

(1)

Question : Résoudre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -y(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + t \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

* Sous Forme Vectorielle.

$$(*) \quad \underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}}_{\dot{X}(t)} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}_{X(t)} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}}_{B(t)} \Leftrightarrow \dot{X}(t) = AX(t) + B(t)$$

il s'agit d'une équation différentielle avec second membre.

 $\Rightarrow$ solution de la forme $X(t) = X_{\text{homogène}}(t) + X_{\text{particulier}}(t)$.METHODE 1

① L'objectif est de résoudre l'équation différentielle (*) en base propre pour cela on diagonalise A.

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^2 + 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = i} \text{ et } \boxed{\lambda_2 = -i}$$

Vecteur propre associé à λ_1 $\Delta u_1 \in \mathbb{C}^2$

$$A u_1 = \lambda_1 u_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ix \\ iy \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = ix \\ x = iy \end{cases}$$

on peut choisir $\boxed{u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}}$

Vecteur propre associé à λ_2

$$A u_2 = \lambda_2 u_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -ix \\ -iy \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -y = -ix \\ x = -iy \end{cases}$$

on peut choisir $\boxed{u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}}$

②

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Matrice de passage } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{Matrice diagonale } D = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \\ \text{Matrice de passage inverse } P^{-1} = \frac{1}{\det P} {}^t \text{con} P = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \end{cases}$$

t.q. $A = P D P^{-1}$.

L'équation diff (*) devient donc.

$$\dot{X}(t) = A X(t) + B(t)$$

$$P^{-1} \times \left(\right.$$

$$P^{-1} \dot{X}(t) = P^{-1} P D P^{-1} X(t) + P^{-1} B(t)$$

changeable

$$\begin{cases} Y = P^{-1} X \\ X = P Y \end{cases}$$

$$\boxed{Y'(t) = D Y(t) + P^{-1} B(t)} \quad (* \text{ propre})$$

↳ c'est une équation diff avec second membre

② La solution de (* propre) est

$$\underline{Y(t) = Y_{\text{homog}}(t) + Y_p(t)}$$

②.1 Calcul de $Y_{\text{hom}}(t)$.

$$Y_{\text{hom}} \text{ est solution de } \underline{Y'_{\text{hom}}(t) = D Y_{\text{hom}}(t)}$$

$$\Rightarrow Y_{\text{hom}}(t) = \exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

↳ constantes

$$Y_{\text{hom}}(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

②.2 Recherche d'une solution particulière de (* propre) via méthode de variation de la constante.

on cherche $Y_p(t)$ de la forme

$$\boxed{Y_p(t) = \exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}}$$

↳ les constantes ne sont plus des constantes !

$$\dot{Y}_p(t) = D Y_p(t) + P^{-1} B(t)$$

$$\text{or } \begin{cases} Y_p(t) = \exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \dot{Y}_p(t) = D \exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + \exp(tD) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} \end{cases}$$

paranthèse

Vérifions ça. $Y_p(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} \alpha(t) \\ e^{-it} \beta(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \dot{Y}_p(t) = \begin{pmatrix} ie^{it} \alpha(t) + e^{it} \dot{\alpha}(t) \\ -ie^{-it} \beta(t) + e^{-it} \dot{\beta}(t) \end{pmatrix}$$

maintenant calculons

$$\begin{aligned} D \exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + \exp(tD) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} ie^{it} & 0 \\ 0 & -ie^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\alpha} e^{it} \\ \dot{\beta} e^{-it} \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} ie^{it} \alpha(t) + \dot{\alpha} e^{it} \\ -ie^{-it} \beta(t) + \dot{\beta} e^{-it} \end{pmatrix} = \dot{Y}_p(t) \end{aligned}$$

De manière générale on a.

$$\text{Soit } W(t) = \exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ s(t) \end{pmatrix}$$

$$\dot{W}(t) = D \exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ s(t) \end{pmatrix} + \exp(tD) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \\ \dot{s}(t) \end{pmatrix}$$

fin paranthèse.

