Table des matières

Introduction

Chapitre 1

Dioïdes et théorie de la Résiduation

Ce premier chapitre propose un survol de la théorie des dioïdes.

1.1 Dioïdes

1.1.1 Axiomes

Définition 1 ***(Dioïde)*** *Un dioïde est un ensemble $\mathcal{D}$ muni de deux opérations internes notées $\oplus$ et $\otimes$ et appelées respectivement "addition" et "multiplication", telles que :*

- *l'**addition** est **associative** :* $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ *;*
- *l'**addition** est **commutative** :* $a \oplus b = b \oplus a$ *;*
- *l'**addition** admet un **élément neutre** : noté ε et appelé "zéro"* : $a \oplus \varepsilon = a$ *;*
- *la **multiplication** est **associative** :* $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ *;*
- *la **multiplication** admet un **élément neutre** : noté e et appelé "identité"* : $a \otimes e = a = e \otimes a$ *;*
- *la **multiplication** est **distributive par rapport à l'addition** :* $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ *;*
- *le **zéro** est **absorbant pour la multiplication** :* $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$ *;*
- *l'**addition** est **idempotente** :* $a \oplus a = a$*.*

Comme en algèbre usuelle, le signe multiplicatif $\otimes$ sera parfois omis.

Définition 2 ***(Dioïde commutatif)*** *Un dioïde est dit **commutatif** si et seulement si la multiplication $\otimes$ est commutative.*

Exemple 1 *$\mathbb{R}_{max}$ est le dioïde $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$ muni du max (loi additive $\oplus$) et de l'addition usuelle $+$ (loi multiplicative $\otimes$). Cette structure est appelée algèbre $(max, +)$.*

Définition 3 ***(Dioïde complet)*** *Un dioïde est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi $\otimes$ distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $c \in \mathcal{D}$ et tout sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{D}$,*

$$c \otimes (\bigoplus_{x \in A} x) = \bigoplus_{x \in A} c \otimes x.$$

La borne supérieure d'un dioïde complet sera notée T *et correspont à la somme des éléments du dioïde. L'élément* T *est donc absorbant pour l'addition :* $T \oplus a = T$.
Rappelons néanmoins que, puisque ε *est absorbant pour la loi* $\otimes$, *on a :* $T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon$.

Exemple 2 $\mathbb{R}_{max}$ *n'est pas complet. Nous devons ajouter la borne supérieure* $T = +\infty$ *avec la convention* $(T \otimes \varepsilon) = +\infty \ + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$. *Ce nouveau dioïde complet est noté* $\overline{\mathbb{R}}_{max}$. *On a* $\overline{\mathbb{R}}_{max} = \{\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}, max, +\}$.

Théorème 1 ***(Relation d'ordre)*** *[Baccelli et al., 1992] Dans un dioïde* $\mathcal{D}$, *on définit la relation d'ordre* $\succeq$ *de la manière suivante :*

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b.$$

Cet ordre est compatible avec l'addition, c'est-à-dire

$$a \succeq b \Rightarrow \{\forall c \in \mathcal{D},\ a \oplus c \succeq b \oplus c\},$$

ainsi qu'avec la multiplication

$$a \succeq b \Rightarrow \{\forall c \in \mathcal{D},\ ac \succeq bc\}$$

.
Preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p163].

Un dioïde $\mathcal{D}$ muni de la relation d'ordre définie dans le théorème 1 est un demi-treillis supérieur [Birkhoff, 1940] car tout couple (a, b) admet $a \oplus b$ comme plus petit majorant. Un dioïde complet admet en outre une structure de treillis complet pour l'ordre défini par le théorème 1. Par application du théorème [Baccelli et al., 1992, Théorème 4.27, p162], le plus grand minorant de tout couple (a, b) existe (ou borne inférieure) et sera alors noté $a \wedge b$. Le dioïde $\mathcal{D}$ muni des lois $\oplus$ et $\wedge$ a une structure de treillis complet.

On a alors les deux relations d'équivalences suivantes :

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Leftrightarrow b = a \wedge b.$$

1.1.2 Dioïdes matriciels.

A partir d'un dioïde $\mathcal{D}$ "scalaire", on peut obtenir un dioïde $\mathcal{D}^{n \times n}$ "matriciel" en considérant les matrices carrés de taille n à coefficients dans $\mathcal{D}$ et en munissant cet ensemble de la somme et du produit matriciels usuels :

$$A = (A_{ij}) \ , \ B = (B_{ij}) \ , \ (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \ , \ (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{n} A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

Cette structure algébrique obéit aux axiomes des dioïdes.

1.1.3 Résolution de l'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets

Définition 4 ***(Étoile de Kleene)*** *[Gaubert, 1992a] Soit $\mathcal{D}$ un dioïde complet et $a \in \mathcal{D}$, l'opérateur étoile est défini par :*

$$a^* = \bigoplus_{k \geq 0} a^k \text{ (avec } a^0 = e).$$

On notera : $a^+ = a \oplus a^2 \oplus .... \oplus a^n = \bigoplus_{k \geq 1} a^k$.
On vérifie facilement l'égalité $a^+ = a \otimes a^*$.

Théorème 2 ***(Théorème de l'étoile)*** *[Gaubert, 1992a] Soit $\mathcal{D}$ un dioïde complet, l'équation*

$$x = ax \oplus b \tag{1.1}$$

définie dans $\mathcal{D}$ admet $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$ comme plus petite solution.

Preuve: *On vérifie d'abord que $x = a^*b$ est solution de (1.1). On a*

$$a(a^*b) \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus ...)b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 ...)b = a^*b.$$

De plus, si x est solution de (1.1), on a par définition de l'ordre $\succeq$ de $\mathcal{D}$,

$$x \succeq ax \text{ et } x \succeq b.$$

La compatiblité de la relation d'ordre avec le produit, nous amène à établir :

$$x \succeq ax \Rightarrow x \succeq ax \succeq a^2x \succeq ... \succeq a^kx,$$

et, par sommation, $x \succeq \bigoplus_{k \succeq 0} a^k x = a^*x$. *Finalement,*

$$x \succeq a^*x \text{ et } x \succeq b \Rightarrow x \succeq a^*b.$$

Toute solution de (1.1) est par conséquent plus grande que la solution a^*b.

Corollaire 1 *On montre de même que l'équation $x = xa \oplus b$ dans un dioïde complet admet comme plus petite solution ba^*.*

Théorème 3 *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde complet. $\forall a, b \in \mathcal{D}$*

$$a^+ \preceq a^* \tag{1.2}$$

$$(a^*)^* = a^* \tag{1.3}$$

$$(a^+)^* = a^* \tag{1.4}$$

$$a(ba)^* = (ab)^* a \tag{1.5}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^* b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \tag{1.6}$$

$$a^* a^* = a^* \tag{1.7}$$

Pour (1.2, 1.3, 1.4) preuves dans [Gaubert, 1992a, Chapitre 2, p30], et pour (1.5, 1.6, 1.7) preuves dans [Cottenceau, 1999, Chapitre 1, p42-43].

A titre d'exercice, considerons la preuve de (1.3)
a^* est la plus petite solution de l'équation $x = ax \oplus e$ (voir théorème 2). Comme $x \succeq ax \oplus e$, par isotonie des lois $\oplus$ et $\otimes$, on a $x \succeq a(ax \oplus e) \oplus e \succeq a^2 x \oplus e$ ou plus généralement, $x \succeq a^n x \oplus e$ et en sommant $x \succeq a^* x \oplus e$. La plus petite solution de $x = a^* x \oplus e$ est $(a^*)^*$. Donc $a^* \succeq (a^*)^*$. Comme $a \preceq \bigoplus_{k \succeq 0} a^k = a^*$, il vient $a^* \preceq (a^*)^*$. D'où l'égalité.

1.2 Applications Isotones et théorie de la Résiduation

Définition 5 ***(Applications isotones)*** *Une application $f : (E, \preceq) \rightarrow (F, \preceq)$ définie sur des ensembles ordonnés est dite isotone si*

$$x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y).$$

Définition 6 ***(Application injective)*** *Soit f une une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, elle est injective si elle vérifie la propriété suivante :*

$$\forall a, b \in \mathcal{E}, \quad f(a) = f(b) \Longrightarrow a = b.$$

Définition 7 ***(Application surjective)*** *Soit f une application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$, f est une surjection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$, ou f est surjective de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$, si elle vérifie :*

$$\forall x \in \mathcal{F},\ \exists a \in \mathcal{E} \text{ tel que } x = f(a).$$

Définition 8 ***(Continuité)*** *[Cohen, 1998a] Soit f une application d'un dioïde complet $\mathcal{D}$ dans un dioïde complet $\mathcal{C}$, et un sous-dioïde (fini ou infini) X de $\mathcal{D}$
f est semi-continue inférieurement (noté s.c.i) si*

$$\forall X \subseteqq \mathcal{D}, f(\bigoplus_{x \in X} x) = \bigoplus_{x \in X} f(x),$$

respectivement, semi-continue supérieurement (noté s.c.s) si

$$\forall X \subseteqq \mathcal{D}, f(\bigwedge_{x \in X} x) = \bigwedge_{x \in X} f(x).$$

Une application f est continue si elle est à la fois s.c.i et s.c.s..

1.2.1 Théorie de la résiduation

La théorie de la résiduation [Blyth and Janowitz, 1972] permet de définir "l'inverse" de certaines applications isotones en ne prenant en compte que la structure ordonnée définie sur l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Soit f une application isotone d'un dioïde $\mathcal{D}$ dans un dioïde $\mathcal{C}$. Pour garantir l'existence des bornes supérieures et inférieures, on suppose $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ complets.
Si f n'est pas surjective, l'équation $f(x) = b$ n'a pas nécessairement de solution pour certaines valeurs de b, et si f n'est pas injective la même équation peut ne pas avoir de solution unique.
Une façon de résoudre ce problème est de considérer l'ensemble des "sous-solutions", c'est-à-dire les valeurs de x satisfaisant $f(x) \preceq b$. Si ce sous ensemble est non vide, on considère la borne supérieure de ce sous ensemble. Lorsqu'il existe pour tout b, cet élément sera noté $f^\sharp(b)$.

$$f^\sharp(b) = \bigoplus_{\{x|f(x)\preceq b\}} x \text{ et on aura } f(f^\sharp(b)) \preceq b.$$

On peut aussi considérer la borne inférieure de l'ensemble des "sur-solutions", c'est-à-dire l'ensemble des x satisfaisant $f(x) \succeq b$, si cet ensemble est non vide. La borne inférieure de cet ensemble, lorsqu'elle existe sera notée $f^\flat(b)$.

$$f^\flat(b) = \bigwedge_{\{x|f(x)\succeq b\}} x \text{ et on aura } f(f^\flat(b)) \succeq b.$$

Théorème 4 *Soit f une application isotone d'un dioïde complet $\mathcal{D}$ dans un dioïde complet $\mathcal{C}$, sont équivalents :*

1. *Pour tout $b \in \mathcal{C}$, il existe une plus grande sous-solution de l'équation $f(x) = b$.*
2. *$f(\varepsilon) = \varepsilon$ et f est s.c.i..*
3. *Il existe une unique application $f^\sharp$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, qui est isotone et s.c.s. telle que*

$$f \circ f^\sharp \preceq Id_{\mathcal{C}} \quad \textit{(Identité de } \mathcal{C}\textit{)} \tag{1.8}$$
$$f^\sharp \circ f \succeq Id_{\mathcal{D}} \quad \textit{(Identité de } \mathcal{D}\textit{)} \tag{1.9}$$

Quand f satisfait ces propriétés, elle est dite résiduable et $f^\sharp$ est appelée la résiduée de f.

