq u_m$. Si $m = 0$, alors $u_m = \bigvee \mathcal{U} = \bigvee U$, donc $z \preceq u_m = \bigvee \mathcal{U} = \bigvee U$. Supposons maintenant que $z \preceq u_m$ pour un $m \geq 0$. On a Ψ isotone donc $\Psi(z) \preceq \Psi(u_m) = u_{m+1} = u_m$. Or $z \preceq \Psi(z)$ donc $z \preceq \Psi(z) \preceq \Psi(u_m) = u_m$. \square

Corollaire 1.98. *Considérons l'inégalité 1.28 définie sur un treillis complet (X, \preceq) ; soit U l'ensemble des solutions de 1.28 et Ψ une fonction définie comme indiquée dans le théorème 1.95. Si la fonction Π est résiduable et la fonction Φ est dualement résiduable, alors $\bigvee U_1 = (\Psi)_*(\bigvee X)$.*

Démonstration. La composition de fonctions semi-continues supérieures est semi-continue supérieure. Donc le résultat est une application direct du théorème 1.94. \square

Proposition 1.99. *Si Ψ est une application isotone et si $\exists u$ tel que $u = \Psi(u)$ avec $u \neq \varepsilon$ alors l'algorithme du théorème 1.95 converge vers le plus grand point fixe et ce dernier est différent de ε .*

Démonstration. Puisque Ψ est isotone, u_n est une suite décroissante. De plus, si $\exists u \neq \varepsilon$ tel que $u = \Psi(u)$, alors $u \preceq u_n \forall n \in \mathbb{N}$. Nous rappelons qu'une suite décroissante minorée converge. Donc, sous les conditions du théorème 1.95 l'algorithme converge vers une valeur différente de ε et en s'appuyant sur le théorème 1.95 cette valeur est donnée par le plus grand point fixe de Ψ . \square

1.7.1 Équations implicites linéaires dans les diïdes

Dans cette partie on s'intéresse à la résolution d'inéquations implicites qui sont des cas particuliers de la section précédente et qui sont de la forme :

$$x \succeq \Pi(x) \oplus b \quad (1.29)$$

$$x \preceq \Pi(x) \wedge b. \quad (1.30)$$

Théorème 1.100. *Soient $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ et $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ une application semi-continue inférieurement (cf. définition 1.30). La plus petite solution de l'équation (1.29) est $x = \Pi^*(b)$, où*

$$\Pi^0 = \text{Id}_{\mathcal{D}}, \quad \Pi^n = \underbrace{\Pi \circ \Pi \circ \dots \circ \Pi}_{n \text{ fois}} \quad \text{et} \quad \Pi^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi^n = \text{Id}_{\mathcal{D}} \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \Pi^{n+1}.$$

De plus, $x = \Pi^(b)$ réalise l'égalité dans $x \succeq \Pi(x) \oplus b$.*

Démonstration. C'est une application directe des théorèmes 1.94 et 1.92. En effet la plus petite solution de $x \succeq \Pi(x) \oplus b$ est égale au plus petit point fixe de $f(x)$ avec $f(x) = \Pi(x) \oplus b$, c'est aussi le plus petit point fixe de Π pour $x \succeq b$ et puisque l'application Π est semi-continue inférieurement donc la plus petite solution est donnée par $x = \Pi^*(\bigwedge_{x \succeq b} x) = \Pi^*(b)$. \square

Corollaire 1.101. Soit \mathcal{D} un dioïde complet ; si $\Pi = L_a, \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, alors l'équation implicite

$$x = a \otimes x \oplus b \quad (1.31)$$

admet $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$ comme plus petite solution.

Théorème 1.102. Soient \mathcal{D} un dioïde complet et $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ une application semi-continue supérieurement. La plus grande solution de (1.30) est $x = \Pi_*(b)$ avec

$$\Pi_* = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} \Pi^n.$$

Démonstration. C'est une application directe des théorèmes 1.94 et 1.92. En effet la plus grande solution de $x \preceq \Pi(x) \wedge b$ est égale au plus grand point fixe de $f(x)$ avec $f(x) = \Pi(x) \wedge b$, c'est aussi le plus grand point fixe de Π pour $x \preceq b$ et puisque l'application Π est semi-continue supérieurement donc la plus grande solution est donnée par $x = \Pi_*(\bigvee_{x \preceq b} x) = \Pi_*(b)$. \square

Corollaire 1.103. Soit l'application $\Pi = L_a^\sharp : x \mapsto a \backslash x, \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ définie sur un dioïde complet. Alors, l'équation

$$x = a \backslash x \wedge b$$

admet $x = \Pi_*(b) = a^* \backslash b = \left[\bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n \right] \backslash b$ comme plus grande solution.

1.7.2 Fermetures résiduables sur les dioïdes complets

Notation 1.104 (Étoile de Kleene). Soit \mathcal{D} un dioïde complet. L'application étoile de Kleene, définie sur \mathcal{D} , sera notée \mathcal{K} par la suite,

$$\begin{aligned} \mathcal{K} : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ x &\mapsto x^* = \bigoplus_{k \geq 0} x^k. \end{aligned}$$

On utilisera également une notation particulière pour l'application "plus" dérivée de l'étoile

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D} \\ x &\mapsto x^+ = \bigoplus_{k \geq 1} x^k. \end{aligned}$$

Les applications \mathcal{K} et \mathcal{P} sont isotones (par composition d'applications isotones) et $a^* = e \oplus a^+$ ou $a^+ = a \otimes a^*$. De plus les applications \mathcal{K} et \mathcal{P} sont des fermetures ; en effet, $a^* \succeq a$ et $(a^*)^* = a^*$; de même $a^+ \succeq a$ et $(a^+)^+ = a^+$.

Remarque 1.105. *L'application $\mathcal{K} : x \mapsto x^*$ de $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ n'est pas résiduable ; en effet, elle ne vérifie pas la condition de semi-continuité inférieure du théorème 1.87. Pour illustrer cette remarque, considérons les matrices suivantes*

$$a = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

alors

$$(a \oplus b)^* = \begin{pmatrix} \top & \top \\ \top & \top \end{pmatrix} \neq a^* \oplus b^* = \begin{pmatrix} e & 1 \\ -1 & e \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e & -1 \\ 1 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 1 \\ 1 & e \end{pmatrix}$$

on remarque que pour ces deux valeurs la condition de semi-continuité inférieure n'est pas vérifiée. Cela signifie que l'équation $\mathcal{K}(x) = b$ n'a pas de solution $\forall b \in \mathcal{D}$. Malgré tout, il existe une restriction résiduable de l'application \mathcal{K} , la proposition suivante précise cette notion.

Proposition 1.106. [Lhommeau, 2004] *Soit l'application $\mathcal{K} : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto x^*$ définie sur un dioïde complet. L'application $\text{Im}\mathcal{K}|_{\mathcal{K}}$ est résiduable et sa résiduée est*

$$(\text{Im}\mathcal{K}|_{\mathcal{K}})^{\sharp} = I_{\text{Im}\mathcal{K}},$$

où $I_{\text{Im}\mathcal{K}}$ est l'injection canonique de $\text{Im}\mathcal{K}$ dans \mathcal{D} .

Démonstration. Il s'agit d'une application directe de la proposition 1.85. □

Remarque 1.107. *On peut déduire de la proposition précédente 1.106, que $x = a^*$ est la plus grande solution de l'inéquation $x^* \preceq a^*$. En fait cette plus grande solution satisfait l'égalité $x^* = a^*$.*

1.7.3 Complément sur l'étoile de Kleene

Les applications \mathcal{K} et \mathcal{P} (cf. notation 1.104) vérifient les relations suivantes (voir [Gaubert, 1992] et [Cottenceau, 1999]).

Théorème 1.108. *Soit \mathcal{D} un dioïde complet. $\forall a, b \in \mathcal{D}$*

$$a^+ \preceq a^* \tag{1.32}$$

$$(a^*)^* = a^* \tag{1.33}$$

$$(a^+)^* = a^* \tag{1.34}$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{1.35}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = b^*(ab^*)^* = (a \oplus b)^*a^* = b^*(a \oplus b)^* \tag{1.36}$$

$$a^*a^* = a^* \tag{1.37}$$

$$(a^*)^+ = a^* \tag{1.38}$$

$$(a^+)^+ = a^+ \tag{1.39}$$

$$(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^* \tag{1.40}$$

$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \tag{1.41}$$

En outre, lorsque \mathcal{D} est commutatif

$$(a \oplus b)^* = a^*b^*. \tag{1.42}$$

Démonstration.

(1.32) par définition $a^* = e \oplus a^+ \Rightarrow a^* \succeq e$ et $a^* \succeq a^+$.

(1.33) par définition de l'étoile de Kleene, $(a^*)^* = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{l \geq 0} (a^k)^l = \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{l \geq 0} a^{k+l} = \bigoplus_{j=k+l \geq 0} a^j = a^*$.

(1.34) par définition de \mathcal{P} , $a \preceq a^+ \Rightarrow a^* \preceq (a^+)^*$, (isotonie de \mathcal{K}). D'après (1.32), $a^+ \preceq a^* \Rightarrow (a^+)^* \preceq (a^*)^* = a^*$ (par (1.33)). On en déduit que $a^* \preceq (a^+)^* \preceq (a^*)^* = a^*$ d'où l'égalité.

(1.35) $(ab)^*a = (e \oplus ab \oplus abab \oplus \dots)a = (a \oplus aba \oplus ababa \oplus \dots) = a(e \oplus ba \oplus baba \oplus \dots) = a(ba)^*$.

(1.36) d'après le corollaire 1.101, sont équivalents :

$$\begin{aligned} x &= (a \oplus b)^* \\ x &= (a \oplus b)x \oplus e = ax \oplus bx \oplus e \\ x &= a^*bx \oplus a^* \\ x &= (a^*b)^*a^* = (a^*b)^*a^*a^* = (a \oplus b)^*a^*. \end{aligned}$$

De même pour l'autre égalité, $x = (a \oplus b)^* = ax \oplus bx \oplus e = b^*ax \oplus b^* = b^*(ab^*)^* = b^*b^*(ab^*)^* = b^*(a \oplus b)^*$.

(1.37) d'après (1.36) et en raison de l'idempotence de \oplus , $a^* = (a \oplus a)^* = (a^*a)^*a^* = (a^+)^*a^* = a^*a^*$ (par (1.34)).

(1.38) par définition de \mathcal{P} , $a^+ = aa^*$, donc $(a^+)^+ = a^*(a^*)^* = a^*a^* = a^*$ (par (1.33) et (1.37)).

(1.39) par définition, $a^+ = aa^*$, alors $(a^+)^+ = a^+(a^+)^* = a^+a^* = aa^*a^* = aa^* = a^+$ (par (1.37)).

(1.40) $(ab^*)^+ = ab^*(ab^*)^* = a(b^*(ab^*)^*) = a(a \oplus b)^*$ (par (1.36)).

(1.41) $(ab^*)^* = e \oplus (ab^*)^+ = e \oplus a(a \oplus b)^*$ (par 1.40).

(1.42) Si \mathcal{D} est commutatif on a pour $k \geq 1$, $(a^*b)^k = (a^*)^k b^k = a^*b^k$ (par (1.38)). D'où $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = (e \oplus \bigoplus_{k \geq 1} a^*b^k)a^* = a^* \oplus \bigoplus_{k \geq 1} a^*b^k = a^*(e \oplus \bigoplus_{k \geq 1} b^k) = a^*b^*$. □

Les résultats énoncés par le théorème 1.108 sont vérifiés pour tout dioïde complet, y compris matriciel. Dans le cas matriciel, on a en particulier le résultat suivant permettant de calculer l'étoile d'une matrice décomposée en 4 blocs.

Théorème 1.109. Soit $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ partitionnée en quatre blocs

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La matrice A^* s'écrit alors

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* \oplus a_{11}^*a_{12}(a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^*a_{21}a_{11}^* & a_{11}^*a_{12}(a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^* \\ (a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^*a_{21}a_{11}^* & (a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^* \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On renvoie le lecteur à [Cohen et al., 1989] ou [Baccelli et al., 1992] pour ce résultat. □

Théorème 1.110 ([Cohen et al., 1991]). Soient \mathcal{D} un dioïde complet et $A \in \mathcal{D}^{p \times n}$ une matrice. Alors $A \setminus A$ est une matrice dans $\mathcal{D}^{n \times n}$ vérifiant

$$A \setminus A = (A \setminus A)^*. \tag{1.43}$$

Démonstration. D'après (f.2), $A \setminus A \succeq E$, où E est la matrice identité de $\mathcal{D}^{n \times n}$. D'autre part, d'après (f.3), $A = A(A \setminus A)$ donc $A \setminus A = A \setminus (A(A \setminus A))$. Or d'après (f.8), $A \setminus (A(A \setminus A)) \succeq A \setminus A \otimes A \setminus A$. On peut donc établir l'encadrement suivant

$$E \preceq (A \setminus A)^2 \preceq A \setminus A,$$

de même pour tout $n \geq 1$, $E \preceq (A \setminus A)^n \preceq A \setminus A$. Par sommation on obtient donc $(A \setminus A)^* = A \setminus A$. En posant $A \setminus A = B$ avec $B \in \mathcal{D}^{n \times n}$ une matrice, une autre façon d'interpréter ce résultat est de dire que l'application $x \mapsto Bx$ est une fermeture. \square

Propriétés 1.111. [Baccelli et al., 1992] Soit x , a deux éléments d'un dioïde \mathcal{D}

$$\begin{aligned} a^* \setminus x &= a^* \setminus (a^* \setminus x) & x \setminus a^* &= (x \setminus a^*) \setminus a^* \\ a^* x &= a^* \setminus (a^* x) & x a^* &= (x a^*) \setminus a^* \\ a^* \setminus x &= a^* (a^* \setminus x) & x \setminus a^* &= (x \setminus a^*) a^* \\ a^* \setminus a^* &= a^* & a^* \setminus a^* &= a^* \end{aligned}$$

Lemme 1.112. Soit A , B deux matrices d'un dioïde $\mathcal{D}^{n \times n}$ alors

$$A^* \succeq B^* \Leftrightarrow A^* B^* = B^* A^* = B^* \setminus A^* = A^* \setminus B^* = A^*.$$

Démonstration. Tout d'abord, on prouve que $A^* \succeq B^* \Leftrightarrow A^* B^* = A^*$.

Par définition de l'étoile de Kleene $B^* \succeq e \Rightarrow A^* B^* \succeq A^*$.

De plus, si $A^* \succeq B^*$ alors $A^* A^* \succeq A^* B^*$, donc $A^* = A^* B^*$.

Inversement $A^* = A^* B^* \Rightarrow A^* \succeq B^*$ car $A^* B^* \succeq B^*$.

Par conséquent, $A^* \succeq B^* \Leftrightarrow A^* B^* = A^*$.

Le même raisonnement conduit à $A^* \succeq B^* \Leftrightarrow B^* A^* = A^*$.

Troisièmement, on prouve que $A^* \succeq B^* \Leftrightarrow B^* \setminus A^* = A^*$.

Par définition de l'étoile de Kleene $B^* \succeq e$ donc $B^* \setminus A^* \preceq A^*$.

De plus, si $A^* \succeq B^*$ alors $B^* \setminus A^* \succeq A^* \setminus A^* = A^*$ (l'application $x \mapsto x \setminus a$ est antitone et $a^* \setminus a^* = a^*$ voir propriété 1.111).

Par conséquent, si $A^* \succeq B^*$ alors $B^* \setminus A^* = A^*$.

Inversement, si $B^* \setminus A^* = A^*$ alors $B^*(B^* \setminus A^*) = B^* A^*$ et comme $B^*(B^* \setminus A^*) \preceq A^*$ (voir théorème 1.67) et $B^* A^* \succeq A^*$ (car $B^* \succeq e$), on a

$B^* \setminus A^* = A^* \Rightarrow B^*(B^* \setminus A^*) = B^* A^* = A^* \Leftrightarrow A^* \succeq B^*$ (grâce au point précédent $A^* \succeq B^* \Leftrightarrow B^* A^* = A^*$).

Par conséquent, $A^* \succeq B^* \Leftrightarrow B^* \setminus A^* = A^*$.

Le quatrième point : $A^* \succeq B^* \Leftrightarrow A^* \setminus B^* = A^*$ se prouve de manière identique. \square

1.8 Résiduation duale

Dans cette partie la résiduation duale d'applications particulières est considérée. La résiduation duale permet de s'intéresser aux solutions d'inégalités de type

$$\Pi(x) \succeq b, b \in \mathcal{D},$$

où $\Pi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est une application définie sur des ensembles ordonnés.

Alors que la théorie de la résiduation (section 1.6) permet de caractériser la plus grande sous solution d'équation du type $\Pi(x) = b$, la résiduation duale permet d'en caractériser la plus petite sur-solution. Nous donnons, également, les conditions d'existence de la résiduations duale et quelques propriétés qui seront utilisées dans la suite pour calculer la commande des graphes d'événements P-temporels.

Théorème 1.113. [Baccelli et al., 1992] Soit Π une application isotone définie d'un dioïde complet \mathcal{D} vers un dioïde complet \mathcal{C} . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- 1 Pour tout $b \in \mathcal{C}$, il existe une plus petite solution à l'équation $\Pi(x) \succeq b$.
- 2 $\Pi(\top) = \top$ et Π est s.c.s.
- 3 Il existe une application Π^b de \mathcal{C} vers \mathcal{D} qui est isotone et s.c.i tel que :

$$\begin{aligned} \Pi \circ \Pi^b &\succeq I_{\mathcal{C}} \text{ (identité de } \mathcal{C}\text{);} \\ \Pi^b \circ \Pi &\preceq I_{\mathcal{D}} \text{ (identité de } \mathcal{D}\text{)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, Π^b est unique. Quand ces propriétés sont satisfaites, l'application Π est dite *dualement résiduable* : Π^b est la *résiduée duale*.

Exemple 1.114. Un exemple intéressant est donné par l'application $\Pi : x \mapsto (x, x)$ définie d'un dioïde complet \mathcal{D} vers \mathcal{D}^2 . Cette application est à la fois résiduable et dualement résiduable et il est facile de vérifier que $\Pi^\sharp(x, y) = x \wedge y$ et $\Pi^b(x, y) = x \oplus y$.

Théorème 1.115. Soit Π une application dualement résiduable d'un ensemble ordonné \mathcal{D} vers un ensemble ordonné \mathcal{C} , alors

$$\begin{aligned} \Pi \circ \Pi^b \circ \Pi &= \Pi \\ \Pi^b \circ \Pi \circ \Pi^b &= \Pi^b \end{aligned}$$

et on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \Pi^b \circ \Pi &= I_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow \Pi \text{ injective} \Leftrightarrow \Pi^b \text{ surjective;} \\ \Pi \circ \Pi^b &= I_{\mathcal{C}} \Leftrightarrow \Pi^b \text{ injective} \Leftrightarrow \Pi \text{ surjective.} \end{aligned}$$

Démonstration. Tout d'abord on a :

$$\Pi \circ \Pi^b \circ \Pi = (\Pi \circ \Pi^b) \circ \Pi \succeq \Pi,$$

qui est un résultat direct du théorème 1.113. De plus, on a :

$$\Pi \circ \Pi^b \circ \Pi = \Pi \circ (\Pi^b \circ \Pi) \preceq \Pi,$$

d'où l'égalité. La preuve de la deuxième équation est similaire à la première, on rappelle que Π^b est isotone.

Toisièmement, on prouve que $(\Pi^b \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{D}} \Rightarrow \Pi^b$ est surjective).

$\forall x \in \mathcal{D}$, $\Pi^b \circ \Pi(x) = x$ implique $\mathcal{D} = \text{Im} \Pi^b$, c.-à-d. Π^b est surjective.

Quatrièmement, on prouve que $(\Pi^b \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{D}} \Leftarrow \Pi^b$ est surjective).

Inversement, si Π^b est surjective, pour tout $x \in \mathcal{D}$, il existe $b \in \mathcal{C}$ tel que $\Pi^b(b) = x$, donc $\Pi^b \circ \Pi(x) = \Pi^b \circ \Pi \circ \Pi^b(b) = \Pi^b(b) = x$ (application du deuxième point).

Maintenant, on prouve que $(\Pi^b \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{D}} \Rightarrow \Pi$ est injective).

$\Pi(x) = \Pi(x') \Rightarrow x = \Pi^b \circ \Pi(x) = \Pi^b \circ \Pi(x') = x'$, donc Π est injective.

Il reste à montrer que $(\Pi^b \circ \Pi = \text{Id}_{\mathcal{D}} \Leftarrow \Pi \text{ est injective})$.

Si Π est injective, pour tout $x \in \mathcal{D}$ l'égalité suivante $\Pi \circ (\Pi^b \circ \Pi(x)) = \Pi(x)$ implique $\Pi^b \circ \Pi(x) = x$.
Preuve semblable pour le quatrième point. \square

Proposition 1.116. *Si $\Pi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ et $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ sont deux applications dualement résiduables, alors $\Phi \circ \Pi$ est aussi une application dualement résiduable et*

$$(\Phi \circ \Pi)^b = \Pi^b \circ \Phi^b.$$

Démonstration. On rappelle que la semi-continuité est préservée par la composition d'applications semi-continues, donc la propriété de résiduée duale reste vraie aussi pour la composition d'applications dualement résiduables.

Alors l'application $\Pi^b \circ \Phi^b$ est isotone et s.c.i. Finalement,

$$\begin{aligned} \Phi \circ \Pi \circ \Pi^b \circ \Phi^b &= \Phi \circ (\Pi \circ \Pi^b) \circ \Phi^b \succeq \Phi \circ \Phi^b \succeq I_{\mathcal{B}}, \\ \Pi^b \circ \Phi^b \circ \Phi \circ \Pi &= \Pi^b \circ (\Phi^b \circ \Phi) \circ \Pi \preceq \Pi^b \circ \Pi \preceq I_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

En se basant sur l'unicité de la résiduée duale, on conclut que la propriété est vraie. \square

Proposition 1.117. *Soit Π et Φ deux applications dualement résiduables d'un ensemble ordonné \mathcal{D} (dans lequel l'opération \wedge existe) vers lui-même, alors $\Pi \wedge \Phi$ est dualement résiduable et*

$$(\Pi \wedge \Phi)^b = \Pi^b \oplus \Phi^b.$$

Démonstration. Premièrement, il est clair que l'inf de deux applications dualement résiduables est une application dualement résiduable (la semi-continuité supérieur est préservée par l'opération \wedge). Maintenant, on considère la composition $\Gamma = \Psi_3 \circ \Psi_2 \circ \Psi_1$ des trois applications suivantes :

$$\begin{aligned} \Psi_1 : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D}^2, x \mapsto (x, x), \\ \Psi_2 : \mathcal{D}^2 &\rightarrow \mathcal{D}^2, (x, y) \mapsto (\Pi(x), \Phi(y)), \\ \Psi_3 : \mathcal{D}^2 &\rightarrow \mathcal{D}, (x, y) \mapsto x \wedge y. \end{aligned}$$

On a :

$$\Gamma : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}, x \mapsto (\Pi \wedge \Phi)(x).$$

Alors,

$$\begin{aligned} \Psi_1^b : \mathcal{D}^2 &\rightarrow \mathcal{D}, (x, y) \mapsto x \oplus y \text{ (voir Exemple 1.114),} \\ \Psi_2^b : \mathcal{D}^2 &\rightarrow \mathcal{D}^2, (x, y) \mapsto (\Pi^b(x), \Phi^b(y)) \text{ (triviale),} \\ \Psi_3^b : \mathcal{D} &\rightarrow \mathcal{D}^2, x \mapsto (x, x), \end{aligned}$$

il suffit donc de calculer Γ^b en utilisant la proposition 1.116 deux fois pour prouver le résultat. \square

Proposition 1.118. *Si Π et Φ sont deux applications dualement résiduables d'un ensemble ordonné \mathcal{D} (dans lequel l'opération \wedge existe) vers lui-même et si $(\Pi \oplus \Phi)$ est dualement résiduable, alors :*

$$(\Pi \oplus \Phi)^b \preceq \Pi^b \wedge \Phi^b.$$

Démonstration. Premièrement, on suppose que l'application $(\Pi \oplus \Phi)$ est dualement résiduable. Alors,

$$(\Pi \oplus \Phi) \circ (\Pi^b \wedge \Phi^b) = (\Pi \oplus \Phi) \circ \Pi^b \oplus (\Pi \oplus \Phi) \circ \Phi^b,$$

et puisque $(\Pi \oplus \Phi)$ est supposée être dualement résiduable et donc semi-continue inférieure, le terme à droite est plus grand que $\Phi \circ \Phi^b$ qui est lui même plus grand que $I_{\mathcal{D}}$; le dernier terme est lui plus grand que $\Pi \circ \Pi^b$ qui est plus grand que $I_{\mathcal{D}}$. Ceci suffit à prouver la proposition. \square

Proposition 1.119. *On considère les applications suivantes : Π, Φ, Ψ et Θ qui sont définies de l'ensemble ordonné \mathcal{D} vers lui même. Si Π et Θ sont dualement résiduables, alors :*

$$\Pi \circ \Phi \succeq \Psi \circ \Theta \Leftrightarrow \Phi \circ \Theta^b \succeq \Pi^b \circ \Psi. \quad (1.44)$$

Comme corollaire, on a :

$$\Pi \succeq \Theta \Leftrightarrow \Theta^b \succeq \Pi^b, \quad (1.45)$$

$$\Pi \preceq I_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow \Pi^b \succeq I_{\mathcal{D}}, \quad (1.46)$$

et

$$\Pi \succeq I_{\mathcal{D}} \Leftrightarrow \Pi^b \preceq I_{\mathcal{D}}. \quad (1.47)$$

Démonstration. Si $\Pi \circ \Phi \succeq \Psi \circ \Theta$, alors $(\Pi^b \circ \Pi) \circ \Phi \circ \Theta^b \succeq \Pi^b \circ \Psi \circ (\Theta \circ \Theta^b)$, en utilisant le théorème 1.113 ceci implique que $\Phi \circ \Theta^b \succeq \Pi^b \circ \Psi$. Alors la preuve de l'équation 1.45 est triviale. Pour prouver 1.46 et 1.47, nous utilisons le fait que l'application $I_{\mathcal{D}}$ est dualement résiduable et qu'elle est sa propre résiduée duale. \square

1.8.1 Cas particulier

Dans cette section on s'intéresse à l'inversion d'une application particulière qui nous permettra notamment de modéliser les contraintes lors de la modélisation de graphe d'événement P-temporel.

Définition 1.120. Soit $A \in \mathcal{D}^{p \times n}$ et $B \in \mathcal{D}^{n \times q}$ deux matrices, une nouvelle multiplication, notée \odot , est définie comme suit :

$$(A \odot B)_{ij} = \bigwedge_{k=1}^n A_{ik} \odot B_{kj}.$$

Avec les conventions suivantes :

$$A_{ik} \odot B_{kj} = A_{ik} \otimes B_{kj}, \quad x \odot \top = \top \odot x = \top \text{ et en particulier } \varepsilon \odot \top = \top \odot \varepsilon = \top.$$

Notation 1.121. Le produit à droite $A \odot x$ sera noté Γ_A et le produit à gauche $x \odot A$ sera notée Λ_A .

Définition 1.122. Un élément a admet un inverse à gauche (left inverse) (resp. un inverse à droite) si il existe un élément b (resp. c) tel que $b \otimes a = e$ (resp. $a \otimes c = e$).

Lemme 1.123. [Baccelli et al., 1992] Si a admet un inverse à gauche b et un inverse à droite c , alors :

- $b = c$ et cet inverse unique est noté a^{-1} ;
- de plus, $\forall x, y, a(x \wedge y) = ax \wedge ay$.

L'égalité est vraie pour la multiplication à droite par a , et elle l'est aussi pour la multiplication à droite et à gauche par a^{-1} .

Démonstration. On a d'abord $b = b(ac) = (ba)c = c$, ce qui prouve l'unicité de l'inverse à droite et à gauche. Alors, $\forall x, y$, on définit ξ et η de la manière suivante ($\xi = ax, \eta = ay$), ce qui est équivalent à : ($x = a^{-1}\xi, y = a^{-1}\eta$). On a alors, $\xi \wedge \eta = aa^{-1}(\xi \wedge \eta) \preceq a[a^{-1}\xi \wedge a^{-1}\eta] = a[x \wedge y] \preceq ax \wedge ay = \xi \wedge \eta$. Donc,

$$a(x \wedge y) = ax \wedge ay.$$

□

Proposition 1.124. Soient $A \in \mathcal{D}^{p \times n}$ une matrice et \mathcal{X} un ensemble d'éléments de $\mathcal{D}^{n \times q}$, si chaque élément A_{ik} admet un inverse alors l'application $\Gamma_A : x \mapsto A \odot x$ est semi continue supérieure, on a :

$$\Gamma_A\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x\right) = \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} \Gamma_A(x)$$

Démonstration. Soit \mathcal{X} un ensemble d'éléments de $\mathcal{D}^{n \times q}$.

$$\begin{aligned} \Gamma_A\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x\right) &= A \odot \left(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x\right) \\ (\Gamma_A\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x\right))_{ij} &= \bigwedge_{k=1}^n A_{ik} \otimes \left(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x_{kj}\right). \end{aligned}$$

Puisque chaque élément A_{ik} admet un inverse, en utilisant le lemme 1.123, on a :

$$\begin{aligned} (\Gamma_A\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x\right))_{ij} &= \bigwedge_{k=1}^n \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} (A_{ik} \otimes x_{kj}) \\ &= \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} \bigwedge_{k=1}^n (A_{ik} \otimes x_{kj}) \\ &= \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} (\Gamma_A(x))_{ij} \end{aligned}$$

alors

$$\Gamma_A\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} x\right) = \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} \Gamma_A(x)$$

□

Corollaire 1.125 (Associativité). Soient $A \in \mathcal{D}^{p \times n}, B \in \mathcal{D}^{n \times q}$ deux matrices et X une matrice de $\mathcal{D}^{q \times r}$, si l'application $\Gamma_A : Y \mapsto A \odot Y$ est semi continue supérieure, alors on a :

$$\Gamma_A(\Gamma_B(X)) = \Gamma_{A \odot B}(X).$$

De plus si $\Gamma_B : X \mapsto B \odot X$ est semi continue supérieure alors $\Gamma_{A \odot B}(X)$ est semi continue supérieure.

Démonstration. soit X une matrice de $\mathcal{D}^{q \times r}$, on a :

$$\begin{aligned}
\Gamma_A(\Gamma_B(X)) &= A \odot (B \odot X) \\
\Gamma_A(\Gamma_B(X))_{ij} &= \bigwedge_{k=1}^n (A_{ik} \otimes (\bigwedge_{l=1}^q B_{kl} \otimes X_{lj})) \\
&= \bigwedge_{k=1}^n (\bigwedge_{l=1}^q A_{ik} \otimes (B_{kl} \otimes X_{lj})) \text{ (l'application } \Gamma_A : Y \mapsto A \odot Y \text{ est semi continue supérieure)} \\
&= \bigwedge_{k=1}^n (\bigwedge_{l=1}^q (A_{ik} \otimes B_{kl}) \otimes X_{lj}) \text{ (par associativité de la loi } \otimes) \\
&= \bigwedge_{l=1}^q ((\bigwedge_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kl}) \otimes X_{lj}) \text{ (par commutativité de la loi } \wedge) \\
&= \bigwedge_{l=1}^q ((A \odot B)_{il} \otimes X_{lj}) \\
&= (A \odot B) \odot X \\
&= \Gamma_{A \odot B}(X).
\end{aligned}$$

Le deuxième point est déduit du fait que la composition d'applications semi-continue supérieures est une application semi-continue supérieure. \square

Remarque 1.126. Soit \mathcal{D}_{inv} l'ensemble des éléments du dioïde \mathcal{D} qui admettent des inverses, $(\mathcal{D}_{inv}^{n \times n}, \odot)$ est un monoïde.

- \odot est une loi de composition interne (si a et b admettent des inverses alors le produit ab admet une inverse et il est donné par $b^{-1}a^{-1}$) associative.
- L'élément neutre est donné par $e^\odot = e$ (dans le cas matriciel $e_{ii}^\odot = e$ et $e_{ij}^\odot = \top$ pour $i \neq j$). De plus, \top l'élément neutre de \wedge est absorbant pour la loi \odot .

Corollaire 1.127. Soit $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ et $X \in \mathcal{D}^{n \times n}$ deux matrices, si chaque élément de A admet un inverse alors l'application $\Gamma_A : x \mapsto A \odot x$ est dualement résiduable et sa résiduée duale est donnée par \cdot^2

$$\Gamma_A^b : x \mapsto A \blacktriangleright x$$

avec

$$(A \blacktriangleright x)_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{k=n} A_{ki} \blacktriangleright x_{kj} = \bigoplus_{l=1}^{k=n} A_{ki}^{-1} \otimes x_{kj}.$$

et en respectant les règles suivantes :

$$\top \blacktriangleright x = \varepsilon, \varepsilon \blacktriangleright x = \top \text{ et } \varepsilon \blacktriangleright \varepsilon = \varepsilon.$$

Remarque 1.128. Il est important de noter aussi que :

$$a \succeq b \Rightarrow a \blacktriangleright x \preceq b \blacktriangleright x.$$

De plus, si b admet un inverse alors :

$$b \blacktriangleright (a \otimes c) = (b \blacktriangleright a) \otimes c \text{ (i.e., } b^{-1} \otimes (a \otimes c) = (b^{-1} \otimes a) \otimes c).$$

Dans la suite, nous donnons un tableau qui résume quelques propriétés de l'opération \blacktriangleright .

²Cette notation est reprise de l'exposé intitulé "Projective max, + semi modules" donné lors de International Workshop on max, + algebra (Birmingham 2003)[Cohen et al., 2003].

$a \backslash (x \oplus y) = a \backslash x \oplus a \backslash y$	$(x \oplus y) \not\backslash a = x \not\backslash a \oplus y \not\backslash a$	(f.9)
$a \backslash (x \wedge y) \succeq a \backslash x \wedge a \backslash y$	$(x \wedge y) \not\backslash a \succeq x \not\backslash a \wedge y \not\backslash a$	(f.10)
$(a \oplus b) \backslash x \preceq a \backslash x \wedge b \backslash x$	$x \not\backslash (a \oplus b) \preceq x \not\backslash a \wedge x \not\backslash b$	(f.11)
$a \odot (a \backslash x) \succeq x$	$(x \not\backslash a) \odot a \succeq x$	(f.12)
$a \backslash (a \odot x) \preceq x$	$(x \odot a) \not\backslash a \preceq x$	(f.13)
$a \odot (a \backslash (a \odot x)) = a \odot x$	$((x \odot a) \not\backslash a) \odot a = x \odot a$	(f.14)
$a \backslash (a \backslash x) = a \backslash x$	$((x \not\backslash a) \not\backslash a) \not\backslash a = x \not\backslash a$	(f.15)
$(a \odot b) \backslash x = b \backslash (a \backslash x)$	$x \not\backslash (b \odot a) = (x \not\backslash a) \not\backslash b$	(f.16)
$(a \backslash x) \not\backslash b = a \backslash (x \not\backslash b)$	$b \backslash (x \not\backslash a) = (b \backslash x) \not\backslash a$	(f.17)
$b \backslash (a \backslash x) \preceq (a \not\backslash b) \backslash x$	$(x \not\backslash a) b \preceq x \not\backslash (b \not\backslash a)$	(f.18)
$(a \backslash x) \odot b \succeq a \backslash (x \odot b)$	$b \odot (x \not\backslash a) \succeq (b \odot x) \not\backslash a$	(f.19)

Démonstration. Les formules (f.9) et (f.10) sont la conséquence du fait que Γ_a^b est s.c.i et isotone (voir théorème 1.113).

(f.11) est une conséquence de la proposition 1.118.

(f.12) et (f.13) sont les conséquences du théorème 1.113.

Le théorème 1.115 implique (f.14) et (f.15).

Pour la formule (f.16), premièrement, par associativité de l'opération \odot on a :

$$\Gamma_a \circ \Gamma_b = \Gamma_{a \odot b} \text{ (voir corollaire 1.125),}$$

et deuxièmement, en appliquant la proposition 1.116 on obtient le résultat.

On définit la multiplication à droite Λ comme suit :

$$\Lambda_b : x \mapsto x \odot b,$$

par l'associativité de \odot on obtient :

$$\Gamma_a \circ \Lambda_b = \Lambda_b \circ \Gamma_a, \tag{1.48}$$

puis, en utilisant la proposition 1.116, on obtient la formule (17).

La preuve de la formule (f.18) utilise essentiellement (f.12) en deux fois :

$$x \preceq a \odot (a \backslash x) \preceq (a \not\backslash b) \odot b \odot (a \backslash x)$$

par conséquent $(a \not\backslash b) \backslash x \preceq (a \not\backslash b) \backslash ((a \not\backslash b) \odot b \odot (a \backslash x))$. Donc (f.13) donne le résultat.

Finalement, pour obtenir (f.19), on applique l'équation 1.45 avec $\Pi = \Theta = \Gamma_a$ et $\Phi = \Psi = \Lambda_b$, puis on utilise l'équation 1.48.

□

Proposition 1.129. *Soit trois matrices $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$, $X \in \mathcal{D}^{p \times q}$ et $B \in \mathcal{D}^{n \times n}$. Si chaque élément B_{ij} admet un inverse alors on a :*

$$B \blacktriangleright (A \otimes X) = (B \blacktriangleright A) \otimes X. \quad (1.49)$$

Démonstration. $(B \blacktriangleright (A \otimes X))_{ij} = \bigoplus_{l=1}^{l=n} B_{li} \blacktriangleright (A \otimes X)_{lj}$

$$= \bigoplus_{l=1}^{l=n} B_{li} \blacktriangleright \left(\bigoplus_{k=1}^{k=p} A_{lk} \otimes X_{kj} \right)$$

$$= \bigoplus_{l=1}^{l=n} \bigoplus_{k=1}^{k=p} B_{li} \blacktriangleright (A_{lk} \otimes X_{kj}) \text{ puisque } \Gamma_B^b \text{ est semi-continue inférieure}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{k=p} \bigoplus_{l=1}^{l=n} B_{li}^{-1} \otimes (A_{lk} \otimes X_{kj}) \text{ puisque } B_{li} \text{ admet un inverse}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{k=p} \bigoplus_{l=1}^{l=n} (B_{li}^{-1} \otimes A_{lk}) \otimes X_{kj} \text{ par associativité de la loi } \otimes$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{k=p} \bigoplus_{l=1}^{l=n} (B_{li} \blacktriangleright A_{lk}) \otimes X_{kj}$$

$$= \bigoplus_{k=1}^{k=p} (B \blacktriangleright A)_{ik} \otimes X_{kj} = ((B \blacktriangleright A) \otimes X)_{ij}. \quad \square$$

Dans ce qui suit nous considérons une structure algébrique particulière appelée groupe réticulé [Baccelli et al., 1992][Dubreil and Dubreil-Jacotin, 1964].

Définition 1.130 (Groupe réticulé). Un groupe réticulé \mathcal{G} est à la fois un groupe et un treillis. La multiplication est isotone, et on a :

- La multiplication est distributive par rapport à la borne supérieure et à la borne inférieure.
- Le treillis est distributif (c.-à-d. , les bornes supérieures et inférieures sont distributives l'une par rapport à l'autre).

Théorème 1.131. [Baccelli et al., 1992] *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un treillis soit distributif est la suivante :*

$$\forall a, b, \exists c : \begin{cases} a \wedge c = b \wedge c \\ \text{et} \\ a \oplus c = b \oplus c \end{cases} \Rightarrow a = b.$$

Dans [Dubreil and Dubreil-Jacotin, 1964] les auteurs ont prouvé que si \mathcal{G} est un groupe réticulé alors on a les formules suivantes :

$$\begin{aligned} (a \wedge b)^{-1} &= a^{-1} \oplus b^{-1}, \\ (a \oplus b)^{-1} &= a^{-1} \wedge b^{-1}, \\ a \wedge b &= a(a \oplus b)^{-1}b, \end{aligned}$$

qui rappellent les lois de De Morgan dans l'algèbre de Boole, et aussi la formule suivante $\min(a, b) = -\max(-a, -b)$.

Proposition 1.132. Soit \mathcal{G} un groupe réticulé, a et b des éléments de \mathcal{G} alors

$$\Gamma_a \wedge \Gamma_b = \Gamma_{a \wedge b}$$

ce qui veut dire que pour tout x on a :

$$ax \wedge bx = (a \wedge b)x.$$

Démonstration. Premièrement, en utilisant le lemme 1.123, on a

$$(a \wedge b)x \preceq ax \wedge bx.$$

Deuxièmement, puisque a et b sont des éléments de \mathcal{G} en appliquant le théorème 1.131 on obtient

$$(a \wedge b)^{-1} = a^{-1} \oplus b^{-1},$$

alors,

$$\begin{aligned} ax \wedge bx &= (a \wedge b)[(a^{-1} \oplus b^{-1})(ax \wedge bx)] \\ \Leftrightarrow ax \wedge bx &= (a \wedge b)[(x \wedge a^{-1}bx) \oplus (b^{-1}ax \wedge x)] \\ \Leftrightarrow ax \wedge bx &\preceq (a \wedge b)x \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$ax \wedge bx = (a \wedge b)x.$$

□

Proposition 1.133. Soit \mathcal{G} un groupe réticulé, $A, B \in \mathcal{D}^{p \times n}$ deux matrices dont tous les éléments sont dans \mathcal{G} et $X \in \mathcal{D}^{n \times q}$ alors :

$$(A \wedge B) \blacktriangleright X = (A \blacktriangleright X) \oplus (B \blacktriangleright X).$$

Démonstration. Le résultat est une application directe de la proposition 1.117 puisque $A_{ij} \wedge B_{ij} \in \mathcal{G}$. □

Définition 1.134 (Étoile duale). Soit \mathcal{D} un dioïde. L'application étoile duale, définie sur \mathcal{D} , sera notée \mathcal{K}_d ,

$$\mathcal{K}_d : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \\ x \mapsto x_* = \bigwedge_{k \geq 0} x^{\odot k} \text{ avec } x^{\odot k} = x \odot x^{\odot k-1} \text{ et } x^{\odot 0} = e^{\odot}.$$

On utilisera également une notation particulière pour l'application "plus duale" dérivée de l'étoile duale

$$\mathcal{P}_d : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D} \\ x \mapsto x_+ = \bigwedge_{k \geq 1} x^{\odot k}.$$

Les applications \mathcal{K}_d et \mathcal{P}_d sont isotones (par composition d'applications isotones) et $a_* = e^{\odot} \wedge a_+$ ou $a_+ = a \odot a_*$. De plus $(a_*)_* = a_*$ et $(a_+)_+ = a_+$.

1.8.2 Résiduation duale et contrainte

La proposition suivante concerne la résiduation duale de l'injection canonique. La démarche est analogue aux résultats proposés au paragraphe 1.6.3.1.