$$\Leftrightarrow \overbrace{D \exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}}^{\dot{Y}_p(t)} + \exp(tD) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = D \overbrace{\exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}}^{Y_p(t)} + P^{-1} B(t)$$

$$\Leftrightarrow \exp(tD) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = P^{-1} B(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha} e^{it} \\ \dot{\beta} e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha} e^{it} \\ \dot{\beta} e^{-it} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

On a donc $\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = \frac{1}{2}it e^{-it} \\ \dot{\beta}(t) = -\frac{1}{2}it e^{it} \end{cases}$

(4)

↳ on résoud pour trouver $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ ie on cherche des primitives de

$$\begin{cases} \alpha(t) = \int_0^t \frac{1}{2}it e^{-it} dt = \frac{1}{2}i \int_0^t t e^{-it} dt \quad I_A \\ \beta(t) = \int_0^t -\frac{1}{2}it e^{it} dt = -\frac{1}{2}i \int_0^t t e^{it} dt \quad I_B \end{cases}$$

on intègre par Partie

$$\begin{aligned} I_A = \int_0^t t e^{-it} dt &= \underbrace{t}_{u'} \underbrace{\frac{1}{-i}}_{v} e^{-it} - \int_0^t \underbrace{1}_{u'} \underbrace{e^{-it}}_{v} dt \\ &= t i e^{-it} - i \int_0^t e^{-it} dt \\ &= it e^{-it} - i \frac{1}{-i} e^{-it} \\ &= it e^{-it} + e^{-it} \end{aligned}$$

$$I_B = \int_0^t t e^{it} dt = -t i e^{it} + e^{it}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha(t) = \frac{1}{2}i (it e^{-it} + e^{-it}) = -\frac{1}{2}t e^{-it} + \frac{1}{2}i e^{-it} \\ \beta(t) = -\frac{1}{2}i (-it e^{it} + e^{it}) = -\frac{1}{2}t e^{it} - \frac{1}{2}i e^{it} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y_p(t) = \exp(tD) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t e^{-it} + \frac{1}{2}i e^{-it} \\ -\frac{1}{2}t e^{it} - \frac{1}{2}i e^{it} \end{pmatrix}$$

$$Y_p(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow Y(t) = Y_{\text{hom}}(t) + Y_p(t) \quad \text{les constantes}$$

$$= \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}i \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}i \end{pmatrix}$$

$$Y(H) = \begin{pmatrix} \alpha e^{it} + \frac{1}{2}(-t+i) \\ \beta e^{-it} - \frac{1}{2}(t+i) \end{pmatrix}$$

solution de l'éq. diff (* pape) ⑤

③ Solution dans la base initiale

$$X(H) = P Y(H).$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha e^{it} + \frac{1}{2}(-t+i) \\ \beta e^{-it} - \frac{1}{2}(t+i) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha e^{it} + \frac{1}{2}(-t+i) + \beta e^{-it} - \frac{1}{2}(t+i) \\ -i\alpha e^{it} - \frac{i}{2}(-t+i) + i\beta e^{-it} - \frac{i}{2}(t+i) \end{pmatrix}$$

$$X(H) = \begin{pmatrix} \alpha e^{it} + \beta e^{-it} - t \\ -i\alpha e^{it} + i\beta e^{-it} + 1 \end{pmatrix}$$

c'est l'ensemble des solutions complexes de (*)

$$\triangle \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Prendre les conditions initiales

$$\begin{pmatrix} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{pmatrix} \text{ pour fixer les constantes d'intégration}$$

$$\text{on a } X(0) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta \\ -i\alpha + i\beta + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\beta \\ -i\alpha - i\alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta = i/2 \\ \alpha = -i/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow X(H) = \begin{pmatrix} -\frac{i}{2}e^{it} + \frac{i}{2}e^{-it} - t \\ -\frac{1}{2}e^{it} - \frac{1}{2}e^{-it} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) & -t \\ -\cos(t) & +1 \end{pmatrix}$$

prendre les conditions initiales

$$x(0) = 0$$

$$y(0) = 0$$

on a. $x(t) =$

METHODE 2 (bcp plus efficace). (7)

$$\text{on a } \dot{X}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_A X(t) + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{B(t)}.$$