Preuve dans [Cohen, 1998a, Chapitre 1, p209-210].

1.2.2 Restriction d'applications

[Cottenceau, 1999] entend par *restriction d'une application*, la restriction de son domaine et/ou de son codomaine de définition. Dans sa thèse il cherche notamment à déterminer si la propriété de résiduabilité est conservée après restriction, ou à l'inverse, sous quelle condition la restriction d'une application non résiduable devient résiduable.

Plus précisément, les problèmes étudiés sont les suivants. Soit $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$ une application définie sur des ensembles ordonnés. Il s'agit de s'intéresser d'une part à la restriction de f à un domaine $A \subset E$ et d'autre part à la restriction de f à un codomaine B tel que $Imf \subseteq B \subset F$. Les questions traitées sont :

a- Si f est résiduable, la restriction de f au domaine A l'est-elle également ?

b- Si f n'est pas résiduable, existe-t-il une restriction de f à un codomaine B (tel que $Imf \subseteq B \subset F$) qui soit résiduable ?

- La première question est liée à un problème de contrainte sur les solutions de l'équation $f(x) \preceq b$. Si f est résiduable, l'équation précédente admet toujours $f^\sharp(b)$ comme plus grande solution. Cependant, si x est contraint à appartenir à un sous-ensemble "admissible" de solutions A, le problème a-t-il toujours une solution optimale dans A ?
- Le second problème est un peu différent. Sachant que f n'est pas résiduable, s'intéresser à une restriction de f à un codomaine B qui le soit revient à chercher si $f(x) \preceq b$ admet des solutions dont l'optimalité est garantie seulement pour certains éléments $b \in B$ (et non pour tout $b \in F$). Ce problème n'a naturellement de sens que si $Imf \subseteq B$.

Les notations proposées par [Cottenceau, 1999] s'inspirent de celles utilisées par Wonham dans [Wonham, 1979]. Ci-dessous nous rappelons uniquement les définitions qui seront utilisées dans le chapitre 3.

Définition 9 (Restriction d'une application à un domaine A) *Soit $f : E \to F$ et $A \subseteq E$. Il sera noté dans la suite $f_{|A}$ l'application définie de A dans F, vérifiant*

$$f_{|A} = f \circ Id_{|A}$$

où $Id_{|A} : A \to E, x \mapsto x$ représente l'injection canonique de A dans E. L'application $f_{|A}$ sera appelée restriction de f au domaine A. Le diagramme suivant commute[1]

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] & F \\ A \arrow[u, "Id_{|A}"] \arrow[ur, "f_{|A}"'] & \end{tikzcd}$$

Remarque 1 *Dans [Cottenceau, 1999] l'injection canonique est notée comme la restriction d'une application identique. Notamment, l'injection canonique de A dans E est aussi la restriction de l'application identique sur E (Id_E) au domaine A, notée $Id_{E|A}$ ou plus simplement $Id_{|A}$.*

Définition 10 (Restriction d'une application à un codomaine B) *Soit $f : E \to F$ et $Imf \subseteq B \subseteq F$. Il sera noté dans la suite ${}_{B|}f$ l'application définie de E dans B par l'égalité*

$$f = Id_{|B} \circ {}_{B|}f$$

où $Id_{|B}$ représente l'injection canonique de B dans F. L'application ${}_{B|}f$ sera dite restriction de f au codomaine B. Le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "{}_{B|}f"'] & F \\ & B \arrow[u, "Id_{|B}"'] \end{tikzcd}$$

[1]un tel diagramme est dit commutatif lorsque les différentes applications permettant d'aller d'un point du diagramme à un autre sont égales

[Cottenceau, 1999] représente *via* ${}_{B|}f$ l'action de f non plus par rapport à F tout entier, mais seulement par rapport à un sous-ensemble B incluant l'image de f.

Définition 11 (Restriction double) *Soit $f : E \to F$, $A \subseteq E$ et $f(A) \subseteq B \subseteq F$. Nous noterons ${}_{B|}f_{|A}$ l'application définie de A dans B par l'égalité*

$$f_{|A} = Id_{|B} \circ {}_{B|}f_{|A}.$$

Le diagramme suivant commute.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] & F \\
A \arrow[u, "Id_{|A}"] \arrow[r, "{}_{B|}f_{|A}"] & B \arrow[u, "Id_{|B}"']
\end{tikzcd}$$

Remarque 2 *Puisque tous les diagrammes précédents commutent, l'égalité suivante est également vérifiée*

$$ {}_{B|}f_{|A} = {}_{B|}f \circ Id_{|A}.$$

D'autre part, pour $Imf \subset B \subseteq F$, il est toujours possible d'établir la décomposition suivante

$$ {}_{B|}f = {}_{B|}Id_{|Imf} \circ {}_{Imf|}f.$$

Le diagramme suivant montre donc plusieurs décompositions d'une application, cela permet de se familiariser avec les notations d'applications restreintes.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "{}_{B|}f"] \arrow[ddr, "{}_{Imf|}f"'] & F \\
& B \arrow[u, "Id_{|B}"'] \\
& Imf \arrow[u, "{}_{B|}Id_{|Imf}"']
\end{tikzcd}$$

Remarque 3 (Isotonie des applications restreintes) *Soit une application $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$. Quels que soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$, les sous-ensembles $(A, \preceq)$ et $(B, \preceq)$ sont ordonnés pour l'ordre $\preceq$ restreint à A et B respectivement. Lorsque f est isotone, on peut vérifier que les restrictions $f_{|A}$, ${}_{B|}f$ et ${}_{B|}f_{|A}$ le sont également. Autrement dit, la propriété d'isotonie est conservée par restriction.*

1.2.3 Fermeture et Résiduation

Nous étudions ici une classe particulière d'applications isotones : les fermetures. Après une définition, des résultats concernant la résiduation de cette classe particulière d'applications sont fournis (Théorème 5).

Définition 12 (Fermeture, Fermeture Duale) *Soit $\mathcal{D}$ un ensemble ordonné, on considère l'application isotone $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, on appelle fermeture l'application vérifiant $f = f \circ f \succeq Id_{\mathcal{D}}$, de même on appelle fermeture duale l'application vérifiant $f = f \circ f \preceq Id_{\mathcal{D}}$.*

Exemple 3 *L'application $\mathcal{K} : x \to x^*$ est une fermeture.*

Théorème 5 *Soit $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ une fermeture. La restriction ${}_{Imf|}f$ est résiduable et sa résiduée*

$$({}_{Imf|}f)^\sharp = Id_{|Imf}$$

où $Id_{|Imf}$ est l'injection canonique de Imf dans D :

$$\begin{aligned} Id_{|Imf} : \quad & x \to x \\ & Imf \to \mathcal{D} \end{aligned}$$

Preuve: D'après le théorème 4, si ${}_{Imf|}f$ est résiduable il existe une unique application h telle que

$$\begin{aligned} {}_{Imf|}f \circ h \preceq Id_{Imf} \qquad & \text{(Identité de } Imf\text{)} \\ \text{et } h \circ {}_{Imf|}f \succeq Id_{\mathcal{D}}. \qquad & \text{(Identité de } \mathcal{D}\text{)} \end{aligned}$$

L'application $Id_{|Imf}$ vérifie ces deux points en effet

- $\bullet {}_{Imf|}f \circ Id_{|Imf} = {}_{imf|}f_{|imf} = Id_{Imf}$ (Identité de Imf puisque $f \circ f = f$)
- $\bullet Id_{|Imf} \circ {}_{Imf|}f = f \succeq Id_{\mathcal{D}}$ (Identité de $\mathcal{D}$, par définition de la fermeture).

1.2.4 Applications de la résiduation

On considère les applications d'un dioïde $\mathcal{D}$ dans lui même :

$L_a : x \longrightarrow a \otimes x$ (multiplication à gauche par a).

$R_a : x \longrightarrow x \otimes a$ (multiplication à droite par a).

Par définition la multiplication est distributive par rapport aux sommes infinies, L_a et R_a sont donc *s.c.i.* (définition 8). De plus ε étant absorbant pour la multiplication on a $L_a(\varepsilon) = \varepsilon$. L_a est donc résiduable et $L_a^\sharp$ est sa résiduée. Ces mêmes considérations s'appliquent à la multiplication à droite R_a.

Notation :

On notera $L_a^\sharp(x) = a \backslash x = \frac{x}{a}$ ("Division à gauche par a")

et $R_a^\sharp(x) = x / a = \frac{x}{a}$ ("Division à droite par a")

Formulaire :

f.1 $\frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a}$ *et* $\frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a}$.

f.2 $\frac{x\oplus y}{a} \succeq \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a}$ *et* $\frac{x\oplus y}{a} \succeq \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a}$.

f.3 $\frac{x}{a\oplus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b}$ *et* $\frac{x}{a\oplus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b}$.

f.4 $\frac{x}{a\wedge b} \succeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b}$ *et* $\frac{x}{a\wedge b} \succeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b}$.

f.5 si b est inversible $\Rightarrow \frac{a}{b} = b^{-1} \otimes a$.

f.6 $\frac{ax}{a} \succeq x$ *et* $\frac{xa}{a} \succeq x$.

f.7 $a\frac{ax}{a} = ax$ *et* $\frac{xa}{a}a = xa$.

f.8 $\frac{x}{a}b \preceq \frac{xb}{a}$ *et* $b\frac{x}{a} \preceq \frac{bx}{a}$.

f.9 $\frac{x}{ab} = \frac{a \circ\backslash x}{b}$ *et* $\frac{x}{ba} = \frac{x \circ/ a}{b}$.

Preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p183-185].

1.2.5 Résiduation de matrices

Les résultats précédents s'étendent au cas matriciel dans la mesure où les dimensions des matrices considérées sont compatibles.

