

Le rejet de perturbation pour les graphes temporisés dans les diodes

S. Lagrange

LISA, Université d'Angers

OBJECTIFS

- Transposer le problème du rejet de perturbation
Graphes d'événements Temporisés.
- Modélisation de la chaîne de production de l'encre
Recticel-Bultex.
- Élaborer des lois de commande adaptées pour
de production.

Plan de l'exposé:

1. Théorie des Dioïdes et Résiduation.
2. Modélisation des Graphes d'événements temporels (GET) dans les dioïdes.
3. Résolution du problème du rejet de perturbation automatique classique.
4. Problème du rejet de perturbation pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes.
5. Commande optimale en juste-à-temps en présence de perturbation.
6. Modélisation de l'entreprise Recticel.
7. Application.
8. Modélisation sous SIMAN-ARENA.

1. Théorie des dioïdes

1.1 Dioïdes

Un **dioïde** est un demi-anneau idempotent noté $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$

$\oplus$: commutatif, associatif, **idempotent** ($\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$),
élément neutre ε .

$\otimes$: distributif par rapport à la somme, associatif et é

On définit la relation d'ordre $\succeq$ de la manière suivante

$$a \succeq b \iff a = a \oplus b.$$

1.2. Résolution de l'équation implicite $x = ax \oplus b$.

Theorème Sur un dioïde complet $\mathcal{D}$, la plus petite solution $x = ax \oplus b$ est $x = a^*b$ avec

$$a^* = \bigoplus_{i \geq 0} a^i = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots$$

où l'opérateur $*$ est appelé **étoile de Kleene**.

1.3. Théorie de la Résiduation

- Résolution d'inéquations du type

$$f(x) \preceq b \text{ ou } f(x) \succeq b$$

- Recherche de solutions **optimales**.

Définition Une application $f : (E, \preceq) \rightarrow (F, \preceq)$ est dite **résiduable** si l'inéquation $f(x) \preceq b$ admet une plus grande solution (dans E) $f^\#(b)$ de F .

Si f est résiduable, l'application

$$f^\# : F \rightarrow E, x \mapsto \bigoplus \{y \mid f(y) \preceq x\}$$

est appelée **application résiduée de f** .

1.4. Définition :[noyau] Soit $C : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{Y}$, on appelle le noyau de C l'équivalence sur $\mathcal{X}$ qui est définie :

$$x \overset{ker C}{\equiv} x' \iff C(x) = C(x')$$

Interprétation : les éléments ayant une même image forment une classe d'équivalence.

1.5. Définition : [Projection dans l'image parallèlement au $\ker C$]
 Soit $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ et $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, on appelle projection de $\mathcal{X}$ dans $Im B$ parallèlement à $\ker C$, l'élément x' qui appartient à :

- $Im B$
- la classe d'équivalence engendrée par x modulo $\ker C$

i.e.,

$$\begin{aligned} x' &= B(u) \quad \text{et} \quad x' \stackrel{\ker C}{\sim} x, \\ x' &= B(u) \quad \text{et} \quad C(x') = C(x). \end{aligned}$$

Le projecteur dans $Im B$ parallèlement à $\ker C$ est noté Π_B^C par

$$\Pi_B^C = B \circ (C \circ B)^\# \circ C = B \circ B^\# \circ C^\# \circ C$$

dans le cas d'applications **résiduables**.

Décomposition de la projection d'image parallèle

$$\Pi_B^C = B \circ B^\# \circ C^\# \circ C$$

D'abord $z = C^\# \circ C(x)$ est le plus grand élément de d'équivalence de x modulo $\ker C$.

Ensuite, $x' = B \circ B^\#(z)$ est le plus grand élément dans $\text{Im } B$ égal à z .

Figure 1: Schéma explicatif

2. Modélisation de GET :

A chaque transition on associe une variable (u)

$$x_1(k) = \max(2 + u(k), 3 + x_1(k - 1))$$

$$y(k) = 1 + x_1(k)$$

On remplace

$$\begin{array}{ll} \max & \mapsto \oplus \\ + & \mapsto \otimes \end{array}$$

Système d'équations linéaires dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$

$$x_1(k) = 2 \otimes u(k) \oplus 3 \otimes x_1(k - 2) \quad x(k) = A$$

$$y(k) = 1 \otimes x_1(k) \quad y(k) = C$$

3. Le rejet de perturbation en Automatique Classique.

On a le système linéaire suivant

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Sq(t) \text{ où } q(t) \text{ est une perturbation}$$
$$y(t) = Cx(t)$$

Trouver un retour d'état $u = Fx$ tel que la sortie en bouclé soit indépendante de la perturbation

$$\text{On sait que } y(t) = Ce^{(A+BF)t}x_0 + C \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} Sq(\tau) d\tau$$

$$\text{donc } C \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} Sq(\tau) d\tau = 0$$

$$\Updownarrow$$
$$\langle A + BF | \text{Im} S \rangle \subset \text{Ker} C$$

$\Rightarrow$ Trouver une commande U maintenant l'état du système dans le noyau de C .