Proposition 1.135. *Soient \mathcal{S} un treillis complet (cf. définition 1.18) et U un sous-treillis complet de \mathcal{S} contenant le plus grand élément $\top_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S} . L'injection canonique $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$ est dualement résiduable. L'application résiduée duale I_U^b vérifie les propriétés suivantes :*

- (i) I_U^b est un projecteur c.-à-d. $I_U^b \circ I_U^b = I_U^b$
- (ii) $I_U^b \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$
- (iii) $u \in U \iff I_U^b(u) = u$.

Démonstration. Vérifions d'abord que I_U est une application dualement résiduable. D'une part, comme $\top_{\mathcal{S}} \in U$, on a $I_U(\top_{\mathcal{S}}) = \top_{\mathcal{S}}$. D'autre part, U étant un sous-treillis complet, on a $I_U\left(\bigwedge_{x \in X} x\right) = \bigwedge_{x \in X} I_U(x)$, pour tout $X \subset U$. Par conséquent l'injection canonique $I_U : U \rightarrow \mathcal{S}$ est dualement résiduable (cf. théorème 1.69).

- (i) $I_U^b \circ I_U^b = (I_U \circ I_U)^b = I_U^b$ (car $I_U \circ I_U = I_U$)
- (ii) $I_U^b = I_U \circ I_U^b \succeq \text{Id}_{\mathcal{S}}$
- (iii) si $u \in U$, alors $u = I_U(u)$, donc $I_U^b(u) = I_U^b \circ I_U(u) \preceq u$. En outre d'après (ii), $I_U^b(u) = I_U \circ I_U^b(u) \succeq u$, d'où $u \in U \Rightarrow I_U^b(u) = u$. La réciproque est immédiate. □

D'après la proposition 1.135, on sait que l'injection canonique d'un sous-treillis dans un treillis est dualement résiduable, la proposition suivante donne un élément de réponse au problème de résiduation duale et contrainte.

Soit Π une application isotone définie de \mathcal{S} dans \mathcal{T} des ensembles ordonnés, cela consiste à rechercher une solution à $\Pi(s) \succeq t$, $t \in \mathcal{T}$, non pas dans \mathcal{S} tout entier mais dans un sous-treillis complet \mathcal{S}_{sub} de \mathcal{S} contenant le plus grand élément $\top_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S} .

Proposition 1.136. *Soient $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ une application dualement résiduable définie sur des treillis complets et $I_{\mathcal{S}_{sub}}$ l'injection canonique du sous-treillis complets \mathcal{S}_{sub} (contenant le plus grand élément $\top_{\mathcal{S}}$ de \mathcal{S}) dans \mathcal{S} . $\Pi|_{\mathcal{S}_{sub}} = \Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}}$ est dualement résiduable et sa résiduée duale est donnée par*

$$(\Pi|_{\mathcal{S}_{sub}})^b(t) = (\Pi \circ I_{\mathcal{S}_{sub}})^b(t) = I_{\mathcal{S}_{sub}}^b \circ \Pi^b(t). \quad (1.50)$$

Démonstration. Direct en considérant la proposition 1.116. □

Proposition 1.137. *Soient $\Pi : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{T}$ une application dualement résiduable définie sur des treillis complets et $I_{\mathcal{T}_{sub}}$ l'injection canonique du sous-treillis complet \mathcal{T}_{sub} dans \mathcal{T} (avec $\text{Im}\Pi \subset \mathcal{T}_{sub} \subset \mathcal{T}$). La restriction de l'application Π dans un codomaine \mathcal{T}_{sub} (voir définition 1.79), notée, $\mathcal{T}_{sub}| \Pi$ est dualement résiduable et*

$$(\mathcal{T}_{sub}| \Pi)^b = \Pi^b \circ I_{\mathcal{T}_{sub}} = (\Pi^b)|_{\mathcal{T}_{sub}}.$$

Démonstration. Si Π est dualement résiduable, alors pour tout $t \in \mathcal{T}$, $\Pi^b(t)$ est la plus petite solution de $\Pi(s) \succeq t$. En particulier, pour tout $t \in \mathcal{T}_{sub} \subset \mathcal{T}$, il existe une plus petite solution à $\Pi(s) \succeq t$. L'application $\mathcal{T}_{sub}| \Pi$ est donc, par définition, dualement résiduable. Sa résiduée duale $(\mathcal{T}_{sub}| \Pi)^b$ est simplement la restriction de Π^b au domaine \mathcal{T}_{sub} , notée $(\Pi^b)|_{\mathcal{T}_{sub}}$. □

1.9 Noyaux, images

La plupart des résultats ainsi que les notations énoncées dans cette partie sont issues des références [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997, Cohen, 1998a].

Nous rappelons tout d'abord que l'image d'une application $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, est définie par

$$\text{Im}B = \{B(u) \mid u \in \mathcal{U}\}.$$

Définition 1.138 (Noyau). Le noyau de l'application linéaire $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, noté $\ker C$, est défini par la relation d'équivalence

$$x \stackrel{\ker C}{\equiv} x' \iff C(x) = C(x'). \quad (1.51)$$

Cette relation définit une congruence (voir théorème 1.75). L'ensemble quotient $\mathcal{X}/_{\ker C}$ est donc l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\ker C$.

Remarque 1.139. *Le lemme 1.75 montre que la relation d'équivalence (1.51) est une congruence.*

Notation 1.140. *La classe d'équivalence de $\mathcal{X}/_{\ker C}$ sera notée $[x]_C$.*

Théorème 1.141. [Baccelli et al., 1992] *Si $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est une application résiduable alors chaque classe d'équivalence $[x]_C$ contient un et un seul élément de $\text{Im}C^\sharp$ qui, de plus, est le plus grand élément dans cette classe.*

Démonstration. Si C est résiduable, d'après (1.13), $C = C \circ C^\sharp \circ C$, alors $\forall x \in \mathcal{X}, C(x) = C((C^\sharp \circ C)(x))$. Autrement dit,

$$x \stackrel{\ker C}{\equiv} C^\sharp \circ C(x).$$

Considérons maintenant un élément $x' \in [x]_C$, alors $C(x') = C(x) = C \circ C^\sharp \circ C(x)$; de plus le théorème 1.67 donne $C^\sharp \circ C \succeq \text{Id}_{\mathcal{X}}$; par conséquent

$$\begin{aligned} x' \preceq C^\sharp \circ C(x') &= (C^\sharp \circ (C \circ C^\sharp \circ C))(x) \\ &= (C^\sharp \circ C)(x) \quad (\text{par (1.13)}). \end{aligned}$$

Donc, $C^\sharp \circ C(x)$ est plus grand élément de $[x]_C$. Il reste à montrer l'unicité de cet élément. Si $C^\sharp(y) \stackrel{\ker C}{\equiv} C^\sharp(y')$, alors $C(C^\sharp(y)) = C(C^\sharp(y'))$ et $C^\sharp \circ C \circ C^\sharp(y) = C^\sharp \circ C \circ C^\sharp(y')$, soit $C^\sharp(y) = C^\sharp(y')$ d'après (1.13). \square

Proposition 1.142. *Si $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est une application résiduable alors la relation d'équivalence $\stackrel{\ker C}{\equiv}$ vérifie*

$$\left. \begin{array}{l} x \preceq y \preceq z \\ x \stackrel{\ker C}{\equiv} z \end{array} \right\} \Rightarrow x \stackrel{\ker C}{\equiv} y \stackrel{\ker C}{\equiv} z.$$

Démonstration. D'une part, comme C est résiduable, elle est isotone; par conséquent, si $x \preceq y \preceq z$ alors $C(x) \preceq C(y) \preceq C(z)$. D'autre part, $x \stackrel{\ker C}{\equiv} z$ entraîne $C(x) = C(z)$; donc $C(x) = C(y) = C(z)$, d'où $x \stackrel{\ker C}{\equiv} y \stackrel{\ker C}{\equiv} z$. \square

Remarque 1.143. *Dans [Blyth and Janowitz, 1972], les auteurs qualifient de convexes les classes d'équivalence vérifiant la proposition précédente.*

Les deux théorème qui suivent sont énoncées sans preuve, le lecteur intéressé pourra se reporter à [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997].

Théorème 1.144. Soient les applications $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ et $S : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{X}$, où S est une application résiduable, alors sont équivalents :

- (i) $\text{Im}B \subset \text{Im}S$;
- (ii) $B = S \circ S^\sharp \circ B$;
- (iii) il existe une application $L : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{Q}$ telle que $B = S \circ L$.

Théorème 1.145. Soient les applications $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ et $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$, alors sont équivalents :

- (i) $\ker C \subset \ker F$;
- (ii) $F = F \circ C^\sharp \circ C$
- (iii) il existe une application $H : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{U}$ telle que $F = H \circ C$.

Proposition 1.146. Soit A, B deux éléments d'un semi anneau idempotent \mathcal{D} alors

$$\text{Im}A \subset \text{Im}B \Leftrightarrow A \in \text{Im}B.$$

Démonstration. Dans un premier temps, $\text{Im}A \subseteq \text{Im}B \Rightarrow \forall X \in \text{Im}A, X$ est dans $\text{Im}B$ en particulier pour $X = A$, donc $A \in \text{Im}B$. Dans un second temps, si $A \in \text{Im}B$ alors $\exists Y$ tel que $A = BY$ et pour tous $X \in \text{Im}A, \exists Z$ tel que $X = AZ$ donc, il existe X, Z tel que $X = BYZ$ qui est un élément de $\text{Im}B$. \square

Corollaire 1.147. Soit A, B deux éléments d'un dioïde \mathcal{D} alors

$$\text{Im}A^* \subset \text{Im}B^* \Leftrightarrow A^* \succeq B^*.$$

Démonstration. En utilisant la proposition 1.146, on obtient

$$\text{Im}A^* \subset \text{Im}B^* \Leftrightarrow A^* \in \text{Im}B^*$$

$$\Leftrightarrow A^* = B^*(B^* \setminus A^*) \text{ (voir théorème 1.144)}$$

$$\Leftrightarrow A^* = B^* \setminus A^* \text{ (voir propriété 1.111)}$$

$$\Leftrightarrow B^* \preceq A^* \text{ (voir lemme 1.112).} \quad \square$$

1.10 Projecteurs

Dans [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997], les auteurs définissent trois types de projection, les projections dans l'image d'une application, les projections parallèlement au noyau d'une application et les projections dans l'image d'une application parallèlement au noyau d'une autre application.

1.10.1 Projection dans l'image d'une application

Proposition 1.148 (Projection dans l'image d'une application). Soient $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ une application résiduable (respectivement dualement résiduable) et un élément $x \in \mathcal{X}$. Le plus grand élément (respectivement le plus petit élément) $x' \in \text{Im}B$ plus petit que x (respectivement plus grand que x) est donné par $B \circ B^\sharp(x)$ (respectivement $B \circ B^\flat(x)$). En d'autres termes, $\Pi_B = B \circ B^\sharp$ (respectivement $\Pi'_B = B \circ B^\flat$) est un projecteur dans l'image de B .

Démonstration. Le lecteur trouvera une démonstration de ce résultat dans [Cohen et al., 1996]. \square

Propriétés 1.149. Si $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ est une application résiduable, alors

$$\text{Im}\Pi_B = \text{Im}B.$$

Dualement si $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ est une application dualement résiduable, alors

$$\text{Im}\Pi'_B = \text{Im}B.$$

Démonstration. D'après (1.13), $B = (B \circ B^\sharp) \circ B$, alors $\text{Im}B \subset \text{Im}(B \circ B^\sharp)$. Mais, $\text{Im}(B \circ B^\sharp) \subset \text{Im}B$, par conséquent $\text{Im}(B \circ B^\sharp) = \text{Im}B$. De la même manière on prouve que $\text{Im}\Pi'_B = \text{Im}B$. \square

1.10.2 Projection parallèlement au noyau d'une application

Soit l'application $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, d'après la proposition 1.141 nous savons que pour tout $x \in \mathcal{X}$, il existe un unique élément dans $[x]_C \cap \text{Im}C^\sharp$. Cet élément est donné par $C^\sharp \circ C$. Le lemme qui suit précise les propriétés de cet élément.

Lemme 1.150 ([Cohen et al., 1996]). Soit $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ une application résiduable. Alors $\Pi^C = C^\sharp \circ C$ vérifie les propriétés suivantes

- (i) Π^C est un projecteur, c'est-à-dire $\Pi^C \circ \Pi^C = \Pi^C$;
- (ii) $C \circ \Pi^C = C$.
- (iii) $\Pi^C \succeq \text{Id}$;
- (iv) $\Pi^C(x)$ est le seul élément équivalent à x modulo $\ker C$ appartenant à $\text{Im}C^\sharp$;
- (v) $\Pi^C(x)$ est le plus grand élément dans la classe d'équivalence $[x]_C$;

Démonstration. les propriétés (i), (ii) et (iii) découlent directement de (1.13) et (1.11). Les propriétés (iv) et (v) sont données par la proposition 1.141. \square

Remarque 1.151. D'après les propriétés de Π^C énoncées dans le lemme précédent (points (i) et (ii)), il faut noter que le projecteur Π^C est une fermeture (voir définition 1.34).

Propriétés 1.152. Si $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ est une application résiduable, alors

$$\text{Im}\Pi^C = \text{Im}C^\sharp.$$

Démonstration. D'après (1.13), $C^\sharp = (C^\sharp \circ C) \circ C^\sharp$, alors $\text{Im}C^\sharp \subset \text{Im}C^\sharp \circ C$. Mais, $\text{Im}C^\sharp \circ C \subset \text{Im}C^\sharp$, par conséquent $\text{Im}C^\sharp \circ C = \text{Im}C^\sharp$. \square

1.10.3 Projecteurs dans l'image d'une application parallèlement au noyau d'une autre application

Soient $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ et $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ deux applications. Dans [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997], les auteurs s'intéressent au problème suivant : pour tout $x \in \mathcal{X}$, existe-t-il un $y \in \text{Im}B \cap [x]_C$? Autrement dit, cela revient à chercher un $y \in \mathcal{X}$, tel que

$$\begin{aligned} \exists u \in \mathcal{U} \quad : \quad & C(y) = C(x), \\ & B(u) = y. \end{aligned}$$

Si l'élément y satisfaisant ces conditions existe, et si de plus il est unique, alors y correspond à la projection de x dans l'image de B parallèlement au noyau de C , et le projecteur correspondant est alors donné par

$$\Pi_B^C = B \circ (C \circ B)^\# \circ C. \quad (1.52)$$

Toujours dans [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997], les auteurs s'intéressent au problème de l'existence d'une telle projection, c'est-à-dire est-ce que $\Pi_B^C \circ \Pi_B^C = \Pi_B^C$? ce qui revient à dire que $\text{Im} B \cap [x]_C$ est non vide. De même, dans le cas où cette projection existe, les auteurs s'intéressent au problème de l'unicité, en d'autres termes, ils cherchent à savoir si $\text{Im} B \cap [x]_C$ est un singleton. Nous rappelons ci-dessous, les conditions d'existence et d'unicité de la projection.

- *L'existence du projecteur* pour tout x est équivalente à la condition $C = C \circ \Pi_B^C$ (c'est-à-dire que $\xi = \Pi_B^C(x)$ est dans la même classe d'équivalence que $x \pmod{\ker C}$), ou encore à la condition $\text{Im} B = \text{Im}(C \circ B)$.
- *L'unicité du projecteur* est équivalente à la condition $B = \Pi_B^C \circ B$ (c'est-à-dire que pour tout $x \in \text{Im} B$, celui-ci reste invariant par Π_B^C), ou encore que $\ker B = \ker(C \circ B)$.

Dans le cas où les applications linéaires B et C du projecteur 1.52 sont représentées par leur matrice, il est également montré que si l'existence et l'unicité de la projection sont garanties, alors l'expression (1.52) du projecteur devient :

$$\Pi_B^C = (B \phi(CB)) C = B((CB) \setminus C).$$

Notons que dans le cas d'applications résiduables, même si l'existence et l'unicité ne sont pas vérifiées, il est possible de donner une interprétation au projecteur (1.52). En effet, ce projecteur se décompose en deux applications. Tout d'abord, l'élément $z = C^\# \circ C(x)$ est le plus grand élément dans $[x]_C$. Ce qui entraîne que $\xi = B \circ B^\#(z)$ est le plus grand élément dans $\text{Im} B$ qui soit plus petit que z . Par conséquent, nous avons $C(\xi) \preceq C(x)$; dans [Cohen et al., 1998] le terme sous-équivalent est employé pour qualifier cet élément ξ .

1.11 Dioïde et analyse par intervalles

L'extension de l'arithmétique classique aux intervalles permet de manipuler des grandeurs incertaines par le biais d'opération unique. Cette analyse par intervalles introduite par Moore [Moore, 1979] a fait l'objet de nombreux développements ces dernières années [Jaulin et al., 2001]. En particulier Litvinov [Litvinov and Sobolevskiï, 2001] et Lhommeau [Lhommeau, 2004] ont appliqué cette analyse dans le contexte des semi-anneaux.

Litvinov montre que l'équation $x = Ax \oplus B$, où A, B et x sont des intervalles définis sur un semi-anneau idempotent, admet une solution calculable en un temps polynomial, contrairement à la résolution de cette même équation définie sur des intervalles classiques, reconnue comme un problème *NP*-difficile.

Lhommeau a notamment montré que l'application $L_A : X \mapsto AX$, où X et A sont des intervalles, est résiduable.

Dans cette section, la construction d'un dioïde d'intervalles est rappelée puis nous complétons les résultats de Lhommeau en considérant les résultats du paragraphe 1.8 sur la résiduation duale.

1.11.1 Dioïde de couple

Définition 1.153 (Dioïde de couple). Soit \mathcal{D} un dioïde, l'ensemble des paires (x', x'') tel que $x' \in \mathcal{D}$ et $x'' \in \mathcal{D}$ muni des deux loi de composition interne \oplus et \otimes données par les formules

$$\begin{aligned} (x', x'') \oplus (y', y'') &= (x' \oplus y', x'' \oplus y''), \\ (x', x'') \otimes (y', y'') &= (x' \otimes y', x'' \otimes y''); \end{aligned} \quad (1.53)$$

est un dioïde noté $C(\mathcal{D})$.

Notons également que la loi \oplus définit une relation d'ordre canonique $\preceq_{C(\mathcal{D})}$ sur le dioïde $C(\mathcal{D})$:

$$(x', x'') \oplus (y', y'') = (y', y'') \iff (x', x'') \preceq_{C(\mathcal{D})} (y', y'') \iff x' \preceq_{\mathcal{D}} y' \text{ et } x'' \preceq_{\mathcal{D}} y''.$$

où $\preceq_{\mathcal{D}}$ est la relation d'ordre dans \mathcal{D} .

Propriétés 1.154. ([1]) Si le dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est complet, alors le dioïde $(C(\mathcal{D}), \oplus, \otimes)$ est complet et son plus grand élément est donné par (\top, \top) .

Considérons maintenant les applications suivantes définies sur le dioïde $C(\mathcal{D})$:

$$\begin{aligned} L_{(a', a'')} &: (x', x'') \mapsto (a', a'') \otimes (x', x'') \\ R_{(a', a'')} &: (x', x'') \mapsto (x', x'') \otimes (a', a'') \end{aligned}$$

Proposition 1.155. Les applications $L_{(a', a'')}$ et $R_{(a', a'')}$ définies sur le dioïde complet $C(\mathcal{D})$ sont résiduables.

Démonstration. Observons d'abord que $L_{(a', a'')}(\varepsilon, \varepsilon) = (a' \varepsilon, a'' \varepsilon) = (\varepsilon, \varepsilon)$; de plus, comme le dioïde $C(\mathcal{D})$ est complet, on a

$$L_{(a', a'')} \left(\bigoplus_{\alpha} (x'_{\alpha}, x''_{\alpha}) \right) = \bigoplus_{\alpha} L_{(a', a'')} ((x'_{\alpha}, x''_{\alpha})_{\alpha}),$$

pour tout $\{(x'_{\alpha}, x''_{\alpha})_{\alpha}\}$ de $C(\mathcal{D})$. Par conséquent, l'application $L_{(a', a'')}$ est semi-continue inférieurement; elle est donc résiduable (cf. théorème 1.87). On vérifie avec la même démarche que l'application $R_{(a', a'')}$ est résiduable. \square

Notation 1.156. On notera $L_{(a', a'')}^{\sharp}(x', x'') = (a', a'') \sharp (x', x'')$ (resp. $R_{(a', a'')}^{\sharp}(x', x'') = (x', x'') \sharp (a', a'')$) l'application résiduée de $L_{(a', a'')}$ (resp. $R_{(a', a'')}$).

Définition 1.157 (Dioïde $C_0(\mathcal{D})$). Nous noterons par $C_0(\mathcal{D})$ l'ensemble des couples $(\tilde{x}', \tilde{x}'')$ tels que $\tilde{x}' \preceq \tilde{x}''$. Cet ensemble est naturellement inclus dans $C(\mathcal{D})$. En outre, il est fermé pour la somme et le produit de $C(\mathcal{D})$. En effet, pour tous couples $(\tilde{x}', \tilde{x}'')$ et $(\tilde{y}', \tilde{y}'')$ de $C_0(\mathcal{D})$ on a

$$(\tilde{x}', \tilde{x}'') \oplus (\tilde{y}', \tilde{y}'') = (\tilde{x}' \oplus \tilde{y}', \tilde{x}'' \oplus \tilde{y}'') \in C(\mathcal{D})$$

de plus par isotonie de \oplus ,

$$\tilde{x}' \preceq \tilde{x}'' \text{ et } \tilde{y}' \preceq \tilde{y}'' \Rightarrow \tilde{x}' \oplus \tilde{y}' \preceq \tilde{x}'' \oplus \tilde{y}''$$

autrement dit $(\tilde{x}' \oplus \tilde{y}', \tilde{x}'' \oplus \tilde{y}'') \in C_0(\mathcal{D})$. De même, par isotonie de \otimes , on a

$$(\tilde{x}', \tilde{x}'') \otimes (\tilde{y}', \tilde{y}'') = (\tilde{x}' \otimes \tilde{y}', \tilde{x}'' \otimes \tilde{y}'') \in C_0(\mathcal{D}).$$

De plus, $C_0(\mathcal{D})$ contient l'élément neutre de la somme $(\varepsilon, \varepsilon)$ et du produit (e, e) de $C(\mathcal{D})$. Il s'agit donc d'un sous-dioïde complet de $C(\mathcal{D})$ (voir définition 1.52). L'élément maximum est donné par (\top, \top) .

Proposition 1.158. *L'injection canonique $I_{C_0(\mathcal{D})} : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow C(\mathcal{D})$ est résiduable. Sa résiduée sera notée*

$$(I_{C_0(\mathcal{D})})^\sharp : C(\mathcal{D}) \rightarrow C_0(\mathcal{D}) = \text{Pr}_{C_0(\mathcal{D})}.$$

Démonstration. Directe, puisque $C_0(\mathcal{D})$ est un sous-dioïde complet de $C(\mathcal{D})$. La proposition 1.83 donne le résultat. \square

Remarque 1.159. *Le calcul de cette projection est obtenu de la façon suivante. Soit un couple $(x', x'') \in C(\mathcal{D})$, la projection est égale à*

$$\text{Pr}_{C_0(\mathcal{D})}((x', x'')) = (x' \wedge x'', x'') = (\tilde{x}', \tilde{x}'').$$

où $(x' \wedge x'', x'')$ est le plus grand couple de $C_0(\mathcal{D})$ tel que $\tilde{x}' \preceq x', \tilde{x}'' \preceq x''$ et $\tilde{x}' \preceq \tilde{x}''$. Par exemple, soit le couple $(12, 7)$ de $C(\mathbb{Z}_{\max})$, la projection de ce couple dans $C_0(\mathbb{Z}_{\max})$ est donnée par $\text{Pr}_{C_0(\mathbb{Z}_{\max})}((12, 7)) = (12 \wedge 7, 7) = (7, 7)$. De même, notons que $\text{Pr}_{C_0(\mathcal{D})}$ étant un projecteur on a

$$(\tilde{x}', \tilde{x}'') \in C_0(\mathcal{D}) \iff (\tilde{x}', \tilde{x}'') = \text{Pr}_{C_0(\mathcal{D})}((\tilde{x}', \tilde{x}'')).$$

Proposition 1.160. *L'application ${}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')} : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow C_0(\mathcal{D})$ est résiduable. Sa résiduée est donnée par*

$$({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')} : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow C_0(\mathcal{D}))^\sharp = (I_{C_0(\mathcal{D})})^\sharp \circ ({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')})^\sharp \circ I_{C_0(\mathcal{D})}.$$

Démonstration. D'après la proposition 1.179, l'application ${}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}$ définie sur $C(\mathcal{D})$ est résiduable, de plus d'après la définition 1.78, on a

$$\begin{aligned} ({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')} : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow C_0(\mathcal{D}))^\sharp &= ({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')} \circ I_{C_0(\mathcal{D})})^\sharp \\ &= (I_{C_0(\mathcal{D})})^\sharp \circ ({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')})^\sharp && \text{(voir proposition (1.14))} \\ &= (I_{C_0(\mathcal{D})})^\sharp \circ ({}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')})^\sharp \circ I_{C_0(\mathcal{D})} && \text{(voir la proposition 1.84).} \end{aligned}$$

Alors, en considérant $(\tilde{b}', \tilde{b}'') \in C_0(\mathcal{D}) \subset C(\mathcal{D})$, la plus grande solution dans $C_0(\mathcal{D})$ de ${}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}((\tilde{x}', \tilde{x}'')) = (\tilde{a}', \tilde{a}'') \otimes (\tilde{x}', \tilde{x}'') \preceq (\tilde{b}', \tilde{b}'')$ est ${}_{C_0(\mathcal{D})}L_{(\tilde{a}', \tilde{a}'')}^\sharp((\tilde{b}', \tilde{b}'')) = (\tilde{x}', \tilde{x}'') = (\tilde{a}', \tilde{a}'') \bowtie (\tilde{b}', \tilde{b}'') = (\tilde{a}' \wedge \tilde{b}' \wedge \tilde{a}'' \wedge \tilde{b}'', \tilde{a}'' \wedge \tilde{b}'')$. \square

1.11.2 Dioïde d'intervalles

Définition 1.161 (Intervalle). Un intervalle fermé dans un dioïde \mathcal{D} , noté $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$, est l'ensemble satisfaisant

$$\mathbf{x} = \{x \in \mathcal{D} \mid \underline{x} \preceq x \preceq \bar{x}\}, \quad (1.54)$$

où $\underline{x}, \bar{x} \in \mathcal{D}$ ($\underline{x} \preceq \bar{x}$) sont appelés, respectivement, la borne inférieure et la borne supérieure de l'intervalle \mathbf{x} .

Remarque 1.162. *Un intervalle pour lequel $\underline{x} = \bar{x}$ est appelé un intervalle dégénéré. Les intervalles dégénérés permettent de représenter des éléments sans incertitudes. Dans ce cas on identifie \mathbf{x} avec ses éléments, c.-à-d. $\mathbf{x} = x$.*

Remarque 1.163. Soient x et y deux intervalles, on dira que $x \subset y$ si et seulement si $\underline{y} \preceq \underline{x} \preceq \bar{x} \preceq \bar{y}$. En particulier, $x = y$ si et seulement si $\underline{x} = \underline{y}$ et $\bar{x} = \bar{y}$.

Définition 1.164 (Ensemble des intervalles fermés d'un dioïde). On notera $I(\mathcal{D})$ l'ensemble des intervalles fermés du dioïde \mathcal{D} .

Proposition 1.165. Soit \mathcal{D} un dioïde. L'ensemble $I(\mathcal{D})$ des intervalles fermés de \mathcal{D} muni des opérations $\bar{\oplus}$ et $\bar{\otimes}$ définies par

$$\mathbf{x}\bar{\oplus}\mathbf{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}] \quad \text{et} \quad \mathbf{x}\bar{\otimes}\mathbf{y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \bar{x} \otimes \bar{y}]$$

est un dioïde.

Remarque 1.166. L'opération $\bar{\oplus}$ engendre une relation d'ordre canonique \preceq dans $I(\mathcal{D})$:

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \iff \underline{x} \preceq \underline{y} \quad \text{et} \quad \bar{x} \preceq \bar{y} \quad \text{dans } \mathcal{D}.$$

Proposition 1.167 ([Litvinov and Sobolevskii, 2001]). Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$ l'intervalle $\mathbf{x}\bar{\oplus}\mathbf{y}$ (respectivement $\mathbf{x}\bar{\otimes}\mathbf{y}$) est le plus petit intervalle de $I(\mathcal{D})$ contenant l'ensemble $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$ (respectivement $\{x \otimes y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$).

Démonstration. On considère l'intervalle \mathbf{z} de $I(\mathcal{D})$ tel que $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$. On a alors $\underline{x} \oplus \underline{y} \in \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$ et $\bar{x} \oplus \bar{y} \in \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$.

Ainsi, $\underline{z} \preceq \underline{x} \oplus \underline{y}$ et $\bar{x} \oplus \bar{y} \preceq \bar{z}$, c'est-à-dire, $\underline{z} \preceq \underline{x} \oplus \underline{y} \preceq \bar{x} \oplus \bar{y} \preceq \bar{z}$.

Ce qui signifie que l'intervalle $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}] = \mathbf{x}\bar{\oplus}\mathbf{y} \subset \mathbf{z}$.

Autrement dit, l'intervalle $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$ est contenu dans tout intervalle contenant l'ensemble $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$.

Soit $t \in \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$ et $x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}$ tels que $t = x \oplus y$. D'après la définition d'un intervalle, $\underline{x} \preceq x \preceq \bar{x}$ et $\underline{y} \preceq y \preceq \bar{y}$.

De plus, comme dans un dioïde la loi \oplus est compatible avec l'ordre, on peut écrire $\underline{x} \oplus \underline{y} \preceq x \oplus y \preceq \bar{x} \oplus \bar{y}$.

Ce qui signifie que $t \in [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$, c'est-à-dire $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset [\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$.

On peut donc conclure que $[\underline{x} \oplus \underline{y}, \bar{x} \oplus \bar{y}]$ est le plus petit intervalle contenant l'ensemble $\{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$.

Pour la loi \otimes la démonstration est analogue. □

Remarque 1.168. La proposition précédente est importante puisqu'elle montre que les opérations

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\bar{\oplus}\mathbf{y} &= \{x \oplus y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}, \\ \mathbf{x}\bar{\otimes}\mathbf{y} &= \{x \otimes y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \end{aligned}$$

peuvent être représentées en utilisant seulement les bornes des intervalles \mathbf{x} et \mathbf{y} . On peut alors donner du sens à une expression comme

$$\forall a \in \mathbf{a}, \forall b \in \mathbf{b}, \forall c \in \mathbf{c} \quad , \quad a \otimes b \oplus c \otimes a$$

puisque l'on sait que le résultat de cette expression appartient à l'intervalle $\mathbf{a}\bar{\otimes}\mathbf{b}\bar{\oplus}\mathbf{c}\bar{\otimes}\mathbf{a}$. Autrement dit, l'ensemble $\{a \otimes b \oplus c \otimes a \mid a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}, c \in \mathbf{c}\}$ est inclus dans l'intervalle $[(\underline{a} \otimes \underline{b}) \oplus (\underline{c} \otimes \underline{a}), (\bar{a} \otimes \bar{b}) \oplus (\bar{c} \otimes \bar{a})]$.

Comme pour le dioïde $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, on peut étendre naturellement les applications isotones au dioïde des intervalles $\mathcal{I}(\mathcal{D})$. En considérant l'application Π isotone, l'image par Π d'un intervalle \mathbf{x} est donnée par

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) = \{\Pi(x) \mid x \in \mathbf{x}\}.$$

Comme la fonction Π est isotone, on peut calculer les valeurs de $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x})$ directement à partir des bornes de l'intervalle \mathbf{x} , c'est-à-dire $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) = [\Pi(\underline{x}), \Pi(\bar{x})]$, et en particulier $\mathbf{x}^* = [\underline{x}^*, \bar{x}^*]$.

Propriétés 1.169. *Les applications isotones conservent l'inclusion d'intervalles. Par conséquent, soit l'application $\mathbf{\Pi}$ définie sur $\mathcal{I}(\mathcal{D})$, on a*

$$\mathbf{x} \subset \mathbf{y} \Rightarrow \mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{\Pi}(\mathbf{y}). \quad (1.55)$$

Démonstration. Soient $\mathbf{x} = [\underline{x}, \bar{x}]$ et $\mathbf{y} = [\underline{y}, \bar{y}]$ deux intervalles de $\mathcal{I}(\mathcal{D})$. On suppose que $\mathbf{x} \subset \mathbf{y}$, alors on a $\underline{y} \preceq \underline{x} \preceq \bar{x} \preceq \bar{y}$. Puisque l'application Π est isotone, on obtient, $\Pi(\underline{y}) \preceq \Pi(\underline{x}) \preceq \Pi(\bar{x}) \preceq \Pi(\bar{y})$. On vérifie donc bien que $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{\Pi}(\mathbf{y})$. \square

Définition 1.170. Soient \mathcal{D} un dioïde complet et $\{\mathbf{x}_\alpha\}$ un sous-ensemble infini de $\mathcal{I}(\mathcal{D})$. On définit la somme (infinie) des éléments de ce sous-ensemble par

$$\overline{\bigoplus_\alpha \mathbf{x}_\alpha} = \left[\bigoplus_\alpha \underline{x}_\alpha, \bigoplus_\alpha \bar{x}_\alpha \right] \quad (1.56)$$

Proposition 1.171. *Si \mathcal{D} est un dioïde complet, alors $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ est un dioïde complet en considérant la somme infinie définie par (1.56).*

Démonstration. Si \mathcal{D} est complet, alors l'intervalle $\overline{\bigoplus_\alpha \mathbf{x}_\alpha}$ défini par (1.56) appartient à $\mathcal{I}(\mathcal{D})$. Par ailleurs, si \mathcal{D} est complet, soit $\mathbf{X} \subset \mathcal{I}(\mathcal{D})$ un ensemble vide, alors $\overline{\bigoplus \mathbf{X}} = [\varepsilon, \varepsilon]$ et $\mathbf{y} \otimes \left(\overline{\bigoplus \mathbf{X}} \right) = \left(\overline{\bigoplus \mathbf{X}} \right) \otimes \mathbf{y} = [\varepsilon, \varepsilon]$ pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$. Considérons maintenant le sous-ensemble non-vide $\mathbf{X} = \{\mathbf{x}_\alpha\}$ de $\mathcal{I}(\mathcal{D})$, on vérifie aisément la propriété de distributivité infinie :

$$\mathbf{y} \otimes \left(\overline{\bigoplus_\alpha \mathbf{x}_\alpha} \right) = \left[\bigoplus_\alpha (\underline{y} \otimes \underline{x}_\alpha), \bigoplus_\alpha (\bar{y} \otimes \bar{x}_\alpha) \right] = \overline{\bigoplus_\alpha (\mathbf{y} \otimes \mathbf{x}_\alpha)}$$

de même pour $\left(\overline{\bigoplus_\alpha \mathbf{x}_\alpha} \right) \otimes \mathbf{y} = \overline{\bigoplus_\alpha (\mathbf{x}_\alpha \otimes \mathbf{y})}$ pour tout $\mathbf{y} \in \mathcal{I}(\mathcal{D})$. Ainsi, le dioïde $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ est complet si le dioïde \mathcal{D} est complet. \square

Proposition 1.172 ([Litvinov and Sobolevskii, 2001]). *L'intervalle $\overline{\bigoplus_\alpha \mathbf{x}_\alpha}$ contient l'ensemble $\{\bigoplus_\alpha x_\alpha \mid x_\alpha \in \mathbf{x}_\alpha \text{ pour tout } \alpha\}$ et c'est le plus petit intervalle de $\mathcal{I}(\mathcal{D})$ avec cette propriété. En particulier, les bornes de l'intervalle $\overline{\bigoplus_\alpha \mathbf{x}_\alpha}$ appartiennent à l'ensemble $\{\bigoplus_\alpha x_\alpha \mid x_\alpha \in \mathbf{x}_\alpha \text{ pour tout } \alpha\}$.*

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve de la proposition 1.167. \square

Proposition 1.173. *Soit \mathcal{D} un dioïde complet. L'application $L_\alpha : \mathcal{I}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathcal{I}(\mathcal{D}), \mathbf{x} \mapsto \alpha \bar{\otimes} \mathbf{x}$ est résiduable. L'application résiduée L_α^\sharp est donnée par*

$$L_\alpha^\sharp(\mathbf{b}) = \alpha \bar{\backslash} \mathbf{b} = [\underline{\alpha \backslash} \underline{b} \wedge \bar{\alpha \backslash} \bar{b}, \bar{\alpha \backslash} \bar{b}].$$

Démonstration. Soit $\Psi : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), (x_1, x_2) \mapsto [x_1, x_2]$ l'application qui à un couple ordonné associe un intervalle. Il est clair que cette application est un isomorphisme (voir définition 1.72) de dioïdes puisqu'ajouter ou multiplier deux intervalles se fait en considérant leurs bornes. Par conséquent, la proposition 1.160 donne directement le résultat. \square

Remarque 1.174. On peut montrer de la même manière que l'application $R_a : I(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), x \mapsto x \otimes a$ est résiduable.

Proposition 1.175. Soit $\mathcal{K} : x \mapsto x^*$ l'application définie sur un dioïde complet $I(\mathcal{D})$ (voir remarque 1.168). L'application $\text{Im}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}$ est résiduable et sa résiduée est

$$(\text{Im}_{\mathcal{K}}\mathcal{K})^\sharp = I_{\text{Im}_{\mathcal{K}}}.$$

où $I_{\text{Im}_{\mathcal{K}}}$ est l'injection canonique de $\text{Im}_{\mathcal{K}}$ dans $I(\mathcal{D})$.

Démonstration. Immédiate en remarquant que l'application \mathcal{K} est isotone, autrement dit, $\mathcal{K}(x)$ peut aussi s'écrire $\mathcal{K}(x) = [\mathcal{K}(\underline{x}), \mathcal{K}(\bar{x})]$. On remarque donc que l'on se ramène au problème de la résiduabilité de l'application \mathcal{K} sur un dioïde \mathcal{D} complet. On peut donc appliquer directement le résultat de la proposition 1.106 sur la résiduabilité de l'application $\text{Im}_{\mathcal{K}}\mathcal{K}$ définie sur un dioïde. \square

Remarque 1.176. D'après la proposition précédente, on peut déduire que $x = a^*$ est la plus grande solution de l'inéquation $x^* = [\underline{x}^*, \bar{x}^*] \preceq a^* = [\underline{a}^*, \bar{a}^*]$.

1.11.3 Matrices d'intervalles

La généralisation en cas matriciel des définitions et des règles précédentes est naturelle. Une matrice $m \times n$ d'intervalles est définie par

$$A = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

où a_{ij} sont des éléments de $I(\mathcal{D})$. L'ensemble des matrices d'intervalles sera noté $(I(\mathcal{D}))^{m \times n}$, si $I(\mathcal{D})$ est un dioïde alors $(I(\mathcal{D}))^{m \times n}$ peut être muni d'une structure de dioïde (voir définition 1.54). Une matrice $n \times 1$ d'intervalles est un vecteur noté $(I(\mathcal{D}))^n$. Les matrices $\underline{A} = \underline{a}_{ij}$ et $\bar{A} = \bar{a}_{ij}$ sont appelées, respectivement, la matrice inférieure et supérieure de la matrice d'intervalles A . En considérant l'ordre canonique partiel, il est possible de donner une autre description des matrices d'intervalles. En effet, La matrice $A \in (I(\mathcal{D}))^{m \times n}$ correspond aussi à l'intervalle $[\underline{A}, \bar{A}] = \{B \in \mathcal{D}^{m \times n} \mid \underline{A} \preceq B \preceq \bar{A}\}$ si $\underline{A} = \underline{a}_{ij}$ et $\bar{A} = \bar{a}_{ij} \in \mathcal{D}^{m \times n}$ et si $A = a_{ij} \preceq B = b_{ij}$ ce qui signifie $a_{ij} \preceq b_{ij}$ pour tout i, j .

L'addition \oplus et la multiplication \otimes de matrices d'intervalles s'étendent naturellement au dioïde des matrices d'intervalles. De même pour la résiduabilité à droite $\bar{\jmath}$ et à gauche $\bar{\imath}$.

1.12 Résiduabilité duale dans un dioïde d'intervalles

Dans cette section, nous allons prouver qu'un couple d'applications dualement résiduables est également dualement résiduable. Ensuite, nous introduisons un projecteur qui permettra d'appliquer la résiduabilité duale dans le dioïde d'intervalles dans le cas où les applications définies sur les bornes d'intervalles sont dualement résiduables.

Définition 1.177. Soit \mathcal{D} un dioïde, et $(x', x'') \in C(\mathcal{D})$, les deux lois de composition internes \wedge et \odot sont données par les formules

$$\begin{aligned}(x', x'') \wedge (y', y'') &= (x' \wedge y', x'' \wedge y''), \\ (x', x'') \odot (y', y'') &= (x' \odot y', x'' \odot y'').\end{aligned}\tag{1.57}$$

De même, pour les matrices (A', A'') avec $A' \in \mathcal{D}^{n \times p}$ et $A'' \in \mathcal{D}^{n \times p}$, (B', B'') avec $B' \in \mathcal{D}^{n \times p}$ et $B'' \in \mathcal{D}^{n \times p}$ et (C', C'') avec $C' \in \mathcal{D}^{p \times q}$ et $C'' \in \mathcal{D}^{p \times q}$, les deux lois de composition internes \wedge et \odot sont données par les formules

$$\begin{aligned}(A', A'') \wedge (B', B'') &= (A' \wedge B', A'' \wedge B''), \\ (A', A'') \odot (C', C'') &= (A' \odot C', A'' \odot C'').\end{aligned}\tag{1.58}$$

Définition 1.178. Soit (x', x'') avec $x' \in \mathcal{D}^{n \times p}$ et $x'' \in \mathcal{D}^{n \times p}$ et (A', A'') avec $A' \in \mathcal{D}^{p \times q}$ et $A'' \in \mathcal{D}^{p \times q}$. Les applications notées $\Gamma_{(A', A'')}$ et $\Lambda_{(A', A'')}$ sont définies de $C(\mathcal{D}^{n \times p})$ dans $C(\mathcal{D}^{n \times q})$ comme suit :

$$\begin{aligned}\Gamma_{(A', A'')} &: (x', x'') \mapsto (A', A'') \odot (x', x'') = (A' \odot x', A'' \odot x'') \\ \Lambda_{(A', A'')} &: (x', x'') \mapsto (x', x'') \odot (A', A'') = (x' \odot A', x'' \odot A'').\end{aligned}$$

Proposition 1.179. Si tous les éléments A'_{ij} et A''_{ij} admettent des inverses alors l'application $\Gamma_{(A', A'')}$ est dualement résiduable. De même pour $\Lambda_{(A', A'')}$.