Soit l'application

$$\begin{aligned} L_A : \mathcal{D}^{p\times q} &\to \mathcal{D}^{n\times q} \\ X &\mapsto A \otimes X \qquad (A \in \mathcal{D}^{n\times p}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_A : \mathcal{D}^{q\times n} &\to \mathcal{D}^{q\times p} \\ X &\mapsto X \otimes A \qquad (A \in \mathcal{D}^{n\times p}). \end{aligned}$$

Théorème 6 *Soit $B \in \mathcal{D}^{n\times q}$, $A \in \mathcal{D}^{n\times p}$ alors*

$$(A \circ\backslash B)_{ij} = (L_A^\sharp(B))_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{n} (A_{li} \circ\backslash B_{lj}) \quad , \quad i \leq p, j \leq q.$$

Voir preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p199].

Théorème 7 *Soit $B \in \mathcal{D}^{q\times p}$, $A \in \mathcal{D}^{n\times p}$ alors*

$$(B \circ/ A)_{ij} = (R_A^\sharp(B))_{ij} = \bigwedge_{l=1}^{p} (B_{il} \circ/ A_{jl}) \quad , \quad i \leq q, j \leq n.$$

Voir preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p199].

Chapitre 2

Modélisation et Commande de Graphes d'Evénements Temporisés

Les systèmes à événements discrets qui donnent lieu à des phénomènes de synchronisation peuvent être modélisés par des Graphes d'Événements Temporisés (GET). Les graphes d'événements (GE) sont une sous classe des Réseaux de Petri dans lesquels chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. De plus chaque arc reliant une transition à une place (et vice-versa) a un poids de un [David and Alla, 1989] .
Ainsi, les graphes d'événements peuvent modéliser la synchronisation mais pas la concurrence. Un GET est un graphe d'événements dont le fonctionnement dépend du temps. Le temps peut être associé soit aux transitions, soit aux places du graphe. Sachant que l'on peut passer d'une représentation à l'autre, on choisira ici d'associer le temps aux places.

Dans la deuxième partie, il sera traité de la représentation du comportement de GET à l'aide d'équations linéaires dans les dioïdes [Cohen, 1998b].

2.1 Modélisation des GET

2.1.1 Mise en équation des GET

Pour analyser le comportement temporel d'un GET, on peut considérer deux points de vue qui conduisent à une seule représentation linéaire, mais dans deux dioïdes différents.

* $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ permet de se placer dans le domaine des événements : chaque variable aura pour but de dater les événements ; on parle d'*équations aux dateurs*.
* $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ permet de se placer dans le domaine temporel : chaque variable recense le nombre d'événements à un instant t ; on parle d'*équations aux compteurs*.

Notation :
Soit x_j une transition d'un GET, on utilisera les notations suivantes :

$x_j(k)$: date à laquelle le k^{eme} tir de la transition associé à x_j a eu lieu.

$x_j(t)$: nombre de tirs de la transition x_j ayant eu lieu jusqu'à la date t.

Il existe deux représentations (Figure 2.1).

1. Représentation par des dateurs

$$\begin{aligned} x_n(k) &\geq \max(x_m(k), x_l(k)) && (2.1)\\ x_j(k) &\geq x_i(k-\nu)+\tau && (2.2) \end{aligned}$$

2. Représentation par des compteurs

$$\begin{aligned} x_n(t) &\leq \min(x_m(t), x_l(t)) && (2.3)\\ x_j(t) &\leq x_i(t-\tau)+\nu && (2.4) \end{aligned}$$

FIG. 2.1 – Equations aux dateurs et compteurs sur des graphes d'événements temporisés

Si le tir des transitions est au plus tôt, c'est-à-dire que les transitions sont franchies dès que les jetons des places amont sont disponibles, les inégalités (2.1) et (2.4) deviennent des égalités. On peut remarquer que les inégalités (2.1) et (2.3) représentent le phénomène de synchronisation. En effet, pour la figure 2.1, la transition x_n ne peut être franchie k fois que si x_m et x_l ont été franchies également au moins k fois chacune. Du point de vue compteur, la synchronisation se caractérise donc par la présence d'un opérateur min, et du point de vue dateur, par un opérateur max.

On considère l'exemple de la Figure 2.2. Les nombres représentent les temporisations (en nombre de tops d'horloges par exemple) associées aux places, ce GET possède un marquage initial.

FIG. 2.2 – Graphe d'événements temporisé

On peut écrire les équations de la figure 2.2 dans $\overline{\mathbb{Z}}$.

$$x_1(k) = max(u(k) + 1, x_1(k-3) + 6)$$
$$x_2(k) = max(x_1(k) + 8, x_2(k-1) + 5)$$
$$x_3(k) = max(x_1(k) + 9, x_3(k-2) + 5)$$
$$x_4(k) = max(x_2(k) + 6, x_3(k) + 6, x_4(k-1) + 5)$$
$$y(k) = max(x_4(k) + 6)$$

Dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ cela devient [1] :

$$x_1(k) = 1u(k) \oplus 6x_1(k-3)$$
$$x_2(k) = 8x_1(k) \oplus 5x_2(k-1)$$
$$x_3(k) = 9x_1(k) \oplus 5x_3(k-2)$$
$$x_4(k) = 6x_2(k) \oplus 6x_3(k) \oplus 5x_4(k-1)$$
$$y(k) = 6x_4(k)$$

Sous forme matricielle :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 6 & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-2) \oplus \begin{pmatrix} 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-3) \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k)$$
$$y(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 \end{pmatrix} x(k)$$

[1] le signe $\otimes$ est omis pour éviter d'alourdir l'écriture.

D'une manière générale, on obtient donc la forme sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$:

$$x(k) = \bigoplus_{i=0}^{a} A(i)x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^{b} B(j)u(k-j), \tag{2.5}$$

$$y(k) = \bigoplus_{l=0}^{c} C(l)x(k-l). \tag{2.6}$$

L'équation (2.5) est implicite en $x(k)$. En appliquant le Théorème 2, on peut passer à la forme ARMA[2] explicite suivante :

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^{a} \bar{A}(i)x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^{b} \bar{B}(j)u(k-j), \tag{2.7}$$

avec $\bar{A}(i) = (A(0))^* A(i)$ et $\bar{B}(j) = (A(0))^* B(j)$.

Il est possible avec quelques manipulations [Cohen, 1995], de passer à une forme récurrente "markovienne", ce qui correspond à une forme où le retard est exactement de 1 sur la partie AR et de 0 sur la partie MA, ainsi que sur l'équation de sortie. On se ramène alors à une récurrence simple de la forme

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k), \tag{2.8}$$

$$y(k) = Cx(k) \oplus Du(k). \tag{2.9}$$

2.1.2 Transformée en γ et δ

La transformée en γ [Baccelli et al., 1992] est l'analogue de la transformée en $\mathcal{Z}$ dans la théorie des systèmes linéaires échantillonnés.

Transformée en γ : Soit $\{x_j(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ un dateur associé à une transition j d'un GET. La transformée en γ de $\{x_j(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ est définie comme la série formelle

$$X_j(\gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} x_j(k)\gamma^k.$$

Par exemple, si l'on prend deux dateurs reliés par l'égalité $x_1(k) = x_2(k-1)$, ce qui correspond à deux transitions séparées par une place contenant un seul jeton, la transformée en γ de chacun des dateurs devient

$$X_1(\gamma) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} x_1(k)\gamma^k = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} x_2(k-1)\gamma^k = \gamma \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} x_2(k-1)\gamma^{k-1} = \gamma X_2(\gamma).$$

L'opérateur γ est un opérateur de décalage "événementiel", ce qui revient à écrire $x(k-1) = \gamma x(k)$.

[2]ARMA pour Auto Regressive - Moving Average

Transformée en δ De la même manière, on peut introduire une série formelle pour coder une trajectoire décrite par un compteur $x_j(t)_{t\in\mathbb{Z}}$. La transformée en δ de $x_j(t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est définie comme la série formelle

$$X_j(\delta) = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} x_j(t)\delta^t.$$

L'opérateur δ joue le rôle d'opérateur de décalage "temporel", on peut donc écrire $x_1(t-1) = \delta x_1(t)$.

2.1.3 Matrice de transfert

En partant des équations (2.8), on obtient

$$X(\gamma) = A\gamma X(\gamma) \oplus BU(\gamma) \Rightarrow X(\gamma) = (A\gamma)^* BU(\gamma),$$

d'où

$$Y(\gamma) = (D \oplus C(\gamma A)^* B)U(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma) \text{ avec } H(\gamma) = D \oplus C(\gamma A)^* B. \tag{2.10}$$

Si on reprend les équations de l'exemple de la figure 2.2, on a

$$\begin{aligned}
x_1(k) = 1u(k) \oplus 6x_1(k-3) &\Rightarrow X_1 = 1U \oplus 6\gamma^3 X_1 \\
x_2(k) = 8x_1(k) \oplus 5x_2(k-1) &\Rightarrow X_2 = 8X_1 \oplus 5\gamma X_2 \\
x_3(k) = 9x_1(k) \oplus 5x_3(k-2) &\Rightarrow X_3 = 9X_1 \oplus 5\gamma^2 X_3 \\
x_4(k) = 6x_2(k) \oplus 6x_3(k) \oplus 5x_4(k-1) &\Rightarrow X_4 = 6X_2 \oplus 6X_3 \oplus 5\gamma X_4 \\
y(k) = 6x_4(k) &\Rightarrow Y = 6X_4.
\end{aligned}$$

Ce que l'on peut aussi écrire sous forme matricielle

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 6\gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & 5\gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & 5\gamma^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 6 & 5\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U \\
Y &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 6 \end{pmatrix} X
\end{aligned}$$

2.1.4 Représentation bi-dimensionnelle : dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$

Il est possible de considérer les deux représentations dateurs et compteurs en établissant une représentation bi-dimensionnelle qui consiste à coder les trajectoires de tir de GET par des séries formelles en deux variables commutatives, γ et δ , à exposants dans $\overline{\mathbb{Z}}$ et à coefficients booléens ce nouveau dioïde se note $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ [Cohen, 1998b].

$\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ est un dioïde d'élément neutre $e(\gamma,\delta) = \gamma^0\delta^0$ et d'élément absorbant $\varepsilon(\gamma,\delta)$ qui correspond à la série dont tous les éléments sont égaux à ε . Graphiquement, un élément de $\mathbb{B}[[\gamma,\delta]]$ est représenté par une collection de points de $\mathbb{Z}^2$ (Figure 2.3).