5. Problème du rejet de perturbation pour les Graphes d temporisés.

$$\begin{array}{lcl} X & = & AX \oplus BU \oplus SQ \\ Y & = & CX \end{array} \Rightarrow Y = CA^*.$$

Compte tenu de la **monotonie des trajectoires**, une annu ne semble pas être la bonne définition.

⇒ Établir une commande U qui **tient compte de cette**

4. Problème du rejet de perturbation dans les Dioïdes pour les événements.

La sortie du système est $Y = CA^*SQ \oplus CA^*BU$.

La sortie optimale est la sortie générée par la perturbation, c'est-à-dire $Y_p = CA^*SQ$.

On cherche la plus grande commande U telle que

$$CA^*SQ \oplus CA^*BU = Y_p$$

ou, autrement dit

$$A^*SQ \stackrel{\ker C}{\sim} X \Leftrightarrow A^*SQ \stackrel{\ker C}{\sim} A^*SQ \oplus A^*BU$$

Le rejet de perturbation consiste à trouver la commande

$$U_{opt} = \bigoplus_{\{U | A^*BU \oplus A^*SQ \stackrel{\ker C}{\sim} A^*SQ\}} U.$$

4.1. Solution du rejet de perturbation dans les Dioïdes.

Le plus grand état X_+ vérifiant $Y = CA^*SQ(= Y_p)$ élément de la classe d'équivalence de A^*SQ modulo

$$X_+ = (C^\# \circ C)(A^*SQ)$$

Le plus grand état atteignable X_{opt} est la projection de l'image de A^*B parallèlement au noyau de C .

$$X_{opt} = (A^*B \circ (A^*B)^\# \circ C^\# \circ C)(A^*SQ)$$

La commande optimale U_{opt} permettant d'atteindre l

$$U_{opt} = ((A^*B)^\# \circ C^\# \circ C)(A^*SQ) = \frac{CA}{CA}$$

4.2. Solution du rejet de perturbation dans les Dioïdes.

5. Commande optimale en juste-à-temps en présence de

$$\begin{array}{lcl} X & = & AX \oplus BU \oplus SQ \\ Y & = & CX \end{array} \Rightarrow Y = CA^*X$$

où Q une perturbation connue et non maîtrisée

On se donne une consigne Z et on cherche la plus grande Y telle que

$$Y \preceq Z \Leftrightarrow CA^*BU \oplus CA^*SQ \preceq Z.$$

Ce problème n'a pas toujours de solution (si $Z \preceq CA^*SQ$)

Donc on considère la plus petite modification ΔZ de Z telle que
toujours une commande U vérifiant $Y \preceq Z \oplus \Delta Z$.

$$\Delta Z = CA^*SQ$$

5. Commande optimale en juste-à-temps en présence de (suite).

En résumé, on cherche la plus grande commande U t

$$Y \preceq Z \oplus CA^*SQ$$

c'est-à-dire $CA^*BU \oplus CA^*SQ \preceq Z \oplus CA^*SQ$

donc $CA^*BU \preceq Z \oplus CA^*SQ$.

La théorie de la résiduation donne la solution

$$U_{opt} = \frac{Z \oplus CA^*SQ}{CA^*B}.$$

6. Modélisation de l'atelier Recticel.

6.1. Principe de l'atelier de l'entreprise Recticel

Figure 2: Synopsis de l'Atelier Recticel

Modélisation de l'atelier Recticel.

6.2. Modèle approché sous forme de graphes d'é

u_1 représente l'entrée du tissu.

u_2 représente le planning fourni aux cadreuses de traj
fixée.

On considère $u_2 = q$.

8. Modélisation de l'atelier Recticel.

Modèle SIMAN-ARENA

Le modèle sous SIMAN-ARENA permet d'évaluer les performances de l'atelier.

obtenir les temps d'occupation des différents opérateurs.

le taux de remplissage des différents convoyeurs.

évaluer le niveau des files d'attentes avant chaque machine.

Nombre de sommiers finis

Le temps écoulé

...

CONCLUSION

- Nous avons étudié le problème du rejet de perturbation ouverte qui nécessite de connaître la perturbation.
- il serait intéressant de poursuivre cette étude pour des contrôles de type retour de sortie ou retour d'état qui rejettent la perturbation sans connaître celle-ci.