Étude bibliographique

Modélisation et Commande de graphes d'événements temporisés dans les dioïdes

Rejet de perturbation en automatique classique

LISA, Université d'Angers

Plan de l'exposé:

- 1. Théorie des Dioïdes et Résiduation.
- 2. Modélisation des Graphes d'événements temporisés (GET) dans les dioïdes.
- 3. Commande de GET en boucle ouverte.
- 4. Commande de GET en boucle fermée : synthèse de correcteurs de type retour de sortie.
- 5. Problème du rejet de perturbation dans les dioïdes.
- 6. Le rejet de perturbation en automatique classique.

1. Théorie des dioïdes

1.1 Dioïdes

Un dioïde est un demi-anneau idempotent noté $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$.

- $\oplus$: commutatif, associatif, idempotent $(\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a)$ et élément neutre ε.
- $\otimes$: distributif par rapport à la somme, associatif et élément neutre e.

On définit la relation d'ordre $\succeq$ de la manière suivante

$$a \succeq b \iff a = a \oplus b.$$

Définition : Un dioïde est dit complet si la somme est définie pour tout sous-ensemble fini ou infini de $\mathcal{D}$ et si la multiplication distribue sur les sommes infinies.

Si $\mathcal{D}$ est complet, alors on peut munir $\mathcal{D}$ d'un opérateur $\wedge$ tel que :

$$a \succeq b \iff a = a \oplus b \iff b = a \wedge b.$$

Exemple : L'ensemble $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni du $\max$ comme opérateur $\oplus$, et de la somme classique $+$ comme opérateur $\otimes$, est un dioïde complet noté $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, avec $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$ et $\mathsf{T} = +\infty$. L'opérateur $\wedge$ correspond alors au $\min$.

1.2. Résolution de l'équation implicite $x = ax \oplus b$.

Theorème Sur un dioïde complet $\mathcal{D}$, la plus petite solution de l'équation $x = ax \oplus b$ est $x = a^*b$ avec

$$a^* = \bigoplus_{i \geq 0} a^i = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \ldots$$

où l'opérateur $*$ est appelé étoile de Kleene.

1.3. Théorie de la Résiduation

- Résolution d'inéquations du type

$$f(x) \preceq b \text{ ou } f(x) \succeq b$$

- Recherche de solutions optimales.

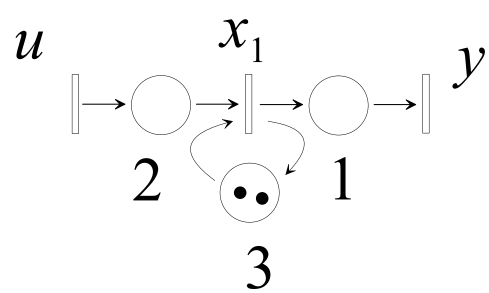
Définition Une application $f : (E, \preceq) \to (F, \preceq)$ est dite résiduable si l'inéquation $f(x) \preceq b$ admet une plus grande solution (dans E) pour tout b de F.

Si f est résiduable, l'application

$$f^{\sharp} : F \to E, x \mapsto \bigoplus \{y | f(y) \preceq x\}$$

est appelée application résiduée de f.

2. Modélisation de GET :



A chaque transition on associe une variable (u_i, x_i, y_i)

$$x_1(k) = \max(2 + u(k), 3 + x_1(k-2))$$
$$y(k) = 1 + x_1(k)$$

On remplace

$$\begin{array}{ccc} \max & \mapsto & \oplus \\ + & \mapsto & \otimes \end{array}$$

Système d'équations linéaires dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$

$$x_1(k) = 2 \otimes u(k) \oplus 3 \otimes x_1(k-2)$$
$$y(k) = 1 \otimes x_1(k)$$

Modélisation de GET (suite):

Transformée en γ

$$x_i(\gamma) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \gamma^n x_i(n) \qquad \text{où} \qquad x_i(k-1) = \gamma x_i(k)$$