La solution est de la forme.

$$X(t) = X_{\text{hom}}(t) + X_p(t).$$

① $X_{\text{hom}}(t)$ est solution de $\dot{X}_{\text{hom}}(t) = AX(t)$.

c'est à dire $X_{\text{hom}}(t) = \exp(At) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$

$$X_{\text{hom}}(t) = \exp(t P D P^{-1}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

$$= P \exp(t D) P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

$$X_{\text{hom}}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} e^{it} & e^{-it} \\ -ie^{it} & -ie^{-it} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2}i \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} & \frac{ie^{it} - ie^{-it}}{2} \\ \frac{-ie^{it} + ie^{-it}}{2} & \frac{-ie^{it} - ie^{-it}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$X_{\text{hom}}(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

② $X_p(t)$ est une solution particulière de $\dot{X}(t) = AX(t) + B(t)$ ⑧

de la forme $X_p(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$
 $\uparrow$ Matrice de variation des constantes

* on remplace $X_p(t)$ dans (*).

on remarquant que $\dot{X}_p(t) = A \exp(tA) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + \exp(tA) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ on a $A \exp(tA) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + \exp(tA) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = A \exp(tA) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + B(t)$.

$$\Leftrightarrow \exp(tA) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = B(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \exp(tA) B(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\alpha}(t) = t \sin t \\ \dot{\beta}(t) = t \cos t \end{cases}$$

$\rightarrow$ on trouve $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ en intégrant par parties.

$$\alpha(t) = \int u v' = -t \cos t + \int \cos t dt$$

$$= -t \cos t + \sin t$$

$$\beta(t) = \int t \cos t dt = t \sin t + \cos t$$

$$\Rightarrow X_p(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} -t \cos t + \sin t \\ t \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

(9)

Conclusion la solution de (*) est.

$$X(t) = X_{\text{part}}(t) + X_p(t).$$

$$= \exp(tA) \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\text{constante}} + \exp(tA) \begin{pmatrix} -t \cos t + \sin t \\ t \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t \cos t + \sin t \\ t \sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha \cos t - \beta \sin t \\ \alpha \sin t + \beta \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -t \cos^2 t + \cos t \sin t - t \sin^2 t - \sin t \cos t \\ -t \sin t \cos t + \sin^2 t + t \sin t \cos t + \cos^2 t \end{pmatrix}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} \alpha \cos t - \beta \sin t - t \\ \alpha \sin t + \beta \cos t + 1 \end{pmatrix}.$$

Prendons les conditions initiales

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ -\beta + 1 = 0 \end{cases} = \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) - t \\ -\cos(t) + 1 \end{pmatrix}}$$

Je conseille la METHODE 2
qui est + rapide.

10

Résumé Méthode 2

$$\dot{X}(t) = AX(t) + B(t) \quad (*)$$

Solution $X(t) = X_{\text{homo}}(t) + X_p(t)$.

① On a $X_{\text{homo}}(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

/ on diagonalise A par le calcul de $\exp(tA)$.

$$X_{\text{homo}}(t) = \exp(tPDP^{-1}) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

par propriété de l'exponentielle.

$$X_{\text{homo}}(t) = P \exp(tD) P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

② On cherche $X_p(t)$ de la forme

$$X_p(t) = \exp(tA) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

Sachant que $\dot{X}_p(t) = A \exp(tA) \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \end{pmatrix} + \exp(tA) \begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix}$ (variation de la constante)

on obtient en remplaçant dans (*):

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha}(t) \\ \dot{\beta}(t) \end{pmatrix} = \exp(-tA) B(t)$$

on trouve $\alpha(t)$ et $\beta(t)$ par intégration.

③ $X(t) = X_{\text{homo}}(t) + X_p(t)$.

Exo d'entraînement

Résoudre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 4x(t) + y(t) + g(t) \\ \dot{y}(t) = x(t) + 4y(t) + g(t) \\ \dot{g}(t) = x(t) + y(t) + 4g(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$