ISTIA - Université d'angers

Licence Professionnelle

Automatisation et Informatisation pour
la traçabilité des systèmes de production

Sébastien LAGRANGE

le 14 octobre 2004

Examen de Techniques Mathématiques

Exercice 1 : Equation différentielle

Résolution de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) + xy^2(x) = 0. \tag{1}$$

1) De quel type est cette équation différentielle ?

Afin de résoudre cette équation, on propose de la diviser par y^2 et d'effectuer un changement de fonction $z(x) = -\frac{1}{y(x)}$ pour se ramener à une équation différentielle de type connu.

2) Effectuer le changement de fonction proposé afin d'obtenir une nouvelle équation différentielle en $z(x)$. De quel type est-elle ?

3) Donner toutes les fonctions $z(x)$ solutions de

$$z'(x) - z(x) = -x.$$

4) En déduire toutes les fonctions $y(x)$ solutions de (1).

5) Utiliser la condition initiale $y(1) = 1$ afin de fixer la constante d'intégration.

Exercice 2 : Calcul matriciel

Une usine fabrique, chaque jour, trois produits de types A, B, C en quantités respectives x_1, x_2, x_3 à partir de pièces de modèles m_1, m_2, m_3.

Le nombre de pièces de modèles m_1, m_2, m_3 nécessaires à la fabrication des produits A, B, C est donné par le tableau suivant :

	m_1	m_2	m_3
A	2	1	1
B	3	4	2
C	5	2	6

Par exemple, le nombre de pièces de modèle m_1 est 2 fois le nombre de produit A, plus 3 fois le nombre de produit B, plus 5 fois le nombre de produit C.

Un "programme de production" journalière s'exprime par un vecteur $X = (x_1, x_2, x_3)$ de $\mathbb{R}^3$. (Par exemple le programme de production (3,5,7) correspond, pour la journée concernée, à une production de 3 produits A, 5 produits B, et 7 produits C).

Pour réaliser un "programme de production" $X = (x_1, x_2, x_3)$ on utilise y_1 pièces de modèle m_1, y_2 pièces de modèle m_2 et y_3 pièces de modèle m_3, ce que l'on représente par le vecteur $Y = (y_1, y_2, y_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

1) Trouver la matrice M $\in \mathcal{M}_{3\times 3}$ telle qu'on ait l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

2) Calculer les nombres de pièces de modèles respectifs m_1, m_2, m_3 dont il faut disposer pour pouvoir fabriquer dans la journée 3 produits A, 4 produits B, et 5 produits C.

3) On donne la matrice

$$M' = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 20 & -8 & -14 \\ -4 & 7 & 1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Calculer le produit $M'M$.

b) En déduire la matrice X en fonction des matrices M' et Y.

4) On dispose un certain jour d'un stock de 31 pièces de modèle m_1, 24 pièces de modèle m_2 et 28 pièces de modèle m_3. Combien de produits A, B, C peut-on fabriquer ce jour-là ?

Exercice 3 : Nombres Complexes

Etude de l'équation suivante :

$$z^2 = 1 + i, \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

1) a) Donner la forme trigonométrique et la forme exponentielle de $1 + i$.
b) En déduire la forme trigonométrique et la forme exponentielle de z.

2) *Recherche de la forme algébrique de z.*
Poser $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
a) A partir de l'équation (2), établir deux équations en x et y, à coefficients dans $\mathbb{R}$.
b) En calculant le module de chacun des deux membres de (2), trouver une troisième équation en x, y.
c) Remarquer qu'une des trois équations obtenues permet de conclure que x et y sont de même signe.
Utiliser les deux autres équations afin de déterminer x et y. *(on se limitera au cas $Re[z] > 0$)*
d) En déduire la forme algébrique de z.

3) Déduire des questions 1) et 2) les valeurs exactes de $cos(\frac{\pi}{8})$ et $sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 4 : Programmation linéaire

Résoudre le problème de programmation linéaire (P) par l'algorithme du simplexe.

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} Max \quad z = -1x_1 + 4x_2 & \\ \text{sous les contraintes :} & \\ & 2x_1 + 4x_2 \leq 12 \\ & 6x_1 + 4x_2 \leq 24 \end{array} \right.$$

Exercice 5 : Polynôme (division euclidienne)

Soit le polynôme $P(x) = x^4 + 2x^3 - 13x^2 + 10x$.

1) Calculer P(0) puis P(1).

2) En déduire la factorisation **complète** du polynôme P(x) dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6 : Logique

1) A quoi les assertions suivantes sont-elles équivalentes ?
a) $(P \Rightarrow R) et R$.
b) $[(P \Rightarrow S) \Rightarrow S]$.

2) Est ce que l'assertion $(P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Leftrightarrow (non\ Q \Leftrightarrow non\ P)$ est exacte ?

Exercice 7 : Question Bonus

Montrer que toutes les fonctions linéaires de $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont bijectives.