

Examen de Techniques Mathématiques

Exercice 1 : Equation différentielle

Dans cet exercice, n désigne un entier strictement supérieur à 1.
On considère l'équation différentielle :

$$y' + ny = x + \frac{1}{n} \quad (1)$$

où y est une fonction de la variable x et y' sa dérivée.

- 1) Déterminer une fonction linéaire y_{sp} solution particulière de (1).
- 2) Résoudre l'équation différentielle :

$$y'_{ssm} + ny_{ssm} = 0.$$

- 3) En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (1).
- 4) Déterminer la solution de (1) qui vérifie

$$y'(0) = 1.$$

- 5) Trouver la valeur de n tel que

$$y(0) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 2 : Calcul matriciel

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 9 & -18 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & -5 & 10 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & a & 1 \\ 3 & -a & 8 \end{pmatrix},$$

où a est un nombre réel quelconque et soit O la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

- 1) Déterminer le nombre réel a pour lequel $M \times A = O$.
- 2) Calculer le produit $A \times M$ pour la valeur de a obtenue.

Exercice 3 : Polynômes

Considérons le polynôme $P(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 + 4x - 8$.

- a) Calculer $P(1)$ et $P(-1)$.
- b) En déduire la **factorisation complète de $P(x)$ dans $\mathbb{C}[x]$** .

Exercice 4 : Nombres Complexes

- 1) Écrire sous forme algébrique le nombre complexe suivant :

$$Z = \frac{1 - i}{-\frac{1}{\sqrt{3}} - i}.$$

- 2) Écrire Z sous forme exponentielle et trigonométrique (Poser $Z = \frac{z_1}{z_2}$).
- 3) En déduire le cosinus et sinus de $\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 5 : Programmation linéaire

Un fleuriste dispose de 50 lys, 80 roses et 80 jonquilles. Il réalise ou bien des bouquets qui lui rapportent 40 euros comprenant 10 lys, 10 roses et 20 jonquilles, ou bien des bouquets dont il tire un bénéfice de 50 euros qui comprennent 10 lys, 20 roses et 10 jonquilles. Comment le fleuriste doit il former les bouquets pour réaliser une recette maximale ?

1) Modéliser ce problème sous forme d'un problème de programmation linéaire.

Indication : poser respectivement, x_1 et x_2 le nombre de bouquet de type 1 et 2.

2) Résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du simplexe.

3) Quel gain maximum peut espérer le fleuriste.

Exercice 6 : Intégration-Dérivation

Attention, on note $\ln^2 x = (\ln x)^2$.

1) Calculer la dérivée de la fonction $g(x) = x(\ln^2 x - 2 \ln x)$.

2) Utiliser ce résultat pour calculer l'intégrale

$$I = \int_1^{e^2} \ln^2 x dx.$$

Indication : Pour deux fonctions $f(x)$ et $h(x)$, on a

$$\int (f(x) - h(x)) dx = \int f(x) dx - \int h(x) dx$$

Exercice 7 : Logique

1) Soient P , Q et R trois assertions. Au moyen de table de vérité, discuter la validé des équivalences suivantes ?

a) $\text{non} [(\text{non } P \text{ ou non } Q)] \Leftrightarrow (P \text{ et } Q)$.

b) $\text{non} [(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow [P \text{ et } [Q \text{ et } (\text{non } R)]]$