FIG. 2.3 – Collection de points de $\mathbb{Z}^2$

"Filtrage des trajectoires monotones" $d(k)$ et $c(t)$ représentent le franchissement des transitions d'un GET, par conséquent les trajectoires de dateur $d(k)$ ou de compteur $c(t)$ sont monotones. Cela se traduit par

$$\begin{array}{ll} \forall k \in \mathbb{Z}, & \{d(k) \geq d(k-1)\} \Leftrightarrow \{d(k) = d(k) \oplus d(k-1)\}, \\ \forall t \in \mathbb{Z}, & \{c(t) \geq c(t-1)\} \Leftrightarrow \{c(t-1) = c(t-1) \oplus c(t)\}, \end{array}$$

en notant que l'ordre naturel de dioïde est inversé entre $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$. En passant aux transformées en γ et δ, on obtient

$$\{D(\gamma) = D(\gamma) \oplus \gamma D(\gamma)\} \Leftrightarrow \{D(\gamma) = \gamma^* D(\gamma)\}, \tag{2.11}$$

$$\{C(\delta) = C(\delta) \oplus \delta^{-1} C(\delta)\} \Leftrightarrow \{C(\delta) = (\delta^{-1})^* C(\delta)\}. \tag{2.12}$$

Un élément $X(\gamma, \delta)$ de $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$, doit donc satisfaire

$$\begin{array}{l} X(\gamma, \delta) \succeq \gamma X(\gamma, \delta), \\ X(\gamma, \delta) \succeq \delta^{-1} X(\gamma, \delta), \end{array}$$

soit encore $X(\gamma, \delta) \succeq (\gamma \oplus \delta^{-1}) X(\gamma, \delta)$.
Finalement,

$$X(\gamma, \delta) = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* X(\gamma, \delta). \tag{2.13}$$

Le dioïde $(\gamma \oplus \delta^{-1})^* \mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$ est noté $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Graphiquement, on ne considère plus un point de coordonnées (n, t) mais un "cône Sud-Est" de sommet (n, t) (figure 2.4). Cette transformation a pour effet de ne conserver que les séries monotones non décroissantes.

FIG. 2.4 – Représentation de "cônes Sud-Est"

Remarque 4 *Les notations suivantes seront utilisées pour le plus petit et le plus grand élément de* $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ *:* $\varepsilon = \gamma^{+\infty}\delta^{-\infty}$ *et* $T = \gamma^{-\infty}\delta^{+\infty}$*.*
Du fait de la structure de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$*, on peut donner plusieurs expressions de l'élément neutre e pour la multiplication :*

$$e = \gamma^*(\delta^{-1})^* = \gamma^* = (\delta^{-1})^* = \gamma^0 = \delta^0 = \gamma^0\delta^0.$$

2.1.5 Résultats dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$

A partir des résultats précédents, on peut interpréter graphiquement les opérations d'addition de multiplication et de borne inférieure dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$.

1. la somme de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représentée graphiquement par l'union des "cônes Sud-Est" de sommets respectifs (n,t) et (n',t').

2. le produit de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représenté par le cône de sommet $(n+n',t+t')$ (ce qui correspond au cône dont le sommet est la somme vectorielle des sommets (n,t) et (n',t')).

3. l'inf de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représenté par l'intersection des "cônes Sud-Est" de sommets respectifs (n,t) et (n',t').

FIG. 2.5 – Représentation graphique des opérations sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$

Les règles de simplification suivantes dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ sont immédiates :

$$\begin{aligned}
\gamma^n\delta^t \oplus \gamma^{n'}\delta^{t'} &= \gamma^{min(n,n')}\delta^t \\
\gamma^n\delta^t \oplus \gamma^{n}\delta t' &= \gamma^{n}\delta^{max(t,t')} \\
\gamma^n\delta^t \wedge \gamma^{n'}\delta^{t'} &= \gamma^{max(n,n')}\delta^{min(t,t')}.
\end{aligned}$$

On peut reprendre l'exemple de la figure 2.2 dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ on a alors

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \gamma^3\delta^6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^8 & \gamma\delta^5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^9 & \varepsilon & \gamma^2\delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^6 & \delta^6 & \gamma\delta^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U \\
Y &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^6 \end{pmatrix} X
\end{aligned}$$

Ce système peut s'écrire

$$\begin{cases}
X_1 = (\gamma^3\delta^6)^*\delta U \\
X_2 = (\gamma\delta^5)^*\delta^8 X_1 \\
X_3 = (\gamma^2\delta^5)^*\delta^9 X_1 \\
X_4 = (\gamma\delta^5)^*(\delta^6 X_2 \oplus \delta^6 X_3)
\end{cases}$$

soit encore,

$$\begin{cases} X_1 = (\gamma^3\delta^6)^*\delta U \\ X_2 = (\gamma\delta^5)^*\delta^9 U \\ X_3 = [e \oplus (\gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^3\delta^6)(\gamma^2\delta^5)^*]\delta^{10}U \\ X_4 = (\gamma\delta^5)^*(\delta^6 X_2 \oplus \delta^6 X_3) \\ Y = \delta^6 X_4 \end{cases}$$

avec $X_4 = [(\gamma\delta^5)^*\delta^{15} \oplus (\gamma\delta^5)^*\delta^{16} \oplus (\gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^3\delta^6)(\gamma^2\delta^5)^*(\gamma\delta^5) * \delta^{16}]U$

donc $Y = [e \oplus (\delta^2\gamma^5 \oplus \gamma^3\delta^6)(\gamma^2\delta^5)^*]\delta^{22}(\gamma\delta^5)^*U$

or $(\gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^3\delta^6)(\gamma\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^5)^* \oplus (\gamma\delta^5)^* = (\gamma\delta^5)^*$

donc

$$Y = (\gamma\delta^5)^*\delta^{22}U = hU$$

FIG. 2.6 – Représentation graphique de la fonction h

2.1.6 Séries rationnelles dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$

Les séries rationnelles [Gaubert, 1992b] vont permettre de représenter d'une façon finie les relations entrées / sorties d'un GET.

Définition 13 (Polynômes) *Un polynôme p de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ est une somme finie de monômes telle que :*

$$p = \bigoplus_{i=1}^{k} \gamma^{n_i}\delta^{t_i} = \gamma^{n_1}\delta^{t_1} \oplus ... \oplus \gamma^{n_k}\delta^{t_k}$$

Le polynôme p est sous forme canonique si $n_1 < n_2 < ... < n_k$ et $t_1 < t_2 < ... < t_k$.

Définition 14 (Causalité) *[Cohen, 1995] Une série $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ est dite causale si $s = \varepsilon$ (la série est nulle) ou si ses représentants sont à exposants dans $\mathbb{N}$. Une matrice est dite causale si toutes ses composantes sont causales.*

Définition 15 (Rationalité) *[Cohen, 1995] Un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ est rationnel si l'un de ses représentants au moins peut être obtenu par un nombre fini d'opérations $\oplus$, $\otimes$ et $*$ à partir d'éléments de l'ensemble $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$. On dira qu'une matrice à coefficients dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ est rationnelle si tous ses coefficients sont rationnels.*

Définition 16 (Périodicité) *[Cohen, 1995] Un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ est périodique s'il peut s'écrire $p \oplus qm^*$ où p et q sont des polynômes et m est un monôme. Une matrice est périodique si tous ses coefficients sont périodiques.*
Une autre définition de la périodicité, équivalente, est la suivante : un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ est périodique s'il admet un représentant qui peut s'écrire

$$p \oplus (\gamma^n \delta^t) q (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

où n, t, ν, τ sont des entiers non négatifs, et p et q sont des polynômes en (γ,δ) à exposants positifs et de degré en (γ,δ) inférieur ou égal à $(n-1, t-1)$, resp. $(\nu-1, \tau-1)$. Le polynôme p représente ici la partie transitoire de largeur $(n-1)$ et de hauteur $(t-1)$, tandis que le polynôme q représente le motif périodique commençant après ce transitoire (à cause de la translation par $\gamma^n\delta^t$), de largeur $(\nu-1)$ et de hauteur $(\tau-1)$, répété indéfiniment selon la pente τ/ν (à cause de la multiplication par $(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$).

FIG. 2.7 – Représentation graphique d'une série périodique de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$

Théorème 8 *Pour un élément H de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$, ou pour une matrice H à coefficients dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$, les trois propositions sont équivalentes :*

(1) H est rationnelle ;

(2) H est réalisable ;

(3) H est périodique et causale.

Preuve dans [Cohen et al., 1998].

2.2 Commande de GET

De manière analogue aux systèmes continus, on entend par *commande* de systèmes à événements discrets le *pilotage* d'un système par le contrôle de ses entrées. Plus précisément on cherche à obtenir, via la commande, certaines performances[3] spécifiées au préalable.
On peut trouver des résultats concernant la commande des GET, avec une approche $(max, +)$, dans [Cohen et al., 1989]. La commande optimale proposée est élaborée dans un objectif de *poursuite de trajectoire de sortie.*
D'autres types de commande existent,en particulier dans [Cottenceau, 1999], est abordé le problème de la synthèse de correcteur de type "feebacks" pour les GET. La synthèse se fait en vue d'atteindre, pour le système bouclé, des performances particulières.

2.2.1 Commande de GET en boucle Ouverte

Commande optimale en juste à temps

Formulation du problème
On s'intéresse ici au calcul de la commande optimale en juste à temps. Pour un GET (m entrées, p sorties) donné, dont on connaît la matrice de transfert $H \in \mathcal{D}^{p\times m}$, et une trajectoire de sortie $Z \in \mathcal{D}^{p\times 1}$, représentant les dates de tirs désirées de la sortie du système, on cherche la commande la plus *tardive*, c'est-à-dire la plus grande au sens des dioïdes, $U_{opt} \in \mathcal{D}^{m\times 1}$ telle que la sortie résultant de cette entrée $Y_{opt} = HU_{opt}$ soit inférieure ou égale à la sortie désirée Z.
Nous cherchons donc la plus grande solution U (noté U_{opt}) de l'inégalité

$$Y = HU \preceq Z.$$

Puisque l'application L_H est résiduable (voir 1.2.4)

$$U_{opt} = L_H^\sharp(Z) = H \backslash\!\!\!\circ\, Z.$$

La commande U_{opt} est alors optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps et la sortie Y_{opt} est dite en juste-à-temps.

Commande optimale sous contraintes [Menguy et al., 2000]

Formulation du problème
Lorsque certaines entrées sont non modifiables[4], la commande optimale en juste à temps n'est pas réalisable. Cependant, il est possible d'étendre le précédent principe. Pour cela, on considère une partition du vecteur de commande $U = (U_c \mid U_{nc})^T$ ou U_{nc} représente le vecteur des entrées non modifiables. De même considérons une partition du système $H = (H_c \mid H_{nc})$. La composante U_{nc} est fixée par avance et doit satisfaire l'égalité $U_{nc} = V_{nc}$, avec V_{nc} un vecteur de trajectoires imposées[5]. Nous cherchons donc la plus grande solution U (noté U_{opt}) tel que

$$Y = HU \preceq Z \text{ et } U_{nc} = V_{nc}.$$

[3] dans le cadre de la commande de systèmes continus, les performances recherchées sont par exemple la stabilité, la rapidité de réponse, la précision etc...