Démonstration. Observons d'abord que $\Gamma_{(A', A'')}(\top, \top) = (A', A'') \odot (\top, \top) = (A' \odot \top, A'' \odot \top) = (\top, \top)^3$, de plus, on a

$$\begin{aligned}\Gamma_{(A', A'')} \left(\bigwedge_{\alpha} (x'_{\alpha}, x''_{\alpha})_{\alpha} \right) &= (A', A'') \odot \bigwedge_{\alpha} (x'_{\alpha}, x''_{\alpha})_{\alpha}, \\ &= (A', A'') \odot \left(\bigwedge_{\alpha} x'_{\alpha}, \bigwedge_{\alpha} x''_{\alpha} \right)_{\alpha}, \\ &= \left(A' \odot \bigwedge_{\alpha} x'_{\alpha}, A'' \odot \bigwedge_{\alpha} x''_{\alpha} \right)_{\alpha},\end{aligned}$$

puisque chaque élément A'_{ij} et A''_{ij} admettent des inverses, le lemme 1.124 conduit à :

$$\begin{aligned}\Gamma_{(A', A'')} \left(\bigwedge_{\alpha} (x'_{\alpha}, x''_{\alpha})_{\alpha} \right) &= \left(\bigwedge_{\alpha} A' \odot x'_{\alpha}, \bigwedge_{\alpha} A'' \odot x''_{\alpha} \right)_{\alpha}, \\ &= \bigwedge_{\alpha} (A' \odot x'_{\alpha}, A'' \odot x''_{\alpha})_{\alpha}, \\ &= \bigwedge_{\alpha} \Gamma_{(A', A'')} ((x'_{\alpha}, x''_{\alpha})_{\alpha}).\end{aligned}$$

Par conséquent, l'application $\Gamma_{(A', A'')}$ est semi-continue supérieurement ; elle est donc dualement résiduable (cf. théorème 1.113). On vérifie avec la même démarche que l'application $\Lambda_{(A', A'')}$ est dualement résiduable. \square

Notation 1.180. On notera $\Gamma_{(A', A'')}^b(x', x'') = (A', A'') \blacktriangleright (x', x'')$ (resp. $\Lambda_{(A', A'')}^b(x', x'') = (x', x'') \blacktriangleleft (A', A'')$) l'application résiduée duale de $\Gamma_{(A', A'')}$ (resp. $\Lambda_{(A', A'')}$).

³Nous rappelons que $\top \odot \varepsilon = \varepsilon \odot \top = \top$.

Remarque 1.181. Concernant l'ensemble des couples $C_0(\mathcal{D})$ (voir définition 1.157) il faut noter que les opérations \wedge et \odot sont des lois de compositions internes. En effet, pour tous couples $(\tilde{x}', \tilde{x}'')$ et $(\tilde{y}', \tilde{y}'')$ de $C_0(\mathcal{D})$ on a

$$(\tilde{x}', \tilde{x}'') \wedge (\tilde{y}', \tilde{y}'') = (\tilde{x}' \wedge \tilde{y}', \tilde{x}'' \wedge \tilde{y}'') \in C(\mathcal{D})$$

de plus par isotonie de \wedge ,

$$\tilde{x}' \preceq \tilde{x}'' \text{ et } \tilde{y}' \preceq \tilde{y}'' \Rightarrow \tilde{x}' \wedge \tilde{y}' \preceq \tilde{x}'' \wedge \tilde{y}''$$

autrement dit $(\tilde{x}' \wedge \tilde{y}', \tilde{x}'' \wedge \tilde{y}'') \in C_0(\mathcal{D})$. De même, par isotonie de \odot , on a

$$(\tilde{x}', \tilde{x}'') \odot (\tilde{y}', \tilde{y}'') = (\tilde{x}' \odot \tilde{y}', \tilde{x}'' \odot \tilde{y}'') \in C_0(\mathcal{D}).$$

Proposition 1.182. L'injection canonique $I_{C_0(\mathcal{D})} : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow C(\mathcal{D})$ est dualement résiduable. Sa résiduée duale sera notée

$$(I_{C_0(\mathcal{D})})^b : C(\mathcal{D}) \rightarrow C_0(\mathcal{D}).$$

Démonstration. Directe, puisque $C_0(\mathcal{D})$ est un sous-treillis complet de $C(\mathcal{D})$. La proposition 1.136 donne le résultat. \square

Remarque 1.183. Le calcul de cette projection est obtenu de la façon suivante. Soit un couple $(x', x'') \in C(\mathcal{D})$, la projection est égale à

$$(I_{C_0(\mathcal{D})}^b)((x', x'')) = (x', x' \oplus x'') = (\tilde{x}', \tilde{x}'').$$

où $(x', x' \oplus x'')$ est le plus petit couple de $C_0(\mathcal{D})$ tel que $\tilde{x}' \succeq x'$, $\tilde{x}'' \succeq x''$ et $\tilde{x}' \preceq \tilde{x}''$. Par exemple, soit le couple $(9, 3)$ de $C(\overline{\mathbb{Z}}_{\max})$, la projection de ce couple dans $C_0(\overline{\mathbb{Z}}_{\max})$ est donnée par $(I_{C_0(\overline{\mathbb{Z}}_{\max})})^b((9, 3)) = (9, 9 \oplus 3) = (9, 9)$. De même, notons que $(I_{C_0(\mathcal{D})})^b$ étant un projecteur on a

$$(\tilde{x}', \tilde{x}'') \in C_0(\mathcal{D}) \iff (\tilde{x}', \tilde{x}'') = (I_{C_0(\mathcal{D})})^b((\tilde{x}', \tilde{x}'')).$$

Proposition 1.184. Si chaque élément \tilde{A}'_{ij} et \tilde{A}''_{ij} admet un inverse alors l'application $C_0(\mathcal{D})|_{\Gamma(\tilde{A}', \tilde{A}'')|_{C_0(\mathcal{D})}} : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow C_0(\mathcal{D})$ est dualement résiduable. Sa résiduée duale est donnée par

$$\left(C_0(\mathcal{D})|_{\Gamma(\tilde{A}', \tilde{A}'')|_{C_0(\mathcal{D})}} \right)^b = (I_{C_0(\mathcal{D})})^b \circ \left(\Gamma_{(\tilde{A}', \tilde{A}'')} \right)^b \circ I_{C_0(\mathcal{D})}.$$

Démonstration. D'après la proposition 1.179, l'application $\Gamma_{(\tilde{A}', \tilde{A}'')}$ définie sur $C(\mathcal{D})$ est dualement résiduable, on a

$$\begin{aligned} \left(C_0(\mathcal{D})|_{\Gamma(\tilde{A}', \tilde{A}'')|_{C_0(\mathcal{D})}} \right)^b &= \left(C_0(\mathcal{D})|_{\Gamma(\tilde{A}', \tilde{A}'')} \circ I_{C_0(\mathcal{D})} \right)^b \\ &= (I_{C_0(\mathcal{D})})^b \circ \left(C_0(\mathcal{D})|_{\Gamma(\tilde{A}', \tilde{A}'')} \right)^b && \text{(par la proposition 1.116)} \\ &= (I_{C_0(\mathcal{D})})^b \circ \left(\Gamma_{(\tilde{A}', \tilde{A}'')} \right)^b \circ I_{C_0(\mathcal{D})} && \text{(par la proposition 1.137)}. \end{aligned}$$

Alors, en considérant $(\tilde{B}', \tilde{B}'') \in C_0(\mathcal{D}) \subset C(\mathcal{G})$, la plus petite solution dans $C_0(\mathcal{D})$ de $\Gamma_{(\tilde{A}', \tilde{A}'')}((\tilde{x}', \tilde{x}'')) = (\tilde{A}', \tilde{A}'') \odot (\tilde{x}', \tilde{x}'') \succeq (\tilde{B}', \tilde{B}'')$ est $\Gamma_{(\tilde{A}', \tilde{A}'')}^b((\tilde{B}', \tilde{B}'')) = (\tilde{x}', \tilde{x}'') = (\tilde{A}', \tilde{A}'') \blacktriangleright (\tilde{B}', \tilde{B}'') = (\tilde{A}' \blacktriangleright \tilde{B}', \tilde{A}'' \blacktriangleright \tilde{B}'') \oplus \tilde{A}'' \blacktriangleright \tilde{B}''$.

\square

Définition 1.185. Soit \mathcal{D} un dioïde et l'ensemble $I(\mathcal{D})$ des intervalles fermés de \mathcal{D} . Les opérations $\bar{\wedge}$ et $\bar{\odot}$ sont définies par

$$\mathbf{x}\bar{\wedge}\mathbf{y} = [\underline{x} \wedge \underline{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}] \quad \text{et} \quad \mathbf{x}\bar{\odot}\mathbf{y} = [\underline{x} \odot \underline{y}, \bar{x} \odot \bar{y}].$$

Proposition 1.186. Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in I(\mathcal{D})$ l'intervalle $\mathbf{x}\bar{\wedge}\mathbf{y}$ (respectivement $\mathbf{x}\bar{\odot}\mathbf{y}$) est le plus petit intervalle de $I(\mathcal{D})$ contenant l'ensemble $\{x \wedge y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$ (respectivement $\{x \odot y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$).

Démonstration. On considère l'intervalle \mathbf{z} de $I(\mathcal{D})$ tel que $\{x \wedge y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$. On a alors $\underline{x} \wedge \underline{y} \in \{x \wedge y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$ et $\bar{x} \wedge \bar{y} \in \{x \wedge y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset \mathbf{z}$.

Ainsi, $\underline{z} \preceq \underline{x} \wedge \underline{y}$ et $\bar{x} \wedge \bar{y} \preceq \bar{z}$, c'est-à-dire, $\underline{z} \preceq \underline{x} \wedge \underline{y} \preceq \bar{x} \wedge \bar{y} \preceq \bar{z}$.

Ce qui signifie que l'intervalle $[\underline{x} \wedge \underline{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}] = \mathbf{x}\bar{\wedge}\mathbf{y} \subset \mathbf{z}$.

Autrement dit, l'intervalle $[\underline{x} \wedge \underline{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}]$ est contenu dans tout intervalle contenant l'ensemble $\{x \wedge y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$.

Soit $t \in \{x \wedge y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$ et $x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}$ tels que $t = x \wedge y$. D'après la définition d'un intervalle, $\underline{x} \preceq x \preceq \bar{x}$ et $\underline{y} \preceq y \preceq \bar{y}$.

De plus, comme dans un dioïde la loi \wedge est compatible avec l'ordre, on peut écrire $\underline{x} \wedge \underline{y} \preceq x \wedge y \preceq \bar{x} \wedge \bar{y}$.

Ce qui signifie que $t \in [\underline{x} \wedge \underline{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}]$, c'est-à-dire $\{x \wedge y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \subset [\underline{x} \wedge \underline{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}]$.

On peut donc conclure que $[\underline{x} \wedge \underline{y}, \bar{x} \wedge \bar{y}]$ est le plus petit intervalle contenant l'ensemble $\{x \wedge y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}$.

Pour la loi \odot la démonstration est analogue. □

Remarque 1.187. La proposition précédente est importante puisqu'elle montre que les opérations

$$\begin{aligned} \mathbf{x}\bar{\wedge}\mathbf{y} &= \{x \wedge y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\}, \\ \mathbf{x}\bar{\odot}\mathbf{y} &= \{x \odot y \mid x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y}\} \end{aligned}$$

peuvent être représentées en utilisant seulement les bornes des intervalles \mathbf{x} et \mathbf{y} .

Comme pour le dioïde $C(\mathcal{D})$, on peut étendre naturellement les applications isotones au dioïde des intervalles $I(\mathcal{D})$. En considérant l'application Π isotone, l'image par Π d'un intervalle \mathbf{x} est donnée par

$$\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) = \{\Pi(x) \mid x \in \mathbf{x}\}.$$

Comme la fonction Π est isotone, on peut calculer les valeurs de $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x})$ directement à partir des bornes de l'intervalle \mathbf{x} , c'est-à-dire $\mathbf{\Pi}(\mathbf{x}) = [\Pi(\underline{x}), \Pi(\bar{x})]$, et en particulier $\mathbf{x}_* = [\underline{x}_*, \bar{x}_*]$.

Proposition 1.188. Soit \mathcal{D} un dioïde complet. Si les bornes de l'intervalle \mathbf{a} admettent des inverses alors l'application $\Gamma_{\mathbf{a}} : I(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a}\bar{\odot}\mathbf{x}$ est dualement résiduable. L'application résiduée duale $\Gamma_{\mathbf{a}}^b$ est donnée par

$$\Gamma_{\mathbf{a}}^b(\mathbf{b}) = \mathbf{a}\bar{\wedge}\mathbf{b} = [\underline{a}\bar{\wedge}\underline{b}, \bar{a}\bar{\wedge}\bar{b}].$$

Démonstration. Soit $\Psi : C_0(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), (x_1, x_2) \mapsto [x_1, x_2]$ l'application qui à un couple ordonné associe un intervalle. Il est clair que cette application est un isomorphisme (voir définition 1.72) de dioïdes puisqu'ajouter ou multiplier deux intervalles se fait en considérant leurs bornes. Par conséquent, la proposition 1.160 donne directement le résultat. □

Remarque 1.189. On peut montrer de la même manière que l'application $\Lambda_{\mathbf{a}} : I(\mathcal{D}) \rightarrow I(\mathcal{D}), \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}\bar{\odot}\mathbf{a}$ est dualement résiduable si les bornes de l'intervalle \mathbf{a} admettent des inverses.

Lemme 1.190. Soit deux matrices d'intervalles $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$, $B \in \mathcal{D}^{n \times n}$ et $X \in \mathcal{D}^{p \times q}$ une matrice d'intervalles dégénérés. Si chaque borne des éléments B_{ij} admet un inverse alors on a :

$$B \overline{\blacktriangleright} (A \overline{\otimes} X) = (B \overline{\blacktriangleright} A) \overline{\otimes} X. \quad (1.59)$$

Démonstration. Nous rappelons qu'un intervalle dégénéré $X = [X', X'']$ est tel que $X' = X''$

$$\begin{aligned} B \overline{\blacktriangleright} (A \overline{\otimes} X) &= [B', B''] \overline{\blacktriangleright} [A' \otimes X, A'' \otimes X] \\ &= [B' \overline{\blacktriangleright} (A' \otimes X), (B' \overline{\blacktriangleright} (A' \otimes X)) \oplus (B'' \overline{\blacktriangleright} (A'' \otimes X))] \\ &= [(B' \overline{\blacktriangleright} A') \otimes X, ((B' \overline{\blacktriangleright} A') \otimes X) \oplus ((B'' \overline{\blacktriangleright} A'') \otimes X)] \text{ voir proposition 1.129} \\ &= [(B' \overline{\blacktriangleright} A') \otimes X, ((B' \overline{\blacktriangleright} A') \oplus (B'' \overline{\blacktriangleright} A'')) \otimes X] \text{ par distributivité de } \otimes \text{ par rapport à } \oplus \\ &= [(B' \overline{\blacktriangleright} A'), (B' \overline{\blacktriangleright} A') \oplus (B'' \overline{\blacktriangleright} A'')] \overline{\otimes} X \\ &= (B \overline{\blacktriangleright} A) \overline{\otimes} X. \end{aligned}$$

□

1.13 Conclusion

Dans ce premier chapitre nous avons présenté les outils mathématiques utilisés par la suite. Après un bref rappel sur la structure algébrique des dioïdes, la théorie de la résiduation et la résiduation duale ont été présentées. Cette théorie permet de donner une alternative à la notion d'inverse pour les applications définies sur des ensembles ordonnés, elle sera utilisée pour calculer la commande des systèmes modélisable par un graphe d'événement P-temporel. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous avons donné un ensemble de définitions et de propositions sur les dioïdes d'intervalles pour aborder la commande des systèmes modélisables par un graphe d'événement P-temporel incertain.

Modélisation des graphes d'événements P-temporel

Dans la littérature, de nombreuses classes de modèle sont proposées pour l'étude des systèmes dynamiques. Le choix d'un type de modèle est fonction des objectifs recherchés et de la nature du système considéré. Dans le cas des systèmes à événements discrets (SED), plusieurs concepts de modélisation ont été élaborés : par exemple, les chaînes de Markov [Baynat, 2000], les files d'attente [Baynat, 2000], les réseaux de Petri stochastiques pour les systèmes stochastiques [Ciardo et al., 1997], ou les réseaux de Petri déterministes pour les systèmes déterministes [Murata, 1989, Proth and Xie, 1995].

Les réseaux de Petri constituent un outil graphique et mathématique qui s'applique à un grand nombre de domaines où les notions d'événements et d'évolutions simultanées sont importantes.

Cette théorie est encore toute jeune puisqu'elle est née de la thèse, intitulée Communication avec des Automates, que Carl Adam Petri a présenté en 1962 à l'Université de Darmstadt.

Parmi les applications on peut citer : l'évaluation des performances des systèmes discrets, les protocoles de communication, la commande des ateliers de fabrication, la conception de logiciel temps-réel et/ou distribué, les systèmes d'information (organisation des entreprises), les interfaces homme-machine.

Certains systèmes mettant uniquement en jeu des phénomènes de synchronisation et de saturation peuvent être modélisés par une classe des réseaux de Petri, appelée classe des graphes d'événements temporisés (GET). Ces derniers admettent une représentation linéaire dans la structure algébrique de dioïde présenté dans le chapitre précédent. Cette représentation est bien adaptée pour aborder, par exemple, les problèmes de commande ou d'évaluation de performances.

L'objectif de ce chapitre est d'établir un modèle mathématique qui reflète le comportement dynamique des modèles considérés dans ce rapport, à savoir, les graphes d'événements P-temporel, notés GEP-T

Ce chapitre est organisé en trois parties :

- La section 2.1 fait un rappel sur les réseaux de Petri.
- Les sections 2.2, 2.3 et 2.4 donnent un résumé bref sur la modélisation des GET discrets dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.
- La classe des GET incertains ou T-temporel est présentée dans la section 2.6.

Les deux derniers points constituent les contributions majeures de ce chapitre.

- La classe des GEP-T est introduite dans la section 2.7 En utilisant une représentation non linéaire dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.
- Une extension de cette classe de modèle au cas incertain est présentée dans la section 2.8.

2.1 Rappel sur les réseaux de Petri

Dans cette section, on va rappeler quelques définitions et propriétés liées aux réseaux de Petri.

Définition 2.1 (Réseau de Petri). Un réseau de Petri (RdP) est un graphe biparti constitué de places, de transitions et d'arcs orientés qui relient les transitions aux places et les places aux transitions. Il est représenté par un quadruplet $\mathcal{R} = \langle \mathcal{P}, \mathcal{T}, \text{Pré}, \text{Post} \rangle$ où :

- \mathcal{P} : ensemble fini de places $\mathcal{P} = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, avec $m = \text{card}(\mathcal{P})$.
 - \mathcal{T} : ensemble fini de transitions $\mathcal{T} = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, avec $n = \text{card}(\mathcal{T})$.
 - Pré : application de $\mathcal{P} \times \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{N}$ correspondant aux arcs (directs) reliant les places aux transitions.
 - Post : application de $\mathcal{T} \times \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ correspondant aux arcs directs reliant les transitions aux places.
- On notera t^0 (resp. 0t) l'ensemble des places de sortie (resp. d'entrée) de la transition t .
De même p^0 (resp. 0p) désignera l'ensemble des transitions de sortie (resp. d'entrée) de la place p .

Définition 2.2 (RdP marqué). Un RdP marqué est un couple $\langle \mathcal{R}, \mathcal{M} \rangle$ où :

- \mathcal{R} est un RdP.
- \mathcal{M} est une application qui associe à chaque place p du RdP un nombre de marques.

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathcal{P} &\rightarrow \mathbb{N} \\ p &\mapsto \mathcal{M}(p) \end{aligned}$$

$\mathcal{M}(p)$ désigne le nombre de marques (jetons) contenues dans la place p .

Un exemple de graphe associé à un réseau de Petri est donné par la figure 2.1.

Exemple 2.3. Le RdP de la figure 2.1 représente un système, par exemple informatique, où 2 tâches requièrent une même ressource renouvelable.

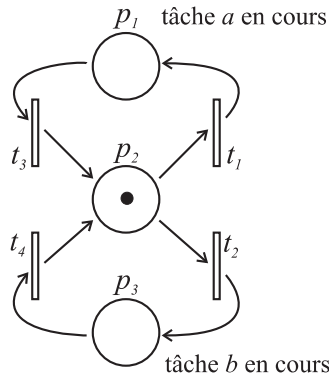


Figure 2.1 – RdP modélisant le comportement d'un système à ressource partagée.

Les places sont ici $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, p_3\}$ et les transitions $\mathcal{T} = \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. On a

$$\begin{aligned} \text{Pré}(p_1, t_3) &= 1 & \text{Post}(t_1, p_1) &= 1 \\ \text{Pré}(p_2, t_1) &= 1 & \text{Post}(t_2, p_3) &= 1 \\ \text{Pré}(p_2, t_2) &= 1 & \text{Post}(t_3, p_2) &= 1 \\ \text{Pré}(p_3, t_4) &= 1 & \text{Post}(t_4, p_2) &= 1 \end{aligned}$$

Le marquage \mathcal{M} représenté ici est $\mathcal{M}(p_2) = 1, \mathcal{M}(p_1) = \mathcal{M}(p_3) = 0$.

Un jeton dans la place p_2 signifie que la ressource est disponible. Un jeton dans la place p_1 (resp. p_3) signifie que la tâche a (resp. b) dispose de la ressource commune. Les événements associés aux transitions t_1 et t_2 signifient respectivement "réservation de la ressource par la tâche a " ou "réservation de la ressource par la tâche b ", et ceux associés à t_3 et t_4 concernent la restitution de la ressource.

2.1.1 Tir des transitions

L'évolution au cours du temps des marques des places dans un réseau de Petri se fait selon le processus d'activation (ou de tirage) des transitions décrit ci-après. Étant donné un réseau \mathcal{R} et un marquage \mathcal{M} , on dit que la transition $t \in \mathcal{T}$ est franchissable pour \mathcal{M} si l'on a

$$\forall p \in \mathcal{P}, \mathcal{M}(p) \geq \text{Pré}(p, t).$$

Lorsque cette condition est satisfaite, l'activation (le tirage) de la transition $t \in \mathcal{T}$ conduit à un nouveau marquage \mathcal{M}' défini par :

$$\mathcal{M}'(p) = \mathcal{M}(p) - \text{Pré}(p, t) + \text{Post}(t, p). \tag{2.1}$$

Ainsi, par exemple, dans le cas du réseau de Petri de la figure 2.1, en partant du marquage $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$ (où $\mathcal{M}(p_1) = 0, \mathcal{M}(p_2) = 1, \mathcal{M}(p_3) = 0$), on atteint par tirage de la transition t_1 le marquage $\mathcal{M}_1 = (1, 0, 0)$; puis à partir de \mathcal{M}_1 , par tirage de la transition t_3 on obtient le marquage $\mathcal{M}_2 = (0, 1, 0)$ et ainsi de suite ; sur la figure 2.2, on peut voir l'évolution du marquage du réseau de Petri.

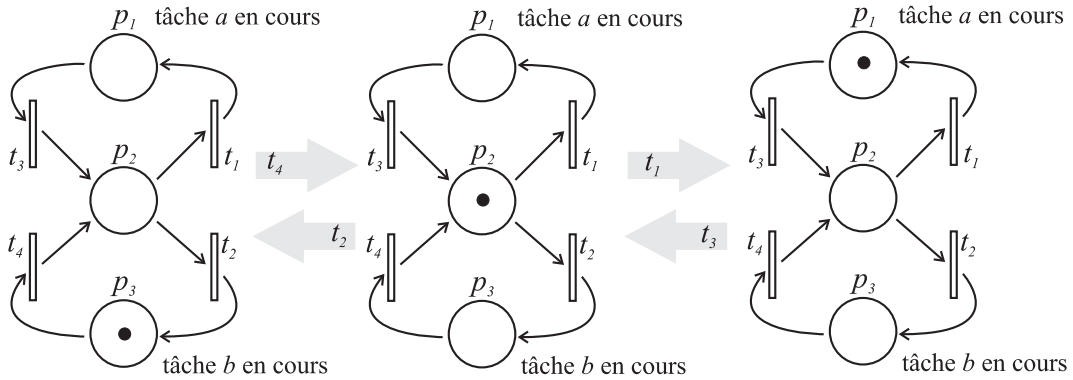


Figure 2.2 – Évolution du marquage d'un réseau de Petri.

Plus généralement, pour un Rdp, en posant, $W^- = [\text{Pré}(p_i, t_j)]$ (la matrice d'incidence avant), $W^+ = [\text{Post}(t_j, p_i)]$ (la matrice d'incidence arrière), $W = W^+ - W^-$ (la matrice d'incidence) et en considérant S une séquence de franchissements réalisables à partir d'un marquage \mathcal{M}_i , il est alors possible de donner l'équation fondamentale suivante :

$$\mathcal{M}_k = \mathcal{M}_i + W.S,$$

où \underline{S} est le vecteur caractéristique de la séquence de franchissement S , c'est-à-dire un vecteur dont la dimension est égale au nombre des transitions du réseau de Petri et dont la composante numéro j correspond au nombre de franchissements de la transition t_j de la séquence S . Dans l'exemple précédent où la séquence des deux premiers tirs était " $S = t_1, t_3$ ", le vecteur caractéristique est égal à $\underline{S} = (1, 0, 1, 0)$.

Remarque 2.4. *L'équation fondamentale traduit la dynamique de fonctionnement du réseau de Petri.*

2.1.2 Ensemble des marquages accessibles

Soit $\mathcal{N} = (\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ un réseau de Petri. L'ensemble des marquages accessibles $A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$ d'un réseau de Petri marqué est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir du marquage initial \mathcal{M}_0 par une séquence de franchissement, c.-à-d.

$$A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0) = \{\mathcal{M}_i, \exists t \mathcal{M}_0 \xrightarrow{t} \mathcal{M}_i\}$$

On peut, lorsque cet ensemble est fini, le représenter sous la forme d'un graphe. Les sommets de ce graphe correspondent aux marquages accessibles de $A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$. Un arc orienté relie deux sommets \mathcal{M}_i et \mathcal{M}_j s'il existe une transition t franchissable permettant de passer d'un marquage à un autre : $\mathcal{M}_i \xrightarrow{t} \mathcal{M}_j$. La figure 2.3 représente le graphe des marquages accessibles pour le réseau de Petri de la figure 2.1 avec un marquage initial $\mathcal{M}_0 = (0, 1, 0)$.

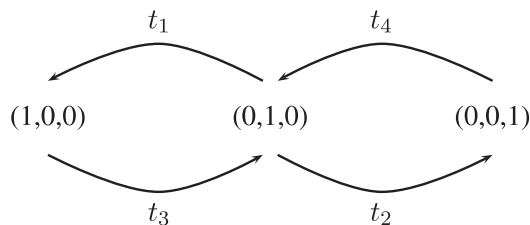


Figure 2.3 – Graphe des marquages atteignables du réseau de Petri de la figure 2.1.

2.1.3 Modélisation des systèmes à événements discrets

Le formalisme des réseaux de Petri est relativement puissant, il permet de représenter une grande variété de comportement des systèmes réels mettant en jeu des phénomènes de concurrence et de synchronisation. Sur la figure 2.4, nous avons représenté quatre structures de réseaux de Petri permettant de décrire ces phénomènes.

- la figure 2.4.(a) représente une structure de *choix*. La place p_1 a deux transitions en aval, notées t_1 et t_2 . Le tir de t_1 ou de t_2 consommera le jeton de la place p_1 et exclura donc le tir de l'autre. Une telle configuration permet de modéliser un phénomène de *concurrence à la consommation* comme par exemple le partage d'un processeur entre tâches concurrentes dans un système informatique ;
- la configuration de la figure 2.4.(b) permet de représenter une concurrence à l'apport de jetons dans une place, ici p_1 ;

- la configuration de la figure 2.4.(c) permet de modéliser un phénomène de *synchronisation*. La transition t_1 n'est franchissable que lorsque les places p_1 et p_2 contiennent toutes les deux au moins un jeton ;
- dans la structure de la figure 2.4.(d), l'apport de jetons dans les places p_1 et p_2 est synchronisé par le tir de la transition t_1 et permet, par exemple, de modéliser l'initiation simultanée de différentes tâches dans un système à événements discrets.

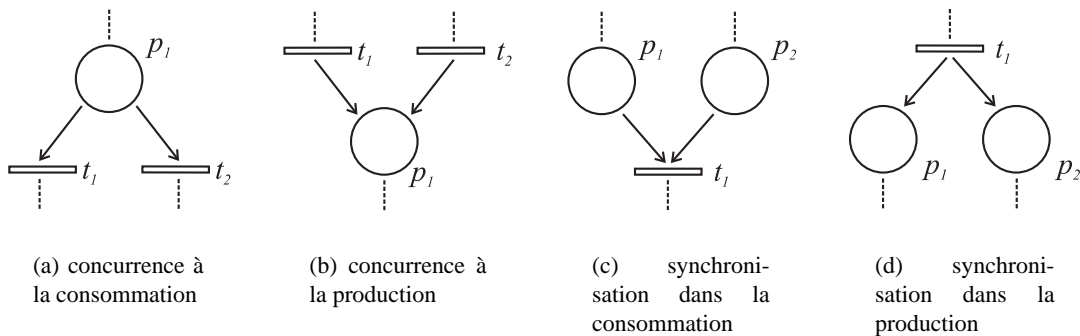


Figure 2.4 – Concurrence et synchronisation dans les RdP.

2.1.4 Quelques propriétés des RdP

Le graphe des marquages associé à un RdP fournit des indications essentielles sur le fonctionnement du système qu'il représente. Suivant que le graphe des marquages est fini ou infini, qu'il présente ou non des circuits, il reflète certaines des propriétés caractéristiques du système modélisé.

Définition 2.5 (Bornitude). Une place $p \in \mathcal{P}$ d'un réseau de Petri marqué $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ est k -bornée ($k \in \mathbb{N}$) si pour tout marquage accessible $\mathcal{M} \in A(\mathcal{R}; \mathcal{M}_0)$, le marquage de cette place vérifie $\mathcal{M}(p) \leq k$. Dans le cas contraire, nous dirons que p est non-bornée. Enfin si p est 1-bornée, on dit que p est binaire (safe). Si on considère le Réseau de Petri de la figure 2.1 on voit que pour le marquage initial \mathcal{M}_0 les places p_1, p_2 et p_3 sont binaires (1-bornées) et le réseau est dit sauf.

Lorsqu'un RdP modélise un système manufacturier, certaines places représentent des convoyeurs ou bien des zones de stockages intermédiaires. La bornitude du marquage du modèle est alors synonyme de limitation de la taille des stocks internes du système. La bornitude du RdP reflète alors en quelque sorte une propriété de "stabilité" du système de production modélisé.

Définition 2.6 (Vivacité). Étant donné un réseau de Petri \mathcal{R} et un marquage initial \mathcal{M}_0 , une transition t est vivante pour le réseau marqué $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ si pour tout marquage \mathcal{M} accessible depuis \mathcal{M}_0 , il existe une suite de transitions s , comportant au moins une fois la transition t , et telle que s soit franchissable pour \mathcal{M} .

Un réseau de Petri marqué $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ est dit vivant si toutes ses transitions sont vivantes.

La non-vivacité révèle souvent un problème de conception du système modélisé ; elle montre qu'une partie du système n'est, à partir d'un état donné, plus sensible aux événements externes.

2.2 Les graphes d'événements temporisés

Suite à cette présentation succincte des réseaux de Petri, notre intérêt va maintenant se porter sur une structure particulière des RdP qui permet la modélisation des systèmes où interviennent des phénomènes de synchronisation et de délai (les phénomènes de conflits étant supposés résolus au préalable).

Définition 2.7 (Graphe d'événements). Un graphe d'événements est un réseau de Petri tel que toute place $p \in \mathcal{P}$ a exactement une transition amont et une transition aval.

Notons que les graphes d'événements ne permettent pas de modéliser les situations de concurrence telles que celles illustrées par les figures 2.4.(a) et 2.4.(b). Néanmoins, cette sous-classe de réseaux de Petri est intéressante pour de nombreuses applications où l'on doit essentiellement modéliser des contraintes de *synchronisation* (voir figure 2.4.(c) et figure 2.4.(d)) entre plusieurs processus.

2.2.1 Propriétés des graphes d'événements

Nous rappelons brièvement quelques caractéristiques des graphes d'événements au travers des propositions suivantes.

Proposition 2.8. *Dans un graphe d'événements, le nombre de jetons d'un circuit élémentaire est constant.*

Démonstration. Rappelons qu'un circuit élémentaire est un chemin qui commence et se termine au même sommet. Alors, si une transition franchissable appartenant à un circuit élémentaire est franchie, son franchissement prend un jeton dans une des places amont du circuit pour le remettre immédiatement dans une autre place aval du circuit. L'opération de franchissement d'une transition d'un circuit laisse donc invariant le nombre de jetons du circuit. \square

Proposition 2.9. *Soit \mathcal{R} un graphe d'événements et \mathcal{M}_0 son marquage initial, alors $(\mathcal{R}, \mathcal{M}_0)$ est vivant si et seulement si tout circuit élémentaire contient une place initialement marquée.*

Démonstration. Supposons qu'un circuit élémentaire d'un graphe d'événements ne soit pas initialement marqué. En référence à la proposition 2.8, ce circuit ne contiendra jamais de jeton et donc toutes ses transitions sont en permanence non franchissables : le graphe d'événements n'est donc pas vivant. Inversement, dans un graphe d'événements non vivant, une transition morte (qui n'est jamais tirée) possède obligatoirement en amont une transition également morte. En remontant ainsi d'une transition morte à une autre située en amont, on aboutit inéluctablement à une transition appartenant à un circuit, circuit qui est donc nécessairement sans jeton. \square

2.2.2 Les graphes d'événements temporisés

Un graphe d'événements est dit *temporisé* (GET) si à chaque place $p \in \mathcal{P}$ est associée un temps $\theta(p)$, où $\theta : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{N}$ est l'application qui à toute place $p \in \mathcal{P}$ associe sa temporisation. Un temps $\theta(p)$ est interprété comme la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place p ; par exemple pour le graphe d'événements temporisé de la figure 2.5, le marquage initial de la place située entre les transitions x_1 et x_2 étant nul, si la transition x_1 est franchie à la date t_0 , la transition x_2 n'est pas franchissable avant la date $t_0 + 3$. De même, à chaque transition $t \in \mathcal{T}$ il est possible d'associer un temps $\theta(t)$ représentant la durée minimale d'activation de la transition t . Il a été montré qu'il est toujours possible de se ramener au cas où seules les places sont temporisées (cf. [Murata, 1989]).

Exemple 2.10. Le graphe d'événements temporisé de la figure 2.5 peut représenter une cellule de production fonctionnant comme suit : une machine M capable d'usiner deux pièces à la fois (les 2 jetons dans la place P_2 signifient que les 2 ressources d'usinages de la machine sont libres). Les pièces sont amenées à un stock amont P_1 de capacité infinie, l'usinage d'une pièce est représenté par la présence d'un jeton dans la place P_3 , le traitement d'une pièce prend au moins 3 unités de temps. A l'issue du traitement, la pièce finie est déposée dans un stock aval P_4 de capacité infinie et la machine ayant traité la pièce redevient disponible (1 jeton revient dans P_2), en attendant une nouvelle pièce.

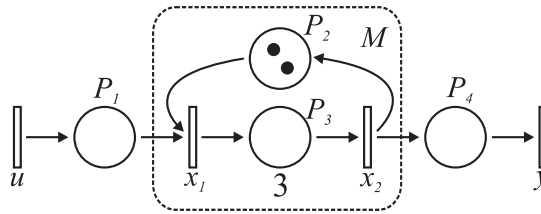


Figure 2.5 – Modèle GET d'une machine.

Remarque 2.11. Notons qu'au plus deux pièces peuvent être simultanément traitées, puisque d'après la proposition 2.8, le nombre de jetons dans un circuit est constant. Sur cet exemple, le régime permanent est périodique : deux pièces sont traitées toutes les 3 unités de temps, ce qui conduit à un taux de production de $\frac{2}{3}$.

2.3 Représentation d'état des graphes d'événements temporisés

A la différence du modèle d'état classiquement associé à un RdP où l'état considéré est la variation du marquage, l'équipe (max, +) de l'INRIA a proposé dans [Cohen et al., 1985] une modélisation considérant les dates de franchissement des transitions pour pouvoir discuter des performances du système temporisé, c'est-à-dire déterminer son régime transitoire et/ou son régime permanent et le taux de production.

2.3.1 Dateurs, forme implicite

Un dateur est une application croissante qui associe à chaque transition i , un dateur $x_i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\max}$ où, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x_i(k) \in \mathbb{Z}_{\max}$ désigne la date à laquelle se produit le $k^{\text{ième}}$ franchissement de la transition i . Par convention, les événements (les tirs des transitions) seront numérotés à partir de 0 ; le tir $n^{\circ}0$ est le premier tir d'une transition. De plus, $x_i(k) = +\infty$ signifie, par convention, que l'événement numéroté k , ainsi que les événements suivants n'ont jamais eu lieu. D'autre part, les jetons présents dans le graphe d'événements temporisé seront supposés disponibles depuis "l'origine des temps" c'est-à-dire depuis la date $-\infty$.

Pour introduire la mise en équation d'un graphe d'événements temporisé, on considère les exemples élémentaires de la figure 2.6, constitués de trois transitions t_1, t_2 et t_3 et de deux places p_1 et p_2 temporisées avec $\theta(p_1) = 1$ et $\theta(p_2) = 3$.

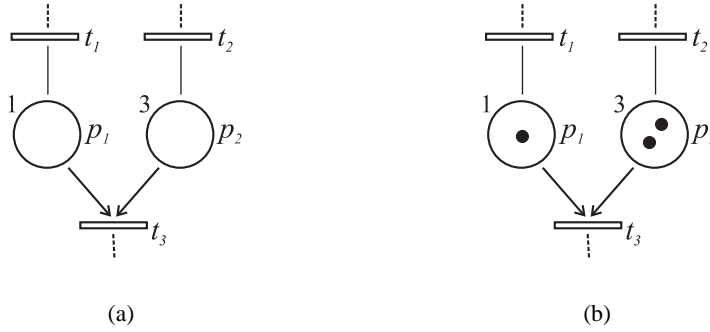


Figure 2.6 – Principe de la mise en équation du fonctionnement d'un graphe d'événements temporel

Sur la figure 2.6.(a), aucun jeton n'est présent initialement dans les places. La date au plus tôt de la $k^{\text{ième}}$ activation de la transition t_3 est donc conditionnée par la date de la $k^{\text{ième}}$ activation de t_1 et de la date de la $k^{\text{ième}}$ activation de t_2 . De plus il faut tenir compte du temps de séjour minimal d'un jeton dans p_1 et dans p_2 . Nous devons donc avoir

$$x_3(k) \geq 1 + x_1(k) \quad \text{et} \quad x_3(k) \geq 3 + x_2(k).$$

Finalement, on obtient donc pour $x_3(k)$ l'inéquation

$$x_3(k) \geq \max(1 + x_1(k), 3 + x_2(k)).$$

La figure 2.6.(b) représente une situation plus générale, des jetons sont présents dans certaines places à l'instant initial. Dans cette situation, la date au plus tôt de la $k^{\text{ième}}$ activation de t_3 est conditionnée par la date au plus tôt de la $(k - 1)^{\text{ième}}$ activation de t_1 (car un jeton est présent initialement dans p_1) et par la date au plus tôt de la $(k - 2)^{\text{ième}}$ activation de t_2 (car deux jetons sont présents initialement dans p_2). L'inéquation pour $x_3(k)$ peut alors s'écrire

$$x_3(k) \geq \max(1 + x_1(k - 1), 3 + x_2(k - 2)).$$

En appliquant ce principe au graphe de la figure 2.5, on obtient le système

$$\begin{cases} x_1(k) & \geq \max(x_2(k - 2), u(k)) \\ x_2(k) & \geq 3 + x_1(k) \\ y(k) & \geq x_2(k) \end{cases}$$

Dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}, \max, +)$ où $a \oplus b = \max(a, b)$ et $a \otimes b = a + b, \varepsilon = -\infty, e = 0$, le système précédent se met sous la forme

$$\begin{cases} x_1(k) & \succeq x_2(k - 2) \oplus u(k) \\ x_2(k) & \succeq 3 \otimes x_1(k) \\ y(k) & \succeq x_2(k) \end{cases}$$

ou encore, matriciellement, cela s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \succeq \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 3 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-2) \\ x_2(k-2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) \succeq (\varepsilon \ e) \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}. \end{array} \right.$$

Soit un système d'inégalités de la forme

$$x(k) \succeq A_0 \otimes x(k) \oplus A_1 \otimes x(k-1) \oplus A_2 \otimes x(k-2) \oplus B \otimes u(k) \quad (2.2a)$$

$$y(k) \succeq C_0 x(k) \quad (2.2b)$$

Alors, en notant $\mathcal{M}_0(p_i)$ le marquage initial pour toute place $p_i \in \mathcal{P}$ et en posant $M = \max_{p_i \in \mathcal{P}}(\mathcal{M}_0(p_i))$, on obtient d'une manière générale un système de la forme :

$$x(k) \succeq \bigoplus_{i=0}^M A_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M B_j u(k-j), \quad (2.3a)$$

$$y(k) \succeq \bigoplus_{l=0}^M C_l x(k-l). \quad (2.3b)$$

2.3.2 Forme explicite "ARMA", forme d'état

Dans le système d'inéquations (2.3) apparaît une inégalité sur l'état $x(k)$ et sur la sortie $y(k)$. Cette représentation n'est pas pleinement satisfaisante ; cependant un cas "limite" de fonctionnement appelé fonctionnement au plus tôt peut être considéré. L'étude du fonctionnement "au plus tôt"¹ des graphes d'événements temporisés est équivalent à l'étude des solutions minimales du système d'inéquations aux dateurs (2.3).

Pour résoudre le système d'inéquations aux dateurs (2.3), on utilise les résultats du corollaire 1.100 sur la résolution de systèmes du type $x = ax \oplus b$, la plus petite solution de (2.3a) étant donnée par

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^M \bar{A}_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^M \bar{B}_j u(k-j), \quad (2.4)$$

où $\bar{A}_1 = A_0^* A_1, \bar{A}_2 = A_0^* A_2, \dots, \bar{B}_0 = A_0^* B_0, \dots$. D'après le corollaire 1.100, la plus petite solution de (2.3a) satisfait l'égalité, c'est-à-dire que l'équation (2.4) définit l'ensemble des dates au plus tôt pour le fonctionnement du système. Ainsi, à partir de la donnée de la suite des vecteurs de commande $u(1), u(2) \dots$ et de l'état initial $x(0)$, (2.4) permet de déterminer successivement toutes les valeurs $x(1), x(2), \dots$ du vecteur d'état. L'équation (2.4) est l'analogie d'un modèle ARMA².