On a dans ce dioïde de transformée noté $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$

$$x_1(\gamma) = 2u(\gamma) \oplus 3\gamma^2 x_1(\gamma)$$

$$y(\gamma) = 1x_1(\gamma)$$

Et plus généralement

$$X(\gamma) = AX(\gamma) \oplus BU(\gamma)$$

$$Y(\gamma) = CX(\gamma)$$

En résolvant

$$X(\gamma) = A^* BU(\gamma)$$

$$Y(\gamma) = CA^* BU(\gamma)$$

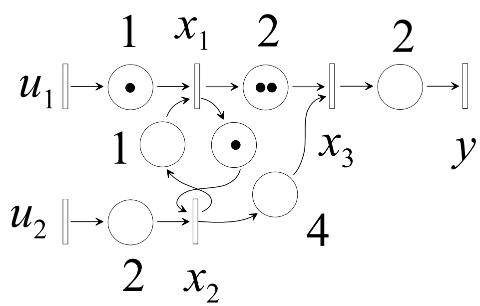
On en déduit la fonction de transfert

$$H(\gamma) = CA^* B$$

3. Commande en boucle ouverte d'un GET

3.1 Commande optimale en juste à temps

(*Cohen, Moller, Quadrat, Viot, Algebraic Tools for Performance Evaluation of Discrete Event Systems, IEEE Proc., 77(1):39-58, 1989*)



$$\Rightarrow \begin{array}{ll} X & = AX \oplus BU \\ Y & = CX \end{array} \quad \Rightarrow Y = CA^*BU = HU$$

On a une consigne Z, un transfert H

On veut la plus grande commande U telle que $Y = HU \preceq Z$

Question : L'application $L_H : U \mapsto H \otimes U$ est-elle résiduable ?

Oui : Sa résiduée $L_H^\sharp : Z \mapsto \bigoplus_{\{U|L_H(U)\preceq Z\}} U = H \backslash\!\!\!\circ Z$

On a donc la commande optimale en juste-à-temps : $U_{opt} = H \backslash\!\!\!\circ Z$

3.2 Commande optimale sous contrainte

(*Menguy, E., Boimond,J.-L., Hardouin, L., and Ferrier, J.-L. (2000). Just-in-time Control of Linear Systems in Dioid, IEEE, 45(11):2155-2158.*)

On a une consigne Z, un transfert H

On a certaines entrées non modifiables

Décomposition $U = (U_c|U_{nc})^T$ et $H = (H_c|H_{nc})$

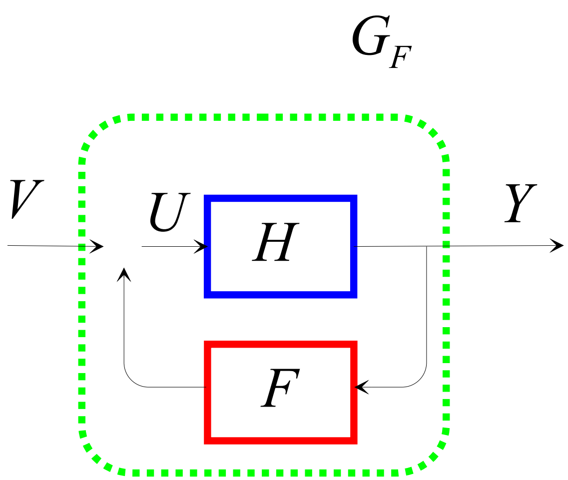
On veut la plus grande commande U telle que $Y = HU \preceq Z$ et $U_{nc} = V_{nc}$

$$U = \begin{pmatrix} H_c \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} (Z \oplus H_{nc}U_{nc}) \\ U_{nc} \end{pmatrix}$$

4. Synthèse de correcteurs de type retour de sortie.

(*Cottenceau, Hardouin, Boimond, "Synthesis of Greatest Linear Feedback for TEG in Dioid", IEEE TAC, vol. 44, no. 6, pp. 1258-1262, June 1999*)