[4] dans un système d'assemblage, il peut par exemple s'agir d'entrées représentant l'approvisionnement en matière première qui est imposé par le fournisseur.

[5] qui pourraient correspondre à des dates de livraisons de marchandises imposées par le fournisseur.

Théorème 9 *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ deux dioïdes complets, $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ et $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ deux applications résiduables et c_1 et $c_2 \in \mathcal{C}$. Considèrons les ensembles*

$$S_a = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \text{ et } F(x) = c_2\} \text{ et } S_b = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \text{ et } F(x) \preceq c_2\}.$$

Supposons S_a non vide et notons $x_a = \bigoplus_{x \in S_a} x$ et $x_b = \bigoplus_{x \in S_b} x$.
On a $x_a = x_b$ avec $x_b = H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)$.

Preuve: On suppose S_a non vide et $\mathcal{D}$ complet donc x_a existe. Comme $S_a \subset S_b$, on a $x_a \preceq x_b$. De plus, soit $x \in S_a$, on a $x \preceq x_b$ et $c_2 = F(x) \preceq F(x_b) \preceq c_2$ par isotonie de F. Donc $F(x_b) = c_2$ et $x_b \in S_a$. On en déduit que $x_a = x_b$.
Par ailleurs, $H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2) \preceq F^\sharp(c_2) \Longrightarrow F(H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)) \preceq F(F^\sharp(c_2)) \preceq c_2$ par isotonie de F et définition de la résidué de F.
On a de même $H(H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)) \prec H(H^\sharp(c_1)) \preceq c_1$, donc $H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2) \in S_b$.
De plus, $\forall x \in S_b$, avec $x \preceq H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)$: on a $x \preceq F^\sharp(c_2)$ puisque $F^\sharp(c_2)$ est la plus grande solution de $F(x) \preceq (c_2)$; de même pour $x \preceq H^\sharp(c_1)$.
On en conclut que $H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)$ est le plus grand élément de S_b .

Proposition 1 *Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{C}$ deux dioïdes complets, $H : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ et $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ deux applications résiduables et c_1 et $c_2 \in \mathcal{C}$. Supposons que $F(x) = c_2$ admet une solution, nous noterons $\underline{x} = \inf\{x \in \mathcal{D} \mid F(x) = c_2\}$ la plus petite solution.*
Alors $c_1 \oplus H(\underline{x})$ est le plus petit élément de la forme $c_1 \oplus \Delta c_1$ tel que $S(\Delta c_1) = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1$ et $F(x) = c_2\}$ est non vide.

Preuve: $S(H(\underline{x})) = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \oplus H(\underline{x})$ et $F(x) = c_2\}$ est non vide puisqu'il contient $\underline{x}$. En effet, $\underline{x}$ vérifie évidement $H(\underline{x}) \preceq c_1 \oplus H(\underline{x})$ et, par définition, vérifie $F(\underline{x}) = c_2$.
Montrons que $c_1 \oplus H(\underline{x})$ est le plus petit élément de la forme $c_1 \oplus \Delta c_1$ tel que $S(\Delta c_1) = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1$ et $F(x) = c_2\}$ est non vide.

- On a vu que $S(H(\underline{x}))$ est non vide.
- Soit $S(\Delta c_1)$ non vide et $y \in S(\Delta c_1)$, alors $\underline{x} \preceq y$ et sachant que H est isotone

$$H(\underline{x}) \preceq H(y) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1. \tag{2.14}$$

Sachant (2.14),on obtient par isotonie de l'addition

$$c_1 \oplus H(\underline{x}) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1.$$

Donc $c_1 \oplus H(\underline{x})$ est le plus petit élément de la forme $c_1 \oplus \Delta c_1$ tel que $S(\Delta c_1) = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1$ et $F(x) = c_2\}$ est non vide.

Remarque 5 *On démontre simplement par isotonie de H que $H(\underline{x}) = \inf\{H(x) \in \mathcal{C} \mid F(x) = c_2\}$.*

Soit $S_1 = \{U \in \sum \mid H \otimes U \preceq Z$ et $U_{nc} = V_{nc}\}$ et $F = (\varepsilon \mid Id)$
alors $FU = (\varepsilon \mid Id) \begin{pmatrix} U_c \\ U_{nc} \end{pmatrix} = U_{nc} = V_{nc}$.
On peut réécrire S_1 de la manière suivante

$$S_1 = \{U \in \textstyle\sum \mid H \otimes U \preceq Z \text{ et } FU = V_{nc}\}$$

Calculons $F^\sharp(x)$:

$$F^{\sharp}(x) = \frac{x}{\varepsilon|Id} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\varepsilon} \\ \frac{x}{Id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ x \end{pmatrix}.$$

D'aprés le théorème 9, le plus grand élément de S_1, lorsque S_1 est non vide, est :

$$\frac{z}{H} \wedge F^{\sharp}(V_{nc}) \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix} \frac{z}{H_c} \\ \frac{z}{H_{nc}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T \\ V_{nc} \end{pmatrix} = \frac{z}{H_c}.$$

La contrainte d'égalité peut mener à un ensemble S_1 vide. Pour s'assurer l'existence d'une solution c'est-à-dire pour avoir les transitions de sortie aussi proche que possible de Z, on considère une modification de Z. Cette approche consiste à utiliser un nouvel ensemble S_2.

On pose $\underline{U} = \inf\{U \in \sum \mid FU = V_{nc}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ V_{nc} \end{pmatrix}$. D'après la proposition 1, $Z \oplus H\underline{U}$ est le plus petit dateur tel que $S_2 = \{U \in \sum \mid H \otimes U \preceq Z \oplus H\underline{U}$ et $FU = V_{nc}\}$ soit **non vide**. Par ailleurs,

$$HU = (H_c \mid H_{nc}) \begin{pmatrix} \varepsilon \\ V_{nc} \end{pmatrix} = H_{nc} \otimes V_{nc}.$$

Donc $S_2 = \{U \in \sum \mid H \otimes U \preceq Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}$ et $F \otimes U = V_{nc}\}$.
D'après le théorème 9, la plus grande solution $U_{opt} \in S_2$ est $U_{opt} = \frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H} \wedge F^{\sharp}(V_{nc})$.
C'est-à-dire,

$$U_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H_c} \\ \frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H_{nc}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T \\ V_{nc} \end{pmatrix}$$

$$U_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H_c} \\ V_{nc} \end{pmatrix}.$$

Remarque 6 *En utilisant la formule 1.2.4 et la propriété d'isotonie de la fonction* $L_a^{\sharp} : x \longrightarrow \frac{x}{a}$, *on a* $\frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H_{nc}} \wedge V_{nc} = V_{nc}$.

2.2.2 Commande avec modèle de référence : synthèse de feedback

Formulation du problème

Connaissant la matrice de transfert H d'un GET[6], et se donnant la matrice de transfert d'un modèle de référence G_{ref} rationnel, on cherche à synthétiser un correcteur de type retour de sortie F tel que le système bouclé s'approche "au mieux" du modèle de référence. On notera $M_H(F)$ le transfert du système H contrôlé par le feedback F.

[6]dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$, $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$

FIG. 2.8 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système H par un correcteur F en feedback

Cette synthèse se fera sous les contraintes suivantes :

(1) Le transfert du système controlé, $M_H(F)$ sera inférieur ou égal à G_{ref}, c'est-à-dire que le GET du système contrôlé (H bouclé par F) sera au moins aussi rapide que celui associé à G_{ref}, et que les sorties des jetons du GET contrôlé par F auront lieu avant celles du GET associé au modèle de référence.

(2) Le feedback F devra être le plus grand possible, c'est-à-dire que le GET qui lui sera associé sera le plus lent possible.

Chercher un feedback le plus grand possible, tout en respectant la contrainte (1) revient à chercher un feedback qui retarde le plus possible l'apparition de jetons dans le GET. Lorsqu'un GET modélise un système de production, le marquage interne correspond au niveau d'encours, ce qui explique l'intérêt d'une réduction du marquage interne.

Dans [Cottenceau, 1999], il est montré que le problème ainsi contraint n'admet pas de solution optimale pour tout modèle de référence. Cela signifie que, pour certains modèles de référence soit il n'y a pas de solution, soit parmi les solutions, il n'en existe pas de plus grande.

Le correcteur calculé devra nécessairement être réalisable, donc il faudra qu'il soit causal, en effet la solution optimale du problème contraint par (1) ou (2), lorsqu'elle existe, n'est pas nécessairement causale.

Formulation du problème dans les dioïdes

Il convient tout d'abord de déterminer le transfert d'un système H muni d'un feedback F. D'après la figure 2.8, le système en boucle fermée vérifie

$$\begin{cases} U = V \oplus FY \\ Y = HU. \end{cases}$$

On peut exprimer la sortie en fonction de l'entrée V

$$Y = H(V \oplus FY)$$
$$Y = HV \oplus HFY.$$

La résolution de cette équation en Y, en utilisant le théorème 2, donne pour le système bouclé le transfert

$$\begin{aligned} Y &= (HF)^* HV \\ &= M_H(F) \otimes V. \end{aligned}$$

On peut ainsi donner dans le cas mono-entrée/mono-sortie l'expression de l'application M_H

$$\begin{aligned} M_H : \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] &\longrightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] \\ x &\longrightarrow (Hx)^* H. \end{aligned}$$

Remarque 7 *D'après (1.5), $M_H(x)$ peut s'écrire aussi comme $M_H(x) = (Hx)^* H = (e \oplus Hx \oplus HxHx \oplus \ldots)H = H \oplus HxH \oplus HxHxH \oplus \ldots = H(xH)^*$.*

Le problème de la synthèse de correcteur avec modèle de référence présenté en introduction s'exprime dans les dioïdes de la manière suivante. Soit $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ le transfert du système ouvert et $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ un modèle de référence rationnel.

Pour G_{ref} donné, existe-t-il un plus grand F tel que

$$(HF)^* H \preceq G_{ref} \quad ? \tag{2.15}$$

Ce problème est donc lié à un problème de résiduabilité de l'application M_H. Si M_H est résiduable sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, alors la réponse à (2.15) est oui, et ce pour tout $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

M_H est-elle résiduable sur un dioïde complet ?

Puisque $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est complet, on peut vérifier si M_H est résiduable. L'application M_H est résiduable si, et seulement si, l'application vérifie les conditions du théorème 4. C'est-à-dire si

$$\begin{aligned} M_H(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \text{et } M_H(a \oplus b) &= M_H(a) \oplus M_H(b). \end{aligned}$$

D'une part $M_H(\varepsilon) = (H\varepsilon)^* H = H$, donc $M_H(\varepsilon) \neq \varepsilon$ et $M_H(a \oplus b) = H(aH \oplus bH)^* \neq H(aH)^* \oplus H(bH)^* = M_H(a) \oplus M_H(b)$. Par conséquent M_H n'est par résiduable sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Autrement dit, le problème (2.15) n'a pas de solution optimale pour tout modèle de référence G_{ref}. M_H n'est pas résiduable signifie d'une part que le problème n'a pas de solution pour $G_{ref} \prec H$, en effet $M_H(\varepsilon) = H$. D'autre part, si des solutions existent, l'ensemble des solutions n'admet pas de borne supérieure, il n'y a donc pas de solution optimale.