A partir de la forme ARMA (2.4), il est toujours possible de passer à la forme suivante dite d'état :

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \quad (2.5a)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (2.5b)$$

¹i.e. les transitions sont franchies dès qu'elles sont franchissables.

²Auto-Régressif à Moyenne Ajustée (Auto Regressive-Moving Average en anglais).

Pour cela, il faut exprimer un graphe d'événements temporisé dont le comportement est équivalent à celui représenté par (2.4) et tel que les matrices A_i soient nulles pour $i \neq 1$ et tel que les matrices B_j, C_l soient nulles pour $i, j > 0$. Pour le graphe d'événements temporisé cela signifie :

- toute place située entre deux transitions internes doit contenir exactement un jeton ;
- toutes les places situées entre une transition source et une transition interne doivent être sans jeton ;
- toutes les places situées entre une transition interne et une transition puits doivent être sans jeton.

Ce qui revient à augmenter le vecteur d'état du système.

Par analogie avec la théorie des systèmes dynamiques linéaires, l'équation (2.5a) est l'équation d'état, l'équation (2.5b) est l'équation d'observation (ou de sortie), $x(\cdot) \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^n$ est le vecteur d'état, $u(\cdot) \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^p$ est le vecteur d'entrée ou de commande et $y(\cdot) \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^q$ est le vecteur de sortie ou d'observation. De même on appelle $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{n \times n}$ la matrice d'état ou matrice dynamique, $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{n \times p}$ la matrice d'entrée ou de commande, $C \in \overline{\mathbb{Z}}_{\max}^{q \times n}$ la matrice de sortie ou d'observation.

Remarque 2.12. *En théorie des systèmes dynamiques linéaires, les équations d'état sont considérées dans le domaine temporel (i.e. les systèmes sont décrits par des fonctions du temps t). L'analogue consiste ici à associer à une transition $x \in \mathcal{T}$, la fonction $t \mapsto x(t)$ qui indique le nombre de tirs de la transition x ayant eu lieu jusqu'à la date t . Cette variable est appelée un "compteur" associé à la transition x . Ainsi, pour l'exemple de la figure 2.5, en associant à chaque transition x (resp. : u, y) une variable $x(t)$ (resp. : $u(t), y(t)$) représentant le nombre de tirs de la transition x (resp. : u, y) jusqu'à l'instant t , on obtient le système d'inégalités suivant :*

$$\begin{cases} x_1(t) & \leq \min(2 + x_2(t), u(t)) \\ x_2(t) & \leq x_1(t - 3) \\ y(t) & \leq x_2(t) \end{cases}$$

Avec les notations du dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}, \min, +)$ (où $a \oplus b = \min(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$ et avec $a \succeq b \Leftrightarrow a \oplus b = a \Leftrightarrow a \leq b$), on peut écrire

$$\begin{cases} x_1(t) & \succeq 2 \otimes x_2(t) \oplus u(t) \\ x_2(t) & \succeq x_1(t - 3) \\ y(t) & \succeq x_2(t) \end{cases}$$

En suivant la même démarche que pour les dateurs, on obtient un système pouvant s'écrire comme (2.5), mais cette fois dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ et relativement aux fonctions compteurs. Les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ fournissent donc deux systèmes d'inégalités qui permettent de manière équivalente d'étudier la dynamique du système modélisé.

2.3.3 Quelques éléments de théorie spectrale des matrices $(\max, +)$

Dans cette partie, on rappelle certaines propriétés des matrices carrées à coefficients dans un dioïde. Un des résultats essentiels est, pour une matrice A irréductible, l'existence d'une propriété de *cyclicité* de la forme $A^{n+c} = \lambda^c \otimes A^n$, pour n assez grand, et où λ est l'unique valeur propre de la matrice A permet de quantifier "l'évolution moyenne" de l'état du système. Un champ d'application apparent pour cette propriété est l'évaluation de performance des systèmes dynamiques à événements discrets. Nous verrons que pour un GET en régime autonome, la cyclicité de la matrice A permet d'établir que celui-ci atteint un régime périodique après un régime transitoire.

Le lecteur trouvera une démonstration de ces résultats dans [Gondran and Minoux, 2001, §6], [Baccelli et al., 1992, §3.2.4],[Gaubert, 1992, Gaubert, 1995] et [Terrason et al., 1998].

Considérons le système autonome suivant :

$$x(k) = Ax(k-1) = A^k x(0), \quad (2.6)$$

Le problème de recherche de valeurs propres et de vecteurs propres de la matrice carrée A s'exprime comme la recherche de couples (λ, ν) où ν (avec $\nu \neq \varepsilon$) est appelé *vecteur propre* de A pour la *valeur propre* λ , tels que

$$A \otimes \nu = \lambda \otimes \nu.$$

Pour l'évolution de l'état du système autonome, si λ est valeur propre de A et si $x(0)$ le vecteur d'état initial est vecteur propre de A alors

$$x(k) = \lambda x(k-1) = \lambda^k x(0)$$

soit dans l'algèbre usuelle, pour chacune des transition i du GET

$$x_i(k) = \lambda + x_i(k-1) \quad (2.7)$$

autrement dit, toutes les variables d'état sont incrémentées de λ lorsque k est incrémenté de 1, l'interprétation physique de (2.7) pour un GET représentant un système de production (cf. figure 2.5) serait de dire qu'une pièce est produite toutes les λ unités de temps ; λ est donc l'inverse du taux de production, c'est-à-dire le temps de cycle du GET. Pour ce cas particulier où $x(0)$ est un vecteur propre de A , le régime permanent est atteint, sans passer par une phase de régime transitoire.

Théorème 2.13. *Une matrice $A \in (\mathbb{Z}_{\max})^{n \times n}$ irréductible³ admet une unique valeur propre λ égale au rayon spectral*

$$\lambda = \rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n \text{tr}(A^k)^{1/k} \quad (2.8)$$

où $\text{tr}(A^k)$ désigne la trace de la matrice A^k , c'est-à-dire la somme (au sens de \oplus) de ses éléments diagonaux.

Remarque 2.14 (Cas réductible). *Le cas plus général où A est réductible a été également traité dans [Gaubert, 1992]. Les résultats énoncés dans le cas réductible s'appuient sur une décomposition du graphe de précedence de A en composantes fortement connexes, et une étude séparée de chacune des composantes. Ce qui se dégage de cette étude est qu'il n'y a plus nécessairement unicité de la valeur propre lorsque A est réductible.*

Remarque 2.15. *Pour le calcul effectif du rayon spectral de la matrice $A \in (\mathbb{Z}_{\max})^{n \times n}$ plusieurs méthodes sont envisageables. Une méthode simple consiste à évaluer la formule (2.8). Une autre méthode permettant de calculer la valeur propre d'une matrice consiste à appliquer un résultat dû à R.M Karp (voir [Baccelli et al., 1992, §2.2.3],[Gondran and Minoux, 1985]). En outre, une autre classe de méthodes, dites d'itérations sur les politiques, sont plus rapides que l'algorithme de Karp ; le lecteur intéressé pourra se reporter à [Terrason et al., 1998].*

Le théorème qui suit montre qu'il est également possible de caractériser le taux de production directement à partir du graphe d'événements temporisé.

³ $\mathcal{G}(A)$, le graphe de précedence associé à A , est fortement connexe.

Théorème 2.16. *Le taux de production σ d'un graphe d'événements temporisé est caractérisé par*

$$\sigma = \min_{\text{circuits élémentaires}} \frac{N(c_i)}{T(c_i)}, \quad (2.9)$$

où $N(c_i)$ dénote le nombre total de jetons du circuit i et $T(c_i)$ la somme des temporisations des places du circuit i .

Exemple 2.17. *Pour le GET de la figure 2.5, on a*

$$\sigma = \frac{2}{3}.$$

Remarque 2.18. *Cette méthode de calcul, consistant à énumérer les circuits du graphe et à calculer leur poids moyen, n'est praticable que pour des petits graphes.*

Théorème 2.19. [Cohen et al., 1983] *Pour une matrice irréductible $A \in (\mathbb{Z}_{\max})^{n \times n}$ de valeur propre λ , il existe deux entiers K et c tels que*

$$\forall k \geq K, \quad A^{k+c} = \lambda^c \otimes A^k,$$

l'entier c est appelé *cyclicité* de A .

Dans l'arithmétique traditionnelle, le théorème précédent signifie que, après un régime transitoire de longueur K , le régime devient périodique, c'est-à-dire que

$$\forall i, \quad x_i(k+c) = x_i(k) + c\lambda.$$

2.4 Relation entrée-sortie d'un GET

Dans cette partie, on présente les différentes représentations les plus communément rencontrées dans la littérature. Comme en théorie conventionnelle, tout système linéaire sur un dioïde peut être représenté par sa réponse impulsionnelle. Pour les systèmes linéaires stationnaires, la relation entrée-sortie peut aussi être définie par une fonction de transfert. Les différentes méthodes de commande que nous développerons dans les chapitres suivants s'appuient essentiellement sur une représentation entrée-sortie des systèmes.

2.4.1 Réponse impulsionnelle

Partant de la forme d'état (2.5), le développement de la récurrence $\forall p \in \mathbb{N}$ donne

$$\begin{aligned} y(k) &= Cx(k) \\ &= CAx(k-1) \oplus CBu(k) \\ &= CA^2x(k-2) \oplus CABu(k-1) \oplus CBu(k) \\ &= \dots \\ &= CA^p x(k-p) \oplus \bigoplus_{i=0}^{p-1} CA^i Bu(k-i). \end{aligned}$$

En adoptant la convention $x(k) = \varepsilon$ et $u(k) = \varepsilon$ pour $k < 0$, c'est-à-dire des conditions initiales nulles, on peut réécrire le comportement entrée-sortie du GET

$$y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} h(i) \otimes u(k-i) \quad (2.10)$$

avec

$$h(i) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i < 0 \\ CA^i B & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.11)$$

Il est possible de donner une interprétation des termes de la matrice $h \in (\mathbb{Z}_{\max})^{q \times p}$, où q représente le nombre de sorties et p le nombre d'entrées. L'élément $h_{ij}(k)$ est simplement la date du $k^{\text{i-ème}}$ tir de la sortie $y_i(\cdot)$ dépendant de l'entrée $u_j(\cdot)$ du type

$$u_j(k) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k < 0 \\ e & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.12)$$

toutes les autres entrées étant $u_l(k) = \varepsilon, \forall l \neq j \in \mathbb{Z}$.

Une telle entrée $u_j(\cdot)$ qui correspond au tir d'une infinité de jetons à la date 0, peut être interprétée comme l'équivalent d'une *impulsion* appliquée à l'entrée u_j du GET et l'élément $h_{ij}(k)$ est alors la réponse impulsionnelle correspondante.

En considérant un GET mono-entrée mono-sortie, on peut remarquer que la sortie (2.10) correspond alors à une convolution, plus exactement une sup-convolution (dans l'algèbre traditionnelle) de la réponse impulsionnelle par l'entrée

$$y(k) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} h(i) \otimes u(k-i) = \max_{i=0, \dots, k} (h(i) + u(k-i)) \stackrel{\text{def}}{=} (h * u)(k). \quad (2.13)$$

On remarque la forte analogie avec la relation entrée-sortie d'un système linéaire continu.

2.4.2 La transformée en γ et en δ

On présente ici une transformée sur les signaux qui joue un rôle analogue aux transformées de Fourier ou Laplace pour les systèmes en temps continu et à la transformée en z dans la théorie conventionnelle des signaux en temps discret. Cette transformée consiste à représenter un signal par une série formelle en une indéterminée. On montre aisément que le produit de convolution de deux signaux est transformé en un produit des séries formelles correspondantes. En particulier, le produit de convolution d'un signal d'entrée et de la réponse impulsionnelle, qui permet de calculer la sortie de tout système stationnaire, est transformé en un produit de la série du signal d'entrée et de la série, ou fonction, de transfert du système. Les signaux et systèmes ainsi représentés par des séries formelles sont manipulés comme des éléments d'un dioïde de séries formelles. On rappelle ensuite la transformée particulière dite "en γ " (respectivement "en δ ") définie pour les dateurs (respectivement compteurs). Ces transformées sont maintenant classiques dans la littérature (max,+) [Cohen et al., 1984], [Baccelli et al., 1992].

La transformée consiste à représenter un signal $v \in \mathcal{E}$ par une série formelle en l'indéterminée z notée $V(z)$ et donnée par :

$$V(z) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} v(t) z^t.$$

Montrons que le produit de convolution de deux signaux est transformé en un produit des séries formelles correspondantes :

$$\begin{aligned}
\forall u, v \in \mathcal{E}, \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} (uv)(t)z^t &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(t-s)v(s)z^t \\
&= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(t')v(s)z^{t'+s} \quad (t' = t - s) \\
&= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} u(t')z^{t'} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} v(s)z^s \\
&= U(z)V(z).
\end{aligned}$$

La sortie d'un système stationnaire est donnée par le produit de convolution de la réponse impulsionnelle et du signal d'entrée :

$$y(t) = (h \otimes u)(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h(t-s)u(s).$$

La transformée de cette relation entrée-sortie est donnée par le produit

$$Y(z) = H(z)U(z) \tag{2.14}$$

où $H(z)$ est la série, ou fonction, de transfert du système et $U(z)$ est la série d'entrée.

2.4.2.1 Transformée en γ

Rappelons qu'un dateur est ici assimilé à une application croissante de \mathbb{Z} dans le dioïde complet $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$. La transformée en γ d'un dateur $\{d(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est définie comme la série formelle

$$D(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k)\gamma^k.$$

Supposons deux dateurs reliés par l'égalité $x_1(k) = x_2(k - n_0)$, ce qui correspond à deux transitions séparées par une place contenant n_0 jetons. La transformée en γ de chacun des dateurs est

$$\begin{aligned}
X_1(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k)\gamma^k \\
&= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k - n_0)\gamma^k \\
&= \gamma^{n_0} \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k - n_0)\gamma^{(k-n_0)} \\
&= \gamma^{n_0} X_2(\gamma).
\end{aligned}$$

Il apparaît que multiplier une série en γ par γ^{n_0} revient à décaler la séquence de n_0 unités. Il est donc possible d'interpréter l'opérateur γ comme opérateur de décalage "événementiel", ce que l'on écrit parfois $\gamma x(k) = x(k - 1)$. Ceci est illustré par la figure 2.7.

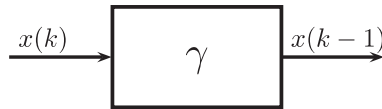


Figure 2.7 – Opérateur de décalage "événementiel"

Remarque 2.20 (Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$). Comme il a été rappelé dans l'exemple 1.56, un ensemble de séries formelles à coefficients sur un dioïde complet peut également être muni d'une structure de dioïde complet dont la loi \oplus est la somme de séries formelles et la loi \otimes le produit de séries formelles. La transformée en γ des dateurs peut donc être considérée comme appartenant à un dioïde de séries formelles en γ .

Nous noterons $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ le dioïde complet des séries formelles en γ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ et exposants dans \mathbb{Z} . L'élément neutre de l'addition de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ est la série $\varepsilon(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \varepsilon \gamma^k$ (où $\varepsilon = -\infty$ est l'élément neutre de l'addition dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$) et l'élément neutre de la multiplication est la série $e(\gamma) = e\gamma^0$ (où $e = 0$ est l'élément neutre de la multiplication de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$).

2.4.2.2 Transformée en δ

Dans le domaine temporel (voir remarque 2.12), la situation est complètement duale, puisque une variable compteur $\{c(t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est une application croissante : $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_{\min}$. Si on note δ l'opérateur de décalage, on a

$$C(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} c(t) \delta^t.$$

De même que précédemment, la propriété de monotonie (on se souviendra que l'ordre dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ est l'inverse de l'ordre naturel, i.e., $a \succeq b \Leftrightarrow a \oplus b = a \Leftrightarrow a \leq b$) d'une trajectoire de compteur $c(t)$ se traduit par

$$\forall t \in \mathbb{Z}, \quad \{c(t+1) \preceq c(t)\} \iff \{c(t) = c(t) \oplus c(t+1)\}.$$

En passant à la transformée en δ , on obtient donc

$$\{C(\delta) = C(\delta) \oplus \delta^{-1}C(\delta)\} \iff \{C(\delta) = (\delta^{-1})^*C(\delta)\}.$$

Exemple 2.21. Pour l'exemple de la figure 2.5, on obtient la représentation par des séries formelles en δ suivante

$$\begin{cases} X(\delta) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & 2 \\ \delta^3 & \varepsilon \end{pmatrix} X(\delta) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(\delta) \\ Y(\delta) &= (\varepsilon \ e) X(\delta) \end{cases}$$

Le calcul de la matrice de transfert $H(\delta) = C(\delta A)^* B$ donne $H(\delta) = (2\delta^3)^* \delta^3$.

Remarque 2.22. Une représentation dite bi-dimensionnelle à été introduite dans [Baccelli et al., 1992, Cohen, 1998b]. Dans cette représentation, les opérateurs γ et δ sont traités de façon symétrique. Elle permet alors de repousser le choix de la représentation et se révèle être fort élégante. Dans cette représentation, nous manipulerons des séries formelles en deux variables commutatives γ et δ à exposants dans \mathbb{Z} et coefficients dans le dioïde de Boole \mathbb{B} , cet ensemble de séries formelles est un dioïde appelé $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$.

Définition 2.23 (Dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$). Nous appelons $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ le dioïde quotient $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]/\mathcal{R}_\varphi$. Dans [Baccelli et al., 1992] il est montré que $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est isomorphe à $\mathcal{D}[[\gamma]]$ et à $\mathcal{D}[[\delta]]$.

Cela signifie que les classes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ sont également bien adaptées à la représentation des trajectoires de tir d'un graphe d'événements temporisé.

Un GET admet un modèle dans le sous dioïde des séries périodiques et causales ; De manière générale, les éléments de la matrice de transfert représentant un GET sont des séries périodiques et causales

de la forme : $p \oplus qr^*$, avec p et q des polynômes à exposants dans \mathbb{N} et r un monôme à exposants dans \mathbb{N} . Le polynôme p caractérise le comportement transitoire de la série, le polynôme q représente un motif qui se répète périodiquement, la périodicité étant fournie par $r = \gamma^v \delta^\tau$ où v/τ caractérise le taux de production de la série.

2.5 Réalisabilité, rationalité et périodicité

L'objet de la dernière partie de ce chapitre est de rappeler que tout transfert de GET peut se représenter par une matrice constituée de séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

Les définitions sont ici fournies dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, mais s'étendent naturellement aux dioïdes $\mathcal{D}[[\gamma]]$ et $\mathcal{D}[[\delta]]$.

Définition 2.24 (Causalité). Une série $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est dite *causale* si $s = \varepsilon$ (la série est nulle) ou si son représentant minimal est à exposants dans \mathbb{N} . Une matrice est dite causale si toutes ses composantes sont causales.

Remarque 2.25. Ainsi $\gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^{-4}$ est un élément causal de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, son représentant minimal (obtenu après simplification) étant le monôme $\gamma^2 \delta^3$. De manière générale, un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est causal si les sommets de son représentant graphique appartiennent au cadran Nord-Est du plan \mathbb{Z}^2 .

Notation 2.26 ($\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$). L'ensemble des séries causales de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est stable pour la somme et le produit de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Cet ensemble forme un sous-dioïde complet de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ noté $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$ par la suite. Notons que l'élément maximum de $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$ est δ^* .

Définition 2.27 (Rationalité). Un élément $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est dit *rationnel* si l'un de ses représentants au moins peut être obtenu par un nombre fini d'opérations \oplus , \otimes et $*$ à partir de l'ensemble $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$. On dira qu'une matrice à coefficients dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est rationnelle si tous ses coefficients sont rationnels.

Remarque 2.28. Par définition, un élément rationnel est également causal.

Définition 2.29 (Réalisabilité). Un élément $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est *réalisable* s'il existe un GET mono-entrée/mono-sortie dont cet élément est la fonction de transfert, ou plus précisément, s'il existe trois matrices C, A, B de tailles respectivement $q \times n$, $n \times n$ et $p \times n$ à coefficients dans l'ensemble $\{\varepsilon, e\}$ telles que cet élément puisse s'écrire CA^*B .

Définition 2.30 (Périodicité). Un élément s de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est *périodique* s'il existe deux polynômes p et q de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

$$p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \text{ et } q = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{N_j} \delta^{T_j}$$

et un monôme causal $r = \gamma^v \delta^\tau$ tels que

$$s = p \oplus qr^*.$$

Une matrice est périodique si tous ses coefficients sont périodiques.

Remarque 2.31. Cette notion est illustrée sur la figure 2.8. De plus, notons que cette définition de la périodicité n'impose pas la causalité de la série.

Théorème 2.32 ([Cohen et al., 1989]). Soit $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]^{p \times m}$. Sont équivalents

- (i) H est réalisable
- (ii) H est rationnelle
- (iii) H est périodique et causale

Démonstration. Nous renvoyons le lecteur à [Cohen et al., 1989] pour une preuve exhaustive de ce résultat. \square

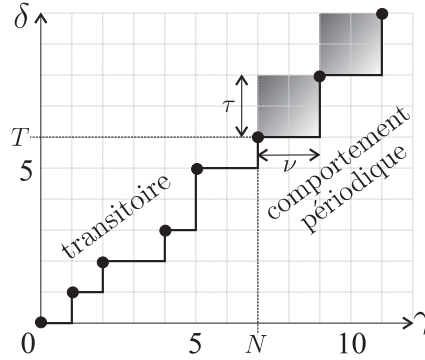


Figure 2.8 – Représentation graphique de la série $s = e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^6(\gamma^2\delta^2)^*$.

Définition 2.33 (Pente ultime). La pente ultime d'une série périodique $s = p \oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ est notée $\sigma_\infty(s)$ et est définie comme le ratio $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau$.

Théorème 2.34. L'ensemble des séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est stable pour la somme, le produit, l'inf et la résiduation. En outre, pour s_1 et s_2 deux séries périodiques non dégénérées (telles que $\nu_1, \nu_2 \neq 0$ et $\tau_1, \tau_2 \neq 0$), on obtient les résultats suivants

$$\begin{aligned}\sigma_\infty(s_1 \oplus s_2) &= \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)), \\ \sigma_\infty(s_1 \otimes s_2) &= \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)), \\ \sigma_\infty(s_1 \wedge s_2) &= \max(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)).\end{aligned}$$

Si $\sigma_\infty(s_1) \leq \sigma_\infty(s_2)$ alors

$$\sigma_\infty(s_2 \setminus s_1) = \sigma_\infty(s_1),$$

sinon, $s_2 \setminus s_1 = \varepsilon$.

Démonstration. L'étude des séries périodiques est abordée par Gaubert dans [Gaubert, 1992, Chap. 7, Annexe A] et [Gruet, 1995]. Le lecteur y trouvera les preuves des résultats énoncés dans ce théorème. \square

Une partie du problème de synthèse de correcteurs, proposée dans les chapitres suivants de ce mémoire, repose sur le résultat suivant.

Proposition 2.35. L'injection canonique $I_+ : \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta] \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est résiduable. Sa résiduée sera notée Pr_+ .

Démonstration. $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta]$ est un sous-dioïde complet de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$; par conséquent, il est possible d'appliquer directement la proposition 1.81. \square

Le calcul pratique de Pr_+ est le suivant. Soit $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ que l'on écrit

$$s = \bigoplus_{i \in I} s(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i}.$$

$\text{Pr}_+(s)$ s'obtient simplement en "annulant" dans s les monômes non causaux, c'est-à-dire à exposants strictement négatifs, soit

$$\text{Pr}_+(s) = \text{Pr}_+(\bigoplus_{i \in I} s(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i}) = \bigoplus_{i \in I} s_+(n_i, t_i) \gamma^{n_i} \delta^{t_i},$$

$$\text{où } s_+(n_i, t_i) = \begin{cases} s(n_i, t_i) & \text{si } (n_i, t_i) \geq (0, 0) \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}.$$

Exemple 2.36 (Calcul de Pr_+ sur un élément périodique). $\text{Pr}_+(\gamma^{-2}\delta^{-3}(\gamma\delta)^*) = \text{Pr}_+(\gamma^{-2}\delta^{-3} \oplus \gamma^{-1}\delta^{-2} \oplus \delta^{-1} \oplus \gamma \oplus \gamma^2\delta \oplus \dots) = \gamma(\gamma\delta)^*$. Graphiquement, le représentant de $\text{Pr}_+(s)$ ne conserve que les sommets du représentant de s contenus dans le cadran Nord-Est du plan \mathbb{Z}^2 (voir figure 3.1).

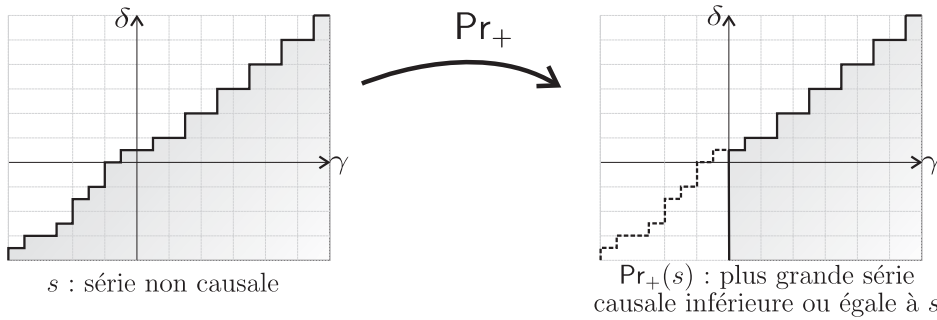


Figure 2.9 – Représentation graphique de l'opération de projection Pr_+ .

Remarque 2.37. Il faut garder à l'esprit que Pr_+ étant un projecteur (i.e. $\text{Pr}_+ \circ \text{Pr}_+ = \text{Pr}_+$), si une série s est causale elle est invariante par Pr_+ , c.-à-d.

$$s \in \mathcal{M}_{in}^{ax+}[\gamma, \delta] \iff s = \text{Pr}_+(s).$$

Notation 2.38. ($\mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta]$) L'ensemble des séries rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ constitue un sous-dioïde de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ noté $\mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta]$. Par définition, $\mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta]$ n'est pas complet, une somme infinie d'éléments rationnels n'est pas nécessairement rationnelle.

2.6 Graphes d'événements incertains

Cette section s'intéresse à la modélisation de graphes d'événements temporisés dans un dioïde d'intervalles [Lhommeau, 2004]. L'objectif est de pouvoir prendre en compte des incertitudes (erreurs de modélisation et/ou variations paramétriques) en les représentant par des intervalles. Autrement dit, le nombre de jetons et les temporisations associées aux places sont supposés évoluer dans un intervalle défini au moment de la modélisation, le système est alors qualifié d'incertain.

2.6.1 Graphes d'événements temporisés et analyse par intervalles

2.6.1.1 Incertitudes de modélisation

On rappelle qu'il est toujours possible d'obtenir la représentation d'état d'un GET sous la forme suivante :

$$\begin{cases} x &= Ax \oplus Bu \\ y &= Cx \end{cases}$$

où $x \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^n$ représente le vecteur d'état, $u \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^p$ représente le vecteur de commande et $y \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^q$ est le vecteur de sortie. Par ailleurs, la matrice $A \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{n \times n}$ représente la matrice d'évolution, $B \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{n \times p}$ représente la matrice de commande et $C \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{q \times n}$ représente la matrice de sortie.

Cette représentation déterministe suppose que le modèle est parfaitement connu et ne fait pas l'objet de variations paramétriques au cours du temps. Cette hypothèse peut parfois être trop restrictive, il semble alors souhaitable de prendre en compte, dans le modèle, les informations relatives aux incertitudes ; soit en considérant des hypothèses sur la nature statistique de ces incertitudes (voir [Baccelli et al., 1992] pour l'étude des GET stochastiques), soit en émettant des hypothèses sur les amplitudes de variations des paramètres. Nous considérons ici ce second point de vue.

La classe des systèmes incertains que nous allons donc considérer est celle des graphes d'événements temporisés dans lesquels le nombre de jetons initial et/ou la durée des temporisations associées aux places sont incertains, mais supposés appartenir à un intervalle.

2.6.1.2 Représentation d'état incertaine

Pour représenter les incertitudes lors de la modélisation de GET nous allons considérer que les matrices A, B et C du système peuvent prendre n'importe quelle valeur dans des intervalles. La connaissance de l'amplitude maximale des variations de chacun des paramètres du système permettra d'établir ce modèle incertain sous la forme d'un système décrit dans un dioïde d'intervalles.

Le système pourra donc s'écrire :

$$x = Ax \oplus Bu \tag{2.15}$$

$$y = Cx \tag{2.16}$$

où $A \in \mathbf{A} \in (I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{n \times n}$, $B \in \mathbf{B} \in (I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{n \times p}$ et $C \in \mathbf{C} \in (I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times n}$. Autrement dit, les éléments des matrices \mathbf{A}, \mathbf{B} et \mathbf{C} appartiennent au dioïde des intervalles $I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])$, et les bornes de chaque élément appartiennent au dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

A partir de cette représentation d'état, nous pouvons donner l'expression de l'intervalle contenant l'ensemble des transferts entrée-sortie possibles pour le GET incertain. Dans un premier temps, le corollaire 1.101 donne $x = A^*Bu$ comme plus petite solution de (2.15) (on rappelle que $A^* = [\underline{A}^*, \overline{A}^*] \in I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times n})$). De plus, d'après la proposition 1.167, la matrice d'intervalles $A^*B \in (I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{n \times p}$ est la plus petite contenant l'ensemble

$$\{A^*B \mid A \in \mathbf{A}, B \in \mathbf{B}\}.$$

Ensuite, en reportant l'état x dans l'équation de sortie (2.28), on a

$$y = CA^*Bu = Hu, \tag{2.17}$$

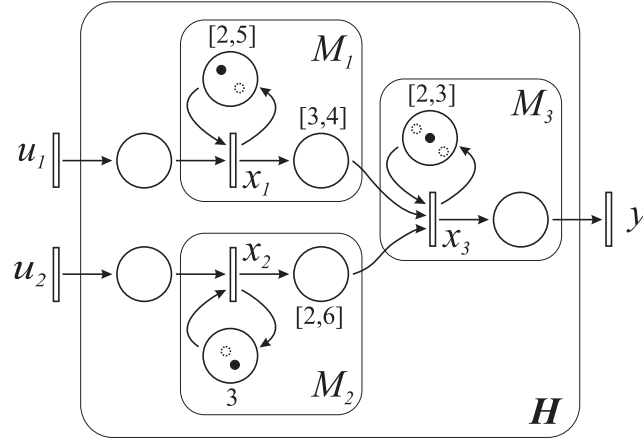


Figure 2.10 – Modélisation incertaine d'un graphe d'événements temporisé.

où $\mathbf{H} = \mathbf{CA}^*\mathbf{B} \in (\mathbf{I}(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]))^{q \times p}$ représente l'intervalle contenant l'ensemble des relations entrée-sortie du GET incertain. En outre, soit l'ensemble

$$\mathcal{H} = \{\mathbf{CA}^*\mathbf{B} \mid \mathbf{C} \in \mathbf{C}, \mathbf{A} \in \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbf{B}\}, \quad (2.18)$$

des relations entrée-sortie possibles pour le GET, d'après la proposition 1.167, on a $\mathcal{H} \subset \mathbf{H}$.

Pour illustrer cette représentation, considérons le graphe d'événements temporisé de la figure 2.10. Sur ce schéma u_1, u_2 et y désignent les entrées et la sortie du système, les jetons en pointillés représentent le fait qu'une ressource peut ou ne peut pas être présente, les temporisations entre crochets donnent respectivement le temps de séjour obligé minimal et obligé maximal d'un jeton dans une place avant de pouvoir contribuer au tir de la transition aval.

Par exemple, la machine M_2 a la possibilité de traiter 1 ou 2 pièces en même temps et chaque traitement dure 3 unités de temps. Ensuite chaque jeton traité reste entre 2 et 6 unités de temps dans la place aval avant de contribuer au tir de la transition x_3 . Donc la machine M_2 peut traiter au mieux 2 pièces toutes les 3 unités de temps et au pire 1 pièce toutes les 3 unités de temps. La composante correspondante dans la matrice \mathbf{A} est par conséquent $a_{22} = [\gamma^2\delta^3, \gamma\delta^3]$ où la borne inférieure de l'intervalle $a_{22} = \gamma^2\delta^3$ représente le fonctionnement le plus rapide (le plus petit au sens du dioïde) et $\bar{a}_{22} = \gamma\delta^3$ représente le fonctionnement le plus lent (le plus grand au sens du dioïde). De même, l'intervalle $a_{32} = [2, 6]$ représente le temps de séjour dans la place en aval de la transition x_2 avant de pouvoir contribuer au tir de la transition x_3 .

En appliquant la même démarche à l'ensemble du GET, nous obtenons le modèle suivant :

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} [\gamma^2\delta^2, \gamma\delta^5] & [\varepsilon, \varepsilon] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [\gamma^2\delta^3, \gamma\delta^3] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\delta^3, \delta^4] & [\delta^2, \delta^6] & [\gamma^3\delta^2, \gamma\delta^3] \end{pmatrix} \mathbf{x} \oplus \begin{pmatrix} [e, e] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [e, e] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & \varepsilon, \varepsilon] \end{pmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = ([\varepsilon, \varepsilon] \quad [\varepsilon, \varepsilon] \quad [e, e]) \mathbf{x}.$$

De cette représentation d'état, il est possible de donner l'intervalle contenant l'ensemble des trans-

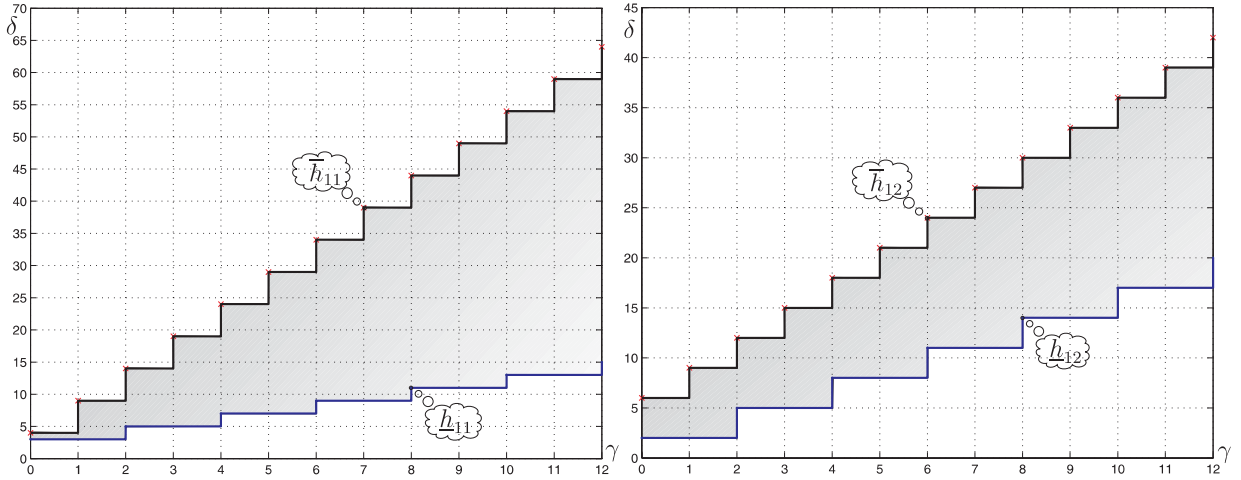


Figure 2.11 – Représentation de \mathbf{H} ; les zones grisées correspondent à l'ensemble des comportements du GET : $\mathcal{H} \subset [\underline{H}, \overline{H}] = [(\underline{h}_{11} \ \underline{h}_{12}), (\overline{h}_{11} \ \overline{h}_{12})]$.

ferts entrée-sortie du système. Tout d'abord, l'état s'exprime par :

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} [(\gamma^2 \delta^2)^*, (\gamma \delta^5)^*] & [\varepsilon, \varepsilon] \\ [\varepsilon, \varepsilon] & [(\gamma^2 \delta^3)^*, (\gamma \delta^3)^*] \\ [\delta^3 (\gamma^2 \delta^2)^*, \delta^4 (\gamma \delta^5)^*] & [\delta^2 (\gamma^2 \delta^3)^*, \delta^6 (\gamma \delta^3)^*] \end{pmatrix} \mathbf{u}. \quad (2.19)$$

En reportant, l'expression de l'état (2.19) dans l'équation de sortie (2.28), on obtient l'intervalle contenant l'ensemble des relations entrée-sortie du GET incertain :

$$\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{A}^* \mathbf{B} \mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{u} = ([\delta^3 (\gamma^2 \delta^2)^*, \delta^4 (\gamma \delta^5)^*] \quad [\delta^2 (\gamma^2 \delta^3)^*, \delta^6 (\gamma \delta^3)^*]) \mathbf{u}.$$

La figure 2.11 montre l'ensemble des relations entrée/sortie possibles du graphe d'événements temporisé de la figure 2.10. En d'autres termes, les zones grisées de la figure 2.11 caractérisent complètement le comportement du GET (figure 2.10) dans le cas où s'exercent des variations paramétriques comprises dans les intervalles (prédéfinis au moment de la modélisation du système) associés au nombre de jetons et/ou aux temporisations de chacune des places du GET.

2.7 Graphes d'événements P-temporels

Les réseaux de Petri P-temporels ont été introduites par Khansa [Khansa et al., 1996]. Ils permettent de modéliser les systèmes à événements discrets à contraintes de temps de séjours sur l'ensemble des places.

Des intervalles de temps sont associés aux places de ces réseaux. La sémantique de ces intervalles est la durée de séjour admissible d'une marque dans une place. La violation de cette spécification se traduira par la mort des marques. Cette notion de marques-mortes est spécifique à ce modèle.

Définition 2.39. Un graphe d'événement P-temporel (GEP-T) est défini par le doublet $\langle GE, IS \rangle$ où :

- GE est un graphe d'événement,

- IS est une application définie de P (ensemble des places) vers $(\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^+[\gamma]) \cup \varepsilon \times (\overline{\mathbb{Z}}_{\max}^+[\gamma])$ et qui associe à chaque place p_i un couple ordonné $(s_{min} \ s_{max})$ avec $0 \preceq s_{min} \preceq s_{max}$.
 $[s_{min} \ s_{max}]$ définit l'intervalle statique de temps de séjour d'une marque dans la place p_i .

Un jeton dans la place p_i participe à la validation de sa transition de sortie seulement s'il a séjourné une durée minimale donnée par la borne inférieure de l'intervalle de temps de séjour donc au moins s_{min} unité de temps dans cette place. Il doit quitter la place p_i , et donc franchir la transition de sortie au plus tard après s_{max} unité de temps (borne supérieure de l'intervalle de temps de séjour), au delà de cette date, il sera considéré comme "mort" et ne pourra pas participer à la validation de la transition.

La cuisson d'une baguette de pain⁴ est un exemple simple qui peut illustrer la notion de temps de séjour borné. En effet, la durée minimale de séjour s_{min} correspond à la durée minimale de cuisson de la baguette. La durée de séjour maximale est fixée à une valeur s_{max} au delà de laquelle la baguette sera brûlée.

2.7.1 Règle de franchissement pour les GEP-T

Les règles de franchissement d'une transition sont les suivantes :

- Toutes les places en amont de la transition doivent contenir au moins un jeton disponible, c.-à-d. , ayant séjourné au minimum, s_{min} unités de temps dans la place.
- Les jetons participants à la validation de la transition ne doivent pas avoir séjourné plus de s_{max} unités de temps dans la place.

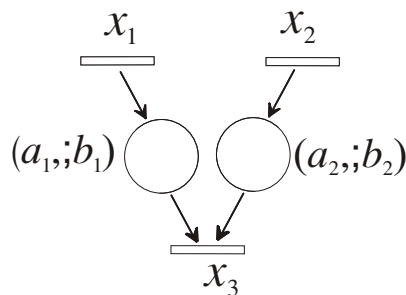


Figure 2.12 – Règle de franchissement d'une transition dans un graphe d'événements P-temporel

Exemple 2.40. *Considérons l'exemple de la figure 2.12, si la transition x_1 est tirée à l'instant t_1 et la transition x_2 est tirée à l'instant t_2 , la date de tir t_3 de la transition x_3 doit respecter les contraintes suivantes:*

- $t_3 \succeq$ date de disponibilité des jetons c.-à-d.

$$t_3 \succeq t_1 + a_1 \text{ et} \\ t_3 \succeq t_2 + a_2$$

- $t_3 \preceq$ date de mort des jetons c.-à-d.

⁴Cette exemple fait en quelque sorte echo au papier "l'algèbre des sandwiches" paru dans *pour la science*[Cohen et al., 2005a].

$$\begin{aligned} t_3 &\preceq t_1 + b_1 \text{ et} \\ t_3 &\preceq t_2 + b_2. \end{aligned}$$

Ceci nous donne la contrainte suivante :

$$\max((t_1 + a_1), (t_2 + a_2)) \preceq t_3 \preceq \min((t_1 + b_1), (t_2 + b_2)). \quad (2.20)$$

La matrice des durées minimales de séjours est donnée par $\underline{A} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$ et la matrice des durées maximales de séjours est donnée par $\overline{A} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

L'équation 2.20 devient dans le dioïde \mathbb{Z}_{\max} la suivante :

$$\begin{aligned} (t_1 \otimes a_1) \oplus (t_2 \otimes a_2) &\preceq t_3 \preceq (t_1 \otimes b_1) \wedge (t_2 \otimes b_2). \\ &\Leftrightarrow \\ \underline{A} \otimes \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} &\preceq t_3 \preceq \overline{A} \odot \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2.7.2 Modèle algébrique pour les GEP-T

On suppose que les transitions sont tirées dès qu'elles sont validées. Le fonctionnement est dit au plus tôt.

Un graphe d'événement P-temporel peut être représenté par les équations suivantes dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$:

$$\begin{cases} x &= \underline{A}x \oplus \underline{B}u = \underline{A}^* \underline{B}u, \\ y &= \underline{C}x = \underline{C} \underline{A}^* \underline{B}u, \end{cases} \quad (2.21)$$

et les trajectoires doivent respecter des contraintes non linéaires qui sont données par :

$$\begin{cases} x &\preceq \overline{A} \odot x \wedge \overline{B} \odot u, \\ y &\preceq \overline{C} \odot x \end{cases} \quad (2.22)$$

\overline{A} représente les contraintes des dates de mort associées aux places situées entre les transitions internes, \overline{B} représente les contraintes des dates de mort associées aux places situées entre les transitions internes et les transitions d'entrée et \overline{C} représente les contraintes des dates de mort associées aux places situées entre les transitions de sortie et les transitions internes.

