



ISTIA - Université d'angers

Licence Professionnelle

Automatisation et Informatisation pour
la traçabilité de systèmes de production

Sébastien LAGRANGE

le 17 octobre 2003

Examen de Techniques Mathématiques - Durée 2h30

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les différentes questions peuvent être traitées, en générale, de manière indépendante, dans chacun des exercices.

L'usage des instruments de calcul n'est pas autorisé.

Le barème est donné à titre indicatif, il pourra être ajusté lors de la correction.

Exercice 1 (1,5 points)

Tracer, dans un repère orthogonal, une courbe représentative d'une :

- relation.
- application injective, puis non injective.
- application surjective, puis non surjective.
- application bijective.

Pour chacun de ces 6 cas, expliquer brièvement votre réponse.

Exercice 2 (1 point)

Expliquer pourquoi une matrice qui n'est pas carrée ne peut être élevée à la puissance 2.

Exercice 3 (2,5 points)

1) Considérons l'équation différentielle du premier ordre avec second membre suivante:

$$y' - ky = x \quad (*)$$

où y est fonction de la variable x et $k \in \mathbb{R}^*$.

- a) Résoudre l'équation homogène associé à (*).
- b) Rechercher une solution particulière de la forme $y_{sp}(x) = ax + b$.
- c) En déduire la solution de (*).
- 2) Quelles sont les solutions de cette équation différentielle pour $k = 1$.
- 3) Considérons maintenant le cas où $k = 0$. Quelles sont les solutions de (*).

Exercice 4 (3,5 points)

- 1) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant :

$$Z = \frac{1 - i}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - i}.$$

2) Écrire Z sous forme exponentielle et trigonométrique (indication : Poser $Z = \frac{z_1}{z_2}$).

- 3) En déduire la valeur de $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, et de $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 5 (2 points)

- 1) Rappeler la table de vérité de l'assertion $p \Rightarrow q$.
- 2) Établir la table de vérité des l'assertions suivantes :
 - a) (non p et q) ou (non p et non q) ou (p et q)
 - b) $((p \Rightarrow q) \text{ et } (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
- 3) A quelles assertions plus simples ces assertions sont-elles équivalentes ?

Exercice 6 (3 points)

Une entreprise fabrique des appareils de trois types différents : L, C , et V . Pour un appareil de type L , on a besoin de 10 kg d'acier, 2 kg de peinture et 10 heures de travail.

Pour un appareil du type C , il faut 4 kg d'acier, 1 kg de peinture et 6 heures de travail.

Pour un appareil de type V , il faut 10 kg d'acier, 1 kg de peinture et 12 heures de travail.

On appelle respectivement x, y, z les quantités d'appareils de type L, C et V fabriqués, et a, p, t les quantités d'acier (en kg), de peinture (en kg), et de travail (en heures) nécessaire pour leur fabrication.

1) Exprimer a, p et t en fonction de x, y , et z .

2) On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ p \\ t \end{pmatrix}$.

Déterminer une expression matricielle telle que connaissant X , on en déduit Y . C'est-à-dire déterminer la matrice M telle que :

$$Y = MX.$$

3) On donne la matrice :

$$N = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 \\ -7 & 10 & 5 \\ 1 & -10 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le produit NM .

b) En déduire une expression matricielle donnant le vecteur X connaissant Y .

4) Calculer les quantités d'appareils de chaque type L, C et V fabriqués en un mois sachant que 40kg d'acier, 6kg de peinture et 44 heures de travail ont été nécessaires.

Exercice 7 (3 points)

Dans cet exercice, nous allons calculer l'intégrale suivante :

$$\int_{-4}^{-3} \frac{x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 23x + 20}{x^3 + 4x^2 + 4x}.$$

1) Quel est le domaine de définition de la fraction rationnelle F :

$$F = \frac{x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 23x + 20}{x^3 + 4x^2 + 4x}.$$

2) Effectuer une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle F

- 3) Calculer les primitives de la fraction rationnelle F .
 4) En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-4}^{-3} \frac{x^4 + 4x^3 + 9x^2 + 23x + 20}{x^3 + 4x^2 + 4x}.$$

Exercice 8 (4 points)

Dans cet exercice, nous allons résoudre le système d'équations différentielles suivant, où y_1 et y_2 sont deux fonctions de la variable x :

$$(*) \begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2, & (1) \\ y_2' = -2y_1 - 2y_2. & (2) \end{cases}$$

Afin de résoudre ce système d'équations différentielles, nous allons lui associer une équation différentielle du second ordre uniquement en y_1 .

Méthode pour obtenir l'équation différentielle du second ordre en y_1 associé à (*):

- Dériver l'équation différentielle (1).
- En utilisant (2), remplacer le terme faisant intervenir la dérivé de y_2 .
- En utilisant (1), éliminer les termes faisant intervenir y_2 .

a) Montrer que l'on peut associer au système (*), l'équation différentielle du second ordre en y_1 suivante :

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0.$$

b) Déterminer y_1 en résolvant l'équation différentielle du second ordre de la question a).

c) En déduire la solution y_2 du système (*) en utilisant l'équation la plus approprié: (1) ou (2).

d) Pour fixer les constantes d'intégration, on a les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} y_1(0) = -2, \\ y_2(0) = 1. \end{cases}$$

Montrer que l'on peut écrire une équation matricielle de la forme $Ax = b$ pour obtenir les constantes d'intégration où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

avec C_1 et C_2 sont les constantes à déterminer.

e) Donner, si elle existe, la matrice inverse A^{-1} .

Rappel : L'inverse d'une matrice de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

f) En déduire les constantes C_1 et C_2 .

Puis exprimer la solution du système suivant :

$$\begin{cases} y_1' &= 3y_1 + 2y_2, \\ y_2' &= -2y_1 - 2y_2. \\ y_1(0) &= -2, \\ y_2(0) &= 1. \end{cases}$$