Dans [Cottenceau, 1999], il est montré que pour certains modèles de référence tels que $G_{ref} \succeq H$, le problème (2.15) a une solution optimale. Ceci revient, à résoudre le problème (2.15) non plus dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ entier, mais à résoudre ce problème en imposant des restrictions de M_H résiduables. Autrement dit, il existe au moins une restriction de M_H, à un codomaine inclus dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, qui est résiduable.

Théorème 10 *[Cottenceau, 1999] Soit $M_H : x \to H(xH)^*$ définie sur des dioïdes complets. Alors l'application ${}_{ImM_H|}M_H$ est résiduable et sa résiduée s'exprime par*

$$({}_{ImM_H|}M_H)^\sharp(x) = H \lcirclearrowright x \phi H.$$

Preuve : *Prenons $G_{ref} \in ImM_H$. C'est-à-dire, $\exists a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ tel que $G_{ref} = H(aH)^*$. Montrer que ${}_{ImM_H|}M_H$ est résiduable est équivalent à dire que l'équation $H(xH)^* \preceq H(aH)^*$ admet une plus grande solution $\forall a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.*

Trouver un plus grand x satisfaisant $H(xH)^* \preceq H(aH)^*$ revient à résoudre une série d'inéquations. En effet $H(xH)^* = H(e \oplus xH \oplus xHxH \oplus \ldots)$

Donc $H(xH)^* \preceq H(aH)^* \iff H \oplus HxH \oplus HxHxH \oplus \ldots \preceq H(aH)^*$ soit

$$H \preceq H(aH)^* \tag{2.16}$$
$$HxH \preceq H(aH)^* \tag{2.17}$$
$$H(xH)^2 \preceq H(aH)^* \tag{2.18}$$
$$\vdots$$

La vérification de la première inégalité (2.16) est immédiate d'après la définition de l'étoile de Kleene. D'après les résultats sur la résiduation du produit, on peut établir que $X = H \lcirclearrowright H(aH)^* \phi H$ est la plus grande solution de l'inégalité (2.17). Par ailleurs cet élément X satisfait également (2.18). En effet on a :

$$H(XH)^2 = HXHXH \preceq H(aH)^*XH = (Ha)^*HXH \preceq (Ha)^*H(aH)^* = H(aH)^*$$

donc

$$H(XH)^2 \preceq H(aH)^*.$$

Le même raisonnement peut être tenu pour les inégalités suivantes donc $X = H \lcirclearrowright H(aH)^* \phi H$, plus grande solution de (2.17), est aussi solution des autres inégalités, et donc la plus grande solution de l'inégalité $H(xH)^* \preceq H(aH)^*$.

Dans la thèse [Cottenceau, 1999] l'auteur s'intérresse à des restrictions moins "restrictives" de M_H qui sont également résiduables.

Théorème 11 *Soient $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ définis par $\mathcal{G}_1 = \{G | \exists A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]], G = A^*H\}$ et $\mathcal{G}_2 = \{G | \exists B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]], G = HB^*\}$. $ImM_H \subseteq \mathcal{G}_1$ et $ImM_H \subseteq \mathcal{G}_2$. Les restrictions ${}_{\mathcal{G}_1|}M_H$ et ${}_{\mathcal{G}_2|}M_H$ sont résiduables. Leurs résiduées définies respectivement de $\mathcal{G}_1$ dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, et de $\mathcal{G}_2$ dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ vérifient*

$$({}_{\mathcal{G}_1|}M_H)^\sharp(x) = ({}_{\mathcal{G}_2|}M_H)^\sharp(x) = H \lcirclearrowright x \phi H.$$

Preuve dans [Cottenceau, 1999, Chapitre 3, p99-100].

Application à la synthèse de correcteurs de type retour de sortie

Les résultats théoriques précédents conduisent à la résolution du problème de synthèse de correcteurs de type retour de sortie avec modèle de référence. Le théorème 10 est applicable assez directement. On peut donner une expression des résultats précédents en termes de GET et de correcteurs réalisables, donc représentables par des GET. Un problème de causalité peut cependant se poser, en effet le correcteur calculé, n'est pas forcément causal, il se pose donc un problème de réalisation.

Théorème 12 *[Cottenceau, 1999] Soit $I_{d_{|+}}$, l'injection canonique de l'ensemble des causaux, noté $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma,\delta]]$, dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$*

$$I_{d_{|+}} : \mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma,\delta]] \to \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$$
$$x \mapsto x$$

alors, $I_{d_{|+}}$ est résiduable et sa résiduée sera notée Pr_+.

Preuve: *D'une part $I_{d_{|+}}$ est s.c.i. puisque*

$$I_{d_{|+}}(\bigoplus x) = \bigoplus I_{d_{|+}}(x)$$

En effet la somme d'éléments causaux est causale (voir définition 14) et

$$I_{d_{|+}}(\varepsilon) = \varepsilon$$

puisque par définition , ε est causal. Donc $I_{d_{|+}}$ est résiduable.

Exemple 4 *Le calcul pratique de Pr_+ est simple. $Pr_+(x)$ correspond au plus grand élément causal inférieur à x, il suffit donc de garder dans x uniquement les monômes causaux. Soit $a = \gamma^{-2}\delta^{-2} \oplus \gamma^{-1}\delta^{1} \oplus \gamma^{2}\delta^{2}$ un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$. Le plus grand élément causal inférieur à a est simplement $Pr_+(a) = \delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2$. D'un point de vue graphique, on ne garde dans $Pr_+(a)$ que les sommets de a contenus dans le cadran nord-est.*

Théorème 13 *[Cottenceau, 1999] Soit H le transfert d'un GET. Pour tout modèle de référence G_{ref} réalisable s'exprimant $G_{ref} = M_H(A)$ où A est un transfert réalisable, il existe un plus grand feedback réalisable F tel que le transfert du sytème bouclé soit celui de G_{ref}. Ce feedback est*

$$F = Pr_+(H \backslash\!\!\!\circ\, G_{ref} \circ\!\!\!/\, H).$$

Remarque 8 *Le modéle de référence $G_{ref} = H$ appartient à ImM_H, c'est-à-dire qu'il existe toujours un plus grand correcteur F permettant de conserver le comportement entrée/sortie initial tout en retardant au plus l'entrée.*

Remarque 9 *Les résultats présentés ici dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma,\delta]]$ peuvent sans difficulté se transposer dans les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$.*

Les résultats précédents (Théorème 10, 11, 12, 13) s'étendent de manière naturelle au cas multi-entrées/multi-sorties.
On utilise ici le système décrit sur la Figure 2.9, on va calculer un correcteur qui, une fois appliqué au GET, impose un régime différent au système.

Fig. 2.9 – GET MIMO

Calcul du transfert global de la cellule

$$X = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta^7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^4 & \gamma\delta^6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma^3\delta^2 & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \delta^2 & \gamma^4\delta^9 \end{pmatrix} X \oplus \begin{pmatrix} \delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta \end{pmatrix} X$$

$$Y = HU$$

$$\text{avec} \quad H = CA^*B = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix}$$

$$\text{finalement} \quad Y = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix}$$

Nous choisissons un modèle de référence tel que l'optimalité et l'existence du correcteur soient garanties, c'est-à-dire, vérifiant le théorème 10. En accord avec cette proposition, cette spécification doit s'exprimer sous la forme $G_{ref} = (HF_0)^*H$.

Nous prenons

$$F_0 = \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } G_{ref} = \left(H \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix} \right)^* H = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \gamma^3\delta^{18}(\gamma\delta^6)^* \\ \delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{14} \oplus \gamma^3\delta^{19}(\gamma\delta^6)^* & \delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{13} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^5\delta^{20} \oplus \gamma^6\delta^{25}(\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix}$$

Le calcul du correcteur optimal, pour respecter ce modèle de référence, passe donc par le calcul de $H \circ\!\backslash G_{ref} \phi\!/ H$.

On obtient alors

$$H \circ\!\backslash G_{ref} \phi\!/ H = \begin{pmatrix} \delta^{-18}(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^7 \oplus (\gamma^6\delta^{12})(\gamma^1\delta^6)^* \\ \delta^{-17}(\gamma^1\delta^6)^* & \delta^{-6} \oplus \gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus (\gamma^6\delta^{13})(\gamma^1\delta^6)^* \end{pmatrix}$$

Il existe donc un plus grand correcteur réalisable (Théorème 13) inférieur ou égal à $H \circ\!\backslash G_{ref} \phi\!/ H$ qui est

$$F = Pr_+(H \circ\!\backslash G_{ref} \phi\!/ H) = \begin{pmatrix} \gamma^3(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^7 \oplus (\gamma^6\delta^{12})(\gamma^1\delta^6)^* \\ \gamma^3\delta(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus (\gamma^6\delta^{13})(\gamma^1\delta^6)^* \end{pmatrix}$$

On donne une réalisation de ce correcteur sur la figure 2.10.

FIG. 2.10 – GET MIMO

Remarque 10 *Des algorithmes permettant la manipulation des séries périodiques ont été développés et implantés sous forme de script Scilab et de classes $C++$.*

Chapitre 3

Le Principe du Rejet de Perturbation en automatique "Classique"

Le principe du rejet de perturbation faisant appel à des notions d'algèbre linéaire, nous consacrerons la première partie à des rappels élémentaires.