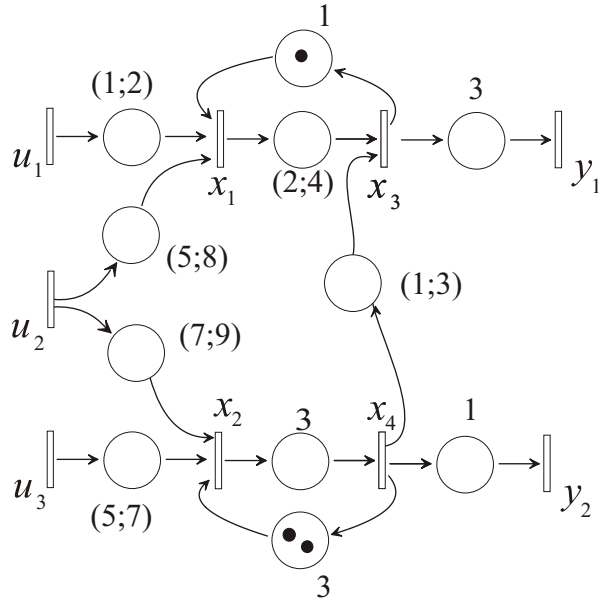


Figure 2.13 – Exemple de graphe d'événements P-temporel

Exemple 2.41. La figure 2.13 donne un exemple de graphe d'événements P-temporel où les matrices de disponibilité sont données par :

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta\gamma & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3\gamma^2 \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \delta \\ \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \underline{B} = \begin{pmatrix} \delta & \delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^7 & \delta^5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et } \underline{C} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta \end{pmatrix}.$$

L'élément $\underline{A}(2,4) = \delta^3\gamma^2$, correspond à la place entre la transition x_4 et la transition x_2 . Il signifie qu'il y a deux jetons dans la place et que les jetons ne seront disponibles qu'après un séjour de 3 unités de temps.

Les matrices des durées maximales de séjour sont données par :

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ 4 & +\infty & +\infty & 3 \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix}, \overline{B} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & +\infty \\ +\infty & 9 & 7 \\ +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix} \\ \text{et } \overline{C} = \begin{pmatrix} +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \\ +\infty & +\infty & +\infty & +\infty \end{pmatrix}.$$

L'élément $\overline{A}(3,1) = 4$ correspond à la place entre la transition x_1 et la transition x_3 , et il signifie que les jetons, ne doivent pas séjourner, dans cette place plus de 4 unités de temps. En l'absence de contrainte de temps de séjour, l'élément de la matrice correspondant est égal à $+\infty$.

Remarque 2.42. Pour simplifier la représentation des résultats ultérieurs, les éléments des matrices \overline{B} et \overline{C} seront supposés égaux à $+\infty$. Nous montrons ci dessous que cela se fait sans perte de généralité. La figure 2.14 présente graphiquement cette extension appliquée au GEP-T de la figure 2.14. Le nouveau

vecteur d'état x' est donné par $x' = \begin{pmatrix} u \\ x \\ y \end{pmatrix}$, où u , x et y sont respectivement le vecteur d'entrée, le vecteur d'état et le vecteur de sortie du premier modèle.

Le modèle algébrique des GEP-T peut être représenté par les équations suivantes :

$$\begin{cases} x' &= \underline{A}'x \oplus \underline{B}'u, \\ y &= \underline{C}'x \end{cases} \quad (2.23)$$

ce qui nous donne le système suivant :

$$\begin{cases} x' &= \underline{A}'^* \underline{B}'u, \\ y &= \underline{C}' \underline{A}'^* \underline{B}'u \end{cases} \quad (2.24)$$

avec les contraintes des durées maximales de séjours données par :

$$x' \preceq \overline{A}' \odot x'. \quad (2.25)$$

Cette reformulation conserve la même fonction de transfert que la première et elle est une conséquence de la modification suivante du vecteur d'état :

- Pour chaque transition d'entrée, une transition et une place vide sont ajoutées en amont des transitions d'entrée.
- De même, pour chaque transition de sortie une transition et une place vide sont ajoutées en aval.

La matrice d'état \underline{A}' est donnée par $\underline{A}' = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \underline{B} & \underline{A} & \varepsilon \\ \varepsilon & \underline{C} & \varepsilon \end{pmatrix}$ et donc $\underline{A}'^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon \\ \underline{A}'^* \underline{B} & \underline{A}'^* & \varepsilon \\ \underline{C} \underline{A}'^* \underline{B} & \underline{C} \underline{A}'^* & e \end{pmatrix}$

$$\underline{B}' = \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et } \underline{C}' = (\varepsilon \ \varepsilon \ e)$$

donc

$$\underline{H}' = \underline{C}' \underline{A}'^* \underline{B}' = \underline{C} \underline{A}'^* \underline{B} = \underline{H}.$$

Remarque 2.43. On appliquant les modifications données dans la remarque précédente, on obtient un GEP-T dont chaque transition est connectée à au plus une seule transition de contrôle.

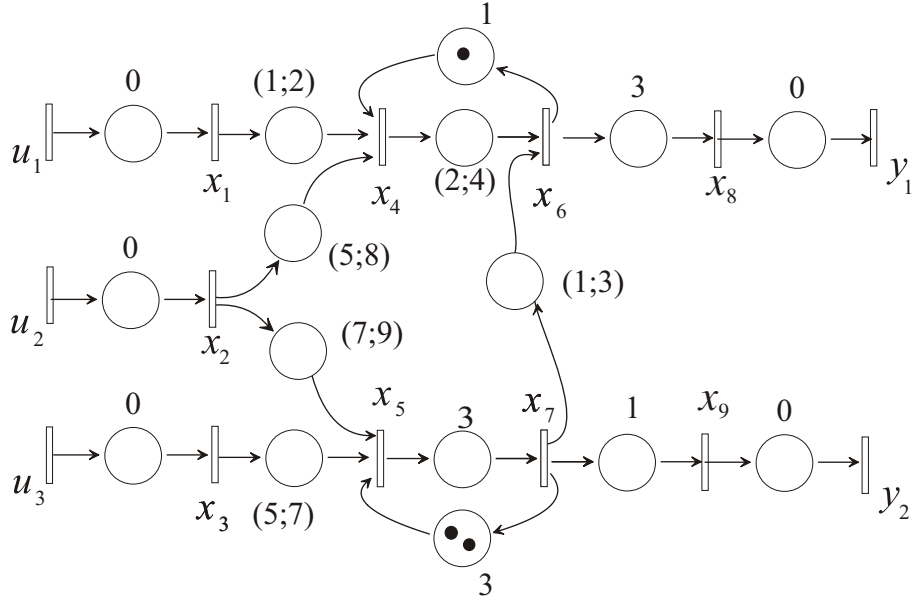


Figure 2.14 – Une autre représentation du graphe d'événements p-temporel présenté dans l'exemple 2.41

Remarque 2.44. Dans la suite tous les éléments de la matrice \bar{A} sont supposés appartenir à un même groupe réticulé.

Concrètement, cela implique que les éléments de la matrice seront des monomes (i.e., de la forme $\alpha\gamma^p$) ayant tous le même exposant ou le même coefficient. Cette dernière condition provient du fait qu'un polynôme $\alpha\gamma^p \oplus \beta\gamma^q$ avec $\alpha \neq \beta$ et $p \neq q$ n'admet pas d'inverse.

Plus précisément, les éléments de la matrice \bar{A} seront pris dans le groupe réticulé $\bar{\mathbb{Z}}_{\max} \subset \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

Remarque 2.45. Dans la suite, les places soumises à une contrainte seront supposées sans jetons initialement. Dans l'exemple 2.46 il est montré que cette hypothèse n'engendre pas de perte de généralité puisque un modèle équivalent peut être établi.

Exemple 2.46. La figure 2.15 présente la transformation adoptée. Il s'agit d'ajouter une transition et une place de temporisation 0 en aval de la place existante. Les jetons qui étaient dans la place entre x_1 et x_3 sont affectés à la place qui se situe entre x_1 et x'_1 . De même pour les jetons entre x_2 et x_3 (voir graphe b de la figure 2.15).

La figure (a) conduit au système suivant :

$$\begin{pmatrix} a_1\gamma & a_2\gamma^2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_3 \preceq \begin{pmatrix} b_1\gamma & b_2\gamma^2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.26)$$

La figure (b) conduit au système suivant :

$$\begin{cases} x'_1 = \gamma x_1 \\ x'_2 = \gamma^2 x_2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = x_3 \preceq \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

Le système d'équation 2.27 est équivalent à :

$$\begin{aligned} (a_1 \ a_2) \otimes \begin{pmatrix} \gamma x'_1 \\ \gamma^2 x'_2 \end{pmatrix} &= x_3 \preceq (b_1 \ b_2) \odot \begin{pmatrix} \gamma x'_1 \\ \gamma^2 x'_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow (a_1 \gamma \ a_2 \gamma^2) \otimes \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= x_3 \preceq (b_1 \gamma \ b_2 \gamma^2) \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

par conséquent les deux graphes sont équivalents algébriquement.

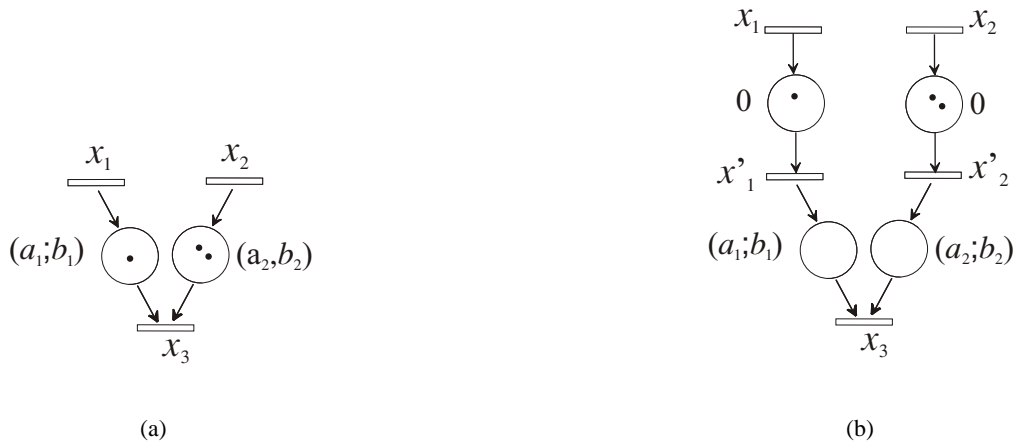


Figure 2.15 – Equivalence entre un GEP-T avec un marquage initial dans les places contenant des contraintes de temps de séjour maximal et un GEP-T où ces même places sont sans jeton.

2.8 Graphes d'événements P-temporels incertains

Comme dans la section 2.6, nous considérons une version incertaine des GEP-T. Les durées de séjour minimales et/ou maximales des jetons dans les places seront supposées incertaines et appartenant à des intervalles.

Les temporisations sur les places sont représentées par un couple d'intervalles $(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = ([x', x'']; [y', y''])$ avec $\mathbf{x} \preceq^5 \mathbf{y}$. Les durées minimales (respectivement maximales) sont supposées évoluer dans l'intervalle \mathbf{x} (respectivement \mathbf{y}). Dans le cas d'absence d'incertitude la temporisation est représentée par un scalaire. Dans le cas d'absence de contraintes sur la durée maximale de séjour, on représente uniquement l'intervalle des durées minimales.

Ce type de modèle permet donc de modéliser un système :

- dont le temps de séjour minimum est incertain et appartient à un intervalle. Par exemple le temps minimum de cuisson d'une fournée de pain varie en fonction du nombre de pains cuits simultanément.
- dont le temps de séjour maximum est incertain et appartient à un intervalle. Comme précédemment le temps maximum de cuisson est fonction du nombre de pains insérés dans le four.

Cette approche intervaliste est donc une alternative aux approche stochastiques.

⁵Nous rappelons que la relation d'ordre sur $I(\mathcal{D})$ est donné par $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \Leftrightarrow x' \preceq y'$ et $x'' \preceq y''$.

Exemple 2.47. Dans l'exemple de la figure 2.16, la temporisation de la place entre la transition x_1 et la transition x_3 est donnée par le couple d'intervalles $(2; [2, 4])$ donc la durée minimale de séjour des jetons dans cette place est fixée à 2 et la durée maximale de séjour varie entre 2 et 4.

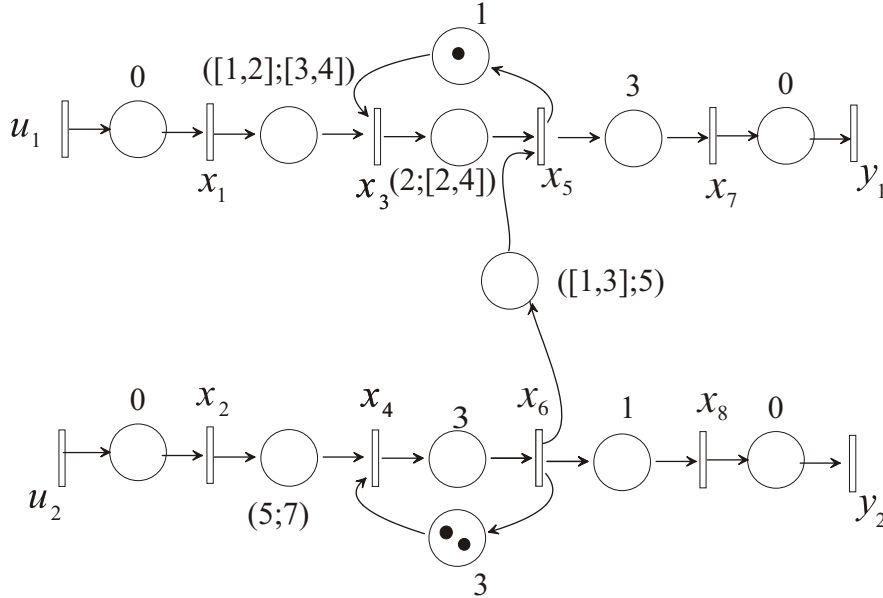


Figure 2.16 – Graphe d'événements p-temporel incertain

Le système pourra donc s'écrire :

$$\begin{cases} \underline{X} &= \underline{A}\underline{X} \oplus \underline{B}\underline{U} = \underline{A}^* \underline{B}\underline{U} \\ \underline{Y} &= \underline{C}\underline{X} \end{cases}, \quad (2.28)$$

et les trajectoires doivent respecter les contraintes suivantes :

$$\{ \underline{X} \preceq \overline{A} \overline{C} \underline{X} \}, \quad (2.29)$$

où \underline{A} , \underline{B} et \underline{C} (respectivement \overline{A} , \overline{B} et \overline{C}) sont les matrices des intervalles des durées minimales (respectivement maximales) de séjours.

Remarque 2.48. Pour éviter la confusion entre la notation d'intervalle et la représentation des durées minimales et maximales de séjours, les bornes de l'intervalle seront notées comme suit $\underline{X} = [X', X'']$.

Exemple 2.49. Considérons le graphe d'événements p-temporel incertain de la figure 2.16, les matrices

de la représentation d'état sont les suivantes : $\underline{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [\delta, \delta^2] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta\gamma & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3\gamma^2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & [\delta, \delta^3] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \overline{A} =$

$$\left(\begin{array}{cccccccc} \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ [3,4] & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & 7 & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & [2,4] & \top & \top & 5 & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \end{array} \right), B = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}.$$

2.9 Conclusion

Dans ce chapitre, après un rappel sur les réseaux de Petri, nous avons présenté différents dioides permettant la représentation du comportement des GET déterministes et des GET incertains.

Nous avons également introduit le modèle GEP-T et sa représentation d'état $(\max, +)$ -linéaire sous contraintes non-linéaires.

Le prochain chapitre est consacré pour une partie au problème de la synthèse de contrôleur pour les GEP-T et pour l'autre partie à la vérification des contraintes temporelles de ce modèle.

CHAPITRE 3

Sur la commande optimale en boucle ouverte des GEP-T

Classiquement, commander un système revient à piloter ses entrées dans le but d'obtenir des performances spécifiées par un cahier des charges. Dans le domaine des systèmes à événements discrets, deux notions de commande ont été développées *via* l'approche algébrique des dioïdes : la commande par *poursuite de trajectoire* puis la commande par *poursuite de modèle*. La première structure de commande est un problème de commande par *poursuite de trajectoire* connue *a priori*. Autrement dit, il s'agit d'établir une trajectoire d'entrée (commande) du système telle que la réponse en sortie "suive au mieux" une trajectoire de consigne correspondant au comportement désiré en sortie du système. L'approche proposée dans [Cohen et al., 1989] permet d'établir *la plus grande* trajectoire d'entrée, notée u , telle que la réponse, notée y , soit inférieure ou égale à une trajectoire de consigne, notée z . Plus précisément, pour un système H , on cherche le plus grand élément de l'ensemble suivant :

$$\{u \in \mathcal{D}^p \mid y = Hu \preceq z\}, \quad (3.1)$$

où \preceq est l'ordre défini dans le dioïde \mathcal{D} .

Une telle commande est optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps¹. Elle est notée u_{opt} , et se définit par :

$$u_{opt} = \bigoplus_{Hu \preceq z} u.$$

La deuxième technique de commande est la commande par *poursuite de modèle*. L'objectif est de calculer d'un précompensateur, noté P , tel que le comportement entrée-sortie du système corrigé, noté $G_P = HP$, composé d'un système nominal, noté H , et du précompensateur P , est un comportement aussi proche de celui d'un modèle de référence, noté G_{ref} , qui caractérise la spécification structurelle (cahier des charges). Plus précisément pour un système H on cherche le plus grand P tel que :

$$HP \preceq G_{ref}.$$

Différents travaux ont permis d'étendre la commande en juste-à-temps des systèmes linéaires aux cas où :

¹"Juste-à-temps" s'interprète comme la quantité juste à l'instant voulu. Dans les milieux industriels, on parle de méthode de production en juste-à-temps (ou encore en flux tendus), cela consiste à acheter ou à produire la quantité juste nécessaire (de façon à minimiser les stocks internes) au moment où on en a besoin (satisfaction de la demande client).

- le modèle ne reflète pas le comportement réel du système (l'existence d'une désadaptation entre le système et son modèle) [Boimond and Ferrier, 1996, Menguy et al., 2000a] [Menguy, 1997, §6];
- des entrées sont non maîtrisables [Lhommeau, 2004],[Menguy et al., 2000b],[Menguy, 1997, §5.4.2];
- le système est linéaire mais non stationnaire [Lahaye, 2000].

L'objectif de ce chapitre est d'étendre ces deux structures de commande de type boucle ouverte aux systèmes modélisés par des graphes d'événement P-temporels tel qu'introduit dans le second chapitre.

Ce chapitre est organisé comme suit : après un bref rappel de la commande en juste-à-temps, une extension de cette commande aux GEP-T est présentée dans la section 3.2. Une première méthode qui se base sur un algorithme de type point fixe est tout d'abord présentée. Dans la section 3.2.2, une méthode de test de la consistance des contraintes des GEP-T utilisant la résiduation et la résiduation duale est posée. Ensuite, la section 3.2.3 est consacrée au test de la commandabilité des GEP-T. Enfin, une étude de la commande en juste-à-temps par poursuite de modèle pour les systèmes modélisés par des GEP-T sera donnée dans la section 3.3. Ce chapitre rassemble les contributions présentées dans [Ouerghi et al., , Ouerghi and Hardouin, 2006b, Ouerghi and Hardouin, 2006a].

3.1 Commande en juste-à-temps des graphes d'événements temporisés

3.1.1 Poursuite de trajectoire

Le problème de commande en boucle ouverte résolu est le suivant. On dispose d'un système (un GET avec p entrées et q sorties) dont on connaît la matrice de transfert $H \in \mathcal{D}^{q \times p}$. On désire, à l'aide des entrées $u \in \mathcal{D}^p$, faire en sorte que les sorties du système suivent au mieux des trajectoires déterminées dites de consignes $z \in \mathcal{D}^q$. Dans [Cohen et al., 1989], il est montré que ce problème a une solution optimale, c'est-à-dire qu'il existe une plus grande commande d'entrée $u_{opt} \in \mathcal{D}^p$ telle que la sortie résultant de cette entrée ($y_{opt} = H u_{opt}$) soit inférieure ou égale à la sortie désirée z . La commande u_{opt} est alors optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps (la sortie y_{opt} est en juste-à-temps).

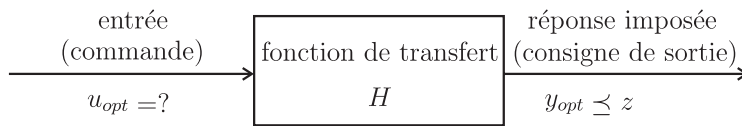


Figure 3.1 – Problématique générale de la commande en boucle ouverte.

Formellement, soit $L_H : \mathcal{D}^p \rightarrow \mathcal{D}^q, u \mapsto H \otimes u$, une application définie sur des dioïdes complets. Déterminer la plus grande commande revient à s'intéresser à l'ensemble

$$\{u \in \mathcal{D}^p \mid L_H(u) \preceq z\},$$

et plus précisément à sa borne supérieure (notée u_{opt}) qui nous donnera la plus grande commande vérifiant la condition $L_H(u_{opt}) \preceq z$. On peut déjà remarquer que cet ensemble n'est pas vide puisque $u = \varepsilon$ est solution, c.-à-d. $L_H(\varepsilon) = \varepsilon \preceq z$.

En fait, le calcul de cette commande est un problème d'inversion d'application définie sur des dioïdes. La théorie de la résiduation (§1.6) permet de résoudre ce problème directement.

Proposition 3.1. *La commande optimale u_{opt} existe et est donnée par :*

$$u_{opt} = \sup \{u \in \mathcal{D}^p \mid L_H(u) \preceq z\} = L_H^\sharp(z) = H \setminus z. \quad (3.2)$$

Démonstration. Résulte immédiatement du fait que L_H est une application résiduable (§1.6.4). \square

Remarque 3.2. *La commande optimale (3.2) correspond à la commande faisant entrer les jetons le plus tardivement possible dans le système, tout en garantissant qu'ils sortent avant les dates désirées.*

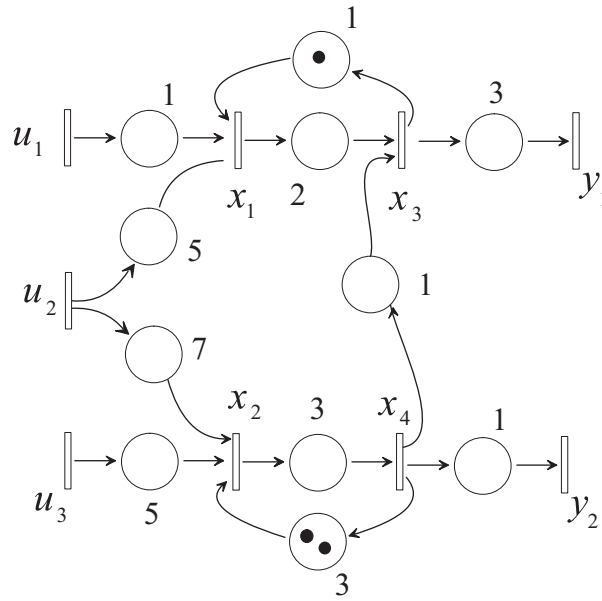


Figure 3.2 – Graphe d'événement temporisé.

Exemple 3.3. *Considérons le graphe d'événement temporisé de la figure 3.2. Les équations d'état sont données par :*

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu = A^*Bu, \\ y = Cx = CA^*Bu, \end{cases} \quad (3.3)$$

A, B et C sont données par :

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta\gamma & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3\gamma^2 \\ \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \delta^1 \\ \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \delta & \delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^7 & \delta^5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta \end{pmatrix}.$$

La matrice de transfert du système est donnée par

$$H = CA^*B = \begin{pmatrix} \delta^6(\delta^3\gamma)^* & \delta^{14}(\delta^3\gamma)^* & \delta^{12}(\delta^3\gamma)^* \\ \varepsilon & \delta^{11}(\delta^6\gamma^2)^* & \delta^9(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix}.$$

On souhaite avoir un vecteur de sortie $y \preceq z$ avec

k	0	1	2	3
$z_1(k)$	17	21	22	$+\infty$
$z_2(k)$	17	22	25	$+\infty$

La consigne z peut être exprimée par des séries formelles dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ comme suit

$$z = \begin{pmatrix} \delta^{17}\gamma^0 \oplus \delta^{21}\gamma^1 \oplus \delta^{22}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{17}\gamma^0 \oplus \delta^{22}\gamma^1 \oplus \delta^{25}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix}.$$

Le plus grand u tel que

$$y = Hu \preceq z$$

est obtenu par la résiduation de la consigne par la matrice de transfert

$$u_{opt} = L_H^\sharp(z) = H\flat z.$$

ce qui nous donne le vecteur de commande suivant $u_{opt} = \begin{pmatrix} \delta^{10}\gamma^0 \oplus \delta^{13}\gamma^1 \oplus \delta^{16}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^2\gamma^0 \oplus \delta^5\gamma^1 \oplus \delta^8\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^4\gamma^0 \oplus \delta^7\gamma^1 \oplus \delta^{10}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix}$.

k	0	1	2	3
$u_1(k)$	10	13	16	$+\infty$
$u_2(k)$	2	5	8	$+\infty$
$u_3(k)$	4	7	10	$+\infty$

Le vecteur de sortie correspondant est

$$y_{opt} = \begin{pmatrix} \delta^{16}\gamma^0 \oplus \delta^{19}\gamma^1 \oplus \delta^{22}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{13}\gamma^0 \oplus \delta^{16}\gamma^1 \oplus \delta^{19}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix},$$

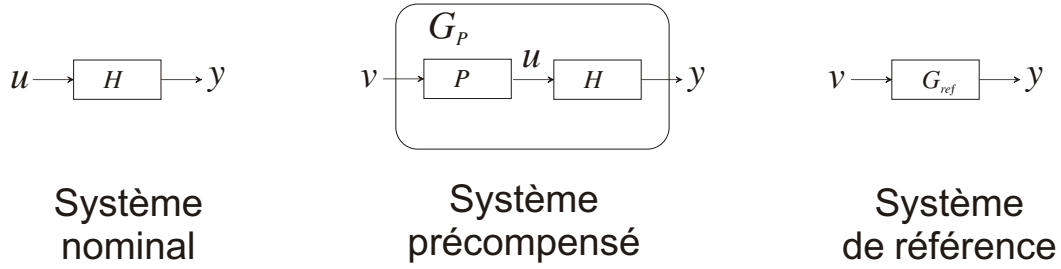
ce dernier est la plus grande sortie inférieure ou égale à la consigne z .

3.1.2 Poursuite de modèle

La démarche adoptée ici, empruntée à l'automatique classique, est de "compenser" la dynamique du système nominal H par l'action d'un autre système, noté P (un correcteur), lui même (max,+) linéaire, dont on sait maîtriser (ou paramétrer) la dynamique (c'est à dire ici le transfert). Le système H muni du correcteur P possède alors un transfert différent noté G_P par la suite.

Structurellement, le correcteur P s'interpose entre la consigne d'entrée V (qui devient l'entrée du système corrigé G_P) et la commande U du système nominal H (voir figure 3.3). La commande U est élaborée par le correcteur P à partir de la consigne V . De la relation de transfert $Y = HU$ (pour le système libre) on passe à une relation de transfert $Y = HPV = G_P V$ pour le système corrigé. La synthèse du correcteur est effectuée dans l'objectif d'atteindre pour le système commandé G_P un transfert aussi proche que possible du transfert de référence² donné par la matrice G_{ref} .

²Nous renvoyons aux thèses de B. Cottenceau et de M. Lhommeau pour des discussions relatives au choix du modèle de référence.


 Figure 3.3 – Correction d'un système H par un précompensateur P

Formellement le problème de commande consiste à calculer un système P tel que

$$\begin{cases} G_P \preceq G_{ref} \\ P \text{ soit le plus grand possible} \end{cases}$$

La contrainte $G_P \preceq G_{ref}$ signifie pratiquement que pour toute entrée V on a

$$Y_{G_P} = G_P V \preceq G_{ref} V = Y_{G_{ref}} \quad \forall V.$$

En représentation dateur ceci correspond à : pour une trajectoire d'entrée donnée $\{V(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$,

$$\forall k \in \mathbb{Z}, Y_{G_P}(k) \preceq Y_{G_{ref}}(k),$$

c'est-à-dire que pour une même entrée V appliquée aux systèmes G_P et G_{ref} , le jeton numéroté k sort du système G_P avant le jeton numéroté k issu du système G_{ref} . En terme de production de jetons par unité de temps, les performances attendues par G_{ref} pourront également être assumées par G_P .

Le problème de calcul de précompensateur se ramène sous cette forme à un problème de résiduation. Le résultat suivant est alors direct.

Proposition 3.4. *Pour tout modèle de référence $G_{ref} \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{p \times m}$ et une matrice de transfert $H \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{p \times m}$, il existe un plus grand précompensateur P_{opt} périodique ($P_{opt} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{p \times p}$) tel que $G_{P_{opt}} \preceq G_{ref}$. Le précompensateur P_{opt} est donné par le calcul*

$$P_{opt} = H \backslash G_{ref}.$$

Remarque 3.5 ((Correcteur Neutre)). *Notons qu'un modèle de référence intéressant d'un point de vue pratique est $G_{ref} = H$, l'objectif est alors de maintenir les performances entrée/sortie du système, tout en augmentant autant que faire se peut la commande. Cette stratégie conduit au précompensateur $P_0 = H \backslash H$, qualifié de neutre³. Il exprime simplement le fait que l'on peut toujours "filtrer" le flux d'entrée d'un système H par un précompensateur sans dégrader les performances initiales.*

Dans la proposition qui va suivre nous introduisons un nouveau précompensateur. Celui ci permet de garder le vecteur d'état inchangé et il sera noté P_{x_0} .

Proposition 3.6. *Le précompensateur optimal permettant de laisser le vecteur d'état inchangé est donné par*

³Cette appellation pertinente a été suggérée par C. Commault.

$$P_{x_0} = (A^*B)\backslash(A^*B).$$

Démonstration. L'objectif est $A^*BPv = A^*Bv \forall v$

$$\Leftrightarrow A^*BP = A^*B$$

$$\Leftrightarrow P \preceq P_{x_0} = (A^*B)\backslash(A^*B).$$

De plus, on a $A^*BP_{x_0}v = A^*B((A^*B)\backslash(A^*B))v = (A^*B)v$. Par conséquent, P_{x_0} est le précompensateur optimal qui préserve le vecteur d'état. \square

Remarque 3.7. La résiduation doit s'entendre ici comme la résiduée de l'application

$$L_H : \mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta] \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta], x \mapsto Hx,$$

avec $\mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta]$ le dioïde des séries causales et périodiques (voir notation 2.38).

3.1.2.1 Illustration

On peut reprendre ici l'exemple de l'atelier décrit dans l'exemple (3.3). Le transfert du système libre est décrit dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ par la matrice

$$H = CA^*B = \begin{pmatrix} \delta^6(\delta^3\gamma)^* & \delta^{14}(\delta^3\gamma)^* & \delta^{12}(\delta^3\gamma)^* \\ \varepsilon & \delta^{11}(\delta^6\gamma^2)^* & \delta^9(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix}.$$

Le taux de production est de une pièce tout les trois unités de temps. On souhaite baisser ce taux à 1/4, donc on se fixe comme modèle de référence le transfert suivant

$$H = CA^*B = \begin{pmatrix} (\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* \\ \varepsilon & (\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* \end{pmatrix}.$$

Le correcteur $P_{opt} = (H\backslash G_{ref})$ est donné ci-dessous :

$$P_{opt} = \begin{pmatrix} \delta^{-6}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-6}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-6}(\delta^4\gamma)^* \\ \varepsilon & \delta^{-14}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-14}(\delta^4\gamma)^* \\ \varepsilon & \delta^{-12}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-12}(\delta^4\gamma)^* \end{pmatrix}$$

Le système P n'est pas causal, il n'a par conséquent pas de réalisation par un GET (à temporisations dans \mathbb{N}).

Pour remédier à ce problème de causalité, il suffit de projeter P dans le dioïde des séries causales $\mathcal{M}_{in}^{axrat}[\gamma, \delta]$, le projecteur noté Pr_+ (voir proposition 2.35). Ainsi, le précompensateur est donné par

$$P_{rat} = \text{Pr}_+(P_{opt}) = \begin{pmatrix} \delta^2\gamma^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^2\gamma^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^2\gamma^2(\delta^4\gamma)^* \\ \varepsilon & \delta^4\gamma^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^4\gamma^2(\delta^4\gamma)^* \\ \varepsilon & \gamma^3(\delta^4\gamma)^* & \gamma^3(\delta^4\gamma)^* \end{pmatrix}$$

Une réalisation de ce précompensateur est donnée figure 3.4. Les équations récurrentes fournissant l'expression de la commande u en fonction de la consigne v sont les suivantes sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$:

$$\begin{aligned} u_1(k) &= 4u_1(k-1) \oplus 2v_1(k-2) \oplus 2v_2(k-2) \oplus 2v_3(k-2) \\ u_2(k) &= 4u_2(k-1) \oplus 4v_2(k-2) \oplus 4v_3(k-2) \\ u_3(k) &= 4u_3(k-1) \oplus v_2(k-3) \oplus v_3(k-3) \end{aligned}$$

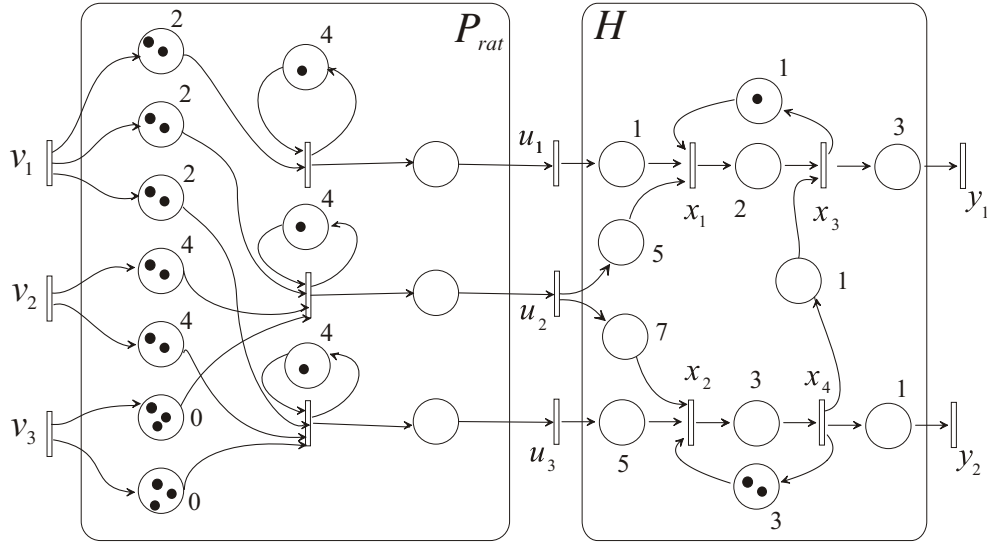


Figure 3.4 – Réalisation du précompensateur permettant d'approcher au mieux G_{ref}

3.2 Commande en boucle ouverte des GEP-T ; Poursuite de trajectoire

Dans cette partie nous allons proposer une méthode de calcul de la commande optimale pour les systèmes modélisés par des GEP-T. Cette méthode se résume en deux étapes :

- Dans un premier temps, nous modélisons le problème par une équation au point fixe d'une fonction monotone non linéaire dans l'algèbre $(max, +)$.
- Dans un deuxième temps, nous calculons le plus grand point fixe de cette fonction par un algorithme et nous montrons, dans le cas où l'algorithme converge, que ce point correspond à la commande optimale.

Soit z une trajectoire désirée en sortie. Nous souhaitons calculer la plus grande commande u tel que la sortie y du GEP-T soit la plus grande inférieure ou égale à la consigne z tout en respectant les contraintes du modèle. Pour cela nous considérons le modèle introduit dans le paragraphe 2.7.2.

Il s'agit de calculer la plus grande commande u qui satisfait les contraintes de sortie qui sont données par :

$$\begin{cases} x = Ax \oplus Bu, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (3.4)$$

avec

$$y \preceq z, \quad (3.5)$$

et qui respecte les contraintes imposées par le modèle, c.-à-d. :

$$x \preceq \bar{A} \odot x \quad (3.6)$$

3.2.1 Vérification de la consistance d'un GEP-T

La solution triviale ε peut se révéler être la plus grande. Cette solution formelle signifie l'absence de solution au problème de planification proposé. Cette absence de solution physique peut survenir lorsque le graphe d'événement P-temporel est inconsistant, c'est à dire que les propriétés structurelles du graphe rendent impossible le respect des contraintes.

Cette partie a pour objectif de fournir une méthode algébrique permettant de vérifier a priori la consistance des GEP-T.

Préalablement, un exemple illustrant ces problèmes de consistance est proposé

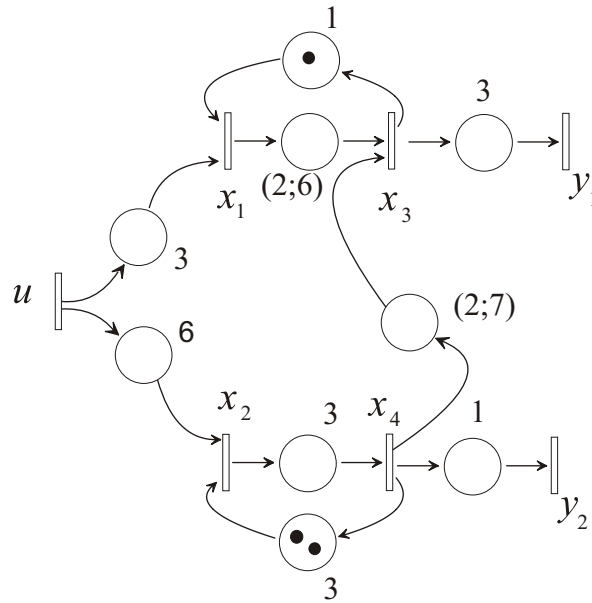


Figure 3.5 – Graphe d'événement P-temporel non-consistant

Exemple 3.8 (Illustration d'un graphe non consistant). *Considérons les deux chemins qui relient les transitions u et x_3 , soit $\{u, x_1, x_3\}$ et $\{u, x_2, x_4, x_3\}$. Supposons que la transition u soit tirée à l'instant t , deux jetons apparaissent simultanément dans le graphe, un dans la place située entre u et x_1 et l'autre dans la place située entre u et x_2 . Le premier induira le tir de la transition x_1 et l'apparition d'un jeton dans la place située entre x_1 et x_3 . Il sera disponible pour le tir de x_3 à l'instant $t + 5$ et violera la contrainte à l'instant $t + 9$.*

Le second induira le tir des transitions x_2 puis x_4 et l'apparition d'un jeton dans la place située entre x_4 et x_3 . Il sera disponible pour le tir de x_3 à l'instant $t + 11$ et violera la contrainte à l'instant $t + 16$.

Clairement, quelque soit la date de tir de la transition u , le jeton présent dans la place située entre x_1 et x_3 violera la contrainte (formellement $[t + 5, t + 9] \cap [t + 11, t + 16] = \emptyset$).

3.2.1.1 Vérification de la consistance d'un GEP-T

Rappelons le modèle d'un GEP-T

$$\begin{cases} x &= \underline{A}x \oplus \underline{B}u, \\ y &= \underline{C}x, \\ \text{et } x &\preceq \overline{A} \odot x \text{ (avec } \Gamma_{\overline{A}} : x \mapsto \overline{A} \odot x \text{ une application semi-continue supérieure)}. \end{cases}$$

La première expression implique :

$$x \succeq \underline{A}x \text{ et } x \succeq \underline{B}u.$$

La structure interne du graphe d'événement P-temporel devra donc satisfaire

$$\underline{A}x \preceq x \preceq \overline{A} \odot x.$$

En d'autre terme, l'absence de solution finie de ce système implique que le graphe d'événement P-temporel est structurellement inconsistant⁴.

Définition 3.9. Un graphe d'événements P-temporel est dit consistant si $\exists x \in \mathcal{D}^n$ fini ($x_i \neq \varepsilon$ et $x_i \neq \top$ pour tous les i) tel que $\underline{A}x \preceq x \preceq \overline{A} \odot x$.

Lemme 3.10 ([Baccelli et al., 1992], Lemma 4.77, p. 191). *Les équivalences suivantes sont vraies :*
 $x \succeq ax \Leftrightarrow x = a^*x \Leftrightarrow x \preceq a \setminus x \Leftrightarrow x = a^* \setminus x$.

Proposition 3.11. *Soit la matrice $\overline{A} \in \mathcal{D}^{n \times n}$, si l'application $\Gamma_{\overline{A}} : x \mapsto \overline{A} \odot x$ est semi continue supérieure, alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $x \preceq \overline{A} \odot x$,
- (ii) $\overline{A} \setminus x \preceq x$,
- (iii) $\overline{A}_* \setminus x = x$,
- (iv) $\overline{A}_* \odot x = x$.

Démonstration. Tout d'abord rappelons que si $\Gamma_{\overline{A}}$ est semi continue supérieure alors $\Gamma_{\overline{A}}^b$ existe, avec $\Gamma_{\overline{A}}^b : x \mapsto \overline{A} \setminus x$.

(i \Rightarrow ii)

$$x \preceq \overline{A} \odot x \Rightarrow \overline{A} \setminus x \preceq x.$$

Si $x \preceq \overline{A} \odot x$ alors $\overline{A} \setminus x \preceq \overline{A} \setminus (\overline{A} \odot x)$ puisque $(\overline{A} \setminus \cdot)$ est isotone (voir théorème 1.113), de plus le théorème 1.113 implique que $\overline{A} \setminus (\overline{A} \odot x) \preceq x$, par conséquent

$$\overline{A} \setminus x \preceq x.$$

(ii \Rightarrow iii)

$$\overline{A} \setminus x \preceq x \Rightarrow \overline{A}_* \setminus x = x.$$

Si $x \succeq \overline{A} \setminus x$ alors par isotonie et en utilisant (f.16) $x \succeq \overline{A} \setminus x \succeq \overline{A}^{\odot 2} \setminus x \succeq \dots \Rightarrow x \succeq (e^{\odot} \setminus x) \oplus (\overline{A} \setminus x) \oplus (\overline{A}^{\odot 2} \setminus x) \oplus \dots$

et grâce à la proposition 1.117 $x \succeq \overline{A} \setminus x \Rightarrow x \succeq (e^{\odot} \wedge \overline{A} \wedge \overline{A}^{\odot 2} \wedge \dots) \setminus x = \overline{A}_* \setminus x$ (voir définition 1.134), or $\overline{A}_* \preceq e^{\odot}$ donc $\overline{A}_* \setminus x \succeq e^{\odot} \setminus x = x$. Par conséquent

⁴Le système est mal fait, on ne peut pas empêcher les violations de contraintes

$$x = \overline{A}_* \backslash x.$$

(iii \Rightarrow iv)

$$x = \overline{A}_* \backslash x \Rightarrow x = \overline{A}_* \odot x$$

$x = \overline{A}_* \backslash x \Rightarrow \overline{A}_* \odot x = \overline{A}_* \odot (\overline{A}_* \backslash x) \succeq x$ (voir théorème 1.113), mais $\overline{A}_* \odot x \preceq e^\odot \odot x = x$, par conséquent $\overline{A}_* \odot x = x$.