- Un système H, controlé par un correcteur F, $i.e.$, $U = V \oplus FY$ et $Y = HU$
- Soit le système controlé : $G_F = H(FH)^*$
- Modèle de référence : G_{ref}

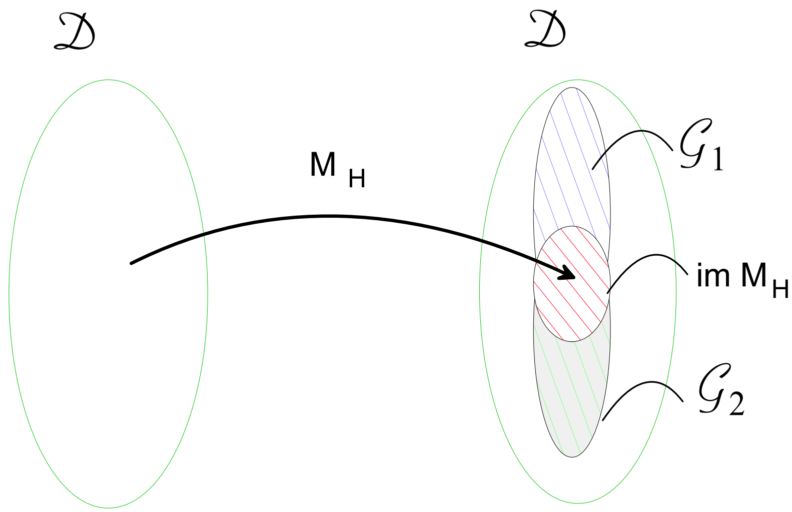


Trouver le plus grand feedback F rationnel tel que

$$H(FH)^* \preceq G_{ref}$$

- Question: $\mathsf{M}_H : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}, X \mapsto H(XH)^*$ est-elle résiduable ?
- Réponse : NON.

4.1.1. Restrictions résiduables de M_H.



Soit les ensembles $\mathcal{G}_1$ et $\mathcal{G}_2$ définis par

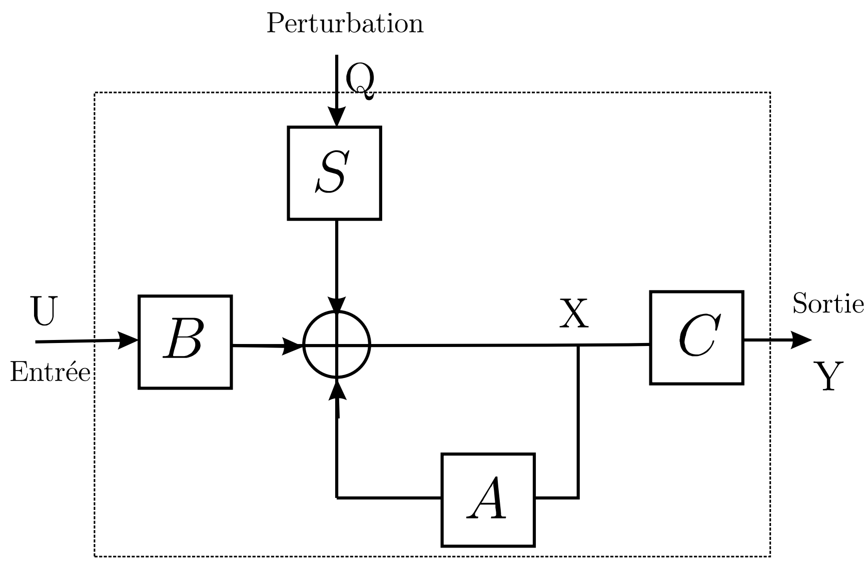
$$\begin{array}{l} \mathcal{G}_1 = \{G \in \mathcal{D} | \exists A \in \mathcal{D}, G = A^* H\} \\ \mathcal{G}_2 = \{G \in \mathcal{D} | \exists B \in \mathcal{D}, G = H B^*\} \end{array} .$$

On a $\mathrm{Im}\mathsf{M}_H \subseteq \mathcal{G}_1$ et $\mathrm{Im}\mathsf{M}_H \subseteq \mathcal{G}_2$.