3.1 Rappels d'Algèbre Linéaire

Définition 17 *Evalutation de la matrice e^{At}.*
D'une manière explicite, le développement en série d'une exponentielle de matrice A carrée est :

$$e^{At} = Id + At + A^2\frac{t^2}{2!} + A^3\frac{t^3}{3!} + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} A^i \frac{t^i}{i!}. \tag{3.1}$$

Notation 1 *Soit A une application linéaire et $\mathcal{B}$ un espace vectoriel, alors*

$$< A \mid \mathcal{B} >:= \mathcal{B} + A\mathcal{B} + ... + A^{n-1}\mathcal{B}.$$

Définition 18 (matrice orthogonale) *On appelle $A^{\perp}$ la matrice orthogonale de A tel que*

$$AA^{\perp} = 0$$

Propriété 1 *Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel avec $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ deux espaces vectoriels. On définie les applications R et S telles que $R : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{X}$ et $S : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{X}$. Soit A^{-1} l'inverse d'une matrice A. alors*

$$A^{-1}\mathcal{R} = ker\left(R^{\perp} \quad A\right) \tag{3.2}$$

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = Ker\begin{pmatrix} R^{\perp} \\ S^{\perp} \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

$$Dtermination de \mathcal{R} + \mathcal{S}. \tag{3.4}$$

Application 1 *Soit à résoudre le système d'équations linéaires suivant dans lequel A et B sont des matrices respectivement de dimensions $n \times n$ et $n \times m$, $\dot{x}(t)$ et $x(t)$ sont des vecteurs de dimension n et u de dimension m.*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

Nous savons que la solution de l'équation est formée de la solution homogène augmentée d'une solution particulière de l'équation complète que nous allons déterminer par la méthode de la variation de la constante.
La solution de $\dot{x}(t) = Ax(t)$ est $x_0(t) = Ke^{At}$ où K est une vecteur constant de dimension n .
Cherchons une solution particulière $x_p(t)$ de la forme Ke^{At} en faisant varier K.
En reportant dans l'équation complète, nous avons

$$\begin{gathered} \dot{K}e^{At} + KAe^{At} = KAe^{At} + Bu(t) \\ \dot{K} = Bu(t).e^{-At} \end{gathered}$$

Intégrons alors $\dot{K}$ de façon à ce que A s'annule pour $t = 0$

$$K = \int_0^t Bu(\tau)e^{-A\tau}d\tau \text{ et donc } x_p(t) = Ke^{At} = \int_0^t Bu(\tau)e^{A(t-\tau)}d\tau.$$

Ainsi, la solution de l'équation qui vérifie la valeur initiale $x(t = 0) = x_0$ sera :

$$x(t) = x_0.e^{At} + \int_0^t Bu(\tau)e^{A(t-\tau)}d\tau \quad \text{pour } t > 0. \tag{3.5}$$

3.1.1 Les sous espaces (A, B)-invariants

Définition 19 *Soient les applications linéaires $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ et $B : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{X}$. Le sous espace $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ est dit (A, B)-invariant si il existe une application $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U}$ telle que*

$$(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}.$$

On note la classe des sous espaces (A, B)-invariants de $\mathcal{X}$ par $\Im(A, B; \mathcal{X})$, ou plus simplement $\Im(\mathcal{X})$ quand les applications A et B sont sous entendues.

Lemme 1 *Soit $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ et $\mathcal{B} = ImB$. Alors $\mathcal{V} \in \Im(A, B; \mathcal{X})$ si et seulement si*

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}. \tag{3.6}$$

Preuve: (sens $\Rightarrow$)
Soit $\mathcal{V} \in \Im(A, B; \mathcal{X})$ et $v \in \mathcal{V}$. Alors

$$\begin{aligned} (A + BF)v &= w, w \in \mathcal{V} \\ Av &= w - BFv \in \mathcal{V} + \mathcal{B}. \end{aligned}$$

(sens $\Leftarrow$)
On cherche un F tel que $(A+BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$
On a $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}$. Soit $(v_1, v_2, ..., v_\mu)$ une base de $\mathcal{V}$, alors $\forall i$, $\exists w_i \in \mathcal{V}$ et $u_i \in \mathcal{U}$ tel que $Av_i = w_i - Bu_i$

On définit une application $F_0 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$ telle que

$$F_0 v_i = u_i, \quad pour\ 1 \leq i \leq \mu \tag{3.7}$$

Soit F un prolongement de F_0 avec $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U}$ tel que la restriction de F à $\mathcal{V}$ soit F_0. Alors

$$\begin{aligned}(A+BF)v_i &= (Av_i) + BFv_i \\ &= (w_i - Bu_i) + BFv_i \\ &= (w_i - Bu_i) + BF_0 v_i \\ &= (w_i - Bu_i) + Bu_i && d'après (3.7) \\ &= w_i \in \mathcal{V}\end{aligned}$$

On a vérifié que $(A+BF)v_i \subset \mathcal{V}$ pour une base de $\mathcal{V}$, donc on a la propriété pour le sous espace $\mathcal{V}$; c'est-à-dire $\mathcal{V}$ est (A, B)-invariant.

Remarque 11 *D'après le lemme 1, pour démontrer qu'un espace est (A, B)-invariant il suffit de montrer que l'expression 3.6 est vraie, alors que précédemment il fallait trouver un F tel que $(A+BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.*

Notation 2 *Si $\mathcal{V} \in \Im(A, B; \mathcal{X})$, on note $F(A, B; \mathcal{V})$ ou plus simplement $F(\mathcal{V})$, la classe des fonctions $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U}$ tel que $(A+BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. La notation $F(\mathcal{V})$ se lit, "F est un ami de $\mathcal{V}$".*

Lemme 2 *La classe des sous espaces $\Im(A, B; \mathcal{X})$ est fermée pour l'opération d'addition de sous espaces. C'est-à-dire $\forall$ $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}' \in \Im(A, B; \mathcal{X})$, $\mathcal{V} + \mathcal{V}' \in \Im(A, B; \mathcal{X})$.*

Preuve: Soit $\mathcal{V}$ et $\mathcal{V}' \in \Im(A, B; \mathcal{X})$. Alors

$$A(\mathcal{V} + \mathcal{V}') = A\mathcal{V} + A\mathcal{V}'$$

Or d'après le lemme 1, on a

$$\begin{aligned}A\mathcal{V} &\subset \mathcal{V} + \mathcal{B} \\ A\mathcal{V}' &\subset \mathcal{V}' + \mathcal{B}\end{aligned}$$

$$Donc\ A(\mathcal{V} + \mathcal{V}') \subset (\mathcal{V} + \mathcal{V}') + \mathcal{B}$$

On obtient, toujours d'après le lemme 1, $(\mathcal{V} + \mathcal{V}') \in \Im(A, B; \mathcal{X})$.

Notation 3 *Soit $\mathcal{V}^*$ le plus grand sous espace de $\mathcal{B}$, on note*

$$\mathcal{V}^* = \sup\{\mathcal{V}, \mathcal{V} \in \mathcal{B}\}\ ou\ \mathcal{V}^* = \sup\{\mathcal{B}\}$$

Lemme 3 *Soit $\mathcal{B}$ une classe de sous espaces de $\mathcal{X}$ non vide et fermée pour l'addition, alors $\mathcal{B}$ contient un élément maximal $\mathcal{V}^*$.*

Preuve: on sait que $\mathcal{B} \neq \emptyset$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ et par hypothèse $\mathcal{X}$ est finie donc $\dim \mathcal{X}$ est finie.
On peut donc dire qu'il existe un élément $\mathcal{V}^* \in \mathcal{B}$ dont la dimension, $dim(\mathcal{V}^*)$, est la plus grande possible. Soit $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$, montrons qu'il est inclus dans $\mathcal{V}^*$ ce qui prouvera que $\mathcal{V}^*$ est le sous espace maximal.
Sachant que $\mathcal{B}$ est fermée pour l'addition, on a

$$\mathcal{V} + \mathcal{V}^* \in \mathcal{B}.$$

De plus, par définition nous avons $\dim(\mathcal{V}^*) \geq \dim(\mathcal{V} + \mathcal{V}^*)$.
Evidemment, nous avons $\dim(\mathcal{V} + \mathcal{V}^*) \geq \dim(\mathcal{V}^*)$ qui conduit à l'égalité

$$\dim(\mathcal{V} + \mathcal{V}^*) = \dim(\mathcal{V}^*). \tag{3.8}$$

Par ailleurs, on a $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{V} + \mathcal{V}^*$ alors, d'après l'égalité (3.8), on obtient

$$\mathcal{V} + \mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*.$$

Donc $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*$, c'est-à-dire que $\mathcal{V}^*$ est le plus grand sous espace de $\mathcal{B}$.

Notation 4 *L'ensemble des sous espaces (A, B)-invariant inclus dans $\mathcal{K}$ ce note*

$$\Im(A, B; \mathcal{K}) := \{\mathcal{V} : \mathcal{V} \in \Im(A, B; \mathcal{X}) \ et\ \mathcal{V} \subset \mathcal{K}\}.$$

Remarque 12 *Il est clair que*

- $0 \in \Im(A, B; \mathcal{K})$ *et car* $0 \subset \mathcal{K}$ *et* $(A + BF)0 \subset 0$. *Donc* $\Im(A, B; \mathcal{K})$ *est non vide.*
- $\Im(A, B; \mathcal{K})$ *est fermé pour l'addition d'après le lemme 2.*
- *Le lemmme 3 garantie l'existence d'un plus grand élément dans* $\Im(A, B; \mathcal{K})$ *noté* $\mathcal{V}^* := \sup \Im(A, B; \mathcal{K})$.

3.2 Le rejet de perturbations

Soit un système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Sq(t) \quad , \ t \geq 0 \\ z(t) = Dx(t) \quad t \geq 0 \end{cases} \tag{3.9}$$

Le terme $q(t)$ dans (3.9) représente une perturbation qui n'est pas mesurable. Le problème est de trouver (si possible) un feedback F, tel que $q(.)$ n'est plus d'influence sur la sortie $z(.)$.Supposons que le retour d'état par F est réaliser, donc dans (3.9), $u(t) = Fx(t)$.
On dit que la perturbation est découplé par rapport à la la paire $q(.)$,$z(.)$ si, pour un état initial $x(0) \in \mathcal{H}$ si la sortie $z(t)$, $t \geq 0$, est la même pour tous les $q(.) \in \mathbf{Q}$. Donc le rejet de perturbation est équivalent a forcer la sortie

$$z(t) = D \int_0^t e^{(t-s)(A+BF)} Sq(s)ds = 0 \ \ d'après\ la\ formule\ 3.5 \tag{3.10}$$

pour tout $q(.) \in \mathbf{Q}$ et $t \geq 0$.
Notons $\mathcal{K} = KerD$ et $\mathcal{S} = ImS$

Lemme 4 *Le rejet de la perturbation q sur le système (3.9) est possible si et seulement si*

$$< A + BF \mid \mathcal{S} > \subset \mathcal{K}$$

Preuve: D'après la formule (3.10), on veut :

$$z(t) = D\int_0^t e^{(t-s)(A+BF)} Sq(s)ds = 0$$

Il faut donc que $\int_0^t e^{(t-s)(A+BF)} Sq(s)ds$ soit inclus dans le noyau de D.
Or d'après la formule 3.1, on peut développer l'exponentiel

$$e^{(t-s)(A+BF)} = Id + (A+BF)^1 \frac{(t-s)^1}{1!} + (A+BF)^2 \frac{(t-s)^2}{2!} + ...$$

et $Sq(s) \in ImS$

...a finir...

Le problème a résoudre est donc :
Etant donné $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{X}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$, et $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$, il faut trouver (si possible) $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U}$ tel que

$$< A + BF \mid \mathcal{S} > \subset \mathcal{K}.$$

Théorème 14 *Le rejet de perturbation est possible si et seulement si* $\mathcal{V}^* \supset \mathcal{S}$ *avec* $\mathcal{V}^* := \sup \Im(A, B; \mathcal{K})$.