(iv \Rightarrow i)

$$\overline{A}_* \odot x = x \Rightarrow x \preceq \overline{A} \odot x.$$

$\overline{A}_* \odot x = (e \odot \wedge \overline{A} \wedge \overline{A}^{\odot 2} \wedge \dots) \odot x$ du fait que $\Gamma_{\overline{A}}$ est semi continue supérieure (voir définition 1.30), on a $\overline{A}_* \odot x = (x \wedge \overline{A} \odot x \wedge \overline{A}^{\odot 2} \odot x \wedge \dots) \preceq \overline{A} \odot x$. \square

Corollaire 3.12. Soit un dioïde \mathcal{D} et deux matrices $\underline{A}, \overline{A} \in \mathcal{D}^{n \times n}$ si l'application $\Gamma_{\overline{A}} : x \mapsto \overline{A} \odot x$ est semi continue supérieure alors on a

$$\underline{A} \otimes x \preceq x \preceq \overline{A} \odot x \Leftrightarrow x \in \text{Im } \underline{A}^* \cap \text{Im } \overline{A}_*.$$

Démonstration. Le résultat est une application directe de lemme 3.10 et de la proposition 3.11. \square

Remarque 3.13. Considérons un dioïde \mathcal{D} et deux matrices $\underline{A}, \overline{A} \in \mathcal{D}^{n \times n}$, si l'application $\Gamma_{\overline{A}} : x \mapsto \overline{A} \odot x$ est semi-continue supérieure alors le plus grand x qui vérifie l'inégalité $\underline{A} \otimes x \preceq x \preceq \overline{A} \odot x$ est calculé en utilisant le corollaire 1.98. Il ressort du corollaire 3.12 que les trajectoires x d'un GEP-T devront nécessairement être dans $\text{Im } \underline{A}^* \cap \text{Im } \overline{A}_*$ pour garantir le respect des contraintes.

Si $\overline{A}_* \backslash (\underline{A}^* \otimes X) = (\overline{A}_* \backslash \underline{A}^*) \otimes X \forall X$ (voir la proposition 1.129 pour une condition suffisante) alors la plus grande solution peut être calculée en considérant la proposition donnée ci-dessous.

Proposition 3.14. Si $\overline{A}_* \backslash (\underline{A}^* \otimes X) = (\overline{A}_* \backslash \underline{A}^*) \otimes X \forall X$ alors

$$\Pi^{\underline{A}^* \cap \overline{A}_*}(x) = \overline{A}^* \backslash x = \hat{x} \text{ avec } \overline{A} = \overline{A}_* \backslash \underline{A}^*,$$

est un projecteur dans l'ensemble $\text{Im } \underline{A}^* \cap \text{Im } \overline{A}_*$. De plus \hat{x} est le plus grand élément de $\text{Im } \underline{A}^* \cap \text{Im } \overline{A}_*$ inférieur à x .

Démonstration. Tout d'abord, il est clair que $\Pi^{\underline{A}^* \cap \overline{A}_*}$ est un projecteur, en effet :

$$\Pi^{\underline{A}^* \cap \overline{A}_*} \circ \Pi^{\underline{A}^* \cap \overline{A}_*}(x) = \overline{A}^* \backslash (\overline{A}^* \backslash x) = \overline{A}^* \backslash x = \Pi^{\underline{A}^* \cap \overline{A}_*}(x)$$

(on applique la formule (f.6) et on rappelle que $a^* a^* = a^*$ (voir équation 1.37)).

Ensuite, montrons que \hat{x} appartient à $\text{Im } \underline{A}^* \cap \text{Im } \overline{A}_*$, c'est à dire que

$$\underline{A} \otimes \hat{x} \preceq \hat{x} \preceq \overline{A} \odot \hat{x}.$$

(i) On montre que $\underline{A} \otimes \hat{x} \preceq \hat{x}$, ceci est équivalent à montrer que $\hat{x} \in \text{Im } \underline{A}^*$ (voir lemme 3.10).

On a $\hat{x} = \overline{A}^* \backslash \hat{x}$ ($\hat{x} \in \text{Im } \overline{A}^*$), de plus, on a $\overline{A}^* \succeq \underline{A}^*$ (en effet $\overline{A} = \overline{A}_* \backslash \underline{A}^*$ et $\overline{A}_* \preceq e^\odot$ donc $\overline{A} \succeq \underline{A}^*$). D'après lemme 1.112 on a $\overline{A}^* \underline{A}^* = \overline{A}^*$.

Donc $\hat{x} = (\overline{A}^* \underline{A}^*) \backslash \hat{x} = \underline{A}^* \backslash (\overline{A}^* \backslash \hat{x})$ d'après (f.6).

Par conséquent, $\underline{A}^* \hat{x} = \hat{x}$ (voir propriété 1.111), c'est à dire $\hat{x} \in \text{Im } \underline{A}^*$.

- (ii) On montre que $\hat{x} \preceq \bar{A} \odot \hat{x}$, ceci est équivalent à montrer que $\hat{x} \in \text{Im } \bar{A}_*$ (voir proposition 3.11).
 On a $\hat{x} = \bar{A}^* \backslash \hat{x}$, ceci est équivalent à $\hat{x} \succeq \bar{A} \hat{x}$ (voir lemme 3.10).
 Donc $\hat{x} \succeq (\bar{A}_* \backslash \bar{A}^*) \hat{x} = \bar{A}_* \backslash (\bar{A}^* \hat{x})$ (par hypothèse).
 Par conséquent, $\hat{x} \succeq \bar{A}_* \backslash (\bar{A}^* \hat{x}) = \bar{A}_* \backslash \hat{x}$ (puisque $\hat{x} \in \text{Im } \bar{A}^*$).
 Par ailleurs $\bar{A}_* \preceq e^\odot$ ce qui implique que $\hat{x} \preceq \bar{A}_* \backslash \hat{x}$.
 Nous avons donc $\hat{x} = \bar{A}_* \backslash \hat{x}$ qui est équivalent à $\hat{x} \preceq \bar{A} \odot \hat{x}$ c'est à dire $\hat{x} \in \text{Im } \bar{A}_*$.

En résumé $\hat{x} \in \text{Im } \bar{A}^* \cap \text{Im } \bar{A}_*$, nous montrons maintenant qu'il s'agit du plus grand élément inférieur à x .

Soit y un élément de $\text{Im } \bar{A}^* \cap \text{Im } \bar{A}_*$ inférieur à x , on a :

$$\begin{aligned}
 & \bar{A} \otimes y \preceq y \preceq \bar{A} \odot y \\
 \Leftrightarrow & y = \bar{A}^* y \text{ et } y = \bar{A}_* \odot y \text{ (voir lemme 3.10 et proposition 3.11).} \\
 \Leftrightarrow & y = \bar{A}^* y \text{ et } y = \bar{A}_* \backslash y \text{ (voir proposition 3.11)} \\
 \Rightarrow & y = \bar{A}_* \backslash (\bar{A}^* y) \\
 \Rightarrow & y = (\bar{A}_* \backslash \bar{A}^*) y = \bar{A} y \text{ (par hypothèse)} \\
 \Rightarrow & y \preceq \bar{A} \odot y \\
 \Rightarrow & y = \bar{A}^* \backslash y \text{ (voir lemme 3.10)} \\
 \Rightarrow & y = \bar{A}^* \backslash y \preceq \bar{A}^* \backslash x = \hat{x} \text{ (par isotonie) car } y \preceq x.
 \end{aligned}$$

□

Corollaire 3.15. Soit y un élément de $\text{Im } \bar{A}^*$ (i.e., $y = \bar{A}^* y$), on a l'équivalence suivante :

$$y \in \text{Im } \bar{A}^* \Leftrightarrow \bar{A} y \preceq y \preceq \bar{A} \odot y.$$

Démonstration. Découle directement de la proposition précédente.

$y \in \text{Im } \bar{A}^* \Rightarrow y = \bar{A}^* \backslash y \Rightarrow \bar{A} y \preceq y \preceq \bar{A} \odot y$ (il suffit de remplacer \hat{x} par y dans les points (i) et (ii) de la preuve de la proposition 3.14).

$\bar{A} y \preceq \bar{A} y \preceq y \preceq \bar{A} \odot y \Rightarrow y = \bar{A}^* \backslash y$ (prouvé précédemment). □

Remarque 3.16. Notons que l'hypothèse utilisée dans la proposition 3.14 est toujours vérifiée lorsque l'on considère le modèle de GEP-T introduit au chapitre 2. Puisque d'après la proposition 1.129, il suffit que tous les éléments de \bar{A} admettent un inverse.

D'après la proposition 3.14, il ressort également que l'état $x \in \text{Im } \bar{A}^* \cap \text{Im } \bar{A}_*$ devra nécessairement être dans $\text{Im } \bar{A}^*$ et par conséquent que la matrice \bar{A} caractérisera la dynamique du GEP-T.

La proposition qui va suivre donne une condition nécessaire et suffisante pour que le GEP-T soit consistant.

Proposition 3.17. Un graphe d'événement P-temporel est consistant si et seulement si tous les éléments de la matrice $\bar{A}^* \in \mathcal{D}^{n \times n}$ sont différents de \top .

Démonstration. Si il existe un élément \bar{A}_{lk}^* égal à \top alors $\forall B \in \mathcal{D}^n$ on a $(\Pi^{\bar{A}^* \cap \bar{A}_*}(B))_k = (\bar{A}^* \backslash B)_k = \bigwedge_{j=1}^n (\bar{A}_{jk}^* \backslash B_k) = \bigwedge_{j=1 \text{ et } j \neq l}^n (\bar{A}_{jk}^* \backslash B_k) \wedge (\bar{A}_{lk}^* \backslash B_k) = (\bar{A}_{lk}^* \backslash B_k) = \varepsilon$. Par conséquent il n'existe pas de solution finie.

Si tous les éléments de la matrice \bar{A}^* sont différents de \top alors il est évident que pour un $B \in \mathcal{D}^n$, tel que $B_i \neq \varepsilon$ et $B_i \neq \top$ pour $0 \leq i \leq n$, on a $\Pi^{\bar{A}^* \cap \bar{A}_*}(B)_i = (\bar{A}^* \backslash B)_i \succ \varepsilon$. □

Exemple 3.18. L'exemple de GEP-T de la figure 3.5 auquel nous avons appliqué la remarque 2.42 est caractérisé par les matrices suivantes :

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon & \delta\gamma & \varepsilon \\ \delta^6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3\gamma^2 \\ \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & 6 & \top & \top & 7 \\ \top & \top & \top & \top & \top \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}.$$

$$\text{La matrice } \bar{A}^* = \bar{A}_* \searrow \underline{A}^* = \begin{pmatrix} \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top \end{pmatrix},$$

c'est à dire que le GEP-T est inconsistant, ce qui est en cohérence avec l'exemple 3.8.

Remarque 3.19. Rappelons que $\bar{A} = \bar{A}_* \searrow \underline{A}^* \succeq \underline{A}$ car $\bar{A}_* \preceq e^\odot$ et $\underline{A}^* \succeq \underline{A}$. Il découle que le taux de production d'un graphe d'événement P-temporel est inférieur à celui du même graphe sans les contraintes de temps de séjour maximales.

Exemple 3.20. Soit le graphe d'événement P-temporel de la figure 2.14, la matrice

$$\underline{A}^* = \begin{pmatrix} e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta(\delta^3\gamma)^* & \delta^5 \oplus \delta^{12}\gamma(\delta^3\gamma)^* & \delta^{10}\gamma(\delta^3\gamma)^* & (\delta^3\gamma)^* & \delta^5\gamma(\delta^3\gamma)^* & \delta\gamma(\delta^3\gamma)^* & \delta^2\gamma(\delta^3\gamma)^* & \delta^3\gamma^2(\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^7(\delta^6\gamma^2)^* & \delta^5(\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^3(\delta^3\gamma)^* & \delta^{11}(\delta^3\gamma)^* & \delta^9(\delta^3\gamma)^* & \delta^2(\delta^3\gamma)^* & \delta^4(\delta^3\gamma)^* & (\delta^3\gamma)^* & \delta(\delta^3\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^{10}(\delta^6\gamma^2)^* & \delta^8(\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta^3(\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^6(\delta^3\gamma)^* & \delta^{14}(\delta^3\gamma)^* & \delta^{12}(\delta^3\gamma)^* & \delta^5(\delta^3\gamma)^* & \delta^7(\delta^3\gamma)^* & \delta^3(\delta^3\gamma)^* & \delta^4(\delta^3\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^{11}(\delta^6\gamma^2)^* & \delta^9(\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta^4(\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta(\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$$

et la matrice

$$\bar{A}^* = \begin{pmatrix} e \oplus \delta^3\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^5 \oplus \delta^{10}\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^3 \oplus \delta^8\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-2}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-2} \oplus \delta^3\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-6} \oplus \delta^{-1}\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-5} \oplus \gamma(\delta^4\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^{-7}(\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* & \delta^{-3} \oplus \delta^2\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-8}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-8} \oplus \delta^{-3}\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-12} \oplus \delta^{-7}\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-11} \oplus \delta^{-6}\gamma(\delta^4\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^{-7}(\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* & \delta^2\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-8}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-7}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-12} \oplus \delta^{-7}\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-11} \oplus \delta^{-6}\gamma(\delta^4\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta(\delta^4\gamma)^* & \delta^7 \oplus \delta^{12}\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^5 \oplus \delta^{10}\gamma(\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* & \delta^5\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-4} \oplus \delta\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-3} \oplus \delta^2\gamma(\delta^4\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ (\delta^4\gamma)^* & \delta^7(\delta^4\gamma)^* & \delta^5(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-1}(\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* & \delta^{-5} \oplus \gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-4} \oplus \delta\gamma(\delta^4\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^4(\delta^4\gamma)^* & \delta^{11}(\delta^4\gamma)^* & \delta^9(\delta^4\gamma)^* & \delta^3(\delta^4\gamma)^* & \delta^4(\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* & \delta(\delta^4\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^3(\delta^4\gamma)^* & \delta^{10}(\delta^4\gamma)^* & \delta^8(\delta^4\gamma)^* & \delta^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^3(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-2} \oplus \delta^3\gamma(\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^7(\delta^4\gamma)^* & \delta^{14}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{12}(\delta^4\gamma)^* & \delta^6(\delta^4\gamma)^* & \delta^7(\delta^4\gamma)^* & \delta^3(\delta^4\gamma)^* & \delta^4(\delta^4\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^4(\delta^4\gamma)^* & \delta^{11}(\delta^4\gamma)^* & \delta^9(\delta^4\gamma)^* & \delta^3(\delta^4\gamma)^* & \delta^4(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-1} \oplus \delta^4\gamma(\delta^4\gamma)^* & \delta(\delta^4\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

le taux de production du système sans les contraintes de temps maximale de séjour est de une pièce toutes les trois unités de temps tandis que celui du GEP-T est de une pièce toutes les quatre unités de temps.

3.2.2 Recherche d'une commande optimale garantissant le respect des contraintes.

Les graphes d'événements P-temporels considérés dans cette partie sont supposés consistants, c'est à dire que :

$$\underline{A}x \preceq x \preceq \bar{A} \odot x$$

(avec $\Gamma_{\bar{A}} : x \mapsto \bar{A} \odot x$ une application semi-continue supérieure)

admet une solution finie (i.e., $\bar{A}_{ij}^* \neq \top \forall i, j$).

On s'intéresse désormais à établir une commande $u \neq \varepsilon$ qui garantit le respect des contraintes,

$$x \preceq \bar{A} \odot x,$$

et qui est optimal vis-à-vis du critère de juste-à-temps. Formellement

$$\begin{cases} x &= \underline{A}x \oplus \underline{B}u, \\ y &= \underline{C}x \preceq z, \text{ avec } z \text{ la trajectoire de référence.} \end{cases}$$

En accord avec le théorème 1.100, ce système de contraintes peut s'écrire :

$$\begin{cases} x &= \underline{A}^* \underline{B}u, \\ y &= \underline{C} \underline{A}^* \underline{B}u \preceq z, \\ x &\preceq \bar{A} \odot x. \end{cases}$$

Ou de manière équivalente, d'après la proposition 3.14 :

$$\begin{cases} x &= \underline{A}^* \underline{B}u, \\ y &= \underline{C} \underline{A}^* \underline{B}u \preceq z, \\ x &= \bar{A}^* x \text{ car } x \text{ doit appartenir à } \text{Im} \bar{A}_* \cap \text{Im} \underline{A}^*. \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} x &= \underline{A}^* \underline{B}u, \\ u &\preceq (\underline{C} \underline{A}^* \underline{B}) \backslash z, \\ x &= \bar{A}^* \underline{A}^* x \text{ car } \underline{A}^* \preceq \bar{A}^* \text{ et d'après le lemme 1.112 on a } \bar{A}^* \underline{A}^* = \bar{A}^*. \end{cases} \quad (3.7)$$

Il apparait donc que la commande est bornée par $(\underline{C} \underline{A}^* \underline{B}) \backslash z$ (la commande optimale du GET sous jacent) et doit être telle que $x = \underline{A}^* \underline{B}u = \bar{A}^* x = \bar{A}^* \underline{A}^* \underline{B}u$ (car $\underline{A}^* \preceq \bar{A}^* \Leftrightarrow \bar{A}^* \underline{A}^* = \bar{A}^*$ voir lemme 1.112).

La proposition suivante fournit une condition suffisante garantissant l'existence d'une telle commande.

Proposition 3.21. *Si le GEP-T est consistant et si toutes les transitions immédiatement en amont d'une place sujette à contrainte sont contrôlées par une seule transition de contrôle alors la plus grande commande respectant les contraintes est donnée par :*

$$u_{opt} = B \backslash x_{opt} \text{ avec } x_{opt} = (C \bar{A}^*) \backslash z.$$

Démonstration. Tout d'abord, en accord avec la proposition 3.14, x_{opt} est le grand état permettant le respect des contraintes, c'est à dire, $x_{opt} \preceq \bar{A} \odot x_{opt}$.

La commande $u_{opt} = (\underline{A}^* \underline{B}) \backslash x_{opt} = \underline{B} \backslash x_{opt}$ est la plus grande commande telle que $\underline{A}^* \underline{B} u_{opt} \preceq x_{opt}$.

Reste à montrer que $\underline{A}^* \underline{B} u_{opt} \preceq \bar{A} \odot \underline{A}^* \underline{B} u_{opt}$, c'est à dire que les contraintes sont respectées lorsqu'on applique la commande u_{opt} .

Rappelons que l'absence de contrainte sur une place située entre les transitions j et i implique $\bar{A}_{ij} = \top$. Par hypothèse, les transitions dont au moins une place avale est sujette à contrainte sont contrôlées, formellement, soit x_j une transition, si $\exists i \in [1, n]$ tel que $\bar{A}_{ij} \neq \top$ alors $\exists k$ tel que $B_{jk} = e$ (x_j est contrôlée)⁵.

La structure de la matrice B implique que $u_{opt} = B \backslash x_{opt}$ est constituée des éléments x_{optj} dont une place avale est sujette à contrainte.

⁵En accord avec la convention, ce k est unique.

De même $Bu_{opt} = B(B \setminus x_{opt}) \preceq x_{opt}$ aura ses éléments égaux à ε , ou à x_{optj} lorsque la transition a une place avale sujette à contrainte⁶. Il vient alors que :

$$\bar{A} \odot (B(B \setminus x_{opt})) = \bar{A} \odot x_{opt}. \quad (3.8)$$

Rappelons que $x_{opt} \in \text{Im} \underline{A}^* \cap \text{Im} \bar{A}_*$ c'est à dire que $x_{opt} = \underline{A}^* x_{opt} = \underline{A}^* \setminus x_{opt}$, par conséquent $B(B \setminus x_{opt}) = B((\underline{A}^* B) \setminus x_{opt}) \preceq \underline{A}^* B((\underline{A}^* B) \setminus x_{opt})$ (puisque $\underline{A}^* \succeq e$). Donc en considérant l'équation 3.8 et par isotonie nous obtenons :

$$\bar{A} \odot (\underline{A}^* B((\underline{A}^* B) \setminus x_{opt})) \succeq \bar{A} \odot (B(B \setminus x_{opt})) = \bar{A} \odot x_{opt} \succeq x_{opt}.$$

Par ailleurs, par définition de la résiduation (théorème 1.67)

$$\underline{A}^* B((\underline{A}^* B) \setminus x_{opt}) \preceq x_{opt}.$$

Par conséquent, le vecteur d'état $x = \underline{A}^* Bu_{opt}$ est tel que

$$\bar{A} \odot \underline{A}^* Bu_{opt} \succeq \underline{A}^* Bu_{opt},$$

c'est à dire que u_{opt} est la plus grande commande respectant les contraintes. \square

Remarque 3.22. *La condition suffisante précédente est généralement satisfaite dans la réalité. Les entrées de four, le début de trempé, sont généralement commandées (tout du moins cela semble souhaitable).*

Néanmoins, il serait intéressant de déduire la structure de la matrice B à partir du vecteur x_{opt} , permettant de préserver le respect des contraintes. C'est à dire établir si possible les transitions qu'il est nécessaire de piloter pour y parvenir.

Lorsque la condition suffisante n'est pas respectée et que $\bar{A} \odot \underline{A}^ Bu_{opt} \not\succeq \underline{A}^* Bu_{opt}$, nous proposons d'utiliser un algorithme de type point fixe pour tenter d'établir une commande (si elle existe). Avant cela nous proposons quelques lemmes qui caractérisent les propriétés des commandes respectant les contraintes.*

Lemme 3.23. *Si l'égalité suivante est vérifiée :*

$$u = (\bar{A}^* B) \setminus (\underline{A}^* Bu),$$

alors u est une commande qui respecte les contraintes (i.e., $\bar{A}^ Bu = \underline{A}^* Bu$).*

Démonstration. D'abord

$$\begin{aligned} u &= (\bar{A}^* B) \setminus (\underline{A}^* Bu) \\ \Rightarrow \bar{A}^* Bu &= \bar{A}^* B((\bar{A}^* B) \setminus (\underline{A}^* Bu)) \\ \Rightarrow \bar{A}^* Bu &\preceq \underline{A}^* Bu \text{ (voir la formule f.1).} \end{aligned}$$

Par ailleurs $\bar{A}^* \succeq \underline{A}^*$ nous avons par isotonie du produit $\bar{A}^* Bu \succeq \underline{A}^* Bu$. Nous avons donc

$$u = (\bar{A}^* B) \setminus (\underline{A}^* Bu) \Rightarrow \bar{A}^* Bu = \underline{A}^* Bu. \quad \square$$

Lemme 3.24. *Si u est une commande qui respecte les contraintes (i.e., $\bar{A}^* Bu = \underline{A}^* Bu$) et si $u \in \text{Im}(\underline{A}^* B)^\sharp$ (i.e., $\exists x$ tel que $u = \underline{A}^* B \setminus x$) alors :*

⁶C'est à dire $(Bu_{opt})_j = \varepsilon$ si $\bar{A}_{ij} = \top \forall i \in [1, n]$.

$$u = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u).$$

Démonstration. Soit u une commande qui respecte les contraintes, c'est à dire $\overline{A}^* B u = A^* B u$.
 $\overline{A}^* B u = A^* B u \Rightarrow u \preceq (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u)$. Puisque $\overline{A}^* \succeq A^*$, on a, par antitonicité de l'application $x \mapsto x \backslash A$, $u \preceq (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u) \preceq (A^* B) \backslash (A^* B u)$
 or par hypothèse $u \in \text{Im}(A^* B)^\#$ c'est à dire $u = (A^* B) \backslash (A^* B u)$ (voir proposition 1.148).
 Pour conclure, on a $u \preceq (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u) \preceq (A^* B) \backslash (A^* B u) = u$ ce qui prouve que

$$u = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u).$$

□

Lemme 3.25. *Considérons la suite u_k avec $k \in \mathbb{N}$ tel que :*

$$\begin{cases} u_0 = (A^* B) \backslash (x) \\ \text{et } u_{k+1} = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_k) \end{cases}$$

La suite u_k est décroissante.

Démonstration. Premièrement,

$$\begin{aligned} u_0 &= (A^* B) \backslash (x) \text{ et} \\ u_1 &= (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_0) \\ &= (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B ((A^* B) \backslash (x))) \\ &\preceq (A^* B) \backslash (A^* B ((A^* B) \backslash (x))) \text{ (car } \overline{A}^* B \succeq A^* B) \end{aligned}$$

par conséquent $u_1 \preceq (A^* B) \backslash (x) = u_0$.

La propriété est donc vraie pour u_0 et u_1 .

Deuxièmement, supposons que $u_{k+1} \preceq u_k$.

La fonction h définie par $h : u \mapsto (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u)$ est isotone donc

$$h(u_{k+1}) = u_{k+2} \preceq h(u_k) = u_{k+1}.$$

Donc, $u_{k+1} \preceq u_k \forall k \in \mathbb{N}$.

□

La proposition qui va suivre donne un algorithme pour calculer la commande optimale.

Proposition 3.26. *Soit l'algorithme suivant:*

$$u_0 = (A^* B) \backslash x_0$$

$$u_{k+1} = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_k)$$

si pour un $m \in \mathbb{N}$ on a $u_{m+1} = u_m$ alors u_m est la commande optimale (voir lemmes 3.23 et 3.24).

Démonstration. Le résultat est une application du théorème 1.97.

□

Dans la suite nous donnons des propositions permettant d'établir une condition d'arrêt pour l'algorithme de la proposition 3.26.

Corollaire 3.27. *Soit $u_0 \in \text{Im}(A^* B)^\#$. Si l'algorithme donné dans la proposition 3.26 converge vers u' alors on a les égalités suivantes:*

$$\begin{aligned} u' &= (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u') \\ &= (\overline{A}^* B) \backslash (\overline{A}^* B u') \\ &= (A^* B) \backslash (A^* B u') \\ &= (A^* B) \backslash (\overline{A}^* B u'). \end{aligned}$$

Démonstration. Soit u' la solution de l'algorithme donné dans la proposition 3.26.

- Premièrement, u' est une solution de l'algorithme donc $u' = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u')$.
- Deuxièmement, puisque $u' = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u')$ nous avons
 $u' = B \backslash (\overline{A}^* \backslash (A^* B u'))$ (voir f.6)
 $= B \backslash (\overline{A}^* \backslash (A^* A^* B u'))$ (voir propriété 1.111)
 par conséquent $u' = (\overline{A}^* B) \backslash (\overline{A}^* B u')$ (car $A^* \preceq \overline{A}^* \Leftrightarrow \overline{A}^* A^* = \overline{A}^*$ voir lemme 1.112).
- Troisièmement, si $u' = (\overline{A}^* A^* B) \backslash (A^* B u')$ (nous rappelons que $\overline{A}^* \succeq A^*$, voir le lemme 1.112) alors
 $u' = (A^* B) \backslash (\overline{A}^* \backslash (A^* B u'))$ (voir f.6). Par conséquent $u' \in \text{Im}(A^* B)^\sharp$, donc $(A^* B) \backslash (A^* B u') = u'$ (voir équation 1.13).
- Enfin, vu que $u' = (\overline{A}^* B) \backslash (\overline{A}^* B u') = (\overline{A}^* A^* B) \backslash (\overline{A}^* B u')$, en utilisant la propriété 1.111 on a
 $u' = (A^* B) \backslash (\overline{A}^* \backslash (\overline{A}^* B u')) = (A^* B) \backslash (\overline{A}^* B u')$.

□

Proposition 3.28. *Considérons les termes de la suite u_n générée par l'algorithme de la proposition 3.26, on a les inégalités suivantes :*

$$u_0 \backslash u_1 \preceq u_1 \backslash u_2 \preceq \cdots \preceq u_k \backslash u_{k+1} \preceq \cdots \preceq u_m \backslash u_{m+1} = u' \backslash u'.$$

Démonstration. $u_1 = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_0)$ et $u_2 = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_1)$

$$\begin{aligned} u_1 \backslash u_2 &= ((\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_0)) \backslash ((\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_1)) \\ &= (\overline{A}^* B \backslash ((\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_0))) \backslash (A^* B u_1) \text{ (voir f.6)} \\ &\succeq (A^* B u_0) \backslash (A^* B u_1) \\ &\succeq u_0 \backslash ((A^* B) \backslash (A^* B u_1)) \text{ (voir f.6)} \end{aligned}$$

et puisque $u_1 = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_0) = (A^* B) \backslash (\overline{A}^* \backslash (A^* B u_0)) \in \text{Im}(A^* B)^\sharp$, c'est à dire que $u_1 = (A^* B) \backslash (A^* B u_1)$, par conséquent

$$u_1 \backslash u_2 \succeq u_0 \backslash u_1.$$

De la même manière, on prouve que :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad u_{k+1} \backslash u_k \preceq u_k \backslash u_{k-1}.$$

Si il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_{m+1} = u_m = u'$ alors :

$$u_0 \backslash u_1 \preceq u_1 \backslash u_2 \preceq \cdots \preceq u_k \backslash u_{k+1} \preceq \cdots \preceq u_m \backslash u_{m+1} = u' \backslash u'.$$

□

Définition 3.29. Soit x, y deux polynômes de $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$, ayant au moins un monôme à coefficient différent de ε et \top , avec $y \preceq x$, on définit la pseudo-distance par le coefficient du monôme d'exposant 0 du polynôme donné par $y \backslash x$, elle sera notée $(y \backslash x)(0)$.

Exemple 3.30. Considérons x et y dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}[[\gamma]]$ avec $x = 5\gamma^0 \oplus 10\gamma^1 \oplus 15\gamma^2$ et $y = 2\gamma^0 \oplus 4\gamma^1 \oplus 7\gamma^2$.
 $y \backslash x = 3\gamma^0 \oplus 8\gamma^1 \oplus 13\gamma^2$ et donc $(y \backslash x)(0) = 3$.
 $x \backslash x = 0\gamma^0 \oplus 5\gamma^1 \oplus 10\gamma^2$ et donc $(x \backslash x)(0) = e$

Remarque 3.31. Si u' est une solution finie de l'algorithme de la proposition 3.26 alors $(u' \backslash u')(0) = e$. Donc, si u' est finie on a les égalités suivantes :

$$(u_1 \backslash u_0)(0) \preceq (u_2 \backslash u_1)(0) \preceq \cdots \preceq (u_{k+1} \backslash u_k)(0) \preceq \cdots \preceq (u_{m+1} \backslash u_m)(0) = (u' \backslash u')(0) = e.$$

Ceci nous donne une condition d'arrêt pour l'algorithme donné dans la proposition 3.26 :

si $(u_{k+1} \backslash u_k)(0) \succ e$ alors la commande optimale est infinie.

L'algorithme devient alors :

$$u_0 = (C \underline{A}^* B) \backslash z$$

$$u_{k+1} = (\overline{A}^* B) \backslash (A^* B u_k)$$

si pour un $m \in \mathbb{N}$ on a $u_{m+1} = u_m$ alors u_m est la commande optimale

sinon, si $(u_{k+1} \backslash u_k)(0) \succ e$ alors il n'existe pas de commande optimale finie.

Dans le cas de système à plusieurs entrées, la remarque suivante montre qu'en cas d'égalité entre deux termes de l'algorithme donné dans la proposition 3.26, la pseudo-distance entre ces deux derniers est inférieure ou égale à e .

Remarque 3.32. Nous rappelons que si $A = (A_i) \in \mathcal{D}^m$ où \mathcal{D} est un dioïde, et $B \in \mathcal{D}^m$, la résiduation de B par A est donnée par la formule suivante :

$$(A \backslash B)_i = \bigwedge_{j=1}^m (A_i \backslash B_j).$$

donc si $A = B$ alors

$$(A \backslash A)_i(0) = \bigwedge_{j=1}^m (A_i \backslash A_j)(0) \preceq (A_j \backslash A_j)(0) = e.$$

3.2.3 Illustrations

Dans cette section nous donnons trois exemples illustrant les propositions données dans la section précédente :

- Dans le premier exemple, nous calculons la commande optimale du graphe d'événement P-temporel consistant donné figure 3.6.
- Dans le deuxième exemple, nous calculons la commande optimale du graphe d'événement P-temporel incertain et consistant donné figure 3.7.
- Dans le troisième exemple, nous appliquons l'algorithme donné par la remarque 3.31 pour montrer qu'il n'existe pas de commande optimale finie qui satisfait le problème de planification du graphe d'événement P-temporel consistant donné figure 3.8. Ceci montre que la consistance d'un GEP-T n'est pas suffisante pour garantir l'existence d'une commande optimale finie.

Considérons la consigne de sortie suivante :

k	0	1	2	3
$z_1(k)$	17	21	22	$+\infty$
$z_2(k)$	17	22	25	$+\infty$

l'expression de z dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est donnée par

$$z = \begin{pmatrix} \delta^{17}\gamma^0 \oplus \delta^{21}\gamma^1 \oplus \delta^{22}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{17}\gamma^0 \oplus \delta^{22}\gamma^1 \oplus \delta^{25}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix}.$$

La commande u obtenue dans l'exemple 3.3 provoque une violation de contraintes. En effet,

$$u = \begin{pmatrix} \delta^{10}\gamma^0 \oplus \delta^{13}\gamma^1 \oplus \delta^{16}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^2\gamma^0 \oplus \delta^5\gamma^1 \oplus \delta^8\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^4\gamma^0 \oplus \delta^7\gamma^1 \oplus \delta^{10}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix},$$

conduit au vecteur d'état suivant :

$$x = \underline{A}^* \underline{B}u = \begin{pmatrix} \delta^{10}\gamma^0 \oplus \delta^{13}\gamma^1 \oplus \delta^{16}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^2\gamma^0 \oplus \delta^5\gamma^1 \oplus \delta^8\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^4\gamma^0 \oplus \delta^7\gamma^1 \oplus \delta^{10}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{11}\gamma^0 \oplus \delta^{14}\gamma^1 \oplus \delta^{17}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^9\gamma^0 \oplus \delta^{12}\gamma^1 \oplus \delta^{15}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{13}\gamma^0 \oplus \delta^{16}\gamma^1 \oplus \delta^{19}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{12}\gamma^0 \oplus \delta^{15}\gamma^1 \oplus \delta^{18}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{16}\gamma^0 \oplus \delta^{19}\gamma^1 \oplus \delta^{22}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{13}\gamma^0 \oplus \delta^{16}\gamma^1 \oplus \delta^{19}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix},$$

qui ne respecte pas les contraintes puisqu'il est supérieur au vecteur $\bar{A} \odot \underline{A}^* \underline{B}u$ donné ci-dessous :

$$\bar{A} \odot \underline{A}^* \underline{B}u = \begin{pmatrix} \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{10}\gamma^0 \oplus \delta^{13}\gamma^1 \oplus \delta^{16}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{11}\gamma^0 \oplus \delta^{14}\gamma^1 \oplus \delta^{17}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{15}\gamma^0 \oplus \delta^{18}\gamma^1 \oplus \delta^{21}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \end{pmatrix}.$$

L'algorithme de la proposition 3.26 converge vers le vecteur suivant :

$$u'_{opt} = \begin{pmatrix} \delta^7\gamma^0 \oplus \delta^{11}\gamma^1 \oplus \delta^{15}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ e \oplus \delta^4\gamma^1 \oplus \delta^8\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^2\gamma^0 \oplus \delta^6\gamma^1 \oplus \delta^{10}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix}.$$

Il s'agit du plus grand vecteur de commande (qui assure les dates d'entrée les plus tardives) qui respecte les contraintes, il conduit au vecteur d'état :

$$x = \underline{A}^* \underline{B}u = \begin{pmatrix} \delta^7\gamma^0 \oplus \delta^{11}\gamma^1 \oplus \delta^{15}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ e \oplus \delta^4\gamma^1 \oplus \delta^8\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^2\gamma^0 \oplus \delta^6\gamma^1 \oplus \delta^{10}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^8\gamma^0 \oplus \delta^{12}\gamma^1 \oplus \delta^{16}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^7\gamma^0 \oplus \delta^{11}\gamma^1 \oplus \delta^{15}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{11}\gamma^0 \oplus \delta^{15}\gamma^1 \oplus \delta^{19}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{10}\gamma^0 \oplus \delta^{14}\gamma^1 \oplus \delta^{18}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{14}\gamma^0 \oplus \delta^{18}\gamma^1 \oplus \delta^{22}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{11}\gamma^0 \oplus \delta^{15}\gamma^1 \oplus \delta^{19}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix},$$

qui est bien supérieur au vecteur $\bar{A} \odot \underline{A}^* \underline{B}u$, donné ci-dessous :

$$\bar{A} \odot \underline{A}^* \underline{B}u = \begin{pmatrix} \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^8\gamma^0 \oplus \delta^{12}\gamma^1 \oplus \delta^{16}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^9\gamma^0 \oplus \delta^{13}\gamma^1 \oplus \delta^{17}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{12}\gamma^0 \oplus \delta^{16}\gamma^1 \oplus \delta^{20}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{+\infty}\gamma^0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur de sortie correspondant, (la sortie en juste à temps respectant les contraintes) est alors donné par :

$$y'_{opt} = \begin{pmatrix} \delta^{14}\gamma^0 \oplus \delta^{18}\gamma^1 \oplus \delta^{22}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{11}\gamma^0 \oplus \delta^{15}\gamma^1 \oplus \delta^{19}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix}.$$

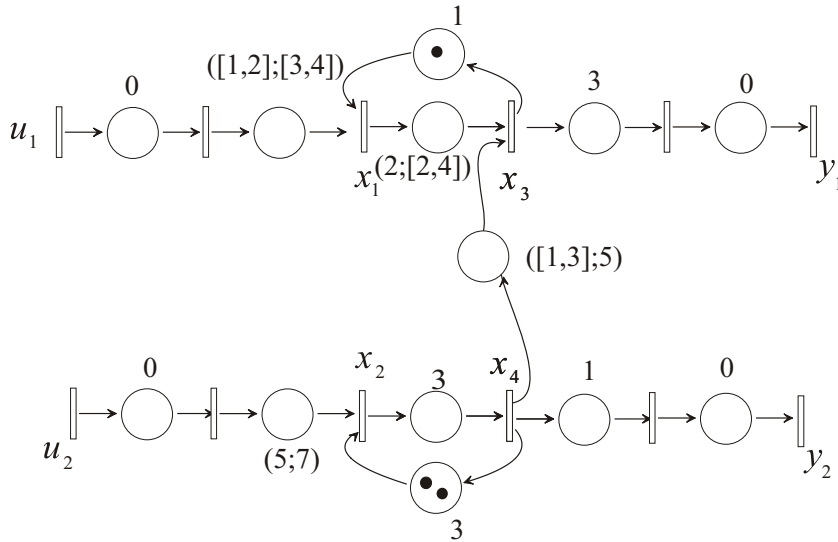


Figure 3.7 – Graphe d'événement p-temporel incertain

Exemple 3.34. *Considérons le graphe d'événement p-temporel incertain de la figure 3.7, les matrices de la représentation d'état sont les suivantes :*

$$\underline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [\delta, \delta^2] & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta\gamma & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3\gamma^2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^2 & \varepsilon & \varepsilon & [\delta, \delta^3] & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ [3, 4] & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & 7 & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & [2, 4] & \top & \top & 5 & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}.$$

Ceci nous donne les matrices suivantes

$$\underline{\mathbf{A}}^* = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ [\delta, \delta^2] (\delta^3\gamma)^* & [\delta^{10}, \delta^{12}] \gamma (\delta^3\gamma)^* & (\delta^3\gamma)^* & [\delta^5, \delta^7] \gamma (\delta^3\gamma)^* & \delta\gamma (\delta^3\gamma)^* & [\delta^2, \delta^4] \gamma (\delta^3\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^5 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta^3\gamma^2 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ [\delta^3, \delta^4] (\delta^3\gamma)^* & [\delta^9, \delta^{11}] (\delta^3\gamma)^* & \delta^2 (\delta^3\gamma)^* & [\delta^4, \delta^6] (\delta^3\gamma)^* & (\delta^3\gamma)^* & [\delta, \delta^3] (\delta^3\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^8 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta^3 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ [\delta^6, \delta^7] (\delta^3\gamma)^* & [\delta^{12}, \delta^{14}] (\delta^3\gamma)^* & \delta^5 (\delta^3\gamma)^* & [\delta^7, \delta^9] (\delta^3\gamma)^* & \delta^3 (\delta^3\gamma)^* & [\delta^4, \delta^6] (\delta^3\gamma)^* & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^9 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta^4 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & e \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \bar{\mathbf{A}}^* = \begin{pmatrix} 0 & \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & 0 & \top & \top & \top & \top & \top & \top \\ [3, 4] & \top & 0 & \top & \top & \top & \top & \top \\ \top & 7 & \top & 0 & \top & \top & \top & \top \\ [5, 8] & \top & [2, 4] & \top & 0 & 5 & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & 0 & \top & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & 0 & \top \\ \top & \top & \top & \top & \top & \top & \top & 0 \end{pmatrix}$$

donc la matrice $\bar{\mathbf{A}}^*$ est donnée par :

$$\bar{\mathbf{A}}^* = (\bar{\mathbf{A}}^* \bar{\mathbf{A}}^*)^* = \begin{pmatrix} (e \oplus \delta\gamma) (\delta^3\gamma)^* & [\delta^4, \delta^6] (\delta^3\gamma)^* & \delta^{-3} (\delta^3\gamma)^* & [\delta^{-1}, \delta] (\delta^3\gamma)^* & \delta^{-5} (\delta^3\gamma)^* & [\delta^{-4}, \delta^{-2}] (\delta^3\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & (e \oplus \delta^4\gamma^2) (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta^{-7} (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta^{-4}\gamma^2 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ [\delta, \delta^2] (\delta^3\gamma)^* & [\delta^7, \delta^9] (\delta^3\gamma)^* & (\delta^3\gamma)^* & [\delta^2, \delta^4] (\delta^3\gamma)^* & \delta^{-2} (\delta^3\gamma)^* & [\delta^{-1}, \delta] (\delta^3\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^5 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta^3\gamma^2 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ [\delta^3, \delta^4] (\delta^3\gamma)^* & [\delta^9, \delta^{11}] (\delta^3\gamma)^* & \delta^2 (\delta^3\gamma)^* & [\delta^4, \delta^6] (\delta^3\gamma)^* & (\delta^3\gamma)^* & [\delta, \delta^3] (\delta^3\gamma)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ [\delta^{-2}, \delta^{-1}] (\delta^3\gamma)^* & [\delta^8, \delta^8 \oplus \delta^9\gamma] (\delta^6\gamma^2)^* & \delta^{-3} (\delta^3\gamma)^* & [\delta^3, \delta^3 \oplus \delta^4\gamma] (\delta^6\gamma^2)^* & \delta^{-5} (\delta^3\gamma)^* & [e, e \oplus \delta\gamma] (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \varepsilon \\ [\delta^6, \delta^7] (\delta^3\gamma)^* & [\delta^{12}, \delta^{14}] (\delta^3\gamma)^* & \delta^5 (\delta^3\gamma)^* & [\delta^7, \delta^9] (\delta^3\gamma)^* & \delta^3 (\delta^3\gamma)^* & [\delta^4, \delta^6] (\delta^3\gamma)^* & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^9 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta^4 (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & \delta (\delta^6\gamma^2)^* & \varepsilon & e \end{pmatrix}.$$

considérons la consigne z suivante :

$$z = \begin{pmatrix} \delta^{23}\gamma^0 \oplus \delta^{24}\gamma^1 \oplus \delta^{45}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^{15}\gamma^0 \oplus \delta^{26}\gamma^1 \oplus \delta^{27}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix}.$$

la commande optimale est donnée par $u_{opt} = \begin{pmatrix} \delta^{14}\gamma^0 \oplus \delta^{17}\gamma^1 \oplus \delta^{27}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \\ \delta^6\gamma^0 \oplus \delta^{10}\gamma^1 \oplus \delta^{18}\gamma^2 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^3 \end{pmatrix}$.