Proposition Les restrictions ${}_{\mathcal{G}_1|}\mathsf{M}_H$ et ${}_{\mathcal{G}_2|}\mathsf{M}_H$ sont résiduables. Leurs résiduées respectives sont

$$({}_{\mathcal{G}_1|}\mathsf{M}_H)^\sharp : \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_1 & \mapsto & \mathcal{D} \\ x & \mapsto & H \backslash\!\!\!\circ\, x \circ\!\!\!/\, H \end{array} \qquad ({}_{\mathcal{G}_2|}\mathsf{M}_H)^\sharp : \begin{array}{ccc} \mathcal{G}_2 & \mapsto & \mathcal{D} \\ x & \mapsto & H \backslash\!\!\!\circ\, x \circ\!\!\!/\, H \end{array}$$

5. Problème du rejet de perturbation dans les dioïdes.



$$\begin{array}{rcl} X & = & AX \oplus BU \oplus SQ \\ Y & = & CX \end{array} \quad \Rightarrow Y = CA^*BU \oplus CA^*SQ$$

Établir une commande U qui tient compte de cette perturbation Q.

En automatique classique ?

6. Le rejet de perturbation en Automatique Classique.

On a le système linéaire suivant

$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Sq(t)$ où $q(t)$ est une perturbation

$y(t) = Dx(t)$

Trouver un retour d'état $u = Fx$ tel que la sortie du système bouclé soit indépendante de la perturbation

On sait que $y(t) = De^{(A+BF)t}x_0 + D\int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)}Sq(\tau)d\tau$

$$\text{donc} \quad D\int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)}Sq(\tau)d\tau = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$< A + BF|\mathrm{Im}S > \subset KerD$$

6.1. Sous espace (A, B)-invariant.

Définition Soient les applications linéaires $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ et $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$. Un sous espace $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ est dit (A, B)-invariant, si il existe une application $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ telle que

$$(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$$

Notation Soit $\mathcal{V}^*$, le plus grand sous espace (A, B)-invariant.

6.2. Principe du rejet de perturbation.

$\longrightarrow$ Si $q(t) = 0$ $\quad \dot{x} = Ax + Bu$ et $u = Fx$

$$y = Dx$$

Soit $x_0 \in \mathcal{V}^*$ alors

$$x(t) = e^{(A+BF)t}x_0 \in \mathcal{V}^*$$

- Pour tout $x_0 \in \mathcal{V}^*$, x peut être maintenu dans $\mathcal{V}^*$ par un choix convenable de $u = Fx$.

$\longrightarrow$ Soit $q(t) \neq 0$ $\quad \dot{x} = Ax + Bu + Sq \quad$ et $u = Fx$

$$y = Dx$$

Si $\mathsf{Im}S \subset \mathcal{V}^*$ alors $Sq(.) \in \mathcal{V}^*$, ainsi $x(t) \in \mathcal{V}^*$

q est inobservable sur la sortie y si $\mathcal{V}^* \subset KerD$

- Le rejet de perturbation est possible si et seulement si le plus grand sous espace (A, B)-invariant,$\mathcal{V}^*$, est inclus dans $KerD$ et s'il contient $\mathsf{Im}S$.

$$\mathsf{Im}S \subset \mathcal{V}^* \subset KerD$$

Résumé

- En automatique le rejet de perturbation consiste a trouver U maintenant l'état X dans le noyau de D.

OBJECTIFS

- Transposer le problème du rejet de perturbation pour les Graphes d'événements Temporisés.

  $\longrightarrow$ Compte tenu de la monotonie des trajectoires, une annulation de la sortie ne semble pas être la bonne définition.

  $\longrightarrow$ Néanmoins la notion de noyau est définie dans ces structures algébriques.

- Modélisation de la chaîne de production de l'entreprise Recticel-Bultex.

- Élaborer des lois de commande adaptées pour gérer leur atelier de production.