Preuve: (sens $\Rightarrow$)
D'après le lemme 4, le rejet de perturbation est possible implique que $< A + BF \mid \mathcal{S} > \subset \mathcal{K}$. On pose $\mathcal{V} :=< A + BF \mid \mathcal{S} >$.

* $\mathcal{V}$ est un sous espace vectoriel inclus dans $\mathcal{K}$.
* Montrons que $\mathcal{V}$ est (A, B)-invariant.

$$\begin{aligned} &D'après\ la\ définition\ 1 \\ (A+BF)(< A+BF \mid \mathcal{S} >) &= (A+BF)[\mathcal{S} + (A+BF)\mathcal{S} + ... + (A+BF)^{n-1}\mathcal{S}] \\ &= (A+BF)\mathcal{S} + (A+BF)^2\mathcal{S} + ... + (A+BF)^n\mathcal{S}] \\ \Rightarrow (A+BF)(< A+BF \mid \mathcal{S} >) &\subset < A+BF \mid \mathcal{S} > \ c'est-à-dire\ \mathcal{V}\ est\ (A,\ B)-invariant. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{V} \in \Im(A, B; \mathcal{K})$. Sachant que $\mathcal{V}^* = \sup \Im(A, B; \mathcal{K})$ et en remarquant que $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$, par définition de $\mathcal{V}$, on obtient

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*$$

(sens $\Leftarrow$)

On a $\mathcal{V}^* \in \Im(A, B; \mathcal{K}) \Leftrightarrow \{ \begin{array}{l} \mathcal{V}^* \in \Im(A, B; \mathcal{X}) \\ \mathcal{V}^* \subset \mathcal{K} \end{array}$.

Il existe F tel que $(A + BF)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$
or $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}^*$, donc $< A + BF \mid \mathcal{S} > \subset < A + BF \mid \mathcal{V}^* > \subset \mathcal{V}^* \subset \mathcal{K}$.
Donc le rejet de la perturbation est possible.

Théorème 15 *Soit* $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{X}$ *et* $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$. *On définit une suite* $\mathcal{V}^\mu$ *comme suit*

$$\begin{gathered} \mathcal{V}' = \mathcal{K} \\ \mathcal{V}^\mu = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}^{\mu-1}) \qquad \mu = 1,\ 2,\ ... \end{gathered}$$

Alors $\mathcal{V}^\mu \subset \mathcal{V}^{\mu-1}$ *et pour un certain* $k \leq \dim \mathcal{K}$,
$\mathcal{V}^\mu = \sup \Im(A, B; \mathcal{K})$ *pour tout* $\mu \geq k$.

Preuve: On observe tout d'abord que la suite $\mathcal{V}^\mu$ est non croissante. En effet, on a $\mathcal{V}^1 \subset \mathcal{V}^0$ et si $\mathcal{V}^\mu \subset \mathcal{V}^{\mu-1}$ est vraie. Alors

$$\mathcal{V}^{\mu+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}^\mu) \tag{3.11}$$

$$\mathcal{V}^{\mu} = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}^{\mu-1}) \tag{3.12}$$

Or on a $\mathcal{V}^\mu \subset \mathcal{V}^{\mu-1}$
Donc, d'après les expressions 3.11 et 3.12, on obtient $\mathcal{V}^{\mu+1} \subset \mathcal{V}^\mu$
On a bien démontrer, par récurrence, que la suite des $\mathcal{V}^\mu$ est non croissante.
Sachant que $\mathcal{V}^\mu \subset \mathcal{V}^{\mu-1}$ et par hypothèse, supposons que $\dim \mathcal{K} = q$.

* 1^{er} cas
  Soit $\forall k \leq \dim \mathcal{K}$ et $\mathcal{V}^k \subsetneqq \mathcal{V}^{k-1}$, c'est-à-dire $\dim \mathcal{V}^k < \dim \mathcal{V}^{k-1}$. on a donc

  $$\dim \mathcal{V}^q < \dim \mathcal{V}^{q-1} < \ldots < \dim \mathcal{V}^2 < \dim \mathcal{V}^1 < \dim \mathcal{V}^0 = \dim \mathcal{K} = q$$

  On en déduit que pour un certain rang k, on a $\mathcal{V}^k =$ et pour tous les rangs k' supérieurs à k, on a $\mathcal{V}^{k'} =$.
* 2^{me} cas
  $\exists k \leq \dim \mathcal{K}$ tel que $\mathcal{V}^k = \mathcal{V}^{k-1}$; et donc tous les suivants $(\mathcal{V}^{k+1}, \mathcal{V}^{k+2}, \ldots)$ sont égaux à $\mathcal{V}^{k-1}$.

C'est pourquoi, pour un certain $k \leq \dim \mathcal{K}$

$$\mathcal{V}^\mu = \mathcal{V}^k \qquad \text{avec } \mu \geq k$$

Maintenant, soit $\mathcal{V} \in \Im(\mathcal{K})$ alors

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{K} \textit{ et } \mathcal{V} \subset A^{-1}(\mathcal{V} + \mathcal{B}. \tag{3.13}$$

On a $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^0 = \mathcal{K}$ vraie et si supposons $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^{\mu-1}$ vraie, alors

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V} + \mathcal{B})$$
$$\mathcal{V} \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{\mu-1} + \mathcal{B})$$

Or $\mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{\mu-1} + \mathcal{B}) = \mathcal{V}^\mu$

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^\mu$$

Par récurrence, quelque soit μ, on a $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^\mu$; en particulier $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^k$.
Remarquons que $\mathcal{V}^k \in \Im(\mathcal{K})$:
$\mathcal{V}^k = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{k-1} + \mathcal{B})$
or, par définition de k, $\mathcal{V}^k = \mathcal{V}^{k-1}$
donc $\mathcal{V}^k = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^k + \mathcal{B})$, c'est-à-dire

$$\mathcal{V}^k \subset \mathcal{K}$$
$$\mathcal{V}^k \subset A^{-1}(\mathcal{V}^k + \mathcal{B})$$

Or $\mathcal{V}$ est arbitrairement choisie dans $\Im(\mathcal{K})$ donc tous les sous espaces $\mathcal{V}$ de $\Im(\mathcal{K})$ sont inclus dans $\mathcal{V}^k$.
Donc $\mathcal{V}^k = sup\Im(\mathcal{K})$.

Les théorèmes 14 et 15 permettent de construire une solution au problème de rejet de perturbation. Le principe de la solution peut être résumer comme suit :
Si $ImS \subset \mathcal{V}$ alors la contribution de la perturbation $Sq(t)$ sur $\dot{x}(t)$ est dans $\mathcal{V}$. La perturbation est inobservable sur z uniquement lorsque $\mathcal{V} \subset KerD$, donc est suffisant d'utiliser l'espace $\mathcal{V}^*$. En effet, avec un contrôle de la forme $u = Fx + Gv$, ou $F \in \mathbf{F}(\mathcal{V}^*)$ et $v(.)$ est la nouvelle entrée, l'état du système $\dot{x}$ n'appartiendra pas, en général, à $\mathcal{V}^*$; Cependant, la linéarité assure que la perturbation $q(.)$ sur $x(.)$ est dans $\mathcal{V}^*$, ce qui est la seul condition pour que le rejet de perturbation soit réalisable.

Remarque 13 *Le théorème 15 n'est pas utilisable directement car permet pas l'obtention immédiate de la solution $\mathcal{V}^*$ par un calcul matriciel . En effet, dans la pratique, on utilise les relations (3.2), (3.3) et (3.4) dans rappels d'algèbre linéaire sur les matrices et leurs matrices orthogonales associées. Ainsi, la construction de la solution est une résolution successive d'équations matricielles du type $Ax = 0$ et $xA = 0$.*

Ecrivons l'algorithme du théorème 15 sous forme matriciel. D'après le résultat obtenus dans **le paragraphe sur les rappels d'algèbre** Nous utiliserons les définitions suivantes :
Si M, X, Y sont des matrices, avec M donné, *la solution maximale* de l'équation $MX = 0$ (resp. $YM = 0$) signifie une solution X (resp. Y) de rang maximum, ayant les colonnes (resp. les lignes)non nulles linéairement indépendantes.
D'après le théorème 15, avec $\mathcal{K} = KerD$, soit $\mathcal{V}^\mu = ImV_\mu$, avec V_0 une solution maximale de $DV_0 = 0$.
Soit W_μ la solution maximale de

$$W_\mu \begin{pmatrix} B, & V_{\mu-1} \end{pmatrix} = 0, \text{ avec } \mu = 1, 2, \ldots ;$$

et on obtient V_μ comme étant la solution maximale de

$$\begin{pmatrix} D \\ W_\mu A \end{pmatrix} V_\mu = 0, \text{ avec } \mu = 1, 2, \ldots ;$$

A chaque étape, on a $\mathcal{V}^\mu \subset \mathcal{V}^{\mu-1}$,c'est à dire,

$$Rank[V_{\mu-1}, V_\mu] = RankV_{\mu-1} ;$$

et la condition d'arrêt est $\mathcal{V}^\mu = \mathcal{V}^{\mu-1}$, c'est à dire,

$$RankV_\mu = RankV_{\mu-1}.$$

Bibliographie

[Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. (1992). *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons.

[Birkhoff, 1940] Birkhoff, G. (1940). Lattice theory. Technical Report XXV, American Mathematical Society Colloquim Publications, Providence, Rhode Island.

[Blyth and Janowitz, 1972] Blyth, T. and Janowitz, M. (1972). *Residuation Theory*. Pergamon press.

[Cohen, 1995] Cohen, G. (1995). *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*. Polycopié de cours donné à l'INRIA.

[Cohen, 1998a] Cohen, G. (1998a). Residuation and applications. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, école de printemps d'informatique théorique*.

[Cohen, 1998b] Cohen, G. (1998b). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, école de printemps d'informatique théorique*.

[Cohen et al., 1998] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1998). Max-plus algebra and system theory : Where we are and where to go now. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes.

[Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1) :39–58.

[Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioides*. Thèse, LISA - Université d'Angers.

[David and Alla, 1989] David, R. and Alla, H. (1989). *Du grafcet aux réseaux de Petri*. Hermès.

[Gaubert, 1992a] Gaubert, S. (1992a). *Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets*. Polycopié de cours donné à l'ENSTA.

[Gaubert, 1992b] Gaubert, S. (1992b). *Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes*. Thèse, École des Mines de Paris.

[Menguy et al., 2000] Menguy, E., Boimond, J.-L., Hardouin, L., and Ferrier, J.-L. (2000). Just-in-time Control of Linear Systems in Dioid : Update of Reference Input, Presence of Uncontrollable Input. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(11) :2155–2158.

[Wonham, 1979] Wonham, W. (1979). *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach*. Springer Verlag.