Exemple 3.35. Soit le graphe d'événement P -temporel de la figure 3.8 et soit la consigne z donnée par la série suivante $z = 17\gamma^0 \oplus +\infty\gamma^1$.

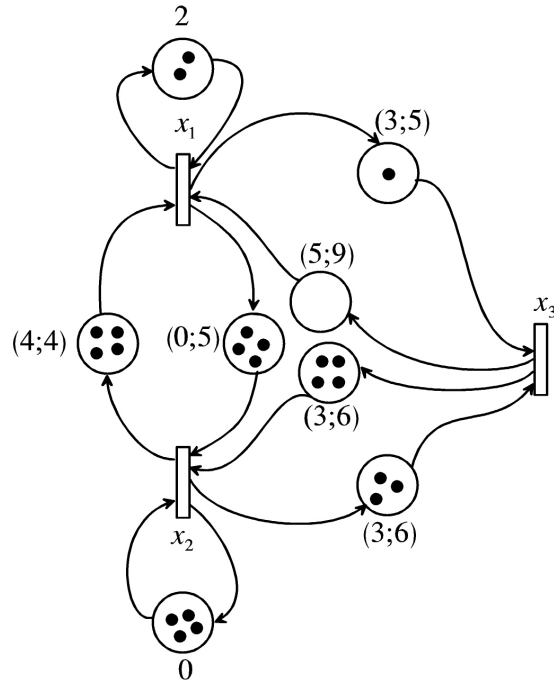


Figure 3.8 – Graphe d'événement P-temporel non-commandable.

En utilisant les modifications introduites dans les remarques 2.42 et 2.45, le graphe d'événement P-temporel donné dans la figure 3.8 devient le suivant :

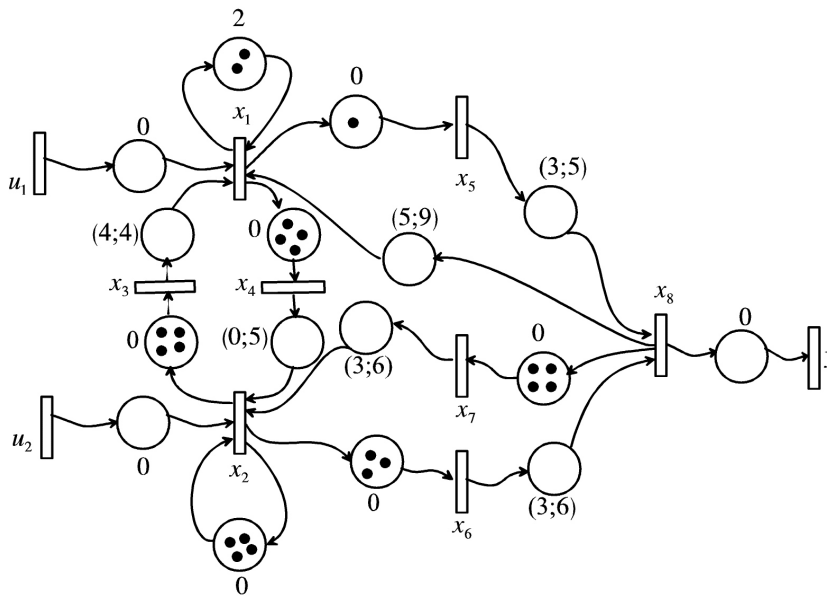


Figure 3.9 – Graphe d'événement P-temporel non-commandable.

La matrice \overline{A} est donnée par la somme suivante

$$\left(\begin{array}{cccccccc} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^{-5} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^{-14} & \delta^{-2}\gamma^3 & \delta^{-10} & \delta^{-2}\gamma^3 & \varepsilon & \delta^{-2} & \delta^{-2} & \delta^{-5} \\ \delta^{-15} & \gamma^3 & \delta^{-11} & \gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3\gamma^3 & \varepsilon \\ \delta^{-6}\gamma^4 & \delta^{-6} & \delta^{-2}\gamma^4 & \delta^{-6} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^{-9} & \varepsilon & \delta^{-5} & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{array} \right) \oplus$$

$$\left(\begin{array}{cccccccc} (\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^3(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^3(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^{11}\gamma^3(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^5(\delta^8\gamma^1)^* \\ \gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^7(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^4\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^7(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^{11}\gamma^7(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^5\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* \\ \delta^{-4}(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^4\gamma^3(\delta^8\gamma^1)^* & (\delta^8\gamma^1)^* & \delta^4\gamma^3(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^7\gamma^3(\delta^8\gamma^1)^* & \delta(\delta^8\gamma^1)^* \\ \gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^7(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^4\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^7(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^{11}\gamma^7(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^5\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* \\ \gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^4\gamma^1(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & (\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^1(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^{11}\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^5\gamma^1(\delta^8\gamma^1)^* \\ \delta^{-3}\gamma^1(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^5\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^1\gamma^1(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^5\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^{-3}(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^5\gamma^1(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^8\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^{-6}(\delta^8\gamma^1)^* \\ \delta^3\gamma^5(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^3\gamma^7(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^7\gamma^5(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^3\gamma^7(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^3\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^3\gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^6\gamma^7(\delta^8\gamma^1)^* & \gamma^4(\delta^8\gamma^1)^* \\ \delta^3\gamma^1(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^3\gamma^3(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^7\gamma^1(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^3\gamma^3(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^3(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^3(\delta^8\gamma^1)^* & \delta^6\gamma^3(\delta^8\gamma^1)^* & (\delta^8\gamma^1)^* \end{array} \right)$$

Si toutes les transitions sont commandables les dates de tir des transitions respectent la consigne z et les contraintes du système.

$$x = \begin{pmatrix} \delta^8\gamma^1 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^2 \\ \delta^{23}\gamma^4 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^5 \\ \delta^{14}\gamma^1 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^2 \\ \delta^{23}\gamma^4 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^5 \\ \delta^{10}\gamma^1 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^2 \\ \delta^{10}\gamma^1 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^2 \\ \delta^{17}\gamma^4 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^5 \\ \delta^{13}\gamma^1 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^2 \end{pmatrix}.$$

Par contre, si seules les transitions x_1 et x_2 sont commandables par les commandes u_1 et u_2 alors l'algorithme donné dans la proposition 3.26 indique qu'il n'existe pas de commande optimale finie.

Les premiers termes donnés par l'algorithme sont les suivants:

$$u_0 = \begin{pmatrix} \delta^{14}\gamma^{-1} \oplus \delta^{+\infty}\gamma^0 \\ \delta^{14}\gamma^{-3} \oplus \delta^{+\infty}\gamma^{-2} \end{pmatrix}$$

$$u_1 = \begin{pmatrix} \delta^{18}\gamma^1 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^2 \\ \delta^{23}\gamma^4 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^5 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} \delta^{27}\gamma^8 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^9 \\ \delta^{27}\gamma^6 \oplus \delta^{+\infty}\gamma^7 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \begin{pmatrix} \delta^{31}\gamma^{10} \oplus \delta^{+\infty}\gamma^{11} \\ \delta^{36}\gamma^{13} \oplus \delta^{+\infty}\gamma^{14} \end{pmatrix}$$

$$u_4 = \begin{pmatrix} \delta^{40}\gamma^{17} \oplus \delta^{+\infty}\gamma^{18} \\ \delta^{40}\gamma^{15} \oplus \delta^{+\infty}\gamma^{16} \end{pmatrix}$$

On obtient donc l'égalité suivante

$$u_1 \dot{\phi} u_0 = u_2 \dot{\phi} u_1 = u_3 \dot{\phi} u_2 = u_4 \dot{\phi} u_3 = \delta^{-4}\gamma^{-2} \oplus \delta^{+\infty}\gamma^{-1}.$$

$u_1 \dot{\phi} u_0(0) = u_2 \dot{\phi} u_1(0) = u_3 \dot{\phi} u_2(0) = u_4 \dot{\phi} u_3(0) = +\infty \succ 0$. Par conséquent il n'existe pas de commande finie au problème de planification.

3.3 Commande en boucle ouverte d'un GEP-T : Poursuite de modèle.

Dans cette section, le problème de commande consiste simplement à choisir la dynamique du pré-compensateur P de telle sorte que le système contrôlé G_P possède la dynamique décrite par un modèle

de référence $G_{ref} \in \mathcal{D}^{p \times m}$ spécifié sous forme de matrice de transfert et que la commande générée par ce précompensateur respecte les contraintes du modèle P-temporel.

3.3.1 Algorithme de calcul d'un précompensateur optimal garantissant le respect des contraintes.

Les graphes d'événements P-temporels considérés dans cette partie sont supposés consistants, c'est à dire que le système

$$\underline{A}x \preceq x \preceq \overline{A} \odot x$$

(avec $\Gamma_{\overline{A}} : x \mapsto \overline{A} \odot x$ une application semi-continue supérieure)

admet une solution finie (i.e., $\overline{A}_{ij}^* \neq \top \forall i, j$).

On s'intéresse désormais à établir un précompensateur $P \neq \varepsilon$ qui garanti le respect des contraintes.

$$x \preceq \overline{A} \odot x.$$

et qui est optimal vis-à-vis du critère de juste-à-temps. Formellement, pour tout v on a :

$$\begin{cases} x = \underline{A}x \oplus \underline{B}Pv, \\ y = \underline{C}x \preceq G_{ref}v, \end{cases}$$

Ce système de contraintes peut s'écrire :

$$\begin{cases} x = \underline{A}^* \underline{B}Pv, \\ y = \underline{C} \underline{A}^* \underline{B}Pv \preceq G_{ref}v, \\ x \preceq \overline{A} \odot x. \end{cases}$$

D'après la proposition 3.14, ce système peut s'écrire :

$$\begin{cases} x = \underline{A}^* \underline{B}Pv, \\ y = \underline{C} \underline{A}^* \underline{B}Pv \preceq G_{ref}v, \\ x = \overline{A}^* x \text{ car } x \text{ doit appartenir à } \text{Im} \overline{A}_* \cap \text{Im} \underline{A}^*. \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} x = \underline{A}^* \underline{B}Pv, \\ y = \underline{C} \underline{A}^* \underline{B}Pv \preceq G_{ref}v, \\ x = \overline{A}^* \underline{A}^* x \text{ car } \underline{A}^* \preceq \overline{A}^* \text{ et d'après le lemme 1.112 on a } \underline{A}^* \overline{A}^* = \overline{A}^*. \end{cases}$$

En d'autres termes un précompensateur garantissant le respect des contraintes doit vérifier la condition suivante :

$$\overline{A}^* \underline{B}Pv = \underline{A}^* \underline{B}Pv \forall v.$$

qui est équivalent à :

$$\overline{A}^* \underline{B}P = \underline{A}^* \underline{B}P.$$

Dans cette section, la démarche pour établir l'algorithme est analogue à celle de la section précédente, il suffit de remplacer u par P et z par G_{ref} .

L'algorithme devient alors :

$$P_0 = (CA^*B) \setminus G_{ref}$$

$$P_{k+1} = (\overline{A}^*B) \setminus (\underline{A}^*BP_k)$$

si pour un $m \in N$ on a $P_{m+1} = P_m$ alors P_m est le précompensateur optimal

sinon, si $(P_{k+1} \setminus P_k(0)) \succ e$ alors le précompensateur optimal est infini.

3.3.2 Illustration

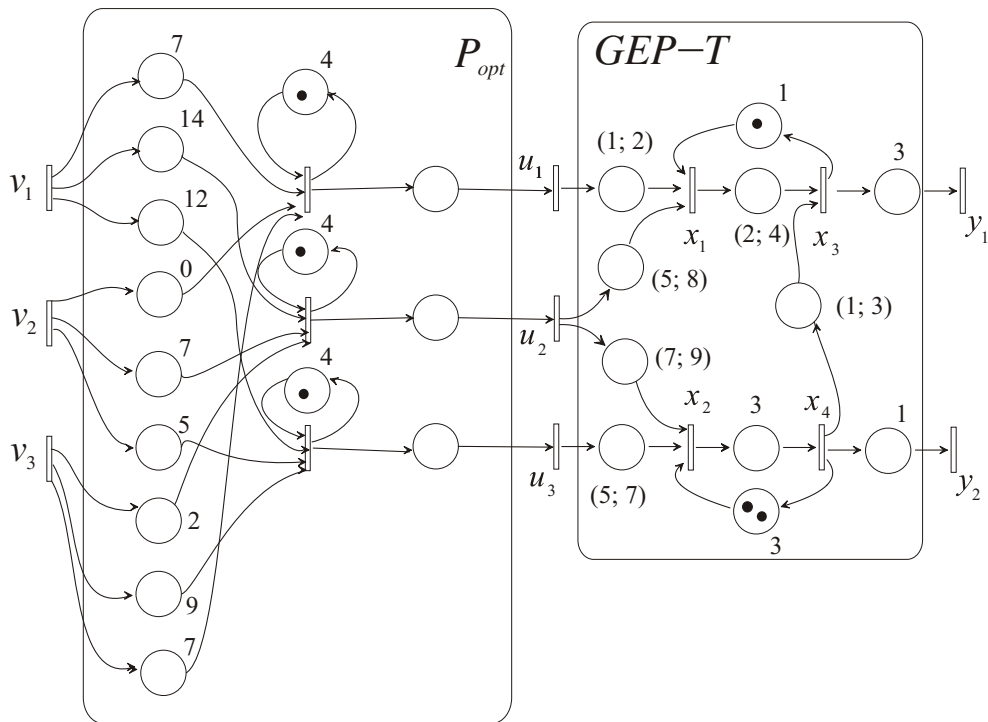


Figure 3.10 – Réalisation du précompensateur permettant d'approcher au mieux G_{ref}

Considérons le graphe d'événement P-temporel donné dans la figure 2.13 et un modèle de référence donné par : $G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^{14}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{21}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{19}(\delta^4\gamma)^* \\ \delta^{11}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{18}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{16}(\delta^4\gamma)^* \end{pmatrix}$. Le précompensateur optimal est donné

par : $P_{opt} = \begin{pmatrix} \delta^7(\delta^4\gamma)^* & \delta^{14}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{12}(\delta^4\gamma)^* \\ (\delta^4\gamma)^* & \delta^7(\delta^4\gamma)^* & \delta^5(\delta^4\gamma)^* \\ \delta^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^9(\delta^4\gamma)^* & \delta^7(\delta^4\gamma)^* \end{pmatrix}$. Il garantit que les contraintes seront respectées

quelque soit les entrées v .

Une réalisation de ce précompensateur est donnée dans la figure 3.10. Les équations récurrentes fournissant l'expression de la commande u en fonction de la consigne v sont les suivantes sur le dioïde \mathbb{Z}_{max} :

$$\begin{aligned}
u_1(k) &= 4u_1(k-1) \oplus 7v_1(k) \oplus 14v_2(k) \oplus 12v_3(k) \\
u_2(k) &= 4u_2(k-1) \oplus v_1(k) \oplus 7v_2(k) \oplus 5v_3(k) \\
u_3(k) &= 4u_3(k-1) \oplus 2v_1(k) \oplus 9v_2(k) \oplus 7v_3(k)
\end{aligned}$$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à la commande en boucle ouverte de graphe d'événements P-temporel. Dans un premier temps, nous avons donné une méthode permettant de vérifier la consistence des graphes d'événements P-temporels, en d'autre terme cela permet d'établir l'absence de solution aux problèmes de commande proposés par la suite. Lorsque le graphe d'événement P-temporel est consistant, nous avons caractérisé un projecteur dans l'ensemble des états qui respectent la dynamique du graphe d'événement P-temporel. Il permet d'obtenir, le plus grand état respectant à la fois la dynamique du GET sous jacent et la dynamique propre au respect des contraintes.

Ensuite nous nous sommes intéressés au problème de commande. Si chaque transition immédiatement en amont d'une place sujette à contrainte est commandée alors nous donnons le commande optimale du GEP-T vis à vis du critère de juste à temps. Cette condition suffisante semble pratiquement raisonnable, néanmoins il serait intéressant d'établir les transitions qu'il est nécessaire de contrôler pour garantir le respect des contraintes. Lorsque cette condition n'est pas remplie et que la commande précédente se révèle non satisfaisante (i.e., $\underline{A}^* \underline{B}u_{opt} \neq \overline{A}^* \underline{B}u_{opt}$) nous proposons d'utiliser un algorithme de type point fixe pour établir cette commande si elle existe.

Pour conclure ce chapitre, nous avons étendu les résultats à un problème de poursuite de modèle qui permet, lorsqu'une solution existe, d'obtenir un filtre en entrée du système garantissant le respect des contraintes quelque soit l'entrée.

Commande en boucle fermée des graphes d'événements P-temporel

Le calcul de la commande optimale u_{opt} (vue dans le chapitre précédent), pour une consigne donnée z , fournit la commande la plus tardive possible permettant à la fois d'atteindre l'objectif ($Hu_{opt} \preceq z$) et de respecter les contraintes ($x \preceq \bar{A} \odot x$). C'est à dire, qu'elle permet de diminuer optimalement le temps de séjour des jetons dans le GEP-T ou, de manière équivalente, permet une diminution optimale du marquage instantané¹. Mais le calcul de cette commande nécessite la connaissance à priori de la trajectoire z à poursuivre, et une parfaite connaissance du système que l'on souhaite piloter. Lorsque la trajectoire de consigne z n'est pas connue a priori, il est possible de synthétiser un précompensateur optimal permettant la poursuite d'un modèle de référence, il permet de ce fait d'optimiser le flux interne de jeton quelque soit le flux d'entrée. Ces approches de type boucle ouverte restent sensibles aux variations du modèle et aux perturbations. C'est pourquoi des structures de commande de type boucle fermée ont été proposées pour les GET (voir notamment [Cottenceau, 1999, Cottenceau et al., 1999, Lüders and Santos-Mendes, 2002, Maia et al., 2003, Lhommeau, 2004, Hardouin, 2004]). Il s'agit à l'aide de bouclage des transitions de sortie (ou transitions internes) de modifier le comportement du système afin de s'approcher d'un modèle de référence et de répercuter ainsi l'évolution des transitions internes sur les entrées pour gérer au mieux l'entrée des jetons dans le GET. (On invite le lecteur à consulter <http://www.istia.univ-angers.fr/hardouin/publications.html> pour voir des simulations et l'intérêt de tels contrôleurs).

Ces problèmes ont pu être mieux appréhendés grâce au développement de la théorie géométrique des systèmes multivariés [Cohen et al., 1996, Cohen et al., 1997, Cohen et al., 2005b, Cohen et al., 2006]. En particulier le problème de contrôle en présence de perturbations a pu être considéré [Lhommeau, 2004, Lhommeau et al., 2003].

Notons qu'une autre démarche a été empruntée dans [Katz, 2006], la différence réside sur les objets algébriques manipulés, des idéaux principaux dans notre cas, des sous semi-modules dans le cas de Ricardo Katz et Stéphane Gaubert. Cela conduit au traitement d'applications différentes.

Dans ce chapitre nous allons étendre ces concepts de contrôle en boucle fermée au GEP-T.

Ce chapitre est composé comme suit.

Dans un premier temps nous rappelons les définitions d'ensembles A -invariants et invariants contrôlés dans les dioïdes (voir [Lhommeau, 2004]).

¹Dans un contexte de production, ce marquage instantané correspond aux en-cours de production.

Dans un deuxième temps, nous appliquons ces résultats au problème de synthèse de commande en boucle fermée des GEP-T. Nous considérons successivement le problème de la synthèse du contrôleur de type retour d'état puis de type retour de sortie. Une condition nécessaire et suffisante pour garantir l'existence du contrôleur sera donnée. Puis, une méthode, permettant de remédier au problème de non causalité du contrôleur est introduite. Elle utilise un nouveau précompensateur neutre (voir chapitre 3) qui préserve le vecteur d'état. Enfin, nous utilisons une relation de parallélisme, introduite par [Katz, 2006], pour résoudre le problème de non causalité du précompensateur.

Finalement nous traitons un exemple illustrant l'intérêt de notre approche.

4.1 Ensembles A-invariants et invariants contrôlés

Dans la théorie linéaire conventionnelle, les sous espaces invariants jouent un rôle central dans plusieurs problèmes de commande, citons par exemple les problèmes de poursuite de modèle de référence [Wang and Desoer, 1972, Munoz and Malabre, 1998] et le problème de découplage de perturbation [Wonham, 1985, §4.1], [Basile and Marro, 1992, §4.2]. Dans la suite, nous considérons des concepts analogues dans les dioïdes. Les structures de treillis étant à la base de la structure des semi-anneaux idempotent, les ensembles manipulés sont des idéaux principaux, plutôt que les sous-espaces vectoriels. Rappelons que dans [Gaubert and Katz, 2003a, Gaubert and Katz, 2003b, Katz, 2006] une approche différente est considérée, les ensembles manipulés sont des sous-semi-modules, ce qui conduit à des applications différentes.

Définition 4.1 (Idéaux dans un ensemble ordonné). Soit \mathcal{S} un ensemble ordonné. On appelle idéal ("lower set" en anglais) de \mathcal{S} toute partie non vide \mathcal{X} de \mathcal{S} satisfaisant

$$(x \in \mathcal{X} \text{ and } y \preceq x) \Rightarrow y \in \mathcal{X}.$$

Un idéal principal ("closed lower set" en anglais) (généralisé par x) de \mathcal{S} est un idéal, noté $\downarrow \mathcal{X}$, de la forme :

$$\downarrow \mathcal{X} := \{y \in \mathcal{S} \mid y \preceq x\}. \quad (4.1)$$

Lemme 4.2. [Davey and Priestley, 2002] Soit \mathcal{S} un ensemble ordonné et $x, y \in \mathcal{S}$. L'équivalence suivante est vraie :

$$x \preceq y \iff \downarrow \mathcal{X} \subset \downarrow \mathcal{Y}. \quad (4.2)$$

Considérons un système linéaire défini sur un semi-anneau idempotent \mathcal{S}

$$x = Ax \oplus Bu, \quad (4.3)$$

avec $x \in \mathcal{S}^n$ est le vecteur d'état, $u \in \mathcal{S}^p$ est le vecteur de commande. Les éléments des matrices A, B appartiennent au semi-anneau idempotent \mathcal{S} .

Définition 4.3 (Ensemble A-invariant). Considérons un semi-anneau idempotent \mathcal{X} et une application $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, alors un ensemble $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ est dit ensemble A-invariant, si pour chaque élément $x_0 \in \mathcal{V}$, on a $Ax_0 \in \mathcal{V}$, ceci est équivalent à $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, où $A\mathcal{V} = \{Ax \mid x \in \mathcal{V}\}$.

Exemple 4.4. Un exemple simple est donné par l'ensemble A-invariant suivant $\mathcal{V} = \{\varepsilon\}$.

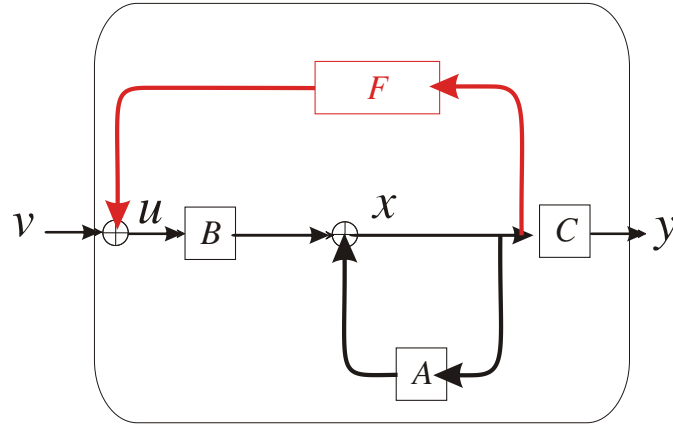


Figure 4.1 – Contrôleur retour d'état

Nous supposons dans la suite que le contrôleur F , de type retour d'état, est intégré dans le système comme indiqué sur la figure 4.1, $u = Fx \oplus v$. Donc, l'équation (4.3) devient $x = (A \oplus BF)x \oplus Bv$.

Définition 4.5 (Ensemble invariant contrôlé). Un ensemble $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ est dit invariant contrôlé si il existe une application isotone $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ tel que

$$(A \oplus BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}.$$

on écrit $\mathcal{F}(\mathcal{V})$ pour décrire la classe des applications isotones $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ telles que $(A \oplus BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$. La notation $F \in \mathcal{F}(\mathcal{V})$ se lit " F est un ami de \mathcal{V} ".

Remarque 4.6. Chaque idéal principal A -invariant est automatiquement un idéal principal invariant contrôlé, il suffit de prendre $F = \varepsilon$ (ou $F = B \backslash A$).

Proposition 4.7. Soit \mathcal{X} un semi-anneau idempotent et $\downarrow \mathcal{N} = \{n \in \mathcal{X} \mid n \preceq \hat{n}\}$ un idéal principal A -invariant (i.e., $A \downarrow \mathcal{N} \subset \downarrow \mathcal{N}$). On a l'équivalence suivante :

$$F \in \mathcal{F}(\downarrow \mathcal{N}) \iff F \preceq \hat{F} = B \backslash \hat{n} \phi \hat{n}.$$

Démonstration. Premièrement on prouve que, $F \in \mathcal{F}(\downarrow \mathcal{N}) \Rightarrow F \preceq \hat{F}$.

On choisit $F \in \mathcal{F}(\downarrow \mathcal{N})$, i.e. $(A \oplus BF)\downarrow \mathcal{N} \subset \downarrow \mathcal{N}$.

En utilisant le lemme 4.2, on a

$$(A \oplus BF)\downarrow \mathcal{N} \subset \downarrow \mathcal{N} \iff (A \oplus BF)\hat{n} \preceq \hat{n} \iff A\hat{n} \preceq \hat{n} \text{ et } BF\hat{n} \preceq \hat{n}.$$

Alors,

$$(A \oplus BF)\downarrow \mathcal{N} \subset \downarrow \mathcal{N} \Rightarrow BF\hat{n} \preceq \hat{n} \iff F \preceq B \backslash \hat{n} \phi \hat{n} = \hat{F}.$$

Maintenant on prouve que, $F \preceq \hat{F} \Rightarrow F \in \mathcal{F}(\downarrow \mathcal{N})$.

on choisit $F \preceq \hat{F}$, par isotonie des lois de multiplication et d'addition on a

$$(A \oplus BF)\hat{n} \preceq (A \oplus B\hat{F})\hat{n}.$$

De plus, en utilisant (f.1) et (f.3),

$$B\hat{F}\hat{n} = B(B\hat{n}\phi\hat{n})\hat{n} \preceq (\hat{n}\phi\hat{n})\hat{n} \preceq \hat{n}$$

et en prenant en compte l'hypothèse $A\hat{n} \preceq \hat{n}$ (i.e. $A\downarrow\mathcal{N} \subset \downarrow\mathcal{N}$),

on a $(A \oplus B\hat{F})\hat{n} \preceq \hat{n}$, i.e. $\hat{F} \in \mathcal{F}(\downarrow\mathcal{N})$,

et $(A \oplus BF)\hat{n} \preceq (A \oplus B\hat{F})\hat{n} \preceq \hat{n}$, i.e., $(A \oplus BF)\downarrow\mathcal{N} \subset \downarrow\mathcal{N}$,

donc

$$F \in \mathcal{F}(\downarrow\mathcal{N}).$$

□

Ce résultat montre que l'ensemble des "amis de $\downarrow\mathcal{N}$ " est un idéal principal généré par \hat{F} , i.e. $\mathcal{F}(\downarrow\mathcal{N}) = \{F \mid F \preceq \hat{F}\}$.

Corollaire 4.8. *Tout contrôleur $F \in \mathcal{F}(\downarrow\mathcal{N})$ est tel que*

$$(A \oplus BF)^*\hat{n} = \hat{n}.$$

Démonstration. $\downarrow\mathcal{N}$ est A -invariant, et $F \preceq \hat{F}$ nous conduit à $(A \oplus BF)\hat{n} \preceq \hat{n}$, par application du lemme 3.10 nous avons $(A \oplus BF)^*\hat{n} = \hat{n}$. □

4.2 Contrôleur de type retour d'état pour les graphes d'événements P-temporels

Dans cette section nous proposons une stratégie de synthèse d'une commande en boucle fermée pour les graphes d'événements P-temporels.

Nous supposons que les transitions internes ne sont pas toutes observables, i.e., la loi de commande est donnée par $u = F_{obs}M_{obs}x \oplus v$ avec M_{obs} une matrice booléenne qui relie les transitions internes observables aux entrées du correcteur F_{obs} . Si toutes les transitions internes sont observables alors $M_{obs} = \text{Id}$.

Sous les hypothèses données ci-dessus, la représentation du vecteur d'état est donnée par :

$$\begin{aligned} x &= \underline{A}x \oplus Bu = \underline{A}x \oplus BFx \oplus Bv \text{ avec } F = F_{obs}M_{obs} \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Nous cherchons un contrôleur F qui satisfait le problème de poursuite de modèle de référence G_{ref} et qui respecte les contraintes. La nature des systèmes $(max, +)$ linéaires (synchronisation et retard) fait que toute action extérieure ne peut que retarder le système. Le correcteur ne pourra donc que retarder l'entrée du système, et le système corrigé sera nécessairement supérieur ou égal au système nominal. Formellement, nous cherchons le plus grand contrôleur F tel que :

$$\begin{aligned} x &= (\underline{A} \oplus BF)x \oplus Bv \\ y &= Cx \preceq G_{ref}v \quad \forall v \text{ avec } x \preceq \bar{A} \odot x. \end{aligned}$$

Ce problème s'écrit de manière équivalente :

$$y = Cx = C(\underline{A} \oplus BF)^*Bv \preceq G_{ref}v \quad \forall v \text{ avec } x = (\underline{A} \oplus BF)x \oplus Bv \preceq \bar{A} \odot x$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow C(\underline{A} \oplus BF)^*B \preceq G_{ref} \text{ et } X = (\underline{A} \oplus BF)^*B \preceq \bar{A} \odot X \\ &\Leftrightarrow X = (\underline{A} \oplus BF)^*B \preceq C \setminus G_{ref} = X_0 \text{ et } X \preceq \bar{A} \odot X. \end{aligned} \quad (4.4)$$

De plus, on déduit les propriétés nécessaires suivantes :

$$\begin{aligned} X = (\underline{A} \oplus BF)^*B &\Rightarrow X = (\underline{A} \oplus BF)X \oplus B \\ &\Rightarrow X \succeq (\underline{A} \oplus BF)X \\ &\Rightarrow X \succeq \underline{A}X \text{ et } X \succeq BFX. \end{aligned}$$

Il vient que X devra satisfaire les contraintes suivantes :

$$\underline{A}X \preceq X \preceq \bar{A} \odot X \text{ et } X \preceq X_0$$

D'après la proposition (3.14), X est donc borné de la manière suivante :

$$X \preceq X_{opt} = \bar{A}^* \setminus X_0, \quad (4.5)$$

X_{opt} est le plus grand élément de référence qui respecte les contraintes. Le correcteur F recherché devra être tel que :

$$\begin{cases} X &= (\underline{A} \oplus BF)^*X \\ \text{et} & \\ X &\preceq X_{opt} \end{cases} \quad (4.6)$$

Proposition 4.9. *Une condition nécessaire et suffisante, pour que le correcteur F assure le respect des contraintes, est donnée par :*

$$(\underline{A} \oplus BF)^*B \succeq \bar{A}^*B.$$

Démonstration. Dans le cas d'un graphe d'événement P-temporel, la dynamique du système qui assure le respect des contraintes est donné par la matrice \bar{A}^* puisque la projection d'un vecteur d'état x dans $\text{Im} \bar{A}^* \cap \text{Im} \bar{A}_*$ est donnée par $\bar{A}^* \setminus x$ (voir la proposition 3.14). Or un vecteur d'état généré par la boucle fermée est dans $\text{Im}(\underline{A} \oplus BF)^*B$, pour qu'il respecte les contraintes il faut qu'il soit aussi dans $\text{Im} \bar{A}^*$, i.e, $\text{Im}(\underline{A} \oplus BF)^*B \subset \text{Im} \bar{A}^*$ qui est équivalent à $(\underline{A} \oplus BF)^*B \in \text{Im} \bar{A}^*$ (voir proposition 1.146)

$\Leftrightarrow \bar{A}^*(\underline{A} \oplus BF)^*B = (\underline{A} \oplus BF)^*B$,
 puisque $(\underline{A} \oplus BF)^* \succeq e$, on a $\bar{A}^*B \preceq (\underline{A} \oplus BF)^*B$.
 Il nous reste à prouver que si $\bar{A}^*B \preceq (\underline{A} \oplus BF)^*B$ alors $\bar{A}^*(\underline{A} \oplus BF)^*B = (\underline{A} \oplus BF)^*B$.

Premièrement,

$$\begin{aligned} \bar{A}^*(\underline{A} \oplus BF)^*B &\preceq \bar{A}^*(\bar{A} \oplus BF)^*B \text{ (car } \underline{A} \preceq \bar{A}) \text{ or} \\ \bar{A}^*(\bar{A} \oplus BF)^*B &= (\bar{A} \oplus BF)^*B \text{ voir équation (1.36)} \\ &= (\bar{A}^*BF)^*\bar{A}^*B \end{aligned}$$

Par hypothèse $\bar{A}^*B \preceq (\underline{A} \oplus BF)^*B$ donc

$$\begin{aligned} \bar{A}^*(\underline{A} \oplus BF)^*B &\preceq ((\underline{A} \oplus BF)^*BF)^*(\underline{A} \oplus BF)^*B \\ &\preceq (\underline{A} \oplus BF \oplus BF)^*B \\ &\preceq (\underline{A} \oplus BF)^*B \end{aligned}$$

Par ailleurs, $\bar{A}^* \succeq e$ donc, on a toujours $\bar{A}^*(\underline{A} \oplus BF)^*B \succeq (\underline{A} \oplus BF)^*B$.
 Par conséquent

$$\overline{A}^* B \preceq (\underline{A} \oplus BF)^* B \Rightarrow \overline{A}^* (\underline{A} \oplus BF)^* B = (\underline{A} \oplus BF)^* B.$$

□

Remarque 4.10. Puisque $(\underline{A} \oplus BF)^* B$ doit être supérieur ou égale à $\overline{A}^* B$, le modèle de référence G_{ref} doit être choisi tel que $G_{ref} \succeq C(\underline{A} \oplus BF)^* B \succeq C\overline{A}^* B$.

Lemme 4.11. Soit $\downarrow \tilde{\mathcal{X}}_{opt} = \{X | X \preceq X_{opt}\}$ un idéal principal (généré par X_{opt}). On a $\underline{A} \downarrow \tilde{\mathcal{X}}_{opt} \subseteq \downarrow \tilde{\mathcal{X}}_{opt}$; $\downarrow \tilde{\mathcal{X}}_{opt}$ est un idéal principal \underline{A} -invariant.

Démonstration. Il suffit de rappeler que $X_{opt} \succeq \underline{A}X_{opt}$. Le résultat est une application directe du lemme 4.2. □

Proposition 4.12. L'élément X_{opt} est le plus grand tel qu'il existe un F satisfaisant le problème (4.6).

Démonstration. Tout d'abord $X_{opt} = \overline{A}^* \setminus X_0 = \underline{A}^* (\overline{A}^* \setminus X_0) = \underline{A}^* X_{opt}$.

Donc il existe un F tel que :

$$X_{opt} = (\underline{A} \oplus BF)^* X_{opt} \quad (4.7)$$

(il suffit de prendre $F = \varepsilon$). Ceci est en concordance avec la remarque 4.6, c'est à dire que l'idéal principal $\downarrow \tilde{\mathcal{X}}_{opt} = \{X | X \preceq X_{opt}\}$ est \underline{A} -invariant et donc $(\underline{A} \oplus BF)$ -invariant.

Montrons que si F satisfait $X_{opt} = (\underline{A} \oplus BF)^* X_{opt}$ alors $X_{opt} \succeq X$.

En accord avec la remarque (4.10) $X_{opt} = \overline{A}^* \setminus X_0 = (C\overline{A}^*) \setminus G_{ref} \succeq (C\overline{A}^*) \setminus (C\overline{A}^* B) \succeq B$, par conséquent, $X_{opt} = (\underline{A} \oplus BF)^* X_{opt} \succeq (\underline{A} \oplus BF)^* B = X$. □

On cherche désormais le plus grand F qui satisfait l'équation 4.7.

Proposition 4.13. Le plus grand contrôleur F tel que $(\underline{A} \oplus BF)^* X_{opt} = X_{opt}$ est donné par

$$F_{max} = B \setminus X_{opt} \setminus X_{opt}.$$

Démonstration. En considérant l'idéal principal $\downarrow \tilde{\mathcal{X}}_{opt} = \{X | X \preceq X_{opt}\}$ qui est \underline{A} -invariant (voir lemme 4.11), il s'agit d'une application directe de la proposition (4.7) et de son corollaire. □

Lemme 4.14. $X_{opt} \setminus X_{opt}$ est dans l'image de \overline{A}^* .

Démonstration. Puisque $X_{opt} = \overline{A}^* \setminus X_0 \in \text{Im} \overline{A}^*$ nous avons

$$\begin{aligned} X_{opt} \setminus X_{opt} &= (\overline{A}^* \setminus X_{opt}) \setminus X_{opt} \text{ (voir équation 4.5)} \\ &= \overline{A}^* \setminus (X_{opt} \setminus X_{opt}) \text{ (voir équation 1.26)} \\ &= \overline{A}^* (X_{opt} \setminus X_{opt}) \text{ (voir lemme 3.10), qui achève la preuve.} \end{aligned} \quad \square$$

Proposition 4.15. Il suffit que $B(B \setminus (X_{opt} \setminus X_{opt})) = X_{opt} \setminus X_{opt}$ (i.e., $X_{opt} \setminus X_{opt} \in \text{Im} B$) pour que le contrôleur F_{max} conduise à une commande qui respecte les contraintes.

Démonstration. Puisque $X_{opt} \setminus X_{opt} \in \text{Im} \overline{A}^*$ (voir lemme 4.14).

$$\begin{aligned} (\underline{A} \oplus BF_{max})^* B &= (\underline{A} \oplus B(B \setminus (X_{opt} \setminus X_{opt})))^* B \\ &= (\underline{A} \oplus (X_{opt} \setminus X_{opt}))^* B \text{ par hypothèse} \\ &= (X_{opt} \setminus X_{opt})^* (\underline{A} (X_{opt} \setminus X_{opt})^*)^* B \text{ d'après équation 1.36, or} \\ &\quad (X_{opt} \setminus X_{opt})^* = (X_{opt} \setminus X_{opt}) \text{ voir théorème 1.110} \\ &= (X_{opt} \setminus X_{opt}) (\underline{A} (X_{opt} \setminus X_{opt}))^* B \\ &= \overline{A}^* (X_{opt} \setminus X_{opt}) (\underline{A} (X_{opt} \setminus X_{opt}))^* B \text{ voir lemme 4.14} \\ &= \overline{A}^* (\underline{A} \oplus BF_{max})^* B \text{ voir équation 1.36 et théorème 1.110.} \end{aligned}$$

□

Cette condition indique que la structure de B aura une influence sur la possibilité de respecter les contraintes.

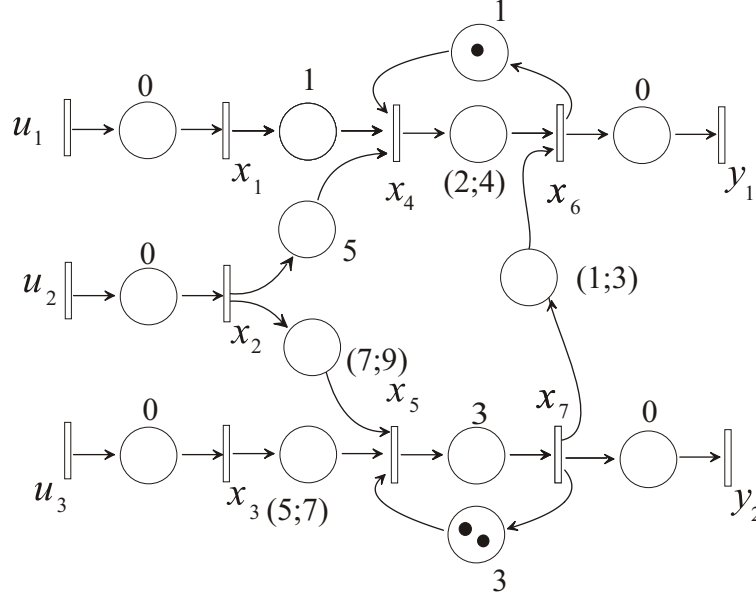


Figure 4.2 – Graphe d'événement P-temporel

Exemple 4.16. Considérons le graphe d'événement P-temporel de la figure 4.2 et un modèle de référence donné par la matrice $G_{ref} = C\bar{A}^*B$.

Nous supposons que les transitions x_1, x_2 et x_3 ne sont pas observables. Le correcteur F_{max} qui satisfait le problème de commande par modèle de référence est donné par :

$$F_{max} = B\setminus(X_{opt}\setminus X_{opt})$$

Alors, le correcteur optimal est donné par : $F_{obsmax} = F_{max}\setminus M_{obs}$ avec $M_{obs} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix}$.

$$F_{obsmax} = \begin{pmatrix} \delta^{-1}(\delta^3\gamma)^* & \delta^1(\delta^3\gamma)^* & \delta^{-3}(\delta^3\gamma)^* & \delta^{-2}(\delta^3\gamma)^* \\ \delta^{-11}(\delta^3\gamma)^* & (\delta^{-7} \oplus \delta^{-6}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & \delta^{-13}(\delta^3\gamma)^* & (\delta^{-10} \oplus \delta^{-9}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \\ \delta^{-9}(\delta^3\gamma)^* & (\delta^{-5} \oplus \delta^{-4}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & \delta^{-11}(\delta^3\gamma)^* & (\delta^{-8} \oplus \delta^{-7}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix}$$

et nous noterons $\hat{F}_{max} = F_{obsmax}M_{obs}$.

Notons que la condition $(\underline{A} \oplus B\hat{F}_{max})^* \succeq \bar{A}^*$ est respectée. Par conséquent, en accord avec la proposition 4.9, \hat{F}_{max} respecte les contraintes. Néanmoins subsiste un problème car F_{obsmax} n'est pas causal (coefficients négatifs sur les séries périodiques) et donc non réalisable (voir théorème 2.32). La projection de ce correcteur dans $\mathcal{M}_{in}^{xrat}[\gamma, \delta]$, $Pr_+(F_{obsmax}) = F_{obsmaxrat}$ ne satisfait plus la condition $(\underline{A} \oplus BF_{obsmaxrat}M_{obs})^* \succeq \bar{A}^*$, et donc plus les contraintes. Nous noterons $\hat{F}_{maxrat} = F_{obsmaxrat}M_{obs}$.

Afin de contourner le problème on se propose de considérer la structure de contrôle présentée figure 4.3 et introduite pour la première fois dans [C.A. Maia, 2005]. La méthodologie de synthèse est alors la suivante :

- Dans un premier temps, nous calculons un précompensateur qui préserve le respect des contraintes.
- Dans un deuxième temps, nous appliquons le correcteur causal $F_{obsmaxrat}$.

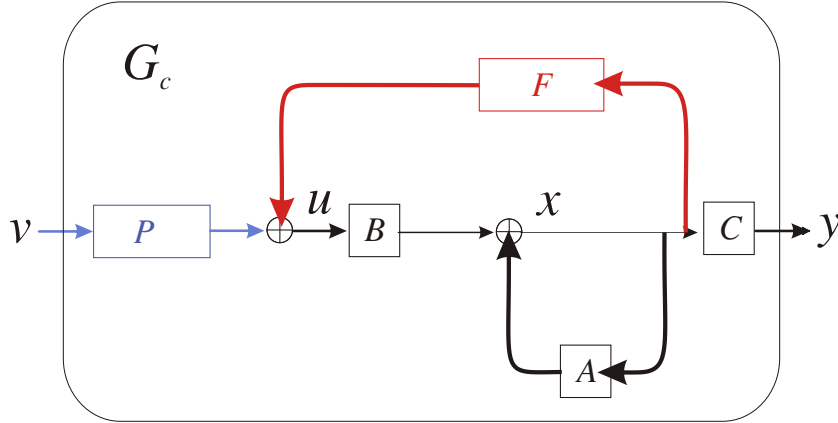


Figure 4.3 – Correcteur retour d'état.

Soit un GET modélisé par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x = \underline{A}x \oplus \underline{B}Pv \\ y = \underline{C}x, \end{cases}$$

où P est un précompensateur. Ceci est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} x = \underline{A}^* \underline{B}Pv \\ y = \underline{C} \underline{A}^* \underline{B}Pv = \underline{H}Pv, \end{cases} \quad (4.8)$$

Nous rappelons que la matrice de transfert du GET, sans considérer le précompensateur, est donnée par $H = \underline{C} \underline{A}^* \underline{B}$. Le précompensateur qui préserve la relation de transfert entre l'entrée et l'état $x = \underline{A}^* \underline{B}u$ est donné par $P_{x0} = (\underline{A}^* \underline{B}) \backslash (\underline{A}^* \underline{B})$ (voir proposition 3.6).

Proposition 4.17. *Si la condition nécessaire et suffisante donnée dans la proposition 4.9 est respectée, alors, le précompensateur qui préserve l'état est donné par :*

$$P = ((\underline{A} \oplus \underline{B} \hat{F}_{max})^* \underline{B}) \backslash ((\underline{A} \oplus \underline{B} \hat{F}_{max})^* \underline{B}) \text{ avec } \hat{F}_{max} = F_{obsmax} M_{obs}$$

et il garantit le respect des contraintes.

Démonstration. Puisque $(\underline{A} \oplus \underline{B} \hat{F}_{max})^* \succeq \overline{\underline{A}}^*$ alors $x = (\underline{A} \oplus \underline{B} \hat{F}_{max})^* \underline{B}Pv = (\underline{A} \oplus \underline{B} \hat{F}_{max})^* \underline{B}u = \overline{\underline{A}}^* (\underline{A} \oplus \underline{B} \hat{F}_{max})^* \underline{B}u$ (puisque $a(a \backslash a) = a$ (voir f.3) et grâce au corollaire 1.147), c'est à dire $x \in \text{Im} \overline{\underline{A}}^*$ (x respecte les contraintes (voir proposition 4.9)). \square

Exemple 4.18. *A partir du correcteur $\hat{F}_{max} = F_{obsmax} M_{obs}$ donné dans l'exemple (4.16) nous obtenons le précompensateur suivant :*

$$P = \begin{pmatrix} (\delta^3\gamma)^* & \delta^8(\delta^3\gamma)^* & \delta^6(\delta^3\gamma)^* \\ \delta^{-10}(\delta^3\gamma)^* & (e \oplus \delta^1\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & (\delta^{-2} \oplus \delta^{-1}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \\ \delta^{-8}(\delta^3\gamma)^* & (\delta^2 \oplus \delta^3\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & (e \oplus \delta^1\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix},$$

qui lui non plus n'est pas causal. Nous utiliserons donc une relation de parallélisme introduite dans [Katz, 2006] afin d'établir un précompensateur causal qui garantit le respect des contraintes ($x \in \text{Im} \overline{A}^*$).

Définition 4.19 ([Katz, 2006], Relation de parallélisme). Si $P' = \alpha P$ avec α un monôme de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ et $P, P' \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^n$ alors $P \sim P'$. La relation \sim est appelée relation de parallélisme.

Proposition 4.20. Considérons l'ensemble $\mathcal{P} = \{P' | P' \sim P\}$. Tous les éléments de \mathcal{P} garantissent le respect des contraintes.

Démonstration. Soit P un précompensateur qui garantit le respect des contraintes. Par conséquent $\underline{A}^*BP = \overline{A}^* \underline{A}^*BP$ (voir proposition 4.9).

Par ailleurs, la multiplication par un monôme α étant commutative, si on considère un élément $P' = \alpha P$ alors on a $\underline{A}^*BP' = \underline{A}^*B\alpha P = \underline{A}^*BP\alpha = \overline{A}^* \underline{A}^*BP\alpha = \overline{A}^* \underline{A}^*B\alpha P = \overline{A}^* \underline{A}^*BP'$.

C'est à dire que P' est un précompensateur qui permet de respecter les contraintes. \square

Notation 4.21. Soit une matrice $P \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]^{n \times q}$ avec $P = \begin{pmatrix} P_{11} & \cdots & P_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & \cdots & P_{nq} \end{pmatrix}$

$$\text{on note } P_{[0]} = \begin{pmatrix} P_{11[0]} & \cdots & P_{1q[0]} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1[0]} & \cdots & P_{nq[0]} \end{pmatrix}$$

avec $P_{ij[0]} = \delta^{n_0} \gamma^{t_0}$ le premier monôme du polynôme p_{ij} transitoire de P_{ij} ($P_{ij} = p_{ij} \oplus_k q_{ij} r_{ij}^*$).

Remarque 4.22. Le plus petit précompensateur causal $p' \in \mathcal{P}$ tel que $p' \succeq p$, est donné par $p' = \alpha p$ avec $\alpha = \delta^{n_\alpha} \gamma^{t_\alpha}$, $-n_\alpha = \bigwedge$ (des exposants en δ des monômes $P_{ij[0]}$) et $-t_\alpha = \bigwedge$ (des exposants en γ des monômes $P_{ij[0]}$). De cette manière tous les exposants (en δ et en γ) de la matrice αP sont supérieurs à 0.

Proposition 4.23. Si $(\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^* \succeq \overline{A}^*$ et si on applique au GEP-T le précompensateur P' causal donné par :

$$P' = \alpha P = \alpha((\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^* B) \backslash ((\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^* B)$$

alors tout correcteur F tel que $F \preceq F_{obsmax}$, associé à P' garantit le respect des contraintes.

Démonstration. Considérons $F \preceq F_{obsmax}$.

$$x = (\underline{A} \oplus BFM_{obs})^* B \alpha P v = \alpha(\underline{A} \oplus BFM_{obs})^* B P v \text{ (voir équation 4.8)}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha(\underline{A} \oplus BFM_{obs})^* B \left(((\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^* B) \backslash ((\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^* B) \right) v$$

puisque $(\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^* \succeq \underline{A}^*$,

$$x = \alpha(\underline{A} \oplus BFM_{obs})^* B \left(((\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^* \underline{A}^* B) \backslash ((\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^* B) \right) v \text{ (voir équation 1.36)}$$

et en utilisant la propriété 1.111 on obtient

$$x = \alpha(\underline{A} \oplus BFM_{obs})^* B \left(((\underline{A}^* B) \backslash ((\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^* B)) \right) v$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha(\underline{A}^*BFM_{obs})^*\underline{A}^*B\left((\underline{A}^*B)\backslash((\underline{A}^*B\widehat{F}_{max})^*\underline{A}^*B)\right)v \text{ (voir équation 1.36)}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha(\underline{A}^*BFM_{obs})^*\underline{A}^*B\left((\underline{A}^*B)\backslash(\underline{A}^*B(\widehat{F}_{max}\underline{A}^*B)^*)\right)v \text{ (voir équation 1.35)}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha(\underline{A}^*BFM_{obs})^*\underline{A}^*B(\widehat{F}_{max}\underline{A}^*B)^*v \text{ (voir f.3)}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha(\underline{A}^*BFM_{obs})^*(\underline{A}^*B\widehat{F}_{max})^*\underline{A}^*Bv \text{ (voir équation 1.35)}$$

$$\Leftrightarrow x = \alpha(\underline{A}^*B\widehat{F}_{max})^*\underline{A}^*Bv \text{ (puisque } (\underline{A}^*BFM_{obs})^* \preceq (\underline{A}^*B\widehat{F}_{max})^*)}$$

$$\Leftrightarrow x = (\underline{A} \oplus B\widehat{F}_{max})^*B\alpha v \text{ (voir équation 1.36).}$$

Par conséquent, les contraintes sont respectées. \square

Corollaire 4.24. *Le plus grand correcteur causal de type retour d'état est donc donné par $F_{obsmaxrat} = Pr_+(F_{obsmax})$.*

Démonstration. Immédiat puisque $Pr_+(F_{obsmax}) \preceq F_{obsmax}$. \square

Exemple 4.25. *Considérons le précompensateur P donné dans l'exemple 4.18, le plus petit précompensateur causal P' tel que $P' \sim P$ est donné par :*

$$P' = \alpha P = \begin{pmatrix} \delta^{10}(\delta^3\gamma)^* & \delta^{18}(\delta^3\gamma)^* & \delta^{16}(\delta^3\gamma)^* \\ (\delta^3\gamma)^* & (\delta^{10} \oplus \delta^{11}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & (\delta^8 \oplus \delta^9\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \\ \delta^2(\delta^3\gamma)^* & (\delta^{12} \oplus \delta^{13}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & (\delta^{10} \oplus \delta^{11}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix} \text{ avec } \alpha = \delta^{10}\gamma^0.$$

Par conséquent, le plus grand correcteur causal inférieur ou égal à F_{obsmax} est donné par :

$F_{obsmaxrat} = Pr_+(F_{obsmax})$ (voir corollaire 4.24)

$$F_{obsmaxrat} = \begin{pmatrix} \delta^2\gamma(\delta^3\gamma)^* & \delta^1(\delta^3\gamma)^* & \gamma(\delta^3\gamma)^* & \delta^1\gamma(\delta^3\gamma)^* \\ \delta^1\gamma^4(\delta^3\gamma)^* & (\gamma^3 \oplus \delta^5\gamma^4)(\delta^6\gamma^2)^* & \delta^2\gamma^5(\delta^3\gamma)^* & (\delta^2\gamma^4 \oplus \delta^3\gamma^5)(\delta^6\gamma^2)^* \\ \gamma^3(\delta^3\gamma)^* & (\delta^1\gamma^2 \oplus \delta^2\gamma^3)(\delta^6\gamma^2)^* & \delta^1\gamma^4(\delta^3\gamma)^* & (\delta^4\gamma^4 \oplus \delta^5\gamma^5)(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix}$$

4.2.0.1 Alternative

Lorsque la condition nécessaire et suffisante de la proposition 4.9 n'est pas vérifiée, il faut soit remettre en cause la spécification du problème donnée par G_{ref} , soit considérer une autre structure de contrôle (par exemple augmenter le nombre d'entrée de contrôle).

Dans la suite nous proposons la structure présentée sur la figure 4.4. La synthèse du correcteur P est obtenue en considérant la section 3.3 et la synthèse de F est celle d'un GET classique.

Proposition 4.26. *Considérons un graphe d'événements P-temporel, si il existe un précompensateur P qui vérifie $HP = C\underline{A}^*BP \preceq G_{ref}$, alors le plus grand correcteur de type retour d'état, comme indiqué dans la figure 4.4, est donné par :*

$$F_{max} = (HP)\backslash(HP)\phi(\underline{A}^*BP).$$

Démonstration. Tout d'abord $C(\underline{A} \oplus BPF_{max})^*BP \succeq C\underline{A}^*BP = HP$.

Puis,

$$\begin{aligned} C(\underline{A} \oplus BPF_{max})^*BP &= C(\underline{A}^*BP((HP)\backslash(HP)\phi(\underline{A}^*BP)))^*\underline{A}^*BP \\ &= C\underline{A}^*BP(((HP)\backslash(HP)\phi(\underline{A}^*BP))\underline{A}^*BP)^* \\ &\preceq C\underline{A}^*BP((HP)\backslash(HP))^* \end{aligned}$$

$(HP)\backslash(HP)$ est une étoile donc $((HP)\backslash(HP))^* = (HP)\backslash(HP)$ alors

$C(\underline{A} \oplus BPF_{max})^*BP \preceq C\underline{A}^*BP((HP)\backslash(HP)) = HP((HP)\backslash(HP)) = HP$. Donc

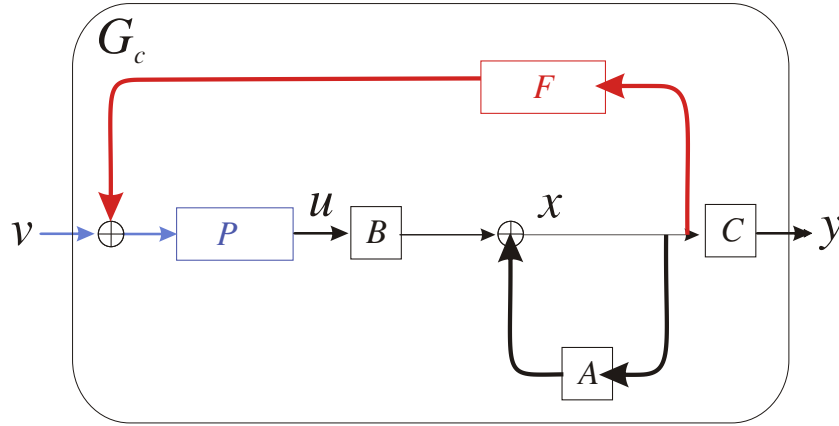


Figure 4.4 – Structure de contrôle avec un précompensateur interne à la boucle.

$$C(\underline{A} \oplus BPF_{max})^*BP = C\underline{A}^*BP.$$

Enfin, supposons qu'il existe F'_{max} tel que :

$$G_{ref} \succeq C(\underline{A} \oplus BPF'_{max})^*BP \succ C(\underline{A} \oplus BPF_{max})^*BP = C\underline{A}^*BP$$

$$G_{ref} \succeq C(\underline{A}^*BPF'_{max})^*\underline{A}^*BP \succ C\underline{A}^*BP$$

$$G_{ref} \succeq C\underline{A}^*BP(F'_{max}\underline{A}^*BP)^* \succ C\underline{A}^*BP$$

donc il existe $P' = P(F'_{max}\underline{A}^*BP)^*$ tel que $P' \succeq P$ et $G_{ref} \succeq C\underline{A}^*BP' \succ C\underline{A}^*BP$, ce qui est impossible puisque P est le plus grand précompensateur.

Donc F_{max} est le plus grand correcteur. \square

Exemple 4.27. Si on considère le graphe d'événement P-temporel donné dans la figure 3.6 et le modèle de référence donné dans la section 3.3.2 par :

$$G_{ref} = \begin{pmatrix} \delta^{14}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{21}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{19}(\delta^4\gamma)^* \\ \delta^{11}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{18}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{16}(\delta^4\gamma)^* \end{pmatrix}$$

Nous avons obtenu le précompensateur suivant :

$$P_{opt} = \begin{pmatrix} \delta^7(\delta^4\gamma)^* & \delta^{14}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{12}(\delta^4\gamma)^* \\ (\delta^4\gamma)^* & \delta^7(\delta^4\gamma)^* & \delta^5(\delta^4\gamma)^* \\ \delta^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^9(\delta^4\gamma)^* & \delta^7(\delta^4\gamma)^* \end{pmatrix}.$$

Le plus grand correcteur ayant la même structure que celui de la figure 4.4 est donné par :

$$F_{max} = (HP) \setminus (HP) \phi(\underline{A}^*BP)$$

$$F_{max} = \begin{pmatrix} \delta^{-7}(\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* & \delta^{-2}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-8}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-7}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-11}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-10}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-14}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-11}(\delta^4\gamma)^* \\ \delta^{-14}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-7}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-9}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-15}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-14}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-18}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-17}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-21}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-18}(\delta^4\gamma)^* \\ \delta^{-12}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-5}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-7}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-13}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-12}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-16}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-15}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-19}(\delta^4\gamma)^* & \delta^{-16}(\delta^4\gamma)^* \end{pmatrix}$$

F_{max} n'est pas causal, sa projection dans l'ensemble des éléments causaux donne la matrice suivante :

$$Pr_+(F_{max}) = \begin{pmatrix} \delta^1\gamma^2(\delta^4\gamma)^* & (\delta^4\gamma)^* & \delta^2\gamma(\delta^4\gamma)^* & \gamma^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^1\gamma^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^1\gamma^3(\delta^4\gamma)^* & \delta^2\gamma^3(\delta^4\gamma)^* & \delta^2\gamma^4(\delta^4\gamma)^* & \delta^1\gamma^3(\delta^4\gamma)^* \\ \delta^2\gamma^4(\delta^4\gamma)^* & \delta^1\gamma^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^3\gamma^3(\delta^4\gamma)^* & \delta^1\gamma^4(\delta^4\gamma)^* & \delta^2\gamma^4(\delta^4\gamma)^* & \delta^2\gamma^5(\delta^4\gamma)^* & \delta^3\gamma^5(\delta^4\gamma)^* & \delta^3\gamma^6(\delta^4\gamma)^* & \delta^2\gamma^5(\delta^4\gamma)^* \\ \gamma^3(\delta^4\gamma)^* & \delta^3\gamma^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^1\gamma^2(\delta^4\gamma)^* & \delta^3\gamma^4(\delta^4\gamma)^* & \gamma^3(\delta^4\gamma)^* & \gamma^4(\delta^4\gamma)^* & \delta^1\gamma^4(\delta^4\gamma)^* & \delta^1\gamma^5(\delta^4\gamma)^* & \gamma^4(\delta^4\gamma)^* \end{pmatrix}$$

4.3 Contrôleur de type retour de sortie pour les GEP-T.

Dans cette section nous allons étendre les résultats précédents au contrôleur de type retour de sortie. F est intégré dans le système comme indiqué sur la figure 4.5, et conduit à la loi de commande $u = Fy \oplus v$ et au système suivant :

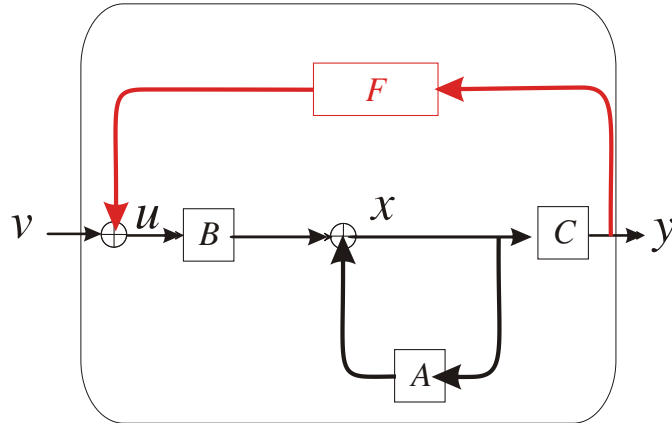


Figure 4.5 – Contrôleur de type retour de sortie.

$$\begin{aligned} x &= \underline{A}x \oplus Bu = \underline{A}x \oplus BFy \oplus Bv \\ y &= Cx. \end{aligned}$$

Nous cherchons un contrôleur F qui satisfait le problème de poursuite de modèle de référence G_{ref} et qui garantit le respect des contraintes.

En notant $K = FC$ ce problème se ramène à la synthèse d'un contrôleur de type retour d'état :

$$\begin{cases} y &= C(\underline{A} \oplus BK)^* B \preceq G_{ref} \\ X &= (\underline{A} \oplus BK)^* B \preceq C \setminus G_{ref} = X_0 \end{cases}$$

Nous avons donc immédiatement (en appliquant les résultats de la section 4.2) :

$$\begin{aligned} K_{max} &= B \setminus (X_{opt} \setminus X_{opt}) \\ \text{et } F_{max} &= B \setminus (X_{opt} \setminus X_{opt}) \setminus C, \end{aligned}$$

avec $X_{opt} = \overline{\underline{A}}^* \setminus X_0$.

Avec la condition nécessaire et suffisante pour le respect des contraintes qui est :

$$(\underline{A} \oplus BF_{max}C)^* B \succeq \overline{\underline{A}}^* B.$$

Et le précompensateur optimal :

$$P = ((\underline{A} \oplus BF_{max}C)^* B) \setminus ((\underline{A} \oplus BF_{max}C)^* B)$$

Exemple 4.28. *Considérons le graphe d'événement P-temporel de la figure 4.2 et un modèle de référence donné par la matrice $G_{ref} = C\overline{A}^*B$.*

Le correcteur F_{max} , de type retour de sortie, qui satisfait le problème de poursuite de modèle de référence est donné par :

$$F_{max} = B\backslash(X_{opt}\not\!X_{opt})\not\!C$$

$$F_{max} = \begin{pmatrix} \delta^{-3}(\delta^3\gamma)^* & \delta^{-2}(\delta^3\gamma)^* \\ \delta^{-13}(\delta^3\gamma)^* & (\delta^{-10} \oplus \delta^{-9}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \\ \delta^{-11}(\delta^3\gamma)^* & (\delta^{-8} \oplus \delta^{-7}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix}$$

Notons que la condition $(\underline{A} \oplus BF_{max}C)^ \succeq \overline{A}^*$ est respectée. Néanmoins subsiste un problème car F_{max} n'est pas causal (coefficient négatif sur les séries périodiques) et donc non réalisable (voir théorème 2.32). La projection de ce correcteur dans $\mathcal{M}_{in}^{axrat}[[\gamma, \delta]]$, $Pr_+(F_{max}) = F_{maxrat}$ ne satisfait plus la condition $(\underline{A} \oplus BF_{maxrat}C)^* \succeq \overline{A}^*$, et donc plus les contraintes.*

A partir du correcteur F_{max} nous obtenons le précompensateur suivant :

$$P = \begin{pmatrix} (\delta^3\gamma)^* & \delta^8(\delta^3\gamma)^* & \delta^6(\delta^3\gamma)^* \\ \delta^{-10}(\delta^3\gamma)^* & (e \oplus \delta^1\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & (\delta^{-2} \oplus \delta^{-1}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \\ \delta^{-8}(\delta^3\gamma)^* & (\delta^2 \oplus \delta^3\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & (e \oplus \delta^1\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix}$$

Le plus petit précompensateur causal P' tel que $P' \sim P$ est donné par :

$$P' = \begin{pmatrix} \delta^{10}(\delta^3\gamma)^* & \delta^{18}(\delta^3\gamma)^* & \delta^{16}(\delta^3\gamma)^* \\ (\delta^3\gamma)^* & (\delta^{10} \oplus \delta^{11}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & (\delta^8 \oplus \delta^9\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \\ \delta^2(\delta^3\gamma)^* & (\delta^{12} \oplus \delta^{13}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* & (\delta^{10} \oplus \delta^{11}\gamma)(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix}.$$

Le plus grand correcteur causal inférieur ou égal à F_{max} est donné par :

$$F_{maxrat} = Pr_+(F_{max})$$

$$F_{maxrat} = \begin{pmatrix} \gamma(\delta^3\gamma)^* & \delta^1\gamma(\delta^3\gamma)^* \\ \delta^2\gamma^5(\delta^3\gamma)^* & (\delta^2\gamma^4 \oplus \delta^3\gamma^5)(\delta^6\gamma^2)^* \\ \delta^1\gamma^4(\delta^3\gamma)^* & (\delta^4\gamma^4 \oplus \delta^5\gamma^5)(\delta^6\gamma^2)^* \end{pmatrix}$$

Remarque 4.29. *Le calcul de ces exemples peut être effectué en utilisant la boîte à outils Scilab (voir [SW2001, 2001]).*

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit le problème de commande en boucle fermée des graphes d'événements P-temporels. Ce type de commande utilise les informations sur le système pour contrôler (retarder) l'entrée des jetons dans le graphe, afin d'éviter une accumulation inutile de jetons à l'intérieur du graphe et afin de garantir le respect des contraintes.

Nous avons, ensuite, présenté une méthode pour résoudre le problème de non causalité du correcteur F . Cette méthode consiste à calculer un précompensateur P qui préserve l'état et qui par conséquent préserve le respect des contraintes. Dans le cas où P n'est pas causal, nous avons utilisé une relation de parallélisme qui permet d'établir un précompensateur causal garantissant le respect des contraintes.

Une perspective serait de vérifier dans quelle mesure l'opérateur de parallélisme maintient l'optimalité de la solution. Ensuite, nous avons appliqué la projection du correcteur dans l'ensemble des éléments causaux ceci nous donne un correcteur causal F_+ et nous avons prouvé que le système corrigé par le précompensateur P et le contrôleur en boucle fermée F_+ respecte les contraintes.

Une poursuite de ce travail consisterait à étendre les résultats introduits ici aux systèmes incertains tel qu'ils ont été introduits dans la section 2.6. Les outils nécessaires concernant la résiduation sur les dioïdes d'intervalles ont été introduits dans la section 1.11.

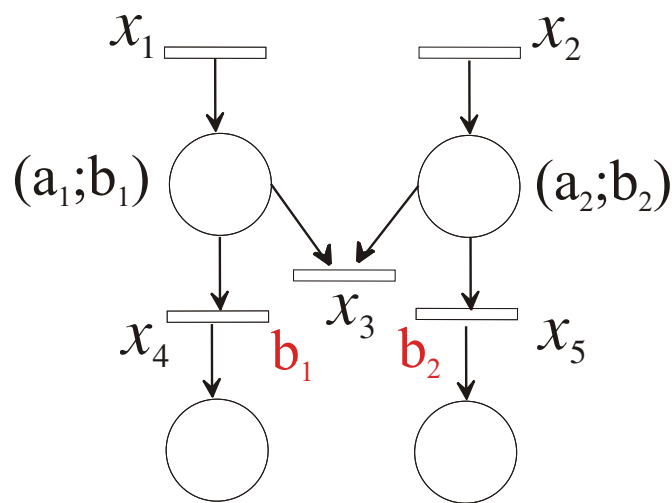


Figure 4.6 – Modélisation graphique de la mort d'un jeton dans un graphe d'événements P-temporel par un RDP P-temporel T-temporisé

Les correcteurs étudiés ici sont synthétisés de manière à respecter les contraintes. Néanmoins, si des perturbations agissent sur le système, il se peut que des contraintes soient malgré tout violées (pensons à une porte de four bloquée au moment de l'évacuation des pains). Le modèle considéré ici ne tient pas compte de la "mort" des jetons, ou plus exactement n'envisage pas son retrait du graphe (un pain brûlé serait tout de même utilisé pour fabriquer un sandwich). La figure 4.6 présente un modèle de réseau de Petri tenant compte du retrait des jetons violant les contraintes. Les temporisateurs b_1 et b_2 sont associées aux transitions x_4 et x_5 qui modélisent l'évacuation des jetons "morts". La disparition des jetons induit une modification du modèle (une commutation de modèle) qu'il serait intéressant de prendre en compte lors de la synthèse des contrôleurs. Notons que les travaux de [van den Boom and Schutter, 2006] sont une première étape en ce sens.

Bibliographie

- [Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.-J., and Quadrat, J.-P. (1992). *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons.
- [Basile and Marro, 1992] Basile, T. and Marro, M. (1992). *Controlled and Conditioned Invariants in Linear System Theory*. Prentice Hall.
- [Baynat, 2000] Baynat, B. (2000). *Théorie des files d'attentes : des chaînes de Markov aux réseaux à forme produit*. Ed Hermès.
- [Berthomieu and Diaz, 1991] Berthomieu, B. and Diaz, M. (1991). Modeling and Verification of Time Dependent Systems using time petri nets. *IEEE Trans. on Software Eng*, volume 17(3):259–273.
- [Birkhoff, 1940] Birkhoff, G. (1940). *Lattice theory*. Number XXV. Providence, Rhode Island.
- [Blyth and Janowitz, 1972] Blyth, T.-S. and Janowitz, M.-F. (1972). *Residuation Theory*. Pergamon press.
- [Boimond and Ferrier, 1996] Boimond, J.-L. and Ferrier, J.-L. (1996). Internal Model Control and Max-Algebra. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 41(3):457–461.
- [C.A. Maia, 2005] C.A. Maia, L. Hardouin, R. S. M. B. C. (2005). On the model reference control for max-plus linear systems. In *44th IEEE CDC-ECC'05*, Seville, Espagne.
- [Ciardo et al., 1997] Ciardo, G., Nicol, D., and Trivedi, K. (1997). Discrete-Event Simulation of Fluid Stochastic Petri Nets. In *IEEE/PNPM*, pages 217–225, France.
- [Cohen, 1998a] Cohen, G. (1998a). Residuation and Applications. In *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique*, Noirmoutier, France.
- [Cohen, 1998b] Cohen, G. (1998b). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. In *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique*, Noirmoutier, France.
- [Cohen et al., 1983] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1983). Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France.
- [Cohen et al., 1985] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1985). A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 30(3):210–220.
- [Cohen et al., 1991] Cohen, G., Gaubert, S., Nikoukhah, R., and Quadrat, J.-P. (1991). Second Order Theory of Min-linear Systems and its Application to Discrete Event Systems. In *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, England.
- [Cohen et al., 1996] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1996). Kernels, images and projections in dioïds. In *Proceedings of WODES'96*, Edinburgh.
- [Cohen et al., 1997] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1997). Linear projectors in the max-plus algebra. In *Proceedings of the IEEE-Mediterranean Conference*, Cyprus.
- [Cohen et al., 2005a] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (2005a). L'algèbre des sandwiches. *Pour La Science*, (328).

- [Cohen et al., 2006] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (2006). Projection and aggregation in max-plus algebra, current trends in nonlinear systems and control. *in Honor of Petar Kokotovic and Turi Nicosia*.
- [Cohen et al., 2005b] Cohen, G., Gaubert, S., Quadrat, J., and Singer, I. (2005b). Maxplus convex sets and functions <<http://www-rocq.inria.fr/metalau/quadrat/mpcvxfunc.pdf>>, and in idempotent mathematics and mathematical physics. *Contemporary Mathematics*, (377):105–130.
- [Cohen et al., 1998] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.-P. (1998). Max-plus algebra and system theory : Where we are and where to go now. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes, France.
- [Cohen et al., 2003] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.-P. (2003). Projective max-plus semimodules. In *International Workshop on Max-algebra (IWMA)*, Birmingham (UK).
- [Cohen et al., 1984] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1984). Linear system theory for discrete-event systems. In *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada.
- [Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J.-P., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1):39–58.
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Cottenceau et al., 1999] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (1999). Synthesis of Greatest Linear Feedback for TEG in Dioid. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 44(6):1258–1262.
- [Cuninghame-Green, 1979] Cuninghame-Green, R.-A. (1979). *Minimax Algebra*. Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer.
- [Davey and Priestley, 2002] Davey, B.-A. and Priestley, H.-A. (2002). *Introduction to Lattices and Order, Second Edition*. Cambridge University Press.
- [Dubreil and Dubreil-Jacotin, 1964] Dubreil, P. and Dubreil-Jacotin, M. (1964). *Leçons d'Algèbre Moderne, 2nd ed.* Dunod, Paris.
- [Dubreil-Jacotin et al., 1953] Dubreil-Jacotin, M.-L., Lesieur, L., and Croisot, R. (1953). *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, volume XXI of *Cahiers Scientifiques*. Gauthier Villars, Paris, France.
- [Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse, Ecole des Mines de Paris.
- [Gaubert, 1995] Gaubert, S. (1995). Resource Optimization and (min,+) Spectral Theory. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(11):1931–1934.
- [Gaubert and Katz, 2003a] Gaubert, S. and Katz, R. (2003a). Rational semimodules over the max-plus semiring and geometric approach of discrete event systems. to appear in *Kybernetika*.
- [Gaubert and Katz, 2003b] Gaubert, S. and Katz, R. (2003b). Reachability and invariance problems in max-plus algebra. In *Positive Systems : Theory and Applications (POSTA'2003)*, Rome, Italie.
- [Gondran and Minoux, 1985] Gondran, M. and Minoux, M. (1985). *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, France.

- [Gondran and Minoux, 2001] Gondran, M. and Minoux, M. (2001). *Graphes, dioïdes et semi-anneaux*. Tec & Doc, Paris, France.
- [Gruet, 1995] Gruet, B. (1995). Structure de commande en boucle fermée des systèmes à événements discrets. Rapport de stage de DEA, DEA Automatique et Informatique Appliquée, Ecole Centrale de Nantes, France.
- [Gunawardena, 1998] Gunawardena, J., editor (1998). *Idempotency*. Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press.
- [Hardouin, 2004] Hardouin, L. (2004). *Sur la commande linéaire de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max,+)*. Habilitation à diriger des recherches, Université d'Angers, Angers, France.
- [Houssin, 2003] Houssin, L. (2003). Contribution à l'étude des systèmes à événements discrets dans l'algèbre des dioïdes. Applications aux systèmes de transport. Rapport de stage de DEA, DEA Automatique et Informatique Appliquée, Nantes-Angers, France.
- [Jaulin et al., 2001] Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., and Walter, E., editors (2001). *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation, Robust Control and Robotics*. Springer-Verlag, London.
- [Katz, 2006] Katz, R. (2006). Max-plus (a,b)-invariant spaces and control of timed discrete event systems. To appear in IEEE Trans. on Automatic Control.
- [Khansa et al., 1996] Khansa, W., Denat, J.-P., and Collart-Dutilleul, S. (1996). P-Time Petri Nets for Manufacturing Systems. In *Workshop On Discrete Event Systems (WODES'1996)*, Edinburgh, (U.K.).
- [Kumar and Garg, 1995] Kumar, R. and Garg, V. (1995). *Modeling and Control of Logical Discrete Event Systems*. Number ISBN 0-7923-9538-7 in Research Monograph. Kluwer Academic Publishers, Norwell Massachusetts.
- [Lahaye, 2000] Lahaye, S. (2000). *Contribution à l'étude des systèmes linéaires non stationnaires dans l'algèbre des dioïdes*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Lüders and Santos-Mendes, 2002] Lüders, R. and Santos-Mendes, R. (2002). Multivariable Control of Discrete Event Systems in Dioids. In *IFAC World Congress on Automatic Control*, Barcelona.
- [Le Boudec and Thiran, 2001] Le Boudec, J.-Y. and Thiran, P. (2001). *Newtork Calculus*. Springer-Verlag. http://icalwww.epfl.ch/PS_files/NetCal.htm.
- [Lhommeau, 2004] Lhommeau, M. (2004). *Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max,+). 1: Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. 2: Synthèse de correcteurs en présence de perturbations*. Thèse, Université d'Angers, France.
- [Lhommeau et al., 2003] Lhommeau, M., Hardouin, L., and Cottenceau, B. (2003). Control for (max,+)-linear systems with disturbance. In *Positive Systems : Theory and Applications (POSTA'2003)*, Rome, Italie.
- [Litvinov and Sobolevskiï, 2001] Litvinov, G.-L. and Sobolevskiï, A.-N. (2001). Idempotent Interval Analysis and Optimization Problems. *Reliable Computing*, 7(5).
- [Lotito et al., 2001] Lotito, P., Mancinelli, E., and Quadrat, J.-P. (2001). A Minplus Derivation of the Fundamental Car-Traffic Law. Research Report 4324, INRIA. <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4324.html>.
- [MacMillan and Dill, 1992] MacMillan, K. and Dill, D. (1992). Algorithms for Interface Timing Verification. In *in Proceedings of the IEEE International Conference on Computer Design: VLSI in Computers and Processors*.

- [Maia et al., 2003] Maia, C.-A., Hardouin, L., Santos-Mendes, R., and Cottenceau, B. (2003). Optimal Closed-Loop Control of Timed-Event Graphs in Dioids. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 48:2284–2287.
- [Menache, 1982] Menache, M. (1982). *Analyse de réseaux de Petri temporisés et application aux systèmes distribués*. Thèse, Université Paul Sabatier, Toulouse, France.
- [Menguy, 1997] Menguy, E. (1997). *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Menguy et al., 2000a] Menguy, E., Boimond, J.-L., Hardouin, L., and Ferrier, J.-L. (2000a). A First Step Towards Adaptive Control for Linear in Max Algebra. *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, 10(4):347–367.
- [Menguy et al., 2000b] Menguy, E., Boimond, J.-L., Hardouin, L., and Ferrier, J.-L. (2000b). Just In Time Control of Timed Event Graphs: Update of Reference Input, Presence of Uncontrollable Input. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(11):2155–2158.
- [Merlin, 1974] Merlin, P. (1974). *A study of recoverability of communication protocols*. Ph.d. thesis, Computer science Dep., University of California, Irvine, USA.
- [Moller, 1988] Moller, P. (1988). *Théorie algébrique des Systèmes à Événements Discrets*. Thèse, École des Mines de Paris.
- [Moore, 1979] Moore, R. (1979). *Methods and Applications of Interval Analysis*. SIAM Publ., Philadelphia.
- [Munoz and Malabre, 1998] Munoz, J.-A. T. and Malabre, M. (1998). Simultaneous model matching and disturbance rejection by state feedback. In *In Proceedings of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*, Tampa, Florida USA.
- [Murata, 1989] Murata, T. (1989). "Petri Nets: Properties, Analysis and Applications". *IEEE Proceedings*, 77(4):541–580.
- [Ouerghi and Hardouin, 2006a] Ouerghi, I. and Hardouin, L. (2006a). Control synthesis for p-temporal event graphs. In *Workshop On Discrete Event Systems (WODES'2006)*, Ann Arbor, Michigan, USA.
- [Ouerghi and Hardouin, 2006b] Ouerghi, I. and Hardouin, L. (2006b). A precompensator synthesis for p-temporal event graphs. In *Positive Systems : Theory and Applications (POSTA'2006)*, Grenoble, France.
- [Ouerghi et al.,] Ouerghi, I., Hardouin, L., Morel, J.-Y., and Bourcier, M. Verification and Control of p-temporal Event Graphs, booktitle=IMACS World Congress Scientific Computation, Applied Mathematics and Simulation (IMACS'2005), address=Paris, France, month=July, year=2005.
- [Proth and Xie, 1995] Proth, J. and Xie, X. (1995). *Les réseaux de Petri pour la conception et la gestion des systèmes de production*. Edition MASSON.
- [Roux,] Roux, J. *Modélisation et analyse des systèmes distribués par les réseaux de Petri temporels*. PhD thesis, Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, type=Thèse, year = 1985, address = France.
- [SW2001, 2001] SW2001 (2001). Software Tools for Manipulating Periodic Series. <http://www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html>, <http://amadeus.inria.fr/gaubert/PAPERS/MAX.html>.
- [Terrason et al., 1998] Terrason, J.-C., Cohen, G., Gaubert, S., Gettrick, M.-M., and Quadrat, J.-P. (1998). Numerical computation of spectral elements in max-plus algebra. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes, France.

-
- [van den Boom and Schutter, 2006] van den Boom, T. J. and Schutter, B. D. (2006). MPC of implicit switching max-plus-linear discrete event systems – timing aspects. In *Workshop On Discrete Event Systems (WODES'2006)*, Ann Arbor, Michigan, USA.
- [Walkup, 1995] Walkup, E. (1995). *Optimization of Linear max-plus Systems with Application to Timing Analysis*. Ph.d. thesis, University of Washington, USA.
- [Wang and Desoer, 1972] Wang, S. and Desoer, C. (1972). The exact model matching of linear multivariable systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 17(3):347–349.
- [Wonham, 1985] Wonham, W.-M. (1985). *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach, 3rd edition*. Springer Verlag.

Etude de systèmes $(max, +)$ -linéaires soumis à des contraintes, application à la commande des graphes d'événements P-temporel

Iteb OUERGI

Résumé

Les systèmes à événements discrets sont essentiellement caractérisés par des changements d'état (marche-arrêt d'une machine, départ-arrivée d'un train). L'introduction de paramètres temporels permet d'évaluer leur performances (taux de production d'une cellule d'usinage, temps de parcours pour un système de transport). Ces systèmes dynamiques peuvent également faire l'objet de contraintes de temps de séjour (temps maximal de cuisson d'une pièce dans un four, attente maximum d'une correspondance entre trains,...). Ce type de contraintes n'affecte pas uniquement les performances du système mais aussi sa validité fonctionnelle (pièce brûlée, ...). Il apparaît alors primordial de disposer de méthodes d'analyse et de synthèse de commande de ces systèmes afin d'en garantir le bon fonctionnement en dépit de ces contraintes. Nous nous intéressons plus précisément aux modèles de type réseau de Petri P-temporel. L'étude de systèmes du type graphes d'événements P-temporels et leur supervision par un système de commande, conduisent à des modèles $(max, +)$ -linéaires soumis à des contraintes, et rendent nécessaire le développement de nouveaux outils algébriques combinant la théorie des dioïdes et la résiduation. L'objectif de cette thèse est de contribuer à la modélisation, la vérification et la commande des graphes d'événements temporels, et d'élaborer une théorie analogue à celle concernant les graphes d'événements déterministes décrits dans l'algèbre $(max, +)$.

Mots-clés : graphes d'événements temporisés, graphes d'événements P-temporels, dioïdes, commande en juste-à-temps, commande de type boucle fermée, algèbre $(max, +)$, résiduation, analyse par intervalles.

